ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости

Барсегян В.Р.[1,2,*]

[1]Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения
[2]Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

[*]barseghyan@sci.am

Аннотация. Рассматривается задача оптимального граничного управления для одномерного волнового уравнения, состоящего из двух разнородных участков, описывающего продольные колебания неоднородного стержня или поперечные колебания неоднородной струны с заданными начальным и конечным условиями. При этом полагается, что время прохождения волны по каждому из участков одинаково. Управление осуществляется смещением на двух концах. Критерий качества задан на всем промежутке времени. Предложен конструктивный подход построения оптимального граничного управления, который осуществляеется по следующей схеме. Задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями, далее используется метод разделения переменных и методы теории оптимального управления конечномерными системами. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

Ключевые слова: оптимальное управление колебаниями, продольные колебания кусочно-однородного стержня, поперечные колебания кусочно-однородной струны, оптимальное граничное управление, разделение переменных.

1. Введение

Задачам граничного управления и оптимального управления колебательными процессами посвящены многие исследования, в частности, работы [1-15].

В настоящей работе рассмотрена задача оптимального граничного управления для одномерного волнового уравнения, описывающего не только поперечные колебания неоднородной струны, но и продольные колебания неоднородного стержня. Предполагается, что неоднородный колебательный процесс состоит из двух участков разной плотности и упругости. Предполагается также, что длины однородных участков такие, что время прохождения волны по каждому из однородных участков является одинаковым. Условия, определяющие контактные взаимодействия материалов разнородных тел имеют важные значения. Следовательно, при математическом моделировании учет этих условий сопряжения, стыка (склейки) двух участков с разными физическими характеристиками материалов, должны соответствовать условиям непрерывного истечения возбуждаемых волновых процессов.

Это научное направление пока еще недостаточно исследовано, находится в стадии становления, и по нему имеются лишь некоторые результаты. К исследованию решений задач управления и оптималного управления подобных разнородных распределенных (составных) систем посвящены, в частности, работы [7-15]. В работах [9, 10] (и других работах этого же автора и его учеников) изучены и введены формулы типа Даламбера для задач граничных управлений процессом, описываемым одномерным волновым уравнением, состоящим из двух участков разной плотности и упругости, при условии, что длины этих участков выбраны так, что время прохождения волны по каждому из этих участков является одинаковым. Исследованию краевых задач для уравнения, описывающего процесс продольных колебаний стержня, состоящего из двух или нескольких участков, посвящены, в частности, работы [16-19]. Исследование проводится в терминах обобщенного решения. В работе [20] рассматривается модель колебаний сложносочлененной системы, состоящей из двух кусков струн, соединенных между собой с помощью пружины. Изучена задача выбора граничных режимов, позволяющих перевести систему из начального состояния в заданное финальное состояние. Получен аналог формулы Даламбера.

Цель данной статьи состоит в разработке конструктивного подхода построения функции оптимального граничного управления одномерными колебательными неоднородными процессами смещением на двух концах, переводящего колебания за заданный промежуток времени из заданного начального состояния в заданное конечное состояние с критерием качества, заданным на всем промежутке времени.

2. Постановка задачи

Рассматриваются продольные колебания кусочно-однородного стержня, расположенного вдоль отрезка $-l_1 \le x \le l$ и состоящего из двух участков: участок $-l_1 \le x \le 0$ с линейной плотностью $\rho_1 = \mathrm{const}$, с модулем Юнга $k_1 = \mathrm{const}$ и скоростью прохождения по нему волны, равной $a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}}$, и участка $0 \le x \le l$ с линейной плотностью $\rho_2 = \mathrm{const}$, с модулем Юнга $k_2 = \mathrm{const}$ и скоростью прохождения по нему волны, равной $a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}}$. Как и в работе [9], предположим, что длины l_1 и l указанных участков выбраны так, что время прохождения волны по первому участку совпадает со временем прохождения волны по второму участку, т.е.

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2} \tag{1}$$

Пусть состояние (продольные колебания) стержня (или поперечные колебания струны), т. е. отклонения от состояния равновесия, описывается функцией $\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}$, $-l_1 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, которая подчиняется разрывному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & -l_1 \le x \le 0 \quad 0 \le t \le T \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T \end{cases} \tag{2}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \le x \le l, \tag{3}$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = \mu(t), \qquad Q(l,t) = \nu(t), \ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ стыка участков

$$\begin{gathered} Q(0-0,t) = Q(0+0,t) \\ a_1^2 \rho_1 \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0+0} \end{gathered} \tag{5}$$

и конечными условиями

$$Q(x,T) = \varphi_T(x), \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x), \qquad -l_1 \le x \le l. \tag{6}$$

Здесь функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ - граничные управления. Предполагается, что функция $Q(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, где множество $\Omega_T = \{(x,t)\colon x \in [-l_1, l],\ t \in [0,T]\}$, а функции $\varphi_0(x), \varphi_T(x) \in C^2[-l_1, l]$, $\psi_0(x),\ \psi_T(x) \in C^1[-l_1, l]$.

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования.

$$\begin{gathered} \mu(0) = \varphi_0(-l_1), \quad \dot\mu(0) = \psi_0(-l_1), \quad \nu(0) = \varphi_0(l), \quad \dot\nu(0) = \psi_0(l), \\ \mu(T) = \varphi_T(-l_1), \quad \dot\mu(T) = \psi_T(-l_1), \quad \nu(T) = \varphi_T(l), \quad \dot\nu(T) = \psi_T(l). \end{gathered} \tag{7}$$

Задача оптимального граничного управления. Среди возможных граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, требуется найти оптимальные управления, переводящие колебания, описываемые уравнением (2), из заданного начального состояния (3) в конечное состояние (6) и минимизирующие функционал

$$\int_0^T (\mu^2(t) + \nu^2(t))dt. \tag{8}$$

3. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями

Для решения поставленной задачи перейдем к новой переменной [21]

$$\xi = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1} x, & -l_1 \le x \le 0, \\ x, & 0 \le x \le l, \end{cases}, \tag{9}$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1 \le x \le 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (1), будем иметь, что отрезок $-l_1 \le x \le 0$ переходит к отрезку $-l_1 \le x \le 0$.

Для функции $Q(\xi, t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, & -l \le \xi \le 0, \quad 0 \le t \le T \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, & 0 \le \xi \le l, \quad 0 \le t \le T \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \le \xi \le l, \quad 0 \le t \le T \tag{10}$$

с соответствующими начальными условиями

$$Q(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \le x \le l, \tag{11}$$

с граничными условиями

$$Q(-l, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{12}$$

с конечными условиями

$$Q(\xi, T) = \varphi_T(\xi), \quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \le \xi \le l, \tag{13}$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ стыка участков

$$\begin{gathered} Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \\ a_1 \rho_1 \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0-0} = a_2 \rho_2 \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0+0}. \end{gathered} \tag{14}$$

Отметим, что предположение выполнения условия сопряжения (14) (или (5)) соответствует непрерывному истечению волновых процессов, следовательно, позволяет свести поставленную задачу с неоднородными граничными условиями (12) к задаче с нулевыми граничными условиями.

Решение уравнения (10) построим следующим образом:

$$Q(\xi, t) = X(\xi, t) + Y(\xi, t), \tag{15}$$

где $X(\xi, t)$ - неизвестная функция с однородными граничными условиями

$$X(-l, t) = X(l, t) = 0, \tag{16}$$

требующими определения, а $Y(\xi, t)$ - решение уравнения (10) с неоднородными граничными условиями

$$Y(-l, t) = \mu(t), \quad Y(l, t) = \nu(t).$$

Функция $Y(\xi, t)$ имеет явный вид

$$Y(\xi, t) = \frac{1}{2l}[(l-\xi)\mu(t) + (l+\xi)\nu(t)]. \tag{17}$$

Подставив (15) в (10) и учитывая выражение (17), получим следующее уравнение для определения функции $X(\xi, t)$

$$\frac{\partial^2 X(\xi,t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 X(\xi,t)}{\partial \xi^2} + Z(\xi, t), \quad -l \le \xi \le l, \quad 0 \le t \le T, \tag{18}$$

где

$$Z(\xi, t) = \frac{1}{2l}[(\xi - l)\ddot{\mu}(t) - (\xi + l)\ddot{\nu}(t)]. \tag{19}$$

Функция $X(\xi, t)$ удовлетворяет соответствующему (14) условию сопряжения в точке $\xi = 0$ стыка участков. Из (9) будем иметь

$$\varphi_0(-l_1) = \varphi_0(-l), \quad \varphi_T(-l_1) = \varphi_T(-l), \quad \psi_0(-l_1) = \psi_0(-l), \quad \psi_T(-l_1) = \psi_T(-l). \tag{20}$$

В силу начальных и конечных условий, соответственно (11) и (13), а также с учетом условий (7) и (20), функция $X(\xi, t)$ должна удовлетворять следующим начальным

$$\begin{gathered} X(\xi, 0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}[(l-\xi)\varphi_0(-l) + (l+\xi)\varphi_0(l)], \\ \left.\frac{\partial X(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}[(l-\xi)\psi_0(-l) + (l+\xi)\psi_0(l)], \end{gathered} \tag{21}$$

и конечным условиям

$$\begin{gathered} X(\xi, T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}[(l-\xi)\varphi_T(-l) + (l+\xi)\varphi_T(l)], \\ \left.\frac{\partial X(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}[(l-\xi)\psi_T(-l) + (l+\xi)\psi_T(l)]. \end{gathered} \tag{22}$$

Таким образом, решение задачи оптимального граничного управления колебаниями сведена к задаче оптимального управления движением, описываемым неоднородным уравнением (18) с однородными граничными условиями (16) и минимизируемым функционалом (8), которая формулируется следующим образом: требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$ при $0 \le t \le T$, переводящие колебание, описываемое уравнением (18) с нулевыми граничными условиями (16), из заданного начального состояния (21) в конечное состояние (22) и минимизирующие функционал (8).

4. Сведение решения задачи с нулевыми граничными условиями к проблеме моментов

Учитывая, что граничные условия (16) однородны и выполнены условия согласованности, решение уравнения (18) ищем в виде

$$X(\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}, \quad X_k(t) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} X(\xi,t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}d\xi. \tag{23}$$

Представим функции $Z(\xi,t)$, $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_T(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ в виде рядов Фурье и, подставив их значения вместе с $X(\xi,t)$ в уравнения (18), (19) и в условия (21), (22), получим

$$\ddot{X}_k(t) + \lambda_k^2 X_k(t) = Z_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2\pi k}{l}\right)^2, \tag{24}$$

$$Z_k(t) = \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\ddot{\nu}(t)\left(2(-1)^k - 1\right) - \ddot{\mu}(t)\right], \tag{25}$$

$$\begin{aligned} X_k(0) &= \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_0(-l) - \varphi_0(l)\left(2(-1)^k - 1\right)\right], \\ \dot{X}_k(0) &= \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\psi_0(-l) - \psi_0(l)\left(2(-1)^k - 1\right)\right], \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} X_k(T) &= \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_T(-l) - \varphi_T(l)\left(2(-1)^k - 1\right)\right], \\ \dot{X}_k(T) &= \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\psi_T(-l) - \psi_T(l)\left(2(-1)^k - 1\right)\right], \end{aligned} \tag{27}$$

где через $Z_k(t)$, $\varphi_k^{(0)}$, $\varphi_k^{(T)}$, $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$ обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $Z(\xi,t)$, $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_T(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$.

Общее решение уравнения (24) с начальными условиями (26) имеет вид

$$X_k(t) = X_k(0)\cos\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\dot{X}_k(0)\sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^t Z_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau, \tag{28}$$

Теперь, учитывая конечные (27) условия, используя подходы, приведенные в работах [2-5, 22], из (28) получим, что функции управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\int_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau + E_k\int_0^T \nu(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau = C_{1k}, \tag{29}$$

$$\int_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau + E_k\int_0^T \nu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = C_{2k},$$

где

$$C_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k} + F_{1k} + E_k G_{1k}\right], \quad \tilde{C}_{1k} = \lambda_k X_k(T) - \lambda_k X_k(0)\cos\lambda_k T - \dot{X}_k(0)\sin\lambda_k T,$$

$$C_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k} + F_{2k} + E_k G_{2k}\right], \quad \tilde{C}_{2k} = \dot{X}_k(T) + \lambda_k X_k(0)\sin\lambda_k T - \dot{X}_k(0)\cos\lambda_k T,$$

$$F_{1k} = \lambda_k\varphi_T(-l) - \psi_0(-l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(-l)\cos\lambda_k T, \quad E_k = 1 - 2(-1)^k \tag{30}$$

$$F_{2k} = \psi_T(-l) - \psi_0(-l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(-l)\sin\lambda_k T,$$

$$G_{1k} = \lambda_k\varphi_T(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k T,$$

$$G_{2k} = \psi_T(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_k T,$$

Из соотношения (29) следует, что для каждой гармоники движение (т.е. для каждого $k = 1, 2, \ldots$), описываемое уравнением (24) (или (28)) с условиями (25)-(27) вполне управляемо тогда и только тогда, когда для любых заданных значений постоянных C_{1k}, C_{2k} в (30) можно найти управление $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, удовлетворяющее интегральным соотношениям (29).

Введем следующие обозначения:

$$H_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin\lambda_k(T-\tau) & E_k\sin\lambda_k(T-\tau) \\ \cos\lambda_k(T-\tau) & E_k\cos\lambda_k(T-\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{pmatrix}, \quad U(\tau) = \begin{pmatrix} \mu(\tau) \\ \nu(\tau) \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношение (29) запишется следующим образом

$$\int_0^T H_k(\tau)\, U(\tau)d\tau = C_k, \quad k = 1,\ 2, \ldots. \tag{31}$$

Следовательно, для нахождения функции $U(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получаются бесконечные интегральные соотношения (31).

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению таких граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, которые для каждого $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют интегральным соотношениям (29) (или (31)) и доставляют минимум функционалу (8). Задачу оптимального управления при функционале (8) с интегральными условиями (29) (или (31)) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления.

Так как функционал (8) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, а интегральные соотношения (29) (или (31)), порожденные функциями $\mu(t)$ и $\nu(t)$, линейны, то задачу определения оптимального управления для каждого $k = 1, 2, \ldots$ можно рассматривать как проблему моментов [1, 22, 23]. Следовательно, решение можно построить с помощью алгоритма решения проблемы моментов.

5. Решение задачи

На практике обычно выбираются несколько первых n гармоник колебаний и решается задача синтеза управлений, используя методы теории оптимального управления конечномерыми системами. Поэтому построим решение задачи (8) и (29) при $k = 1, 2, \ldots, n$ с помощью алгоритма решения проблемы моментов. Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \ldots, n$) проблемы моментов (8) и (29), следуя [23], нужно найти величины α_k, β_k, $k = 1, \ldots, n$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^{n}[\alpha_k C_{1k} + \beta_k C_{2k}] = 1, \tag{32}$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2 = \min_{(32)} \int_0^T [h_{1n}^2(\tau) + h_{2n}^2(\tau)]d\tau, \tag{33}$$

где

$$h_{1n}(\tau) = \sum_{k=1}^{n}[\alpha_k \sin\lambda_k(T-\tau) + \beta_k \cos\lambda_k(T-\tau)],$$
$$h_{2n}(\tau) = \sum_{k=1}^{n} E_k[\alpha_k \sin\lambda_k(T-\tau) + \beta_k \cos\lambda_k(T-\tau)]. \tag{34}$$

Для определения величин α_k^0, β_k^0, $k = 1, \ldots, n$, минимизирующих (33), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$f_n = \int_0^T [(h_{1n}(\tau))^2 + (h_{2n}(\tau))^2]\, d\tau + \delta_n[\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k C_{1k} + \beta_k C_{2k}) - 1],$$

где δ_n - неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по α_k, β_k, $k = 1, \ldots, n$ функции f_n и приравнивая к нулю, с учетом обозначения (34), (30) и присоединяя к полученным уравнениям условие (32), получим замкнутую систему $2n+1$ алгебраических уравнений относительно стольких же неизвестных величин α_k, β_k, $k = 1, \ldots, n$ и δ_n.

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{jk}\alpha_j + b_{jk}\beta_j) = -\frac{\delta_n}{2}C_{1k},$$

$$\sum_{j=1}^{n}(d_{jk}\alpha_j + e_{jk}\beta_j) = -\frac{\delta_n}{2}C_{2k}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{35}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k C_{1k} + \beta_k C_{2k}) = 1$$

где

$$a_{jk} = I_{jk}\int_0^T \sin\lambda_j(T-\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau, \quad b_{jk} = I_{jk}\int_0^T \cos\lambda_j(T-\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau,$$

$$d_{jk} = I_{jk}\int_0^T \sin\lambda_j(T-\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau, \quad e_{jk} = I_{jk}\int_0^T \cos\lambda_j(T-\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau, \tag{36}$$

$$I_{jk} = 1 + E_j E_k, \quad j = 1,\ldots,n, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Пусть величины α_k^0, β_k^0, $k = 1,\ldots,n$ и δ_n^0, являются решением замкнутой системы алгебраических уравнений (35). Тогда, согласно (34), (33) будем иметь

$$h_{1n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[\alpha_k^0 \sin\lambda_k(T-\tau) + \beta_k^0 \cos\lambda_k(T-\tau)\right],$$

$$h_{2n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n E_k\left[\alpha_k^0 \sin\lambda_k(T-\tau) + \beta_k^0 \cos\lambda_k(T-\tau)\right],$$

$$(\rho_n^0)^2 = \int_0^T \left[(h_{1n}^0(\tau))^2 + (h_{2n}^0(\tau))^2\right]d\tau.$$

Следуя [23], оптимальные граничные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ представятся в виде:

$$\mu_n^0(\tau) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum_{k=1}^n \left[\alpha_k^0 \sin\lambda_k(T-\tau) + \beta_k^0 \cos\lambda_k(T-\tau)\right],$$

$$\nu_n^0(\tau) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum_{k=1}^n E_k\left[\alpha_k^0 \sin\lambda_k(T-\tau) + \beta_k^0 \cos\lambda_k(T-\tau)\right].$$

Теперь построим функцию оптимального прогиба, соответствующую оптимальным управлениям $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$. Подставляя полученные выражения для оптимальных управлений $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ в (25), а полученное для $Z_k^0(t)$ выражение – в (28), получим функцию $X_k^0(t)$, $t \in [0, T]$, $k = 1,\ldots,n$. Далее, из формулы (23) будем иметь

$$X_n^0(\xi, t) = \sum_{k=1}^n X_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l}\xi, \tag{37}$$

а с помощью (15) и (17) оптимальная функция колебания $Q_n^0(\xi, t)$ для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n^0(\xi, t) = X_n^0(\xi, t) + Y_n^0(\xi, t), \tag{38}$$

где

$$Y_n^0(\xi, t) = \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu_n^0(t) + (l+\xi)\nu_n^0(t)\right]. \tag{39}$$

Учитывая формулы (9) функция $Q_n^0\,(x, t)$ при $-l_1 \le x \le l$ представляется в виде:

$$Q_n^0(x,t)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} X_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l_1}x+\frac{1}{2}\left[(1-\frac{x}{l_1})\mu_n^0(t)+(1+\frac{x}{l_1})\nu_n^0(t)\right], -l_1\le x\le 0,\ 0\le t\le T\\ \sum_{k=1}^{n} X_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l}x+\frac{1}{2}\left[(1-\frac{x}{l})\mu_n^0(t)+(1+\frac{x}{l})\nu_n^0(t)\right], 0\ \le x\le l\ \ 0\le t\le T\end{cases}.$$

Таким образом, из построенного явного выражения для прогиба $Q_n^0(x,t)$ видно, что значение функции $Q_n^0(x,t)$ на конце участка $-l_1\le x\le 0$ совпадают со значением в начале участка $0\le x\le l$, т.е. в точке $x=0$ стыка участков оптимальная функция прогиба непреривна.

6. Пример

Для иллюстрации вышеизложенного построения предположим, что в граничных условиях (4) $Q(l,t)=0,\ 0\le t\le T$ (т.е. $\nu(t)=0$).

В этом случае из формулы (25) следует $Z_k(t)=-\frac{a_2}{\lambda_k l}\ddot{\mu}(t)$, а согласно формулам (29) будем иметь следующие интегральные соотношения

$$\int_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau=C_{1k},\quad \int_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau=C_{2k},$$

где

$$C_{1k}=\frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k}+F_{1k}\right],\quad C_{2k}=\frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k}+F_{2k}\right].$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k}$, $\tilde{C}_{2k}$, F_{1k} и F_{2k} определяются из формулы (30).

Применяя вышепредложенный подход, построим оптимальное граничное управление $\mu_n^0(\tau)$ при $n=1$ (следовательно $k=1$).

Согласно (35) и (36), будем иметь следующую систему алгебраических уравнений

$$a_{11}\alpha_1+b_{11}\beta_1=-\frac{\delta_1}{2}C_{11},\quad d_{11}\alpha_1+e_{11}\beta_1=-\frac{\delta_1}{2}C_{21},\quad C_{11}\alpha_1+C_{21}\beta_1=1, \tag{40}$$

где

$$a_{11}=5\left(T-\frac{1}{2\lambda_1}\ \sin 2\lambda_1 T\right),\quad b_{11}=d_{11}=\frac{5}{\lambda_1}\sin^2\lambda_1 T,\quad e_{11}=5\left(T+\frac{1}{2\lambda_1}\ \sin 2\lambda_1 T\right).$$

Решая систему уравнений (40) для величин α_1, β_1, и δ_1, получим

$$\alpha_1^0=M[e_{11}C_{11}-b_{11}C_{21}],\quad \beta_1^0=M[a_{11}C_{21}-b_{11}C_{11}],\quad \delta_1^0=-2M(a_{11}e_{11}-b_{11}^2),$$

где

$$M^{-1}=a_{11}(C_{21})^2+e_{11}(C_{11})^2-2b_{11}C_{11}C_{21}.$$

Следовательно, оптимальное граничное управление $\mu_1^0(\tau)$ запишется в виде:

$$\mu_1^0(\tau)=\frac{1}{(\rho_1^0)^2}[\alpha_1^0\sin\lambda_1(T-\tau)+\beta_1^0\cos\lambda_1(T-\tau)],$$

где

$$(\rho_1^0)^2 = \int_0^T [\alpha_1^0 \sin\lambda_1(T-\tau) + \beta_1^0 \cos\lambda_1(T-\tau)]^2 d\tau.$$

Далее, из формулы (37)-(39) будем иметь

$$Q_1^0(\xi, t) = X_1^0(\xi, t) + Y_1^0(\xi, t),$$

где

$$X_1^0(\xi, t) = X_1^0(t)\sin\frac{\pi}{l}\xi, \quad Y_1^0(\xi, t) = \frac{l-\xi}{2l}\mu_1^0(t).$$

Учитывая обозначения (9) функция $Q_1^0\,(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ представляется в виде:

$$Q_1^0\,(x, t) = \begin{cases} X_1^0(t)\sin\frac{\pi}{l_1}x + \frac{l_1 - x}{2l_1}\mu_1^0(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ X_1^0(t)\sin\frac{\pi}{l}x + \frac{l-x}{2l}\mu_1^0(t), & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}.$$

Надо отметить, что построеное функция прогиба $Q_n^0\,(x, t)$ в точке $x = 0$ стыка участков, как функция от времени неперивна.

Заключение

В работе рассмотрена задача оптимального граничного управления одномерным волновым уравнением, описывающим поперечные колебания кусочно-однородной струны или продольные колебания кусочно-однородного стрежня. Предложен конструктивный подход построения функции оптимального граничного управления одномерными неоднородными колебательными процессами смещением на двух концах, переводящие колебания за заданный промежуток времени из заданного начального состояния в заданное конечное состояние с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Результаты могут быть использованы при проектировании оптимального граничного управления процессами разнородных колебаний в физических и технологических системах.

Литература

[1] Бутковский, А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
[2] Barseghyan, V.R. The Control Problem for Stepwise Changing Linear Systems of Loaded Differential Equations with Unseparated Multipoint Intermediate Conditions. Mechanics of Solids. Vol. 53. No. 6, pp. 615–622, 2018. https://doi.org/10.3103/S0025654418060031.
[3] Barseghyan, V.R. The problem of optimal control of string vibrations. International Applied Mechanics. 56(4), pp. 471–48, 2020. DOI: 10.1007/s10778-020-01030-w.
[4] Barseghyan, V.R. The problem of optimal control of vibrations of a string with non-separated conditions into state functions at given intermediate time instants. Automation and Remote Control, 81(2), pp. 226–235, 2020. DOI: 10.31857/S0005231020020038.
[5] Barseghyan, V., Solodusha, S. Optimal Boundary Control of String Vibrations with Given Shape of Deflection at a Certain Moment of Time. Mathematical Optimization Theory and

Operations Research. MOTOR 2021. Lecture Notes in Computer Science. Vol 12755. pp 299-313. https: doi.org/10.1007/978-3-030-77876-7_20.
[6] Barseghyan, V. and Solodusha, S. On One Problem in Optimal Boundary Control for String Vibrations with a Given Velocity of Points at an Intermediate Moment of Time. Conference Paper. Publisher: IEEE. 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), pp. 343-349, 2021. Doi: 10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537514.
[7] Barseghyan, V.R. On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure. Proceedings of 2016 International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2016. DOI: 10.1109/STAB.2016.7541163.
[8] Barseghian, V.R. String vibration observation problem. 1-st International Conference, Control of Oscillations and Chaos Proceedings (Cat. No.97TH8329), Vol.2, pp. 309-310, 1997. Doi: 10.1109/COC.1997.631351.
[9] Ильин, В.А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков. Доклады РАН, т, 440, № 2, с. 159–163, 2011.
[10] Ильин, В.А. О приведении в произвольно заданое состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков. Доклады РАН, т. 435, № 6, с. 732–735, 2010.
[11] Егоров, А.И., Знаменская, Л.Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами. Тр. ИММ УрОРАН, т. 17, № 1, 85–92, 2011.
[12] Провоторов, В.В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн. Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10, вып. 1, с. 62–71, 2012.
[13] Amara, J. Ben, Bouzidi, H. Null boundary controllability of a one-dimensional heat equation with an internal point mass and variable coefficients. Journal of Mathematical Physics, vol. 59. No.1, pp. 1-22, 2018.
[14] Amara, J. Ben, Beldi, E. Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients. SIAM J. Control Optim, vol. 57, No. 5, pp. 3360–3387, 2019. DOI. 10.1137/16M1100496.
[15] Mercier, D., Régnier, V. Boundary controllability of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams with interior masses. Collectanea Mathematica., vol. 60, No. 3, pp. 307–334, 2009. https://doi.org/10.1007/BF03191374.
[16] Кулешов, А.А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости. Доклады РАН, т. 442, № 5, с. 594-597, 2012.
[17] Рогожников, А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков. Доклады РАН, т. 441, № 4, с. 449–451, 2011.
[18] Рогожников, А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами. Доклады РАН, т. 444, с. 488–491, 2012.
[19] Аниконов, Д.С., Коновалова, Д.С. Прямая и обратная задачи для волнового уравнения с разрывными коэффициентами. Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, т. 11, № 2, с. 61–72, 2018.
[20] Зверева, М.Б., Найдюк, Ф.О., Залукаева Ж.О. Моделирование колебаний сингулярной струны. Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика, № 2, с. 111-119, 2014.
[21] Холодовский, С.Е., Чухрий, П.А. Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны. Учёные записки Забайкальского государственного университе-

та. Сер. Физика, математика, техника, технология, т. 13, № 4, с. 42–50, 2018. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-42-50.

[22] Барсегян, В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016.

[23] Красовский, Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

Optimal boundary control of oscillation process by displacement at two ends of a rod consisting of two sections of different density and elasticity

Barseghyan V.R.[1,2,*]

[1] Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of RA
[2] Yerevan State University

[*] barseghyan@sci.am

Abstract. We consider the problem of optimal boundary control for a one-dimensional wave equation, describing the longitudinal oscillations of a heterogeneous rod consisting of two heterogeneous sections or transverse vibrations of a heterogeneous string with given initial and final conditions. In this case, it is assumed that the time of propagation of the wave along each of the sections is the same. The control is carried out by displacement at the two ends. The quality criterion is given over the entire time period. A constructive approach is proposed for constructing an optimal boundary control, which is carried out according to the following scheme. The problem is reduced to the problem of control of distributed actions with zero boundary conditions, then the method of separation of variables and the methods of the theory of optimal control of finite-dimensional systems are used. The obtained results are illustrated by a specific example.

Keywords: optimal control of oscillations, longitudinal oscillations of a piecewise homogeneous rod, transverse vibrations of a piecewise homogeneous string, optimal boundary control, separation of variables.