ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

К ТЕОРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мухамадиев Э., Наимов А. Н.

Вологодский государственный университет
emuhamadiev@rambler.ru
naimovan@vogu35.ru

Аннотация. Для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с выделенной главной положительно однородной частью сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, обеспечивающие априорную оценку ограниченных решений. В условиях априорной оценки, применяя методы направляющих функций и Важевского, доказан критерий существования ограниченного решения. Полученные результаты уточняют и обобщают ранее полученные результаты авторов в многомерном случае.

Ключевые слова: ограниченное решение, априорная оценка, гомотопные функции, метод направляющих функций, метод Важевского.

1 Введение

В статье исследовано существование ограниченных решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$x'(t) = \nabla v(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in R^n, \tag{1}$$

где $n \geq 3$, R^n – пространство n-мерных векторов с евклидовым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ∇v – градиент функции $v \in \mathbb{V}_m$, $f \in \mathcal{R}_m$. Здесь $m > 1$, $\mathbb{V}_m$ – множество функций вида

$$v(y) = |y|^{m+1-q} \prod_{i=1}^{q} (\langle c_i, y \rangle - d_i |y|), \quad y \in R^n,$$

$q = q(v) \geq 1$, $d_i \in R$, $c_i \in R^n$, $i = 1, \ldots, q$. Множество $\mathcal{R}_m$ состоит из непрерывных отображений $f : R^{1+n} \mapsto R^n$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|y| \to \infty} |y|^{-m} \sup_{t \in R} |f(t, y)| = 0.$$

В системе уравнений (1) выделена главная нелинейная часть ∇v, а f является возмущением. В терминах свойств коэффициентов $d_i \in R$, $c_i \in R^n$, $i = 1, \ldots, q$ функции v исследованы условия априорной оценки и существования ограниченных решений системы уравнений (1) при любом возмущении $f \in \mathcal{R}_m$.

Ограниченным решением системы уравнений (1) называем такую вектор-функцию $x(t)$, которая на всем $R = (-\infty, +\infty)$ определена и ограничена, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет системе уравнений (1).

Вопрос о существовании ограниченных и периодических решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений представляет научный интерес с точки зрения применения и развития идей и методов нелинейного анализа в теории дифференциальных и интегральных уравнений. В теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений применяются такие методы нелинейного анализа, как метод априорной оценки, метод направляющих функций, методы вычисления вращения векторных полей, метод Важевского. Основы перечисленных методов и их применения изложены в монографиях [1] – [6].

Системы уравнений вида (1) являются подклассом класса уравнений, рассмотренных в работах [7, 8]. В работе [7] исследовано существование ограниченных и периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью. Из результатов данной работы следует, что для $v \in \mathbb{V}_m$, $f \in \mathcal{R}_m$ существует ограниченное решение системы уравнений (1), если $\nabla v(y) \neq 0$ $\forall y \neq 0$ и $\gamma(\nabla v) \neq 0$, где $\gamma(\nabla v)$ – вращение (степень отображения) векторного поля $\nabla v : S^{n-1} \mapsto R^n$ на единичной сфере S^{n-1}. Условие $\gamma(\nabla v) \neq 0$, в общем, достаточно для существования ограниченного решения. В работе [9] доказано, что при $n = 3$

для любой положительно однородной функции v порядка $m+1$ ($m>1$), удовлетворяющей условию $\nabla v(y) \neq 0 \ \forall y \neq 0$, система уравнений (1) имеет ограниченное решение при любом $f \in \mathcal{R}_m$ тогда и только тогда, когда множество нулей функции v на единичной сфере S^{n-1} пусто или не связно; при этом возможно $\gamma(\nabla v) = 0$. Этот результат в настоящей работе уточнен и обобщен для функций $v \in \mathbb{V}_m$ при всех $n \geq 3$. А именно, сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия на $v \in \mathbb{V}_m$, обеспечивающие априорную оценку ограниченных решений системы уравнений (1) при любом $f \in \mathcal{R}_m$. В условиях априорной оценки, применяя методы направляющих функций и Важевского [6, гл. 10, §3], доказан критерий существования при любом $f \in \mathcal{R}_m$ ограниченного решения системы уравнений (1). Критерий существования ограниченного решения, в отличие от работы [9], сформулирован в терминах свойств коэффициентов $d_i \in R$, $c_i \in R^n$, $i = 1, \ldots, q$ функции $v \in \mathbb{V}_m$.

Существование периодических и ограниченных решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследовано в многочисленных работах других авторов. Среди них можно отметить работы [10], [11], где применяются подходы и методы, близкие к настоящей работе.

2 Основные результаты

Введем следующие обозначения: $C(R;R^n)$ – банахово пространство непрерывных и ограниченных на $R = (-\infty, +\infty)$ вектор-функций $z(t)$ с нормой

$$||z|| := \sup_{t \in R} |z(t)|,$$

$C^1(R;R^n)$ – банахово пространство непрерывно дифференцируемых и ограниченных на R вместе с производной вектор-функций $z(t)$ с нормой $||z||_1 := ||z|| + ||z'||$.

Существование ограниченных решений системы уравнений (1) проведем по аналогии с работой [9], применяя методы априорной оценки, направляющих функций и Важевского.

Скажем, что для функции $v \in \mathbb{V}_m$ имеет место априорная оценка ограниченных решений системы уравнений (1), если при любом $f \in \mathcal{R}_m$ множество ограниченных решений системы уравнений (1) либо пусто, либо ограничено по норме пространства $C(R;R^n)$.

Справедлива следующая теорема об априорной оценке.

Теорема 1 . *Для функции $v \in \mathbb{V}_m$ имеет место априорная оценка ограниченных решений системы уравнений (1) тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1. $\nabla v(y) \neq 0 \ \forall y \neq 0$.

2. Коэффициенты $d_i \in R$, $c_i \in R^n$, $i = 1, \ldots, q$ функции v удовлетворяют двум условиям:

a) $|c_i| \neq |d_i|$, $i = 1, \ldots, q$;

b) для любых двух номеров $i \neq j$ верна импликация

$$(|c_i| > |d_i|, |c_j| > |d_j|) \quad \Rightarrow \quad |d_i c_j - d_j c_i|^2 > |c_i|^2 |c_j|^2 - \langle c_i, c_j \rangle^2.$$

3. Существуют $\sigma_0 > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что для любой вектор-функции $z \in C^1(R; R^n)$ при $||z|| > r_0$ верно неравенство $||z' - \nabla v(z)|| > \sigma_0 ||z||^m$.

Обозначим через $\mathbb{V}_m^0$ множество функций $v \in \mathbb{V}_m$, удовлетворяющих условиям 2a и 2b теоремы 1. Две функции $v_1, v_2 \in \mathbb{V}_m^0$ назовем гомотопными, если существует семейство функций $\tilde{v}(\cdot, \lambda) \in \mathbb{V}_m^0$, $\lambda \in [0, 1]$, непрерывно зависящее от λ и такое, что $\tilde{v}(\cdot, 0) = v_1$, $\tilde{v}(\cdot, 1) = v_2$.

Аналогично теореме 2, доказанной в работе [9], верна следующая теорема о гомотопической инвариантности существования ограниченного решения.

Теорема 2 . *Если функции $v_1, v_2 \in \mathbb{V}_m^0$ гомотопны и для $v = v_1$ существует ограниченное решение системы уравнений (1) при любом $f \in \mathcal{R}_m$, то для $v = v_2$ также существует ограниченное решение системы уравнений (1) при любом $f \in \mathcal{R}_m$.*

На основе теорем 1 и 2, применяя методы направляющих функций и Важевского, доказана

Теорема 3 . *Для $v \in \mathbb{V}_m^0$ существует ограниченное решение системы уравнений (1) при любом $f \in \mathcal{R}_m$ тогда и только тогда, когда отлично от единицы число*

$$p(v) := card\{i : |c_i| > |d_i|\}.$$

Из теоремы 3 и результатов работы [7] вытекает, что если $p(v) = 1$, то $\gamma(\nabla v) = 0$. А если $p(v) \neq 1$, то возможно $\gamma(\nabla v) = 0$. Например, полагая $n = 3$ и $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$, рассмотрим функцию

$$v_*(y) = |y|^{m-2}(y_3 - d_1|y|)(y_3 - d_2|y|)(y_3 - d_3|y|),$$

где $0 < d_1 < d_2 < d_3 < 1$. Очевидно, $p(v_*) = 3$ и $v_* \in \mathbb{V}_m^0$. Согласно формуле, доказанной в работе [12, Theorem 1], имеем $\gamma(\nabla v_*) = p_+(v_*) - p_-(v_*)$, где $p_\pm(v_*)$ – число связных компонент множества точек y единичной сферы S^2, где $\pm v_*(y) > 0$. В данном случае $p_\pm(v_*) = 2$, следовательно, $\gamma(\nabla v_*) = 0$. Таким образом, $\gamma(\nabla v_*) = 0$ и в силу теоремы 3 для $v = v_*$ существует ограниченное решение системы уравнений (1) при любом $f \in \mathcal{R}_m$.

3 Априорная оценка

В этом параграфе приведем доказательство теоремы 1.

Сначала докажем, что для $v \in \mathbb{V}_m$ априорная оценка ограниченных решений системы уравнений (1) равносильна условию 1. Необходимость условия 1 очевидна, так как если $\nabla v(y_0) = 0$ при некотором $y_0 \neq 0$, то функции $x_k(t) \equiv ky_0$, $k = 1, 2, \ldots$ будут ограниченными решениями системы уравнений (1) при $f(t, y) \equiv 0$ и в совокупности не ограничены по норме пространства $C(R; R^n)$.

Пусть для $v \in \mathbb{V}_m$ выполнено условие 1. Предположим, что при некотором $f \in \mathcal{R}_m$ существует последовательность ограниченных решений $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ системы уравнений (1), не ограниченная по норме пространства $C(R; R^n)$: $r_k = ||x_k|| \to \infty$ при $k \to \infty$. Рассмотрим функции $z_k(t) = r_k^{-1} x_k(t_k + r_k^{1-m} t)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $|x_k(t_k)| > r_k - 1/k$. Для этих функций имеем: $|z_k(0)| > 1 - 1/(kr_k)$, $||z_k|| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$ и $z_k'(t) = \nabla v(z_k(t)) + o(1)$ при $k \to \infty$ равномерно по t на каждом конечном отрезке числовой прямой R (учитывая условие $f \in \mathcal{R}_m$). Переходя к пределу на расширяющихся отрезках числовой прямой R получаем ненулевое ограниченное решение автономной системы $z_0'(t) = \nabla v(z_0(t))$, $|z_0(t)| \leq |z_0(0)| = 1$, $t \in R$. Для функции $z_0(t)$ при любом $t \in R$ имеем $z_0(t) \neq 0$ и $(v(z_0(t)))_t' = |\nabla v(z_0(t))|^2 > 0$ (в силу условия 1). Отсюда вытекает существование конечных пределов $v(z_0(t)) \to v_1$, $t \to -\infty$ и $v(z_0(t)) \to v_2$, $t \to +\infty$, где $v_1 < v_2$. Вдоль последовательностей $s_k \in (-k-1, -k)$, $\tau_k \in (k, k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$, определяемых из равенств $v(z_0(-k)) - v(z_0(-k-1)) = (v(z_0))_t'(s_k)$, $v(z_0(k+1)) - v(z_0(k)) = (v(z_0))_t'(\tau_k)$, имеем: $|\nabla v(z_0(s_k))| \to 0$, $|\nabla v(z_0(\tau_k))| \to 0$. Отсюда, в силу условия 1, следует, что $z_0(s_k) \to 0$, $z_0(\tau_k) \to 0$ и $v_1 = v_2 = 0$. Пришли к противоречию.

Таким образом, для $v \in \mathbb{V}_m$ априорная оценка ограниченных решений системы уравнений (1) равносильна условию 1.

В работе [12, Theorem 1] доказана равносильность условий 1 и 2 при $n = 3$.

Схема доказательства применима и при $n > 3$. Следовательно, для $v \in \mathbb{V}_m$ априорная оценка ограниченных решений системы уравнений (1) равносильна условиям 2a и 2b.

Пусть для $v \in \mathbb{V}_m$ выполнено условие 3. Проверим, что при любом $f \in \mathcal{R}_m$ имеет место априорная оценка ограниченных решений. В силу условия $f \in \mathcal{R}_m$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $M_\varepsilon > 0$ такое, что при любом $y \in R^n$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in R^n} |f(t, y)| < \varepsilon |y|^m + M_\varepsilon.$$

Отсюда, фиксируя $\varepsilon \in (0, \sigma_0)$, для любого ограниченного решения системы уравнений (1) выводим: либо $||x|| \leq r_0$, либо $||x|| > r_0$ и в силу условия 3

$$\varepsilon ||x||^m + M_\varepsilon \geq \sigma_0 ||x||^m, \qquad ||x|| \leq \left(M_\varepsilon (\sigma_0 - \varepsilon)^{-1} \right)^{1/m}.$$

Следовательно, имеет место априорная оценка ограниченных решений:

$$||x|| < r_0 + \left(M_\varepsilon (\sigma_0 - \varepsilon)^{-1} \right)^{1/m}.$$

Теперь покажем, что для $v \in \mathbb{V}_m$ из условия 1 следует условие 3. Действительно, если для $v \in \mathbb{V}_m$ условие 3 не выполнено, то существует последовательность вектор-функций $x_k \in C^1(R^n; R)$, $k = 1, 2, \ldots$ такая, что $r_k = ||x_k|| \to \infty$ при $k \to \infty$ и $||x_k' - \nabla v(x_k)|| < k^{-1} ||x_k||^m$, $k = 1, 2, \ldots$. Далее, рассматривая функции $z_k(t) = r_k^{-1} x_k(t_k + r_k^{1-m} t)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $|x_k(t_k)| > r_k - 1/k$, и рассуждая выше проведенным образом, приходим к противоречию с условием 1.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1 . *Если для $v \in \mathbb{V}_m$ имеет место априорная оценка ограниченных решений системы уравнений (1), то в вопросе существования ограниченных решений системы уравнений (1) без ограничения общности можно считать, что $f \in \mathcal{R}_m \cap C^{0,\infty}(R \times R^n; R^n)$.*

Доказательство. Отображение $f \in \mathcal{R}_m$ приблизим отображениями

$$f_\varepsilon(t, y) = \int\limits_{R^n} K_\varepsilon(|y - z|) f(t, z) dz, \quad y \in R^n, \quad \varepsilon > 0,$$

где $K_\varepsilon(s) = 0$ при $|s| \geq \varepsilon$ и

$$K_\varepsilon(s) = A_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - s^2}}, \quad |s| < \varepsilon, \qquad \int\limits_{R^n} K_\varepsilon(|z|) dz = 1.$$

Легко проверить, что $f_\varepsilon \in \mathcal{R}_m \cap C^{0,\infty}(R \times R^n; R^n)$ и при любых $r > 0$ и $T > 0$

$$\sup_{t\in R, |y|\le r} |f_\varepsilon(t,y)| \le \sup_{t\in R, |y|\le r+\varepsilon} |f(t,y)|,$$

$$\max_{|t|\le T, |y|\le r} |f_\varepsilon(t,y) - f(t,y)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Если при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ система уравнений

$$x'_\varepsilon(t) = \nabla v(x_\varepsilon(t)) + f_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)) \tag{2}$$

имеет ограниченное решение x_ε, то верна оценка

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_1} ||x_\varepsilon|| < \infty. \tag{3}$$

Действительно, для $r_\varepsilon := ||x_\varepsilon||$ при $r_\varepsilon > r_0$ в силу условия 3 имеем:

$$\sigma_0 r_\varepsilon^m < \sup_{t\in R} |x'_\varepsilon(t) - \nabla v(x_\varepsilon(t))| \le \sup_{t\in \mathbb{R}, |y|\le r_\varepsilon+\varepsilon} |f(t,y)| \le \frac{1}{2}\sigma_0 (r_\varepsilon + \varepsilon)^m + M_0.$$

Отсюда вытекает оценка (3). Учитывая эту оценку и переходя к пределу в системе уравнений (2) при $\varepsilon \to 0$, получим ограниченное решение системы уравнений (1).

4 Существование ограниченного решения

В этом параграфе докажем теорему 3, применяя методы направляющих функций [3] – [5] и Важевского [6, гл. 10, §3]. Метод Важевского применяется при $p(v) \ge 2$. Суть данного метода состоит в том, что с помощью набора функций выделяется область в фазовом пространстве, где остаются некоторые решения $x(t)$ системы дифференциальных уравнений при возрастании t. В приведенном доказательстве в качестве набора функций используются направляющие функции $v(y)$, $v(y) - \varepsilon|y|^{m+1}$, где ε – малое положительное число.

Необходимость. Пусть для $v \in \mathbb{V}_m^0$ имеет место равенство $p(v) = 1$ и $|c_1| > |d_1|$. Покажем, что функция v гомотопна другой функции из $\mathbb{V}_m^0$ для которой не существует ограниченное решение системы уравнений (1) при некотором $f \in \mathcal{R}_m$. Тогда в силу теоремы 2 для функции v не при всех $f \in \mathcal{R}_m$ существует ограниченное решение системы уравнений (1).

Функция v посредством семейства функций

$$\tilde{v}(y,\lambda) = |y|^{m+1-q}(\langle c_1, y\rangle - \lambda d_1|y|)\prod_{i=2}^{q}(\langle \lambda c_i, y\rangle - d_i|y|), \quad y \in R^n, \quad \lambda \in [0,1],$$

гомотопируется к функции $v_1(y) = a|y|^m\langle c_1, y\rangle$, где $a \neq 0$. Можно считать, что первая координата c_{11} вектора c_1 отлична от нуля. В этом случае функция v_1 гомотопна функции $v_2(y) = ac_{11}|y|^m y_1$. Система уравнений

$$x'(t) = \nabla v_2(x(t)) + ac_{11}(1,0,\ldots,0)^\top$$

не имеет ограниченного решения, так как правая часть первого уравнения равна

$$ac_{11}\left(|x(t)|^m + m|x(t)|^{m-2}x_1^2(t) + 1\right)$$

и по модулю не меньше числа $|ac_{11}|$.

Достаточность. Пусть $v \in \mathbb{V}_m^0$ и $p(v) \neq 1$. Покажем, что при любом $f \in \mathcal{R}_m$ система уравнений (1) имеет ограниченное решение. Для этого достаточно построить последовательность вектор-функций $z_k \in C^1([0,+\infty); R^n)$, $k = 1,2,\ldots$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_k \sup_{t\geq 0} |z_k(t)| < \infty, \tag{4}$$

$$z_k'(t) = \nabla v(z_k(t)) + f(t-k, z_k(t)), \quad t > 0, \quad k = 1,2,\ldots \quad . \tag{5}$$

Тогда рассматривая последовательность вектор-функций $x_k(t) = z_k(t+k)$, $k = 1,2,\ldots$ и на расширяющихся отрезках числовой прямой R переходя к равномерному пределу, получим ограниченное решение системы уравнений (1).

Пусть $p(v) = 0$. Тогда v гомотопна $-|y|^{m+1}$ или $|y|^{m+1}$. Поэтому в силу теоремы 2 можно считать, что $v(y) = -|y|^{m+1}$ или $v(y) = |y|^{m+1}$. Достаточно рассмотреть первый случай, второй случай легко сводится к первому.

Рассмотрим решения $z_k(t)$ систем уравнений

$$z'(t) = -\nabla(|z(t)|^{m+1}) + f(t-k, z(t)), \quad t > 0, \quad k = 1,2,\ldots \quad ,$$

которые удовлетворяют начальному условию $z_k(0) = 0$. Такие $z_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$ существуют как решения задачи Коши для систем уравнений с непрерывными правыми частями.

Выберем $r_1 > 0$ так, чтобы при $|y| > r_1$ имело место неравенство

$$\sup_{t\in R} |f(t,y)| < (m+1)|y|^m.$$

Тогда при $|z_k(t)| > r_1$ имеем:

$$\left(|z_k(t)|^2\right)' = 2\langle z_k(t), z_k'(t)\rangle = -2(m+1)|z_k(t)|^{m+1} + 2\langle z_k(t), f(t-k, z_k(t))\rangle < 0.$$

Следовательно, $|z_k(t)| \le r_1$ при $t > 0$ и вектор-функции $z_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям (4) и (5) при $v(y) = -|y|^{m+1}$. Таким образом, достаточность при $p(v) = 0$ доказана.

Пусть $p(v) \ge 2$. Легко проверить, что $p(v)$ равно числу связных компонент множества

$$\Omega_0(v) = \{y \in R^n : |y| = 1, \quad v(y) = 0\}$$

и $p(v) + 1 = p_+(v) + p_-(v)$, где $p_\pm(v)$ – число связных компонент множества

$$\Omega_\pm(v) = \{y \in R^n : |y| = 1, \quad \pm v(y) > 0\}.$$

Из условия $p(v) \ge 2$ следует, что $p_\pm(v) \ge 1$ и верно одно из неравенств $p_+(v) \ge 2$, $p_-(v) \ge 2$. Можно считать, что $p_+(v) \ge 2$. В этом случае замыкание множества

$$D_{r,\varepsilon}(v) = \{y \in R^n : \quad |y| > r \quad v(y) > \varepsilon |y|^{m+1}\}$$

не связно и состоит из $p_+(v)$ связных компонент при всех $r > 1$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Учитывая условия $f \in \mathcal{R}_m$ и $\nabla v(y) \ne 0$ $\forall y \ne 0$, выберем $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ и $r_1 > 1$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\langle \nabla v(y) - \varepsilon_1(m+1)|y|^{m-1}y, \nabla v(y)\rangle > 0 \qquad \forall y \ne 0, \tag{6}$$

$$\langle \nabla v(y) - \varepsilon_1(m+1)|y|^{m-1}y, \nabla v(y) + f(t, y)\rangle > 0 \qquad \forall t \in R, \quad |y| \ge r_1. \tag{7}$$

Лемма 1 . *Для любого неограниченного решения $z(t)$, $t \in [0, \alpha)$ системы уравнений*

$$z'(t) = \nabla v(z(t)) + f(t-k, z(t)), \tag{8}$$

где k – фиксированное число, существует $\alpha_1 \in (0, \alpha)$ такое, что $z(t) \in D_{r_1,\varepsilon_1}(v)$ при $t \in (\alpha_1, \alpha)$.

Доказательство. Из неограниченности $z(t)$, $t \in [0, \alpha)$ следует, что $|z(t)| \to \infty$ при $t \to \alpha$. Поэтому можно считать, что $|z(t)| > r_1$ при $t \in [0, \alpha)$.

В общем возможны два случая: 1) $v(z(t)) \le \varepsilon_1 |z(t)|^{m+1}$ при всех $t \in [0, \alpha)$; 2) $v(z(\alpha_1)) > \varepsilon_1 |z(\alpha_1)|^{m+1}$ при некотором $\alpha_1 \in [0, \alpha)$. Покажем, что первый случай невозможен. Действительно, предположим, что имеет место первый случай. Рассмотрим последовательность функций $z_j(t) = \rho_j^{-1} z(t_j + \rho_j^{1-m} t)$, $t \in [-t_j \rho_j^{m-1}, 0]$, $j = 1, 2, \ldots$, где $0 < t_1 < t_2 < \ldots$,

$$\rho_j = \max_{0 \le t \le t_j} |z(t)| = |z(t_j)|,$$

$t_j \to \alpha$ и $\rho_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Для этих функций имеем: $|z_j(t)| \le |z_j(0)| = 1$, $v(z_j(t)) \le \varepsilon_1 |z_j(t)|^{m+1}$, $z_j'(t) = \nabla v(z_j(t)) + o(1)$ при $t \in [-t_j \rho_j^{m-1}, 0]$, $j = 1, 2, \ldots$. Переходя к пределу получим: $|z_0(t)| \le |z_0(0)| = 1$, $v(z_0(t)) \le \varepsilon_1 |z_0(t)|^{m+1}$, $z_0'(t) = \nabla v(z_0(t))$ при $t \in (-\infty, 0]$. Из ограниченности $z_0(t)$ следует, что $z_0(t) \to 0$ при $t \to -\infty$. В силу системы дифференциальных уравнений $z_0'(t) = \nabla v(z_0(t))$ выводим:

$$v(z_0(t)) - \varepsilon_1 |z_0(t)|^{m+1} = v(z_0(s)) - \varepsilon_1 |z_0(s)|^{m+1} + \int_s^t \left(v(z_0(\tau)) - \varepsilon_1 |z_0(\tau)|^{m+1} \right)_\tau' d\tau,$$

$$v(z_0(t)) - \varepsilon_1 |z_0(t)|^{m+1} = v(z_0(s)) - \varepsilon_1 |z_0(s)|^{m+1}$$
$$+ \int_s^t \langle \nabla v(z_0(\tau)) - \varepsilon_1 (m+1) |z_0(\tau)|^{m-1} z_0(\tau), \nabla v(z_0(\tau)) \rangle d\tau.$$

Переходя к пределу при $s \to -\infty$ и учитывая неравенство (6), получаем: $v(z_0(t)) > \varepsilon_1 |z_0(t)|^{m+1}$ при $t \in (-\infty, 0]$. Пришли к противоречию. Таким образом, первый случай невозможен.

Теперь рассмотрим второй случай, когда при некотором $\alpha_1 \in [0, \alpha)$ имеет место неравенство $v(z(\alpha_1)) > \varepsilon_1 |z(\alpha_1)|^{m+1}$. Проверим, что данное неравенство сохраняется при $t \in (\alpha_1, \alpha)$. Действительно, если не так, то в первой точке $s \in (\alpha_1, \alpha)$, где имеет место равенство $v(z(s)) = \varepsilon_1 |z(s)|^{m+1}$, должно выполнятся неравенство

$$\left(v(z(t)) - \varepsilon_1 |z(t)|^{m+1} \right)_{t=s}' \le 0.$$

С другой стороны, в силу системы уравнений (8) и неравенства (7) имеем:

$$\left(v(z(t)) - \varepsilon_1 |z(t)|^{m+1} \right)_{t=s}' = \langle \nabla v(z(s)) - \varepsilon_1 (m+1) |z(s)|^{m-1} z(s), z'(s) \rangle$$

$$= \langle \nabla v(z(s)) - \varepsilon_1 (m+1) |z(s)|^{m-1} z(s), \nabla v(z(s)) + f(s-k, z(s)) \rangle > 0.$$

Лемма 1 доказана.

В последующем, учитывая следствие 1, можно считать, что $f \in \mathcal{R}_m \cap C^{0,\infty}(R \times R^n; R^n)$. Тогда при фиксированном k и любом $y \in R^n$ существует единственное решение $Z_k(t, y)$ системы уравнений (8), которое удовлетворяет начальному условию $Z_k(0, y) = y$ и непрерывно зависит от y.

Лемма 2 . *Существует вектор* $y_k \in B_{r_1} = \{y \in R^n : |y| < r_1\}$ *такой, что соответствующее ему решение* $Z_k(t, y_k)$ *системы уравнений (8) определено и ограничено на промежутке* $[0, +\infty)$.

Доказательство. Предположим, что при любом $y \in B_{r_1}$ решение $Z_k(t, y)$, $t \in [0, \alpha(y))$ системы уравнений (8) не ограничено. Тогда в силу леммы 1 для любого вектора $y \in B_{r_1}$ существует наименьшее $\alpha_1(y) \in (0, \alpha(y))$ такое, что $Z_k(t, y) \in D_{r_1,\varepsilon_1}(v)$ при $t \in (\alpha_1(y), \alpha(y))$.

Связные компоненты множества $D_{r_1,\varepsilon_1}(v)$ пронумеруем числами $1, \ldots, p_+(v)$ и каждому $y \in B_{r_1}$ сопоставим номер $I_k(y)$ связной компоненты $D_{r_1,\varepsilon_1}(v)$, где окажется $Z_k(t, y)$ при $t \in (\alpha_1(y), \alpha(y))$. Полученное отображение $I_k : B_{r_1} \mapsto \{1, \ldots, p_+(v)\}$ локально постоянно в силу непрерывной зависимости $Z_k(t, y)$ от y. Следовательно, $I_k(y)$ принимает одно значение при всех $y \in B_{r_1}$. Но, с другой стороны, если точка $y \in B_{r_1}$ находится в малой окрестности границы связной компоненты с номером j, то $I_k(y) = j$, это следует из доказательства леммы 1 и непрерывной зависимости $Z_k(t, y)$ от y. Пришли к противоречию. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 вытекает, что при $p(v) \geq 2$ существует последовательность вектор-функций $z_k \in C^1([0, +\infty); R^n)$, $k = 1, 2, \ldots$ с начальными значениями из B_{r_1} и удовлетворяющих условию (5). Покажем, что данная последовательность вектор-функций удовлетворяет условию (4). Этим самым завершится доказательство теоремы 3.

Предположим, что

$$\rho_k = \sup_{t \geq 0} |z_k(t)| \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Рассмотрим функции $\tilde{z}_k(t) = \rho_k^{-1} z_k(t_k + \rho_k^{1-m} t)$, $t \in [-\rho_k^{m-1} t_k, +\infty)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $|z_k(t_k)| > \rho_k - 1/k$ и $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Для этих функций имеем: $|\tilde{z}_k(0)| > 1 - 1/(k\rho_k)$, $|\tilde{z}_k(t)| \leq 1$, $\tilde{z}_k'(t) = \nabla v(\tilde{z}_k(t)) + o(1)$, $t \in [-\rho_k^{m-1} t_k, +\infty)$, $k = 1, 2, \ldots$. Переходя к пределу получаем ненулевое ограниченное решение автономной системы $\tilde{z}_0'(t) = \nabla v(\tilde{z}_0(t))$, $|\tilde{z}_0(t)| \leq |\tilde{z}_0(0)| = 1$, $t \in R$. В ходе доказательства теоремы 1 установлено, что существование такого решения противоречит условию $\nabla v(y) \neq 0$ $\forall y \neq 0$.

Теорема 3 доказана.

Список литературы

[1] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИФМЛ, 1959.

[2] Плисс В. А . Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964.

[3] Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

[4] Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

[5] Obukhovskii V., Kornev S., Van Loi N., Zecca P. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture notes in mathematics. GmbH,Springer-Verlag , 2076. 2013. Pp. 1–173.

[6] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[7] Мухамадиев Э. О построении правильной направляющей функции для системы дифференциальных уравнений. М.: Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 190, № 4. С. 777-779.

[8] Мухамадиев Э. Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Доклады Академии наук. 1996. Т. 351, № 5. С. 596-598.

[9] Мухамадиев Э., Наимов А.Н. Критерии существования периодических и ограниченных решений для трехмерных систем дифференциальных уравнений. Екатеринбург: Труды ИММ УрО РАН. 2021. Т.27. № 1. С. 157-172.

[10] Перов А. И., Каверина В. К. Применение идей метода направляющих функций при исследовании неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Тамбов: Вестник Тамбовского универ. Серия: Естест. и техн. науки. 2018. Т. 23, № 123. С. 510-516.

[11] Перов А. И., Каверина В. К. Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова. М.: Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 2. С. 269-272.

[12] Mukhamadiev E., Naimov A. N. On the homotopy classification of positively homogeneous functions of three variables. Petrozavodsk: J. Issues Anal. 2021. V.10 (28). № 2. Pp. 67–78.

ON THE THEORY OF THE EXISTENCE OF BOUNDED SOLUTIONS OF SYSTEMS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mukhamadiev E., Naimov A. N.

Vologda State University
emuhamadiev@rambler.ru
naimovan@vogu35.ru

Abstract. We formulate and prove necessary and sufficient conditions that provide an a priori estimate for bounded solutions for one class of systems of nonlinear ordinary differential equations with the main positively homogeneous part. A criterion for the existence of bounded solutions is proved using the method of guiding functions and Vazhevski's method under the condition of an a priori estimate. These results refine and generalize the previously obtained results of the authors in the multidimensional case.

Keywords: bounded solution, a priori estimate, homotopic functions, method of guiding functions, Vazhevski's method.