

Об обратимой трехмерной системе, содержащей аттрактор и репеллер Лоренца

А. С. Гонченко¹, А. Г. Коротков¹, Е. А. Самылина²

¹Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского

²Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

agonchenko@mail.ru, koral81@bk.ru, samyлина.evgeniya@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача о существовании у трехмерных обратимых по времени систем аттракторов и репеллеров лоренцевского типа, а также о структуре бифуркационных сценариев их возникновения. В связи с этой задачей в работе предложена система, которая является потоковой нормальной формой обратимой бифуркации неподвижной точки с триплетом $(-1, -1, +1)$ мультипликаторов. Само бифуркационное множество указанной обратимой бифуркации является чрезвычайно сложным (нормальная форма здесь содержит 7 независимых параметров). Однако нас интересуют здесь главным образом бифуркации, приводящие к возникновению симметричной пары “аттрактор Лоренца - репеллер Лоренца”, которые, как мы показываем, могут быть изучены в рамках двухпараметрических подсемейств. В работе описаны в деталях два основных бифуркационных сценария возникновения такой пары, а также обрисован весьма необычный сценарий появления аттрактора и репеллера лоренцевского типа у системы, которая сама имеет всего два состояния равновесия. Соответствующее явление кажется новым и весьма необычным - для сравнения заметим, что даже у системы Лоренца

существует три состояния равновесия: одно из них принадлежит аттрактору, а два других лежат в его “дырках”.

Ключевые слова: странный аттрактор, аттрактор Лоренца, обратимая система

1 Введение

В работе рассматривается трехмерная система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = Fx + Cyz + Dx^3 + Exz^2 \\ \dot{z} = \mu + Az^2 + Bx^2 \end{cases}, \quad (1)$$

где A, B, C, D, E, F и μ – ее параметры. Система (1) обладает симметрией, в точности такой же как известной системы Лоренца [1], т.е. она инвариантна относительно замены координат $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$, поэтому ее фазовый портрет всегда симметричен относительно оси z . Также принципиально важной особенностью системы (1) является ее обратимость – она инвариантна относительно обращения времени $t \rightarrow -t$ и замены координат вида $h : x \rightarrow x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$, которая является инволюцией, т.е. $h^2 = Id$. Заметим, что множество $Fix(h)$ неподвижных точек инволюции h одномерно: $Fix(h) = \{y = 0, z = 0\}$.

Система (1) была предложена Д.В. Тураевым в связи с общей задачей исследования бифуркаций обратимых систем, приводящих к рождению аттракторов лоренцевского типа, а в силу обратимости, еще и симметричных им репеллеров Лоренца. В случае трехмерных отображений существование симметричных дискретных аттрактора Лоренца и репеллера Лоренца было впервые установлено в работе [2] в случае неголомомной модели кельтского камня, см. также [3, 4]. Глобальные бифуркации, приводящие к появлению в такой модели дискретного аттрактора (репеллера) Лоренца, были изучены в работе [5]. В связи с этими исследованиями, возникла новая задача о структуре локальных бифуркаций обратимых трехмерных отображений, приводящих к рождению симметричной пары “аттрактор и репеллер Лоренца”. В случае обратимых трехмерных отображений с инволюцией R , у которой $\dim(Fix(R)) = 1$, как ожидается, такие локальные бифуркации могут быть у неподвижной симметричной относительно R точки с триплетом $(-1, -1, +1)$ мультипликаторов. В силу обратимости отображений, коразмерность такой

бифуркации равна 2 (в общем случае, это локальная бифуркация коразмерности 3). Как мы показали [6], система (1) является локальной потоковой нормальной формой для квадрата обратимого отображения в некоторой малой окрестности симметричной неподвижной точки с триплетом $(-1, -1, +1)$ мультипликаторов. Построение такой нормальной формы проводится стандартно, см., например, [7, 8]. Рассматривается квадрат отображения и локально вкладывается в некоторый неавтономный трехмерный поток, от которого берется его основная автономная часть. Затем, в полученном трехмерном потоке делаются замены переменных и времени с целью упрощения и унификации его правых частей. В результате получается система (1) с семью независимыми параметрами, которые, в целом, могут принимать произвольные значения. Это показывает, что структура бифуркаций в системе может быть очень сложной. Но если ограничиться только задачей исследования бифуркаций, связанных с аттракторами (репеллерами) Лоренца, то она становится вполне обозримой.¹

В работе получены следующие результаты. На плоскости параметров S и F (значения остальных параметров фиксированы, см. формулу (2)) построена бифуркационная диаграмма состояний равновесия и гомоклинических петель, на основе которой изучены основные локальные и глобальные бифуркации, приводящие к возникновению симметричной пары “аттрактор Лоренца – репеллер Лоренца” (АЛ-РЛ), см. рис. 1 .

В системе (1) были прослежены два сценария возникновения пары АЛ-РЛ. Эти сценарии похожи соответственно на известные сценарии в модели Лоренца [14] и в модели Шимицу-Мориока [15]. В работе был также найден весьма интересный и новый тип пары АЛ-РЛ, существующий в системе при $F > 25$. Заметим, что при $-50 < F < 25$ система (1) имеет 6 состояний равновесия, O_1, \dots, O_6 , см., например, рис. 1. При $F > 25$ состояния равновесия O_3, O_4 и O_5, O_6 в результате обратимой бифуркации (типа бифуркации состояния равновесия седло-седло) попарно сливаются и исчезают. Однако структура АЛ-РЛ (как на рис. 1, но только с двумя состояниями равновесия) сохраняется. Поэтому мы можем говорить здесь о новом аттракторе лоренцевского типа, который, благодаря существованию репеллера, может быть у трехмерных систем с двумя состояниями равновесия (напомним, что сама система Лоренца имеет три состояния равновесия в том случае, когда у нее есть странный аттрактор, [1]).

¹Заметим, что детальное исследование структуры и динамических свойств аттракторов лоренцевского типа, как в самой модели Лоренца, так и в родственных ей системах, было проведено в целом ряде работ, см., например, [9, 10, 11, 12, 13]

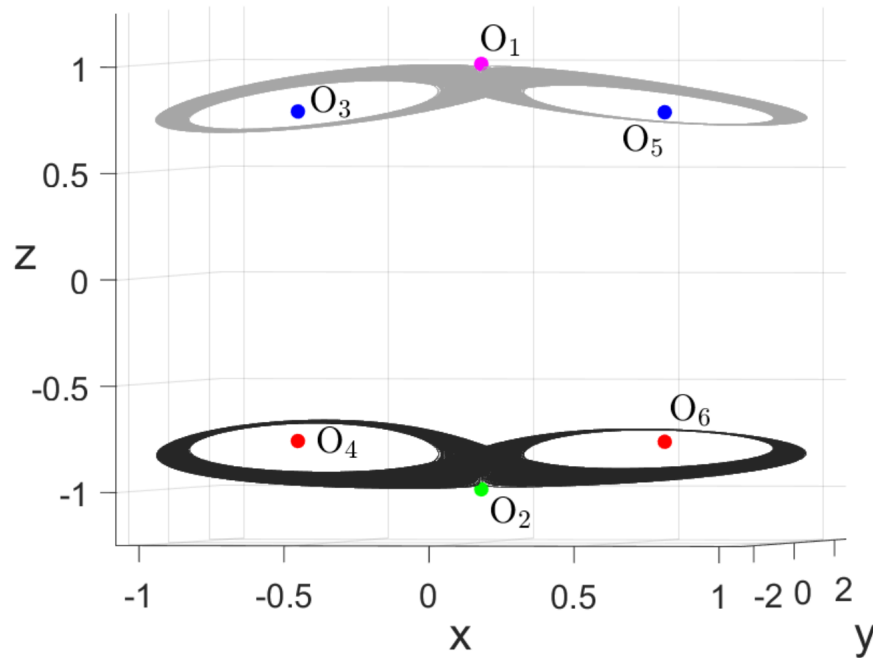


Рис. 1: Фазовый портрет системы (1) при $C = 3.2$, $F = -20$. В силу обратимости системы, наряду с аттрактором (показан чёрным цветом) в фазовом пространстве присутствует симметричный ему относительно оси x репеллер (показан серым цветом). Здесь также показаны 6 состояний равновесия. Равновесия O_1 и O_2 являются седлами, образующими симметричную по инволюции пару: седло O_1 принадлежит репеллеру и имеет тип $(1, 2)$, седло O_2 типа $(2, 1)$ принадлежит аттрактору, где первая цифра в обозначении (a, b) означает размерность устойчивого многообразия равновесия, а вторая – его неустойчивого многообразия. Состояния равновесия O_4 и O_6 лежат в дырках аттрактора, а O_3 и O_5 – в дырках репеллера. Они попарно симметричны друг другу относительно лоренцевской симметрии и имеют попарно одинаковый тип: O_4 и O_6 – седло-фокусы типа $(1, 2)$, а O_3 и O_5 – седло-фокусы типа $(2, 1)$.

2 Описание системы (1) и ее основных бифуркаций

Система (1) имеет максимум 6 состояний равновесия:

$$O_1(0, 0, \sqrt{-\frac{\mu}{A}}), O_2(0, 0, -\sqrt{-\frac{\mu}{A}}),$$

$$O_3\left(\sqrt{\frac{\mu E - AF}{AD - BE}}, 0, \sqrt{\frac{BF - \mu D}{AD - BE}}\right), O_4\left(\sqrt{\frac{\mu E - AF}{AD - BE}}, 0, -\sqrt{\frac{BF - \mu D}{AD - BE}}\right),$$

$$O_5\left(-\sqrt{\frac{\mu E - AF}{AD - BE}}, 0, \sqrt{\frac{BF - \mu D}{AD - BE}}\right), O_6\left(-\sqrt{\frac{\mu E - AF}{AD - BE}}, 0, -\sqrt{\frac{BF - \mu D}{AD - BE}}\right).$$

Для численного изучения системы (1) мы зафиксируем значения 5 параметров

$$A = 1, B = 1, D = -25, E = 50, \mu = -1, \quad (2)$$

а параметры C и F будем рассматривать в качестве управляющих. При этом координаты состояний равновесия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &O_1(0, 0, 1), O_2(0, 0, -1), \\ &O_3\left(\sqrt{\frac{F+50}{75}}, 0, \sqrt{\frac{25-F}{75}}\right), O_4\left(\sqrt{\frac{F+50}{75}}, 0, -\sqrt{\frac{25-F}{75}}\right), \\ &O_5\left(-\sqrt{\frac{F+50}{75}}, 0, \sqrt{\frac{25-F}{75}}\right), O_6\left(-\sqrt{\frac{F+50}{75}}, 0, -\sqrt{\frac{25-F}{75}}\right). \end{aligned}$$

2.1 Бифуркационная диаграмма

В силу обратимости системы (1), для построения ее бифуркационной диаграммы достаточно рассматривать состояния равновесия O_2, O_4, O_6 , так как их бифуркационные кривые будут в точности совпадать с бифуркационными кривыми для состояний равновесий O_1, O_3, O_5 , соответственно.

На рисунке 2 представлена бифуркационная диаграмма системы (1) на плоскости параметров F и C при условии, что остальные 5 параметров фиксированы в соответствии с условием (2). В этом случае состояния равновесия O_4, O_6 существуют только при $-50 \leq F \leq 25$, а состояние равновесия O_2 существует при любых F и C . Рассмотрим подробнее бифуркационную диаграмму рис. 2. В области 1 состояние равновесия O_2 имеет тип устойчивого узла $(3, 0)^2$. Кроме бифуркационных кривых на диаграмме также указаны кривые l_1 и l_2 , при переходе через которые тип точки не меняется, но на этих кривых у состояний равновесия O_2 и $O_{4,6}$, соответственно, имеется по два равных действительных собственных числа. По одну сторону от кривой l_i ($i = \overline{1, 2}$) у состояния равновесия три действительных собственных числа, а с другой стороны – одно действительное и два комплексно-сопряженных. Поэтому в области 1' состояние равновесия O_2 является устойчивым фокусом. На прямой AN_2 ($C = 0, F \leq 50$) с состоянием равновесия O_2 происходит

²Запись (i, j) означает, что устойчивое инвариантное многообразие состояния равновесия имеет размерность i , а неустойчивое – размерность j

бифуркация Андронова-Хопфа, и в области $2'$ оно становится седло-фокусом типа $(1, 2)$ (в области 2 точка O_2 является седлом того же типа $(1, 2)$).

Для состояния равновесия O_2 на диаграмме рис.2 изображена ещё одна бифуркационная прямая PF ($F = -50$), соответствующая бифуркации “вилка”. При переходе из области 1 в область 3 точка O_2 становится седлом $(2, 1)$ и рождаются два устойчивых узла $O_{4,6}$. А при переходе из области 2 в область 4 точка O_2 также становится седлом $(2, 1)$, но появившиеся точки $O_{4,6}$ являются седлами типа $(1, 2)$. Везде правее прямой PF состояние равновесия O_2 не претерпевает никаких бифуркаций и имеет тип $(2, 1)$.

На кривой

$$AH_{4,6} : F = \frac{25C^2 + 1300C - 5000}{C^2 - 23C + 100}$$

с состояниями равновесия O_4, O_6 происходит бифуркация Андронова-Хопфа. Выше этой кривой, в области $3'$, точки O_4 и O_6 являются устойчивыми фокусами. На кривой $AH_{4,6}$ они теряют устойчивость и ниже неё они становятся седло-фокусами типа $(1, 2)$. На прямой G ($F = 25$) состояния равновесия O_3 и O_4 , сливаются в одно состояние равновесие, которое симметрично относительно инволюции h и имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \lambda_3 = 0$. Одновременно это же происходит и с состояниями равновесия O_5 и O_6 . Так что в области $F > 25$ на диаграмме рис.2 система (1) имеет только два состояния равновесия $O_1(0, 0, 1)$ и $O_2(0, 0, -1)$.³

Кроме того, на бифуркационной диаграмме также изображены две важные кривые: бифуркационная кривая γ , отвечающая возникновению (при уменьшении C) “гомоклинической восьмёрки-бабочки” состояния равновесия O_2 (и одновременно O_1), которая получена методом построения нидинг-последовательностей (см. § 3); а также полученная аналитически кривая $\sigma = 0$, на которой седловая величина σ седла O_2 обращается в 0 – при этом $\sigma > 0$ для значений параметров ниже этой кривой. Напомним, что седловая величина определяется как сумма действительных частей двух ближайших к мнимой оси собственных чисел седлового состояния равновесия. Из рисунка 2 видно, что вблизи значения $F = -37$ кривые гомоклинической бифуркации γ и бифуркации Андронова-Хопфа $AH_{4,6}$ пересекаются, при этом точка их пе-

³Соответствующая бифуркация является обратимой и симметричной бифуркацией коразмерности 1 в случае системы (1). При этом исчезают сразу 4 состояния равновесия (в результате т.н. кокон-бифуркации [16]): на участке линии $G_{(F=25)}$ выше точки ее пересечения с кривой $AH_{4,6}$ сливаются два источника и два стока; а ниже – два седло-фокуса $(2,1)$ и два седло-фокуса $(1,2)$. Однако на их месте возникает сложное инвариантное множество консервативного типа, которое симметрично относительно инволюции и содержит континуум инвариантных двумерных торов и другие нетривиальные инвариантные множества. Похожая картина наблюдается также в модели кельтского камня [4, 17].

ресечения лежит в области $\sigma > 0$. Это означает, что здесь можно наблюдать два разных сценария возникновения аттрактора Лоренца (и соответственно два сценария возникновения пары АЛ-РЛ.). Первый сценарий проиллюстрирован на рисунке 3, а второй – на рисунке 4.

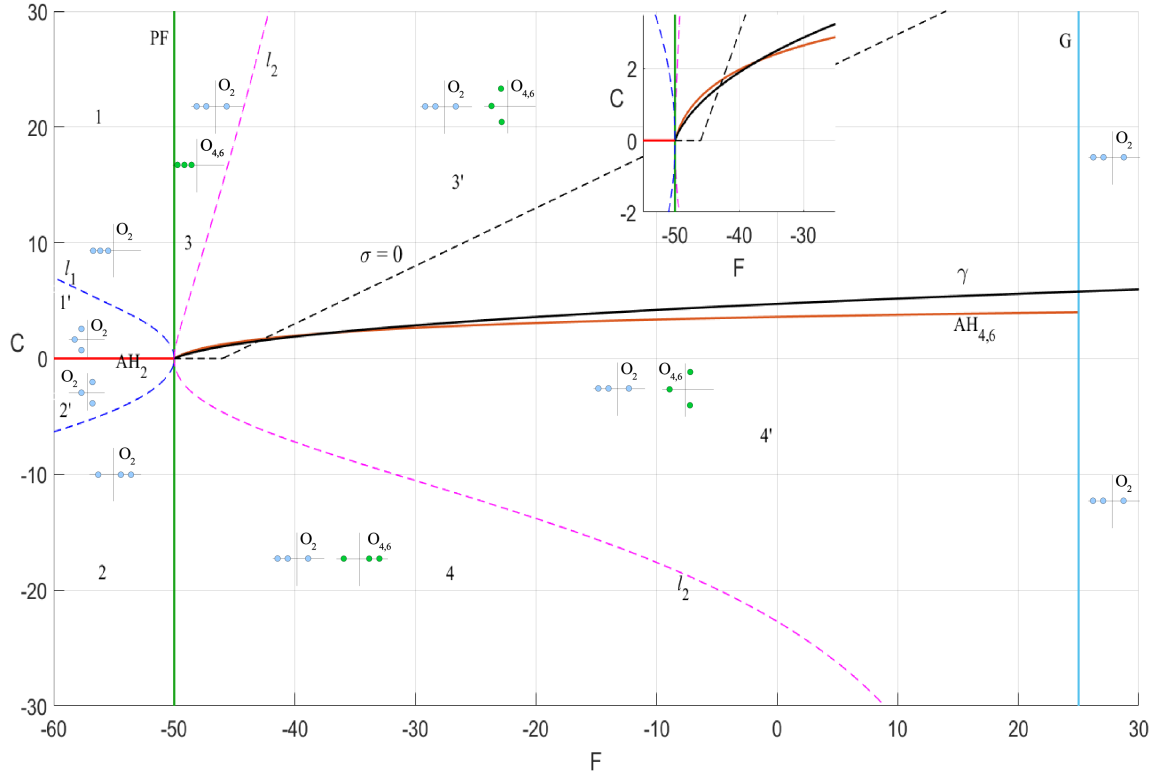


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма.

2.2 Сценарии возникновения аттрактора Лоренца

Рассмотрим *первый сценарий*. На рисунке 3 показаны фазовые портреты системы при различных значениях параметра C и фиксированном параметре $F = -20$. При $C = 4$ (область $3'$ на бифуркационной диаграмме, рисунок 2) в фазовом полупространстве системы $z < 0$ присутствуют два устойчивых состояния равновесия O_4 и O_6 и одно седловое O_2 типа $(2, 1)$, рисунок 3а. Если двигаться вниз вдоль прямой $F = -20$, то при $C = C^* \approx 3.592129$ возникает “гомеклическая восьмёрка-бабочка”, см. рисунок 3б, после чего, в соответствии с теоремой Шильникова [18], в системе появляются два седловых предельных цикла C_1 и C_2 (а также нетривиальное сингулярно-гиперболическое множество [10]). До этого момента правая неустойчивая од-

номерная сепаратриса седла O_2 шла на правое устойчивое состояние равновесия O_4 , а левая – на левое состояние равновесия O_6 . После же гомоклинической бифуркации сепаратрисы седла O_2 перестраиваются, как показано на рисунке 3с. Одно из условий для рождения аттрактора Лоренца из “гомоклинической восьмерки” седла типа $(2, 1)$ это то, что его седловая величина σ положительна. Собственные значения точки $O_2(0, 0, -1)$ – это $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = -/2 \pm \sqrt{C^2 + 4(F + 50)}/2$. Тогда $\sigma = \max \lambda_1 + \lambda_{2,3}$; $\lambda_2 + \lambda_3 = -C$. Отсюда получаем, что $\sigma(O_2) > 0$, если $C < F/2 + 23$ при $F > -46$ и $C < 0$ при $F < -46$, т. е. в области ниже кривой $\sigma = 0$ на рис. 2.

При значениях параметра C меньших $C = C^*$, но достаточно близких к нему, одномерные неустойчивые сепаратрисы O_2 лежат внутри инвариантных многообразий седловых предельных циклов C_1, C_2 . Затем, при некотором значении параметра C , происходит гетероклиническая бифуркация: сепаратрисы седлового состояния равновесия O_2 ложатся на инвариантные многообразия седловых предельных циклов C_1, C_2 . Этот момент можно считать моментом рождения аттрактора Лоренца. Теперь в фазовом полупространстве $z < 0$ можно наблюдать пару устойчивых точек O_4, O_6 и аттрактор Лоренца (рисунок 3d). Такая ситуация продолжается до того момента, пока не происходит обратная (субкритическая) бифуркация Андронова-Хопфа $AH_{4,6}$ и устойчивые точки O_4, O_6 сливаются с седловыми предельными циклами C_1, C_2 , в результате чего равновесия O_4 и O_6 становятся седловыми типа $(1, 2)$ (см. рисунок 3е).

Рассмотрим теперь *второй сценарий* возникновения аттрактора Лоренца, присутствующий в данной системе. Прежде всего заметим, что он отличается от первого тем, что теперь бифуркация Андронова-Хопфа $AH_{4,6}$ происходит раньше гомоклинической бифуркации γ , если на плоскости параметров двигаться сверху вниз. Этот сценарий аналогичен тому, который происходит в модели Лоренца [9, 14]. Основные этапы возникновения аттрактора Лоренца в нашем случае при $F = -40$ и изменении C показаны на рис. 4).

1. При $C = 3$ в фазовом полупространстве системы $z < 0$ существует два асимптотически устойчивых состояния равновесия O_4 и O_6 и одно седловое O_2 типа $(2, 1)$, рисунок 4а.
2. При $C \approx 1.968$ состояния равновесия O_4 и O_6 претерпевают мягкую бифуркацию Андронова-Хопфа, из-за чего они становятся седлами $(1, 2)$ и рождаются два устойчивых предельных цикла S_1, S_2 (см. рисунок 4б).
3. При дальнейшем уменьшении параметра C в системе происходит гомо-

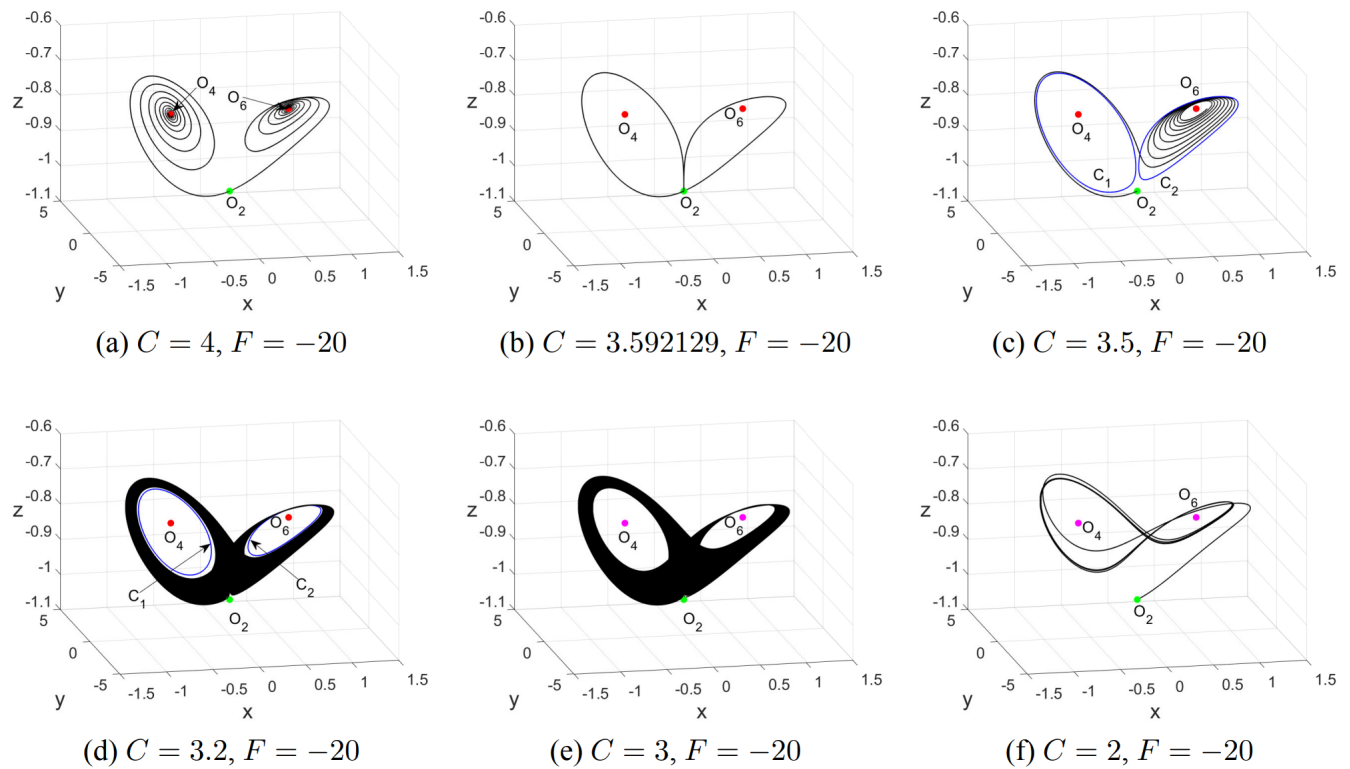


Рис. 3: Первый сценарий возникновения аттрактора Лоренца. Зелёная точка соответствует седловому состоянию равновесия типа $(2, 1)$, красная – устойчивому состоянию равновесия, пурпурная – седловому состоянию равновесия типа $(1, 2)$.

клиническая бифуркация (см. рисунок 4с), и из каждой петли сепаратрисы рождается по седловому предельному циклу C_1, C_2 (см. рисунок 4d).

4. Далее, в небольшой области пространства параметров сосуществуют четыре предельных цикла: два седловых C_1, C_2 и два устойчивых S_1, S_2 .
5. После выхода из этой области происходит седло-узловая бифуркация и устойчивый цикл S_1 сливается с седловым циклом C_1 , а цикл S_2 – с циклом C_2 , и возникает аттрактор Лоренца (см. рисунок 4е).

2.3 О сценариях разрушения аттрактора Лоренца

Здесь мы рассмотрим вопрос о том, что происходит с аттрактором Лоренца, если продолжить изменять параметры системы. Для определенности мы положим $F = -20$ и будем уменьшать C , т.е. продолжим рассматривать первый сценарий. Результаты исследований проиллюстрированы на рис. 5.

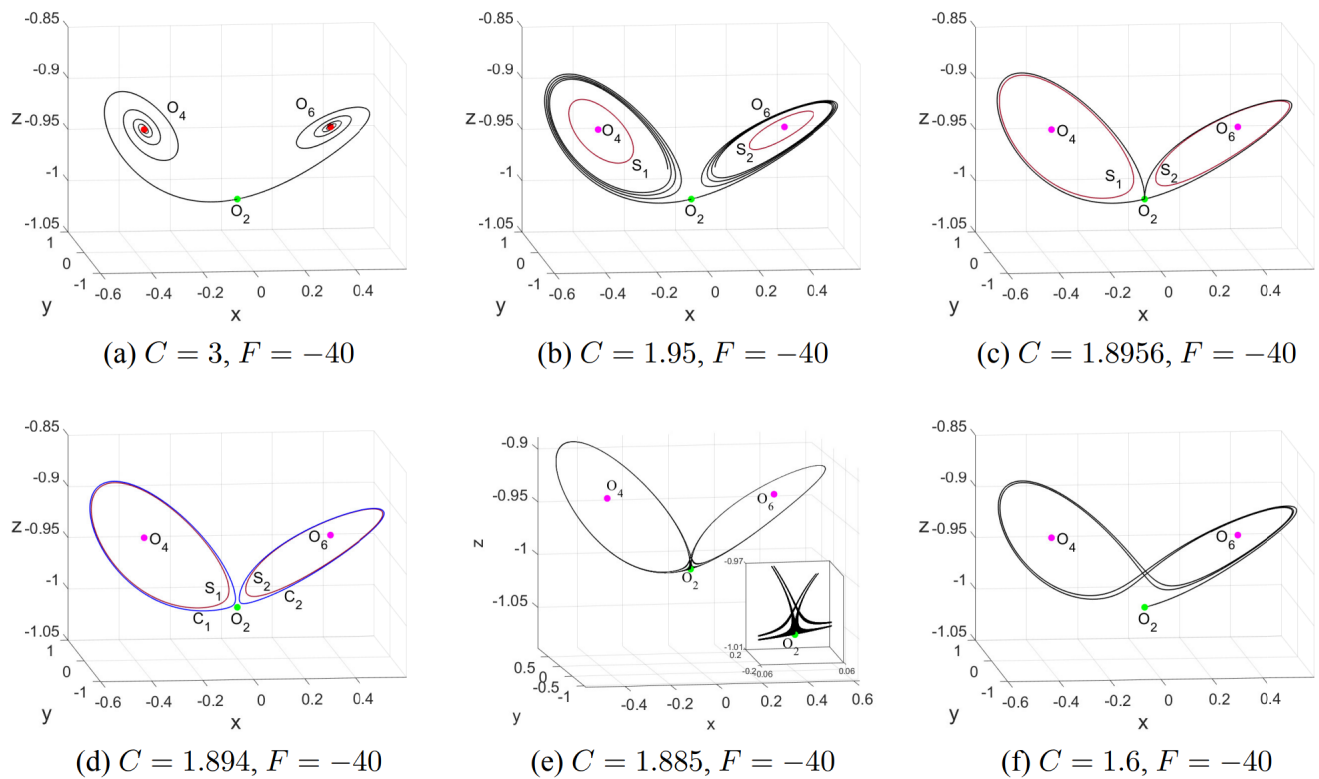


Рис. 4: Второй сценарий возникновения аттрактора Лоренца. Зелёная точка соответствует седловому состоянию равновесия типа $(2, 1)$, красная – устойчивому состоянию равновесия, пурпурный – седловому состоянию равновесия типа $(1, 2)$

При $C = 2.54$ (см. рис. 5а) в аттракторе Лоренца появляется лакуна («дырка» в поглощающей области, в которой лежит седловое периодическое движение без гомоклинических траекторий). Напомним ещё раз, что точка O_2 является седловой типа $(2, 1)$, а точки O_4 и O_6 – седловыми типа $(1, 2)$.

Если уменьшать параметр C , то в какой-то момент аттрактор Лоренца перестаёт быть сингулярно-гиперболическим и становится квазиаттрактором [19], т.е. в нем появляются гомоклинические и гетероклинические касания многообразий седловых предельных циклов и соответственно устойчивые периодические траектории больших периодов с очень узкими областями притяжения. Это явление в случае модели Лоренца было отмечено еще в работе [14]. Однако, вообще говоря, возникающие устойчивые периодические траектории могут никак себя не проявлять при численных исследованиях (в частности, в модели Лоренца их очень трудно обнаружить), и соответственно аттрактор продолжает выглядеть вполне хаотическим, но уже на физическом уровне строгости. Хорошо известно, что такой границей существования аттрактора Лоренца является граница на которой так называемая сепаратрисная величина обращается в нуль [14, 20]. В настоящей работе мы эту границу

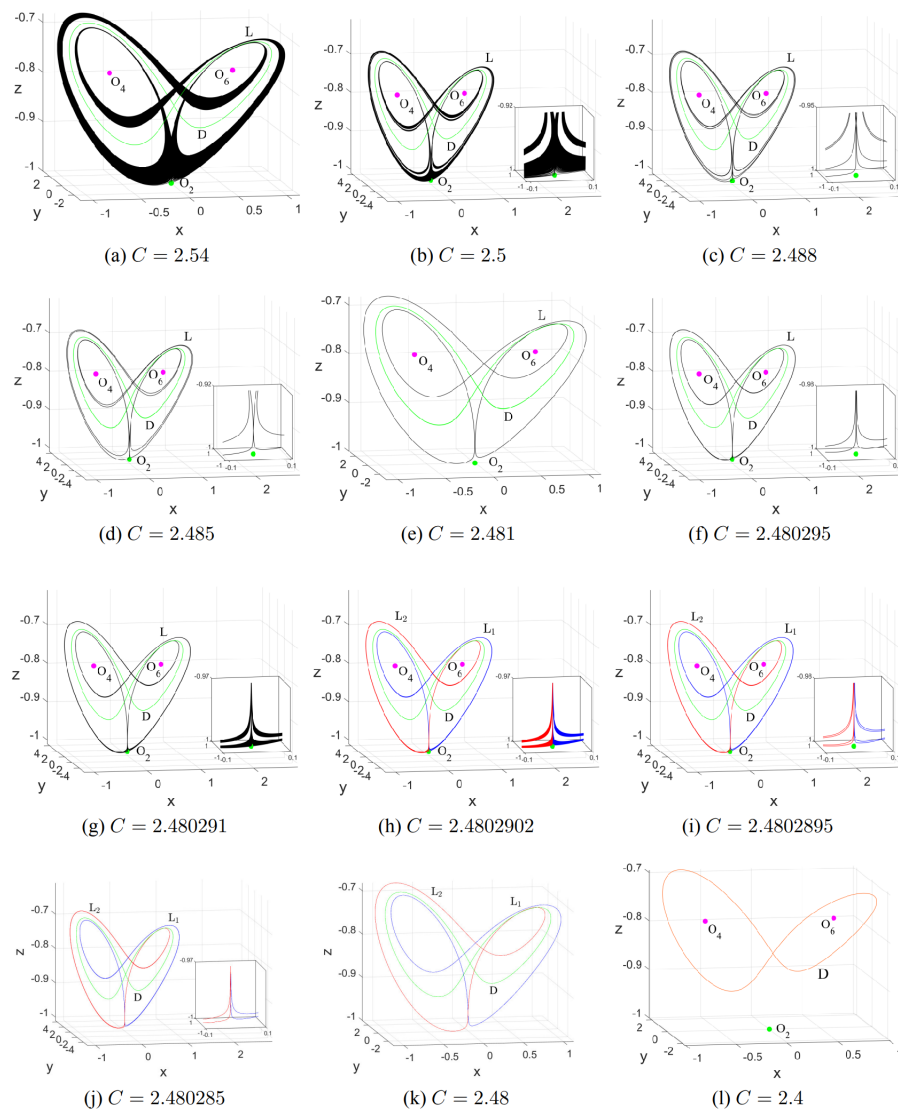


Рис. 5: Что происходит с аттрактором Лоренца при $F = -20$, если продолжать уменьшать параметр C ?

не вычисляем, но численно находим некоторые устойчивые предельные циклы, существующие уже конечно за ее границей. На рис. 5(a)–(b) аттрактор еще хаотический, но на рис. 5(c)–(l) – аттракторами являются уже устойчивые предельные циклы (обозначенные буквами L – симметричные циклы, и L_1 и L_2 – пара симметричных друг другу устойчивых циклов), которые претерпевают целую серию бифуркаций удвоения периода (прямых и обратных) и симметричных бифуркаций растрояния (бифуркация вилка). В частности, последней такой бифуркацией является бифуркация вилка (переход между рисунками (k) и (l)), в результате которой два симметричных друг другу устойчивых цикла L_1 и L_2 сливаются друг с другом и с седловым симметричным циклом и образуется один устойчивый симметричный предельный

цикл.

Можно сказать, что похожие сценарии разрушения аттрактора Лоренца будет наблюдаться и при любом значении параметра $F < 25$. Соответствующие бифуркации предельных циклов могут отличаться в некоторых деталях, но все равно последней бифуркацией будет описанная выше бифуркация вилка (когда два симметричных друг другу устойчивых цикла сливаются вместе с седловым и образуется один устойчивый симметричный предельный цикл).

2.4 О кризисе аттрактора и репеллера при переходе линии $F = 25$.

Еще один интересный и новый сценарий разрушения аттрактора Лоренца, который правильнее называть кризисом симметричной пары АЛ-РЛ, связан с переходом параметров на бифуркационной диаграмме через линию $F = 25$. При $F > 25$ седло-фокусы, лежащие в “дырках” аттрактора и репеллера исчезают. В результате мы получаем пример системы, которая имеет всего лишь два состояния равновесия, O_1 и O_2 , и аттрактор и репеллер их содержащие (O_2 принадлежит аттрактору, а O_1) – репеллеру). Причем, эти аттрактор и репеллер имеет явно лоренцевский тип. Отметим, что даже система Лоренца, у которой есть странный аттрактор, имеет три состояния равновесия, один из которых принадлежит аттрактору, а два других лежат в его “дырках”. У нас же получается странный аттрактор (лоренцевского типа), см. рис. 6, в “дырках” которого ничего нет. Естественно, такой аттрактор получился возможным в нашей системе, благодаря присутствию симметричного ему репеллеру. Однако кажется, что существование аттракторов лоренцевского типа в трехмерных системах с двумя состояниями равновесия, не связано напрямую с их обратимостью или с существованием нетривиального репеллера. Этому вопросу, а также более детальному изучению структуры пары АЛ-РЛ в области $F > 25$, мы планируем посвятить будущие исследования.

3 Приложение: Карта нидингов

На рис. 7 для системы (1) представлена карта нидинг-инвариантов, на которую также, для наглядности, наложены некоторые кривые с рис. 2, а именно кривая $\sigma = 0$ (чёрная пунктирная линия, на которой седловая величина седла O_2 обращается в 0), бифуркационная кривая γ (чёрная кривая, отвечающая “гомоклинической восьмёрке-бабочке”) и бифуркационная кривая $АН_{4,6}$ (зелёная кривая бифуркации Андронова-Хопфа). Напомним, что карта нидинг-

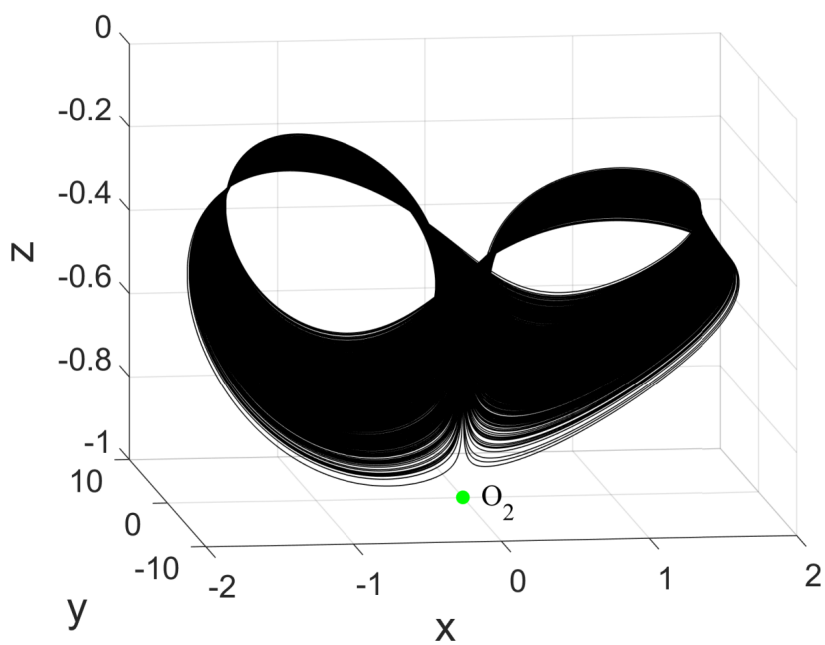


Рис. 6: Аттрактор типа Лоренца без состояний равновесия в “дырках” при $C = 4.7, F = 26$

инвариантов является эффективным инструментом для автоматизированного нахождения бифуркационных кривых гомоклинических петель [21]. Она показывает поведение неустойчивой сепаратрисы состояния равновесия типа седло, в нашем случае состояния равновесия O_2 . Каждая область карты соответствует определённому поведению неустойчивой сепаратрисы. Так, белая область рис. 7 соответствует тому, что правая неустойчивая сепаратриса седла O_2 идёт на правое состояние равновесия O_6 , а левая неустойчивая сепаратриса – на состояние равновесия O_4 . Такое поведение можно увидеть на рис. 3а и рис. 4а, которые как раз построены при значениях параметров F и C , отвечающих белой области рис. 7. Бордовая область, верхней границей которой является кривая γ , соответствует поведению сепаратрис, когда правая сепаратриса идёт на левое состояние равновесия, а левая идёт на правое состояние равновесия (см., например, рис. 3с). Граница между бордовой и разноцветной областью соответствует гетероклинической бифуркации, когда сепаратрисы седлового состояния равновесия O_2 ложатся на инвариантные многообразия седловых предельных циклов C_1, C_2 . Как хорошо известно [9], этот момент является моментом рождения аттрактора Лоренца. На рис.3д представлен аттрактор Лоренца при параметрах, близких к границе его рождения. При значениях параметров из серой области области аттрактор Лоренца разрушается. Здесь, также как и в жёлтой области и бордовой области в нижнем правом углу предельным устойчивым режимом является предельный цикл.

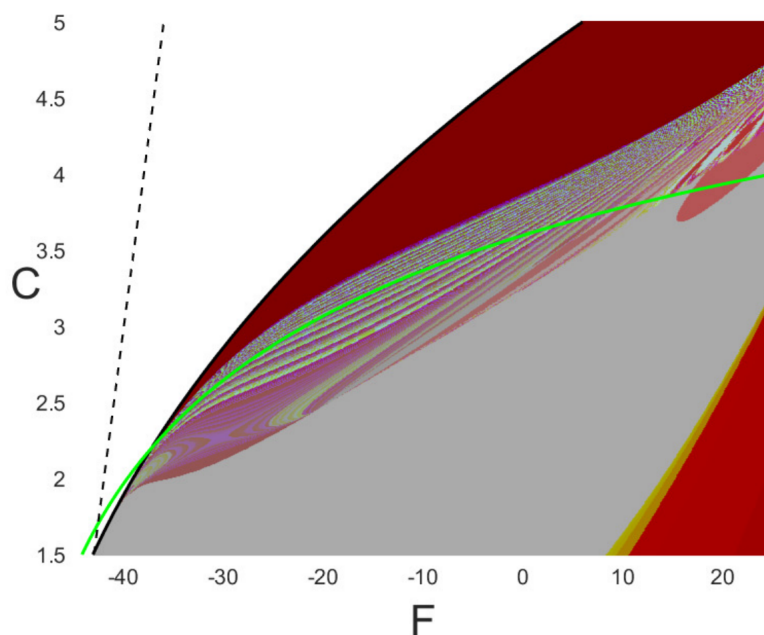


Рис. 7: Карта бифуркаций

4 Заключение

В настоящей работе мы рассмотрели двухпараметрические семейства обратимых по времени систем вида (1) с дополнительной лоренцевской симметрией. Мы потребовали условие обратимости для возможности наблюдения в системе одновременно и аттракторов и репеллеров, а лоренцевская симметрия нам была нужна для возможности обнаружения симметричной пары “аттрактор Лоренца – репеллер Лоренца”. Мы исследовали бифуркации, приводящие к возникновению таких, и дали их описание форме двух основных сценариев возникновения аттрактора Лоренца (а в силу обратимости, одновременно и репеллера Лоренца). Наш подход к исследованию таких явлений основан на базовых положениях теории бифуркаций многомерных динамических систем. В частности, рассматриваемая нами система (1) может быть представлена как нормальная форма бифуркации неподвижной точки с триплетом $(-1, -1, +1)$ мультипликаторов в случае трехмерного отображения обратимого относительно инволюции, множество неподвижных точек которой является одномерной. Отображения такого типа встречаются в приложениях, например, как отображения Пуанкаре в неголономной динамике твердого тела. В частности, одной из таких моделей является модель кельтского камня, в которой существование симметричных пар, составленных и дискретных аттрактора и репеллера Лоренца, было показано в работах [2, 3, 4], а глобальные бифуркации их возникновения были изучены в [5]. Настоящая работа

мотивирована этими исследованиями и, фактически, дополняет их изучением локальных бифуркаций.

Мы планируем продолжить эти исследования с целью более полного изучения бифуркаций системы (1). В частности, в настоящей работе сценарий возникновения пары “аттрактор Лоренца – репеллер Лоренца” в случае систем с двумя состояниями равновесия обрисован лишь в основных деталях, хотя здесь, очевидно, поскольку само явление весьма интересное, требуется более полные исследования. Также в работе не затронут вопрос о существовании в системе (1) т.н. смешанной динамики – недавно открытого нового третьего типа динамического хаоса [22, 23], при котором аттрактор системы имеет непустое пересечение с ее репеллером. Мы считаем, что в системе (1) такой тип динамики должен присутствовать, и мы планируем исследовать его в ближайшее время.

Благодарности. Авторы благодарят С.В. Гонченко и Д.В. Тураева за постановку задачи и полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ 20-71-00079. Численные исследования в § 2 выполнены при финансовой поддержке гранта РФФ 19-11-00280. Е. Самылина благодарит грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение №075-15-2019-1931 при Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, а так же фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (грант No. 20-7-1-36-5) за поддержку научных исследований.

Литература

- [1] Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Т. 20. № 2. С. 130–141.
- [2] Гонченко А. С. Об аттракторах лоренцевского типа в модели кельтского камня // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.. 2013. Т. 2. С. 3–11.
- [3] Гонченко А. С., Гонченко С. В. О существовании аттракторов лоренцевского типа в неголономной модели "кельтского камня" // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 1. С. 77–89.
- [4] Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Т. 15. № 5. С. 521–538.

- [5] Gonchenko A. S., Samylina E. A. On the region of existence of a discrete Lorenz attractor in the nonholonomic model of a Celtic stone // Radiophysics and Quantum Electronics. 2019. Т. 62. № 5. С. 369–384.
- [6] Gonchenko A. S., Samylina E. A., Korotkov A. G., Turaev D. On reversible bifurcations leading to the appearance of Lorenz-like attractor and repeller // Nonlinearity. (to appear)
- [7] Shilnikov A. L., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Normal forms and Lorenz attractors // Int. J. of Bifurcation and chaos. 1993. Т. 3. № 05. С. 1123–1139.
- [8] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Int. J. of Bifurcation and chaos. 2005. Т. 15. № 11. С. 3493–3508.
- [9] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 336–339.
- [10] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца // Труды ММОП. 1982. Т. 44. С. 150–212.
- [11] Leonov G. A., Kuznetsov N. V. On differences and similarities in the analysis of Lorenz, Chen, and Lu systems // Applied Mathematics and Computation. 2015. № 256. С. 334–343.
- [12] Leonov G. A., Mokaev R. N., Kuznetsov N. V., and Mokaev T. N. Homoclinic Bifurcations and Chaos in the Fishing Principle for the Lorenz-like Systems // Int.J. Bifurcation and Chaos. 2020. Т. 30. № 8. С. 2050124.
- [13] Kuznetsov N. V., Mokaev T. N., Kuznetsova O. A., Kudryashova E. V. The Lorenz system: hidden boundary of practical stability and the Lyapunov dimension // Nonlinear Dyn.. 2020. № 102. С. 713–732.
- [14] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // Дополнение I к книге: Дж.Марсден, М.Мак-Кракен “Бифуркация рождения цикла и ее приложения”. М., Мир,. 1980. С. 19.
- [15] Shilnikov A. L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimuizu-Morioka model // Physica D. 1993. № 62. С. 338–346.

- [16] Dumortier F., Ibanez S., Kokubu H. Cocoon bifurcation in three-dimensional reversible vector fields // *Nonlinearity*. 2006. Т. 19. № 2. С. 305–328.
- [17] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О., Самылина Е. А. Хаотическая динамика и мультистабильность в неголономной модели кельтского камня // *Изв. вузов. Радиофизика*.. 2018. Т. 61. № 10. С. 867–882.
- [18] Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло // *Матем. сб.*.. 1968. Т. 77(119). № 3. С. 461–472.
- [19] Aframovich V. S., Shilnikov L. P. Strange attractors and quasiattractors // in *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, eds G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph (Boston,Pitmen). 1983.
- [20] Bykov V. V., Shilnikov A. L. On the boundaries of the domain of existence of the Lorenz attractor // *Selecta Mathematica Sovietica*. 1992. Т. 11. № 4. С. 375–382.
- [21] Barrio R., Shilnikov A., and Shilnikov L. Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos // *Int. J. Bifurcation Chaos*. 2012. Т. 22. С. 1230016.
- [22] Gonchenko S. Reversible Mixed Dynamics: A Concept and Examples // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2016. Т. 5. № 4. С. 365–374.
- [23] Гонченко С. В., Тураев Д. В. О трех типах динамики и понятии аттрактора // *Труды МИАН*. 2017. Т. 297. С. 133–157.

On a reversible three-dimensional system containing the Lorenz attractor and the Lorenz repeller

A.S. Gonchenko¹, A. G. Korotkov^{1,2}, E.A. Samylina²

¹Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Russia, Nizhny Novgorod)

² National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

agonchenko@mail.ru, koral81@bk.ru, samylina.evgeniya@mail.ru

Abstract. We study the problem on the existence of Lorenz-like attractors and repellers in three-dimensional time-reversible systems, as well as the structure of bifurcation scenarios for their emergence. In this connection, we consider a system that is the flow normal form for reversible bifurcations of a fixed point with the triplet $(-1, -1, +1)$ of multipliers. The bifurcation set itself of the indicated reversible bifurcation should be extremely complex (the normal form contains 7 independent parameters). However, we are mainly interested here in bifurcations leading to the appearance of a symmetric pair “Lorenz attractor – Lorenz repeller”, which, as we show, can be studied within the framework of two-parameter subfamilies. In the paper, two main bifurcation scenarios for the emergence of such a pair are described, and also a quite unusual scenario is outlined for the appearance of Lorenz-like attractor and repeller in the case when the system has only two equilibria. The corresponding phenomenon seems new – for comparison, we note that even the Lorenz system has three equilibria: one of them belongs to the attractor, and the other two reside in its “holes”.

Keywords: strange attractor, Lorenz attractor, reversible system

Acknowledgements. The authors thank S.V. Gonchenko and D.V. Turaev for statement of the problem and useful remarks. This work was supported by the Russian Science Foundation grant 20-71-00079. Numerical studies in § 2 were supported by the RSF grant 19-11-00280. E. Samylina thanks the grant of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation agreement No. 075-15-2019-1931 at the Laboratory of Dynamic Systems and Applications of the National Research University Higher School of Economics, as well as the Foundation for the Development of Theoretical Physics and Mathematics “BASIS” (grant No. 20-7-1 -36-5) for supporting scientific research.