ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота

А.Г. Елисеев
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Россия
predikat@bk.ru; yeliseevag@mpei.ru

Аннотация. В статье на основе метода регуляризации С.А.Ломова построено асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии сильной точки поворота. Метод регуляризации позволяет построить равномерное на всей вещественной оси асимптотическое решение задачи. Идея данной работы восходит к работе, в которой разработаны методы решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае «простой» точки поворота предельного оператора с натуральным показателем.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача Коши, параболическое уравнение, асимптотическое решение, метод регуляризации, «сильная» точка поворота.

1. Введение.

С помощью метода регуляризации активно развивается общая теория сингулярных возмущений в условиях стабильности спектра предельного оператора [1]. Условия стабильности спектра переменного оператора, если говорить кратко, обеспечивают такое же поведение спектральных характеристик оператора (равномерное по независимой переменной), как и при постоянном спектре. Задачи с нестабильным спектром с общематематических позиций начали изучать порядка 50 лет назад, но для них законченной математической теории не получалось. Хотя были получены (с определенной долей искусственных приемов) асимптотические решения неоднородных задач с точками поворота и других задач с нарушением условий стабильности спектра [3, 4]. В результате стало ясно, что в условиях нестабильного спектра существенно особые сингулярности в неоднородных задачах определяются не только общим числом точек спектра предельного оператора, как это имеет место при стабильном спектре, но и числом нулей у отдельных точек спектра переменного оператора. Тщательный анализ имеющихся результатов привел к разработке общей теории асимптотического интегрирования для задач, в которых переменный предельный оператор дискретно необратим (т.е. необратим в нулях точек спектра). Метод регуляризации классифицирует три группы точек поворота:

1. «Простая» точка поворота — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга, одно собственное значение в отдельных точках t обращается в нуль [2], [5].

2. «Слабая» точка поворота — хотя бы одна пара собственных значений пересекаются в отдельных точках t, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения. Базис из собственных векторов остается гладким по t [6, 7].

3. «Сильная» точка поворота — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках t, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения. Базис в точках пересечения теряет гладкость по t [8].

Классические точки поворота, которые изучали Г. Вентцель, Х.А. Крамерс и Л. Бриллюэн, относятся к «сильным» точкам поворота.

Данная работа посвящена развитию метода регуляризации на сингулярно возмущенную задачу Коши для параболического уравнения с «сильной» точкой поворота первого порядка у предельного оператора.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u + h(x,t), \\ u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

Условие 1 $\exists M > 0 \ |h(x,t)| < M, h(x,t) \in C^\infty(-\infty,+\infty) \times [0,T]$.

Условие 2 $\exists M > 0 \ |f(x)| < M, f(x) \in C^{\infty}(-\infty, +\infty)$.

Условие 3 ε *— малый параметр. Задача изучается при* $\varepsilon \to 0$.

Задача (1)относится к классической задаче с сильной точкой поворота.

Действительно, если перевести уравнение в систему, предварительно сделав замену

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} = v, \\ \varepsilon\frac{\partial v}{\partial x} = x^2 u + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - h(x,t). \end{cases}$$

то имеем

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

Матрица предельного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что при $x \neq 0$ матрица диагонализируемая и собственный базис есть $e_1(x) = \binom{1}{x}$, $e_2(x) = \binom{1}{-x}$. А при $x = 0$ матрица принимает жорданову форму и базис есть $e_1(0) = \binom{1}{0}, e_1(0) = \binom{0}{1}$. Базис разрывен в точке $x = 0$. В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, используя каноническую форму оператора,зависящего от переменной x, к которой можно привести с помощю гладких преобразований [8]. В данном случае предельный оператор уже имеет каноническую форму. Поэтому в построении базиса и канонической формы нет необходимости. Кроме того оператор в точке $x = 0$необратим. Поэтому возникает проблема регуляризации правой части $h(x,t)$.

3. Формализм метода регуляризации

В случае задачи (1) регуляризирующую функцию будем искать в виде $e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(x,t)}$. Сделаем замену $u(x,t) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(x,t)}v(x,t)$ Подставив в однородное уравнение задачи (1), получим

$$-(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 - x^2)v(x,t) + \varepsilon(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}v(x,t) + 2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}) - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Выберем регуляризирующую функцию как решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2 - x^2 = 0, \\ \varphi(x,0) = 0. \end{cases}$$

Введем обозначение $p = \frac{\partial\varphi}{\partial t},\ q = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} p + q^2 = x^2, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + 2q\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + 2q\frac{\partial q}{\partial x} = 2x, \\ \varphi(x,0) = 0,\ q(x,0) = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнения характеристик

$$dt = \frac{dx}{2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{2x} = \frac{d\varphi}{p + 2q^2}.$$

Параметризуем ось $0x,\ x = s$. Тогда $p = s^2,\ q^2 = x^2 - s^2$. Последовательно получаем серию решений

$$2t = ln\frac{x + \sqrt{x^2 - s^2}}{s},\ \varphi = \frac{x\sqrt{x^2 - s^2}}{2}.$$

Из первого выражения найдем параметр $s = \frac{x}{ch(2t)}$. Подставив во второе выражение , получим выражение для φ.

$$\varphi(x,t) = \frac{x^2 th(2t)}{2}$$

Отсюда получаем регуляризирующую функцию в виде:

$$e^{-\frac{x^2 th(2t)}{2\varepsilon}}.$$

Дополнительные регуляризирующие сингулярные операторы, связанные с точечной необратимостью предельного оператора, строятся с помощью фундаментального решения [9]. Задача их вложить правую часть уравнения в образ предельного оператора. Предельный оператор получается, если положить в уравнении задачи (1) $\varepsilon = 0$. Фундаментальное решение уравнения (1)согласно работе [9] имеет вид:

$$K(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi sh(2t)}} exp[-(cth(2t)\frac{x^2 + \xi^2}{2\varepsilon} + \frac{x\xi}{\varepsilon sh(2t)})]$$

Ядро Мелера обладает свойством $K(x,\xi,0)=\delta(x-\xi)$.

Дополнительные сингулярные интегральные операторы, если проинтегрировать ядро Мелера по переменной ξ имеют вид:

$$\sigma_0(x,t,\varepsilon)(\cdot)=\int\limits_0^t(\cdot)d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x,\xi,t-\tau)d\xi=\int\limits_0^t(\cdot)\frac{d\tau}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2th2(t-\tau)}{2\varepsilon}},$$
$$\sigma_1(x,t,\varepsilon)(\cdot)=\int\limits_0^t(\cdot)d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi K(x,\xi,t-\tau)d\xi=x\int\limits_0^t(\cdot)\frac{d\tau}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}^3}e^{-\frac{x^2th2(t-\tau)}{2\varepsilon}}.$$

Фактически сингулярные операторы $\sigma_0(x,t,\varepsilon)(\cdot),\sigma_1(x,t,\varepsilon)(\cdot)$ суть решения уравнения теплопроводности на правые части $\varepsilon,\varepsilon x$. Действия операторов на функцию запишется как:

$$\sigma_0(f(t))=\int\limits_0^t\frac{f(\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2th2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau,$$
$$\sigma_1(f(t))=x\int\limits_0^t\frac{f(\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}^3}e^{-\frac{x^2th2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau.$$

Обозначим оператор $T_\varepsilon=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2$.Тогда

$$T_\varepsilon(\sigma_0(f(t)))=\varepsilon f(t)+\sigma_0(T_\varepsilon f(t))=\varepsilon f(t),$$
$$T_\varepsilon(\sigma_1(f(t)))=\varepsilon xf(t)+\sigma_1(T_\varepsilon f(t))=\varepsilon xf(t).$$

Регуляризованное решение задачи (1) ищем в виде

$$u(x,t,\varepsilon)=v(x,t,\varepsilon)e^{-\frac{x^2th(2t)}{2\varepsilon}}+\sigma_0(y(t,\varepsilon))+\sigma_1(z(t,\varepsilon))+w(x,t,\varepsilon).\qquad(2)$$

Подставив (2) в (1) и выделив слагаемые при регуляризирующих функциях, получим систему:

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial t}+2xth(2t)\frac{\partial v}{\partial x}+th(2t)v=\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\ \sigma_0(T_\varepsilon y(t,\varepsilon)=0,\\ \sigma_1(T_\varepsilon z(t,\varepsilon)=0,\\ x^2w=h(x,t)-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\varepsilon y(t,\varepsilon)-\varepsilon xz(t,\varepsilon).\end{cases}\qquad(3)$$

Разложив (2)по степеням ε,

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k(v_k(x,t)e^{-\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}}+\sigma_0(y_k(t))+\sigma_1(z_k(t))+w_k(x,t)).$$

получим из (3) серию итерационных задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_k}{\partial t} + 2xth(2t)\frac{\partial v_k}{\partial x} + th(2t)v_k = \frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x^2}, \\ \sigma_0(T_\varepsilon y_k(t) = 0, \\ \sigma_1(T_\varepsilon z_k(t) = 0, \\ x^2 w_k = h(x,t)\delta_0^k - \frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2} - y_{k-1}(t) - xz_{k-1}(t), \\ v_k(x,0) + w_k(x,0) = f(x)\delta_k^0. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь δ_k^0 символ Кронекера. $\delta_0^0 = 1, \delta_k^0 = 0,$ при $k \neq 0$.

Решения на итерационном шаге ε^{-1} будут $v_{-1}(x,t) \equiv 0$, $w_{-1}(x,t) \equiv 0$, $y_{-1}(t)$, $z_{-1}(t)$– произвольные функции. Для их определения рассмотрим итерационную задачу на нулевом шаге ε^0.

$$\begin{cases} \frac{\partial v_0}{\partial t} + 2xth(2t)\frac{\partial v_0}{\partial x} + th(2t)v_0 = 0, \\ \sigma_0(T_\varepsilon y_0(t) = 0, \\ \sigma_1(T_\varepsilon z_0(t) = 0, \\ x^2 w_0 = h(x,t) - y_{-1}(t) - xz_{-1}(t), \\ v_0(x,0) + w_0(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{5}$$

Функции $y_0(t)$, $z_0(t)$ на данном шаге произвольны. Для разрешимости уравнения относительно $w_0(x,t)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения $y_{-1}(t) = h(0,t)$, $z_{-1}(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(0,t)$. Отсюда

$$w_0(x,t) = \frac{h(x,t) - h(0,t) - x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2} = h_0(x,t).$$

где $h_0(x,t)$-гладкая функция. Для решения уравнения относительно$v_0(x,t)$ сделаем замену $v_0(x,t) = \frac{\alpha(x,t)}{\sqrt{ch(2t)}}$. Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + 2xth(2t)\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} = 0.$$

Запишем уравнение характеристик:

$$dt = \frac{dx}{2xth(2t)} = \frac{d\alpha}{0}.$$

Первый интеграл соответсвенно равен:

$$\frac{x}{ch(2t)} = c_1.$$

Отсюда получим общее решение

$$\alpha(x,t)=g_0(\frac{x}{ch(2t)}).$$

где функция g_0 определяется из начальных условий. Таким образом общее решение $v_0(x,t)$ имеет вид:

$$v_0(x,t)=\frac{g_0(\frac{x}{ch(2t)})}{\sqrt{ch(2t)}}.$$

Из начального условия определим произвольную фуекцию g_0.При $t=0$ имеем

$$g_0(x)+h_0(x,0)=f(x).$$

Отсюда $g_0(x)=f(x)-h_0(x,0)$. Теперь можем записать решение на шаге ε^{-1}

$$u_{-1}(x,t)=\int\limits_0^t\frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2th2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau+x\int\limits_0^t\frac{\frac{\partial h(0,\tau)}{\partial\tau}}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}^3}e^{-\frac{x^2th2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau.$$

Для определения произвольных функций $y_0(t),\ z_0(t)$ рассмотрим задачу на шаге ε:

$$\begin{cases}\frac{\partial v_1}{\partial t}+2xth(2t)\frac{\partial v_1}{\partial x}+th(2t)v_1=\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2},\\ \sigma_0(T_\varepsilon y_1(t)=0,\\ \sigma_1(T_\varepsilon z_1(t)=0,\\ x^2w_1=-\frac{\partial h_0}{\partial t}(x,t)-y_0(t)-xz_0(t),\\ v_1(x,0)+w_1(x,0)=0.\end{cases}\tag{6}$$

Для определения $w_1(x,t)$ необходимо и достаточно, чтобы

$y_0(t)=-\frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t),\ z_0(t)=-\frac{\partial^2 h_0}{\partial x\partial t}(0,t).$

Или

$$y_0(t)=-\frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t),$$
$$z_0(t)=-\frac{\partial^2 h_0}{\partial t\partial x}(0,t).$$

Таким образом на данном шаге найдено слагаемое на нулевом шаге. Его можно записать в виде:

$$u_0(x,t)=\frac{1}{\sqrt{ch(2t)}}[f(\frac{x}{ch(2t)})-h_0(\frac{x}{ch(2t)},0)]e^{-\frac{x^2th(2t)}{2\varepsilon}}-$$
$$-\int\limits_0^t\frac{\frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial\tau}}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2th2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau-x\int\limits_0^t\frac{\frac{\partial^2h_0}{\partial\tau\partial x}(0,\tau))}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}^3}e^{-\frac{x^2th2(t-\tau)}{2\varepsilon}}d\tau+$$
$$+\frac{h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}.$$

Главный член асимптотики запишется как

$$u_{gl}(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}[\int\limits_0^t \frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2 th2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau + x\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial h(0,\tau)}{\partial\tau}}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}^3} e^{-\frac{x^2 th2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau]+$$
$$\frac{1}{\sqrt{ch(2t)}}[f(\frac{x}{ch(2t)}) - h_0(\frac{x}{ch(2t)},0)]e^{-\frac{x^2 th(2t)}{2\varepsilon}} -$$
$$-\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial\tau}}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2 th2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau - x\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial^2 h_0}{\partial\tau\partial x}(0,\tau))}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}^3} e^{-\frac{x^2 th2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau+$$
$$+\frac{h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}. \qquad (7)$$

Теперь можно написать решения системы (6). Решение относительно $w_1(x,t)$будет

$$w_1(x,t) = -\frac{\frac{\partial h_0}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t) - x\frac{\partial^2 h_0}{\partial t\partial x}(0,t)}{x^2} = h_1(x,t).$$

где $h_1(x,t)$-гладкая функция. Решим неоднородное уравнение относительно $v_1(x,t)$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + 2xth(2t)\frac{\partial v_1}{\partial x} + th(2t)v_1 = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}$$

Для решения уравнения относительно$v_1(x,t)$ сделаем замену $v_1(x,t) = \frac{\alpha(x,t)}{\sqrt{ch(2t)}}$ и вычислим $\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}$. Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2xth(2t)\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x} = \frac{g_0''(\frac{x}{ch(2t)})}{ch^2(2t)}.$$

Запишем уравнение характеристик:

$$dt = \frac{dx}{2xth(2t)} = \frac{ch^2(2t)d\alpha}{g_0''(\frac{x}{ch(2t)})}.$$

Первые интегралы соответсвенно равны:

$$\frac{x}{ch(2t)} = c_1,\ \alpha(x,t) - \frac{1}{2}th(2t)g_0''(c_1) = c_2.$$

Отсюда получим общее решение

$$\alpha(x,t) = \frac{1}{2}th(2t)g_0''(\frac{x}{ch(2t)}) + g_1(\frac{x}{ch(2t)}).$$

где функция g_1 определяется из начальных условий. Таким образом решение $v_(x,t)$ имеет вид:

$$v_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{ch(2t)}}[\frac{th(2t)}{2}g_0^{''}(\frac{x}{ch(2t)}) + g_1(\frac{x}{ch(2t)})].$$

Определим функцию $g_1(\frac{x}{ch(2t)})$.Воспользуемся начальным условием $g_1(x) = -h_1(x,0)$. Следовательно,

$$v_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{ch(2t)}}[\frac{th(2t)}{2}g_0^{''}(\frac{x}{ch(2t)}) - h_1(\frac{x}{ch(2t)},0)]$$

Функции $y_1(t),\ z_1(t)$ находятся на следующем итерационном шаге. Они находятся из условия разрешимости уравнения относительно $w_2(x,t)$:

$$\begin{array}{l} y_1(t) = -\frac{\partial h_1}{\partial t}(0,t) + \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(0,t), \\ z_1(t) = -\frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial x}(0,t) + \frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3}(0,t). \end{array}$$

Таким образом на данном шаге найдено слагаемое на шаге ε.Его можно записать:

$$\begin{array}{l} u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{ch(2t)}}[\frac{th(2t)}{2}g_0^{''}(\frac{x}{ch(2t)}) + g_1(\frac{x}{ch(2t)})]e^{-\frac{x^2 th(2t)}{2\varepsilon}} - \\ -\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial h_1}{\partial \tau}(0,\tau) - \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(0,\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch} 2(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2 th2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau - \\ -x\int\limits_0^t \frac{\frac{\partial^2 h_1}{\partial \tau \partial x}(0,\tau) - \frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3}(0,\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch} 2(t-\tau)}^3} e^{-\frac{x^2 th2(t-\tau)}{2\varepsilon}} d\tau - \\ -\frac{\frac{\partial h_0}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t) - x\frac{\partial^2 h_0}{\partial t \partial x}(0,t)}{x^2}. \end{array}$$

По этой схеме по индукции находятся следующие слагаемые асимптотического ряда.

4. Оценка остаточного члена

Пусть решены $(N+1)$ итерационных задач. Тогда решение задачи Коши можно представить в виде

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^k u_k(x,t) + \varepsilon^{N+1} R_N(x,t,\varepsilon), \tag{8}$$

где $R_N(x,t,\varepsilon)$ — остаток и слагаемые

$$u_k = v_k(x,t)e^{-\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}} + \sigma_0(y_k(t)) + \sigma_1(z_k(t)) + w_k(x,t).$$

Подставив (8) в (1), получим

$$\sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^{k+1}(\frac{\partial v_k(x,t)}{\partial t}e^{-\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial t}(y_k(t)) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}(z_k(t)) + \frac{\partial w_k(x,t)}{\partial t}+$$

$$+y_k(t)+xz_k(t))+\sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^k((x^2 v_k(x,t) - \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}v_k(x,t))e^{-\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}} + x^2\sigma_0(y_k(t)) + x^2\sigma_1(z_k(t))+$$

$$+ x^2 w_k(x,t)) + \varepsilon^{N+2}\frac{\partial R_N(x,t)}{\partial t} + \varepsilon^{N+1}x^2 R_n(x,t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x})^2 v_k(x,t)e^{-\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}} - \sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^{k+1}[\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2}v_k(x,t) + 2\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial v_k(x,t)}{\partial x}]e^{-\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}}+$$

$$+ \sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^{k+2}[\frac{\partial^2 v_k(x,t)}{\partial x^2}e^{-\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}} + \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2}(y_k(t)) + \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2}(z_k(t))+$$

$$+ \frac{\partial^2 w_k(x,t)}{\partial x^2}] + \varepsilon^{N+3}\frac{\partial^2 R_N(x,t)}{\partial x^2} + h(x,t).$$

Учитывая соотношеня для $\varphi(x,t)$ и уравнения для $\sigma_0,\ \sigma_1$, получим:

$$\sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^{k+1}(\frac{\partial v_k(x,t)}{\partial t}e^{-\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}} + \frac{\partial w_k(x,t)}{\partial t} + y_k(t) + xz_k(t)) + \sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^k(x^2 w_k(x,t))+$$

$$+ \varepsilon^{N+2}\frac{\partial R_N(x,t)}{\partial t} + \varepsilon^{N+1}x^2 R_N(x,t) =$$

$$- \sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^{k+1}[\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2}v_k(x,t) + 2\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial v_k(x,t)}{\partial x}]e^{-\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}}+$$

$$+ \sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^{k+2}[\frac{\partial^2 v_k(x,t)}{\partial x^2}e^{-\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}} + \frac{\partial^2 w_k(x,t)}{\partial x^2}] + \varepsilon^{N+3}\frac{\partial^2 R_N(x,t)}{\partial x^2} + h(x,t).$$

Сделав замену индексов и приведя подобные, получим задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\partial R_N}{\partial t} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2} + x^2 R_N = H(x,t,\varepsilon), \\ R_N(x,0,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

где $H(x,t,\varepsilon) = x^2 w_{N+1}(x,t) + \varepsilon(\frac{\partial^2 v_N(x,t)}{\partial x^2}e^{-\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}} + \frac{\partial^2 w_N(x,t)}{\partial x^2})$. Заметим, что так как итерационные задачи решены вплоть до ε^{N+1},то слагаемое $x^2 w_{N+1}(x,t) = \underline{O}(1)$.

Классическим решением задачи (9) называется функция $R(x,t,\varepsilon)$, непрерывная в $\overline{Q}_T = (-\infty,+\infty)\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$, имеющая непрерывные $\dfrac{\partial R}{\partial t}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ в Q_T и удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению (9) и начальным условиям при $t=0$.

Теорема 1 (оценка остаточного члена) *Пусть выполнены требования:*

1) условия 1)-2) для задачи Коши (1)*;*

2) $\exists M>0 \ \ |H(x,t,\varepsilon)|\le M \ \forall (x,t)\in(-\infty,+\infty)\times[0,T] \ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$*;*

Тогда $\exists C>0 \ \ |R_N(x,t,\varepsilon)|\le C \ \forall (x,t)\in(-\infty,+\infty)\times[0,T] \ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Используя фундаментальное решение Мелера, запишем решение задачи (9) в виде

$$R_N(x,t)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H(\xi,\tau)K(x,\xi,t-\tau)d\xi.$$

Оценим остаток по модулю. Тогда получим

$$|R_N(x,t)|\le\tfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|H(\xi,\tau)|K(x,\xi,t-\tau)d\xi\le$$
$$\le\tfrac{M}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x,\xi,t-\tau)d\xi=\tfrac{M}{\varepsilon}\int\limits_0^t\tfrac{d\tau}{\sqrt{\operatorname{ch}2(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2 th2(t-\tau)}{2\varepsilon}}\le\tfrac{M_1}{\varepsilon}.$$

Запишем остаточный член в виде

$$R_N=u_{N+1}+\varepsilon R_{N+1}.$$

Тогда $|R_N|\le|u_{N+1}|+\varepsilon\frac{M_2}{\varepsilon}\le C$, $C>0$.

Список литературы

1. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* – М., Наука, 1981, 400 с.

2. Елисеев А.Г., Ломов С.А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора. *Матем. сборник*, 1986, т. 131, № 4, с. 544–557.

3. Ломов С.А. Равномерные асимптотические разложения одной задачи с точкой поворота. *В кн.: Докл. науч.-техн. конф., секция матем..* – М., МЭИ, 1969, с. 42–50.

4. Ломов С.А. Асимптотическое интегрирование при изменении характера спектра. *Тр. МЭИ*, 1978, вып. 357, с. 56–62.

5. Елисеев А.Г.,Ратникова Т.А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота у предельного оператора. *Дифф. урав. и проц. управл.*, 2019, № 3, с. 63–73.

6. Yeliseev A. On the Regularized Asymptotics of a Solution to the Cauchy Problem in the Presence of a Weak Turning Point of the Limit Operator. *Axioms*, 2020, № 9, 86. — http://doi.org/10.3390/axioms9030086.

7. Елисеев А.Г., Кириченко П.В. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора. *Сибир. электр. матем. изв.*, 2020, № 17, с. 51–60.

8. В.И.Арнольд. О матрицах, зависящих от параметров.// УМН,1971,том 26, выпуск 2(158), 101-114.

9. F.G.Mehler. Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Functionen honerer Ordnung.,Jornal fur die Reine und Angewandte Mathematik,1866, 161-176p.

Example of solution of a singularly perturbed Cauchy problem for a parabolic equation in the presence of a «strong» turning point

A.G. Eliseev
National Research University «MPEI», Moscow, Russia
predicat@bk.ru; yeliseevag@mpei.ru

Abstract. In the article, on the basis of S.A. Lomov's regularization method, an asymptotic solution of a singularly perturbed Cauchy problem for a parabolic equation in the presence of a "strong turning point"is constructed. The regularization method makes it possible to construct an asymptotic solution uniform on the entire axis. The idea of this paper goes back to the paper where methods for solving a singularly perturbed Cauchy problem in the case of a «simple» turning point of a limit operator with a natural exponent were developed.

Keywords: singularly perturbed Cauchy problem, parabolic equation, asymptotic solution, regularization method, «strong» turning point.