*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172*

*http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru*

*Теория обыкновенных
дифференциальных уравнений*

О решении одного двухпараметрического уравнения 2-го порядка с полиномиальной правой частью

Хакимова З.Н.

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург

vka@mil.ru

Аннотация. Рассмотрен двухпараметрический класс обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с полиномиальной правой частью. Найдено двухпараметрическое преобразование степенного вида, которое переводит исходный класс уравнений с произвольными существенными показателями в уравнение с фиксированными показателями при переменных.
Найдены общие решения всех уравнений исследуемого класса уравнений. Также найдены общие решения еще 11-ти двухпараметрических классов уравнений полиномиального и дробно-полиномиального вида, связанных с исходным классом уравнений преобразованиями, которые являются образующими группы диэдра 12-го порядка.
Ключевые слова: Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка, ОДУ полиномиального вида, ОДУ дробно-полиномиального вида, точное решение ОДУ, дискретная группа преобразований, граф дискретной группы, группа диэдра.

1. Введение

Задача поиска точных решений уравнений была и остается одной из главных задач теории дифференциальных уравнений. Этой задаче уделено основное внимание в данной статье относительно одного двухпараметрического класса ОДУ с четырьмя слагаемыми степенного вида. Этот класс уравнений является подклассом общего класса ОДУ 2-го порядка с полиномиальными правыми частями:

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^{p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i} , \qquad (1)$$

который исследовался авторами работ [1-7].

Для двухпараметрического подкласса класса полиномиальных уравнений (1) найдено точное решение путем сведения его к обобщенно-однородному уравнению с помощью преобразования степенного вида.

В конце прошлого столетия петербургский математик В.Ф. Зайцев открыл дискретные группы преобразований для ОДУ и разработал дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. Благодаря этому, ему и его научной школе удалось проинтегрировать сотни отдельных дифференциальных уравнений и целых классов уравнений [8].

Применив дискретно-групповой анализ к классу уравнений (1), удалось также найти точные решения [1-7, 9-14] большого числа полиномиальных уравнений класса (1), а также дробно-полиномиальных уравнений класса (2):

$$y''_{xx} = \frac{\sum_{i=1}^{p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}}{\sum_{i=\mathrm{p}+1}^{2p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}}. \tag{2}$$

В данной работе дискретная группа преобразований диэдра 12-го порядка была применена как к исходному классу уравнений с четырьмя слагаемыми, так и к преобразованному уравнению. В результате, кроме получения общих решений уравнений этих классов, были найдены решения уравнений ещё 11-ти классов по группе диэдра с помощью метода «размножения» решений.

2. «Полезное» степенное преобразование

В работах [7, 13] было показано, что, применив однопараметрическое степенное преобразование

$$x = t^{\alpha}, y = u^{\alpha} \tag{3}$$

к разрешимым подклассам класса уравнений (1), можно получить новые разрешимые уравнения (с дополнительным параметром α), принадлежащие классу уравнений (1).

Появилась мысль поискать «полезные» степенные преобразования другого вида, замкнутые в классе уравнений (1). Удачу принесло следующее двухпараметрическое преобразование:

$$x = t^{\alpha}, y = (t\dot{u}_t - u)^{\beta}, \tag{4}$$

так как y'_x и $(xy'_x - y)$ также оказались степенного вида:

$$y'_x = t^{3-\alpha} u^{-1} \dot{u}_t (t\dot{u}_t - u), xy'_x - y = \frac{(t\dot{u}_t - u)^{\beta+1}}{u}, \tag{5}$$

если мы запланировали, чтобы преобразованное уравнение имело одно слагаемое в правой части:

$$\ddot{u}_{tt} = Bt^K u^L \dot{u}_t^M (t\dot{u}_t - u)^N. \tag{6}$$

Вследствие (4) и (6), в результате вычислений получается, что уравнения исходного класса должны быть полиномиального вида (1) с четырьмя слагаемыми в правых частях.

Подставив преобразование (4), (5) в (1) и решив систему уравнений на параметры k_i, l_i, m_i, n_i, A_i, получаем, после переобозначения параметров, следующий результат. Исходный класс уравнений полиномиального вида с четырьмя слагаемыми в правых частях, с двумя произвольными параметрами «a» и «b» имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&y''_{xx} = \left(-2b + \frac{a}{2}x^a\right) y^b (y'_x)^2 + \left(b - \frac{3a+2}{2}x^a\right) x^{-a-1} y'_x = \\
&= -2by^b (y'_x)^2 + \tfrac{a}{2} x^a y^b (y'_x)^2 + bx^{-a-1} y'_x - \tfrac{3a+2}{2} x^{-1} y'_x.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Класс уравнений (7) с помощью преобразования, также содержащего «a» и «b»:

$$
x = t^{-\frac{2}{a}}, y = (t\dot{u}_t - u)^{-\frac{1}{b}} \tag{8}
$$

$$
\left[y'_x = t^{\frac{3a+2}{a}} u^{-1} \dot{u}_t (t\dot{u}_t - u)^{-\frac{1}{b}}, xy'_x - y = \frac{(t\dot{u}_t - u)^{\frac{b-1}{b}}}{u}\right], \tag{9}
$$

приводится к уравнению вида (1) с одним слагаемым в правой части:

$$
\ddot{u}_{tt} = \frac{2b}{a} t u^{-1} \dot{u}_t (t\dot{u}_t - u) = \frac{2b}{a} t^2 u^{-1} (\dot{u}_t)^2 - \frac{2b}{a} t\dot{u}_t. \tag{10}
$$

Удивительно, что все показатели стали фиксированными: «произвол» в показателях «взяло на себя» степенное преобразование (8), (9). В уравнении (10) произвольные параметры «a» и «b» присутствуют лишь в коэффициентах.

3. Решение уравнения (10)

Приятным сюрпризом явилось то, что преобразованное уравнение (10) оказалось обобщённо-однородным.

В справочнике [15] для однопараметрического класса уравнений, являющегося обобщением уравнения (10):

$$
y''_{xx} = A_1 x^n y^{-1} (y'_x)^2 + A_2 x^{n-1} y'_x, n \neq 0, \tag{11}
$$

приведено общее решение:

$$
\begin{aligned}
&y = C_1\, exp\left[\int exp\left(\frac{A_2}{n} x^n\right) (F + C_2)^{-2} dx\right], \\
&F = \int (1 - A_1 x^n)\, exp\left(\frac{A_2}{n} x^n\right) dx.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Вычисляем вспомогательную функцию F для уравнения (10):

$$
F = te^{\frac{b}{a}t^2}\ (n = 2, A_1 = -A_2 = \tfrac{2b}{a}). \tag{13}
$$

Тогда, согласно (12), общее решение уравнения (10) имеет следующий вид:

$$u = C_1 e^I, I = \int \frac{dt}{t + C_2 e^{\frac{b}{a}t^2}}$$

$$\left[\dot{u}_t = \frac{C_1}{t + c_2 e^{\frac{b}{a}t^2}} e^I, t\dot{u}_t - u = -\frac{C_1 C_2 e^{\frac{b}{a}t^2}}{t + C_2 e^{\frac{b}{a}t^2}} e^I\right]. \tag{14}$$

4. Решение уравнений исходного класса (7)

Класс уравнений (7) приводится к (10) с помощью преобразования (8), (9), а решение уравнения (10) приведено в (14).

Подставив (14) в (8), (9), получим общие решения уравнений исходного класса (7) в параметрическом виде, где τ-параметр:

$$\begin{cases} x = \tau^{-\frac{2}{a}} \\ y = (-C_1 C_2)^{-\frac{1}{b}} \left(\tau + C_2 e^{\frac{b}{a}\tau^2}\right)^{\frac{1}{b}} e^{-\frac{1}{a}\tau^2 - \frac{1}{b}I} \end{cases} \quad \left(I = \int \frac{d\tau}{\tau + C_2 e^{\frac{b}{a}\tau^2}}\right). \tag{15}$$

Кроме того, отметим для дальнейших рассуждений, что:

$$y_x' = (-C_1 C_2)^{-\frac{1}{b}} \tau^{\frac{3a+2}{a}} \left(\tau + C_2 e^{\frac{b}{a}\tau^2}\right)^{\frac{1}{b}-1} e^{-\frac{1}{a}\tau^2 - \frac{1}{b}I},$$

$$xy_x' - y = C_1^{-\frac{1}{b}} (-C_2)^{\frac{1-b}{b}} \left(\tau + C_2 e^{\frac{b}{a}\tau^2}\right)^{\frac{1-b}{b}} e^{\frac{b-1}{a}\tau^2 - \frac{1}{b}I}. \tag{16}$$

5. Группа преобразований диэдра

В статьях [1-7, 9-14] исследовались классы полиномиальных уравнений (1) и дробно-полиномиальных уравнений (2). К этим классам был применён дискретно-групповой анализ (ДГА).

Основу ДГА составляет задача поиска преобразований, замкнутых на исследуемом классе уравнений. Далее строятся дискретные группы и псевдогруппы преобразований, их графы.

Обозначим класс уравнений (1) суммой векторов параметров:

$$\sum_{i=1}^{p} (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i). \tag{17}$$

Подкласс класса дробно-полиномиальных уравнений (2)

$$y_{xx}'' = \left[\sum_{i=1}^{p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (xy_x' - y)^{n_i}\right]^{-1} \tag{18}$$

обозначим

$$\left[\sum_{i=1}^{p} (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)\right]^{-1}. \tag{19}$$

Было найдено точечное преобразование $\boldsymbol{r}$, замкнутое в классе уравнений (1); оно является образующей циклической группы 2-го порядка:

$$\boldsymbol{r}: \quad x = u, y = t, \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{E},$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{p}(k_i, l_i, m_i, n_i|A_i) \xrightarrow{\boldsymbol{r}} \sum_{i=1}^{p}(l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i|(-1)^{1-n_i}A_i). \tag{20}$$

Касательное же преобразование $\boldsymbol{h}$, образующее циклическую группу 6-го порядка, не замкнуто в (1), но зато замкнуто в классе уравнений (2):

$$\boldsymbol{h}: \quad x = \frac{1}{\dot{u}_t}, y = -\frac{t\dot{u}_t - u}{\dot{u}_t}, y_x' = u, \boldsymbol{h}^6 = \boldsymbol{E},$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{p}(k_i, l_i, m_i, n_i|A_i) \xrightarrow{\boldsymbol{h}} \left[\sum_{i=1}^{p}(n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i|(-1)^{l_i-1}A_i)\right]^{-1}. \tag{21}$$

Преобразования $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{h}$ являются образующими дискретной группы преобразований диэдра 12-го порядка:

$$D_6 = \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}^2, \boldsymbol{h}^3, \boldsymbol{h}^4, \boldsymbol{h}^5, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{hr}, \boldsymbol{h}^2\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^3\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^4\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^5\boldsymbol{r}\}. \tag{22}$$

Группа диэдра D_6 имеет 12-вершинный граф, изображённый на рис.1.

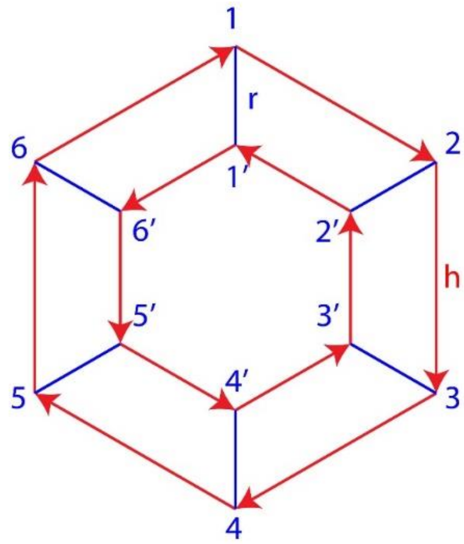

Рис. 1. Граф группы диэдра D_6

Если применить группу диэдра D_6 к классу полиномиальных уравнений (1), то получаются уравнения-вершины графа группы D_6, помещённые в таблицу 1.

Таб. 1. Уравнения-вершины графа группы диэдра D_6, где 1 – полиномиальный класс уравнений (1)

1	$\sum_{i=1}^{p}(k_i, l_i, m_i, n_i\|A_i)$	1'	$\sum_{i=1}^{p}(l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i\|(-1)^{1-n_i}A_i)$
2	$\left[\sum_{i=1}^{p}(n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i\|(-1)^{l_i-1}A_i)\right]^{-1}$	2'	$\left[\sum_{i=1}^{p}(m_i, n_i, k_i, l_i\|A_i)\right]^{-1}$
3	$\sum_{i=1}^{p}(l_i, -k_i - l_i - 3, -m_i - n_i \pm$ $+3, m_i\|(-1)^{l_i+m_i}A_i)$	3'	$\sum_{i=1}^{p}(-k_i - l_i - 3, l_i, n_i, m_i\|(-1)^{l_i-1}A_i)$
4	$\left[\sum_{i=1}^{p}(m_i, -m_i - n_i + 3, k_i, -k_i - l_i -\right.$ $\left.-3\|(-1)^{-k_i+m_i}A_i)\right]^{-1}$	4'	$\left[\sum_{i=1}^{p}(-m_i - n_i + 3, m_i, l_i, -k_i - l_i -\right.$ $\left.-3\|(-1)^{l_i+m_i}A_i)\right]^{-1}$

5	$\sum_{i=1}^{p}(-k_i-l_i-3,k_i,n_i,-m_i-n_i+$ $+3\|(-1)^{-k_i-n_i}A_i)$	5'	$\sum_{i=1}^{p}(k_i,-k_i-l_i-3,m_i,-m_i-n_i+$ $+3\|(-1)^{-k_i+m_i}A_i)$
6	$\left[\sum_{i=1}^{p}(-m_i-n_i+3,n_i,l_i,k_i\|(-1)^{1-n_i}A_i)\right]^{-1}$	6'	$\left[\sum_{i=1}^{p}(n_i,-m_i-n_i+3,-k_i-l_i-\right.$ $\left.-3,k_i\|(-1)^{-k_i-n_i}A_i)\right]^{-1}$

6. Применение группы диэдра к классу уравнений (7)

В соответствии с (17), обозначим класс уравнений (10) суммой векторов параметров:

$$(0,b,2{,}0|-2b)+\left(a,b,2{,}0\Big|\frac{a}{2}\right)+(-a-1{,}0{,}1{,}0|b)+\left(-1{,}0{,}1{,}0\Big|-\frac{3a+2}{2}\right). \tag{23}$$

Поскольку класс уравнений (7), (23) является подклассом класса уравнений (1), то к (7) также можно применить группу преобразований D_6 (22). В результате получаем список уравнений-вершин графа группы D_6, изображённого на рис. 1, который поместим в таблицу 2.

Таб. 2. Уравнения, связанные преобразованиями группы D_6 с двухпараметрическим классом уравнений (7)

1	$(0,b,2{,}0\|-2b)+\left(a,b,2{,}0\|\frac{a}{2}\right)+$ $+(-a-1{,}0{,}1{,}0\|b)+$ $+\left(-1{,}0{,}1{,}0\|-\frac{3a+2}{2}\right)$	1'	$(b,0{,}1{,}0\|2b)+\left(b,a,1{,}0\|-\frac{a}{2}\right)+$ $+(0,-a-1{,}2{,}0\|-b)+$ $+\left(0,-1{,}2{,}0\|\frac{3a+2}{2}\right)$
2	$(0{,}2,-b-3,b\|(-1)^{b}2b)+$ $+\left(0{,}2,-a-b-3,b\|(-1)^{b-1}\frac{a}{2}\right)+$ $+(0{,}1,a-2{,}0\|-b)+\left(0{,}1,-2{,}0\|\frac{3a+2}{2}\right)$	2'	$(2{,}0{,}0,b\|-2b)+\left(2{,}0,a,b\|\frac{a}{2}\right)+$ $+(1{,}0,-a-1{,}0\|b)+$ $+\left(1{,}0,-1{,}0\|-\frac{3a+2}{2}\right)$
3	$(b,-b-3{,}1{,}2\|(-1)^{b-1}2b)+$ $+\left(b,-a-b-3{,}1{,}2\|(-1)^{b}\frac{a}{2}\right)+$ $+(0,a-2{,}2{,}1\|-b)+\left(0,-2{,}2{,}1\|\frac{3a+2}{2}\right)$	3'	$(-b-3,b,0{,}2\|(-1)^{b}2b)+$ $+\left(-a-b-3,b,0{,}2\|(-1)^{b-1}\frac{a}{2}\right)+$ $+(a-2{,}0{,}0{,}1\|-b)+\left(-2{,}0{,}0{,}1\|\frac{3a+2}{2}\right)$
4	$(2{,}1{,}0,-b-3\|-2b)+$ $+\left(2{,}1,a,-a-b-3\|(-1)^{-a}\frac{a}{2}\right)+$ $+(1{,}2,-a-1,a-2\|(-1)^{a}b)+$ $+\left(1{,}2,-1,-2\|-\frac{3a+2}{2}\right)$	4'	$(1{,}2,b,-b-3\|(-1)^{b-1}2b)+$ $+\left(1{,}2,b,-a-b-3\|(-1)^{b}\frac{a}{2}\right)+$ $+(2{,}1{,}0,a-2\|-b)+$ $+\left(2{,}1{,}0,-2\|\frac{3a+2}{2}\right)$
5	$(-b-3{,}0{,}0{,}1\|-2b)+$ $+\left(-a-b-3,a,0{,}1\|(-1)^{-a}\frac{a}{2}\right)+$ $+(a-2,-a-1{,}0{,}2\|(-1)^{a+1}b)+$ $+\left(-2,-1{,}0{,}2\|\frac{3a+2}{2}\right)$	5'	$(0,-b-3{,}2{,}1\|-2b)+$ $+\left(a,-a-b-3{,}2{,}1\|(-1)^{-a}\frac{a}{2}\right)+$ $+(-a-1,a-2{,}1{,}2\|(-1)^{a}b)+$ $+\left(-1,-2{,}1{,}2\|-\frac{3a+2}{2}\right)$
6	$(1{,}0,b,0\|2b)+\left(1{,}0,b,a\|-\frac{a}{2}\right)+$ $+(2{,}0{,}0,-a-1\|-b)+$	6'	$(0{,}1,-b-3{,}0\|-2b)+$ $+\left(0{,}1,-a-b-3,a\|(-1)^{-a}\frac{a}{2}\right)+$

	$\left(2{,}0{,}0,-1\middle\vert\frac{3a+2}{2}\right)$		$+(0{,}2,a-2,-a-1\vert(-1)^{a+1}b)+$ $+\left(0{,}2,-2,-1\middle\vert\frac{3a+2}{2}\right)$

7. Получение новых двухпараметрических разрешимых классов уравнений методом «размножения»

По графу на рис. 1 легко увидеть, какими преобразованиями связаны 11 уравнений-вершин 2-6’ с уравнением-вершиной под номером 1. Если уравнение, соответствующее вершине 1, является разрешимым, то все остальные уравнения-вершины данного графа являются разрешимыми. Причём, решения уравнений связаны теми же преобразованиями, что и сами уравнения. В этом заключается метод «размножения» разрешимых случаев в рассматриваемых классах уравнений.

Пусть вершина 1 соответствует классу уравнений (7), (23), общее решение которого (15), (16) найдено в пункте 4.

Обозначим:

$$x=\alpha,\, y=\beta,\, y_x'=\gamma,\, xy_x'-y=\delta, \tag{24}$$

где α, β, γ, δ – функции (зависящие от C_1, C_2, τ, a, b), которые расположены в правых частях общего решения (15), (16).

Вычислим все преобразования группы D_6 (22), которыми связаны классы уравнений 2-6’ с исходным классом уравнений 1. Тогда общими решениями этих классов уравнений являются композиции указанных выше преобразований и решения (24) для класса уравнений (7), соответствующего вершине 1.

Решения всех двухпараметрических классов уравнений, представленных в таблице 2, помещены в таблицу 3.

Таб. 3. Решения уравнений-вершин графа группы D_6 ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ см. в (15), (16))

1	$x=\alpha,\, y=\beta,\, y_x'=\gamma,\, xy_x'-y=\delta$	1’	$x=\beta,\, y=\alpha,\, y_x'=\frac{1}{\gamma},\, xy_x'-y=-\frac{\delta}{\gamma}$
2	$x=\delta,\, y=\gamma,\, y_x'=\frac{1}{\alpha},\, xy_x'-y=-\frac{\beta}{\alpha}$	2’	$x=\gamma,\, y=\delta,\, y_x'=\alpha,\, xy_x'-y=\beta$
3	$x=-\frac{\beta}{\alpha},\, y=\frac{1}{\alpha},\, y_x'=\frac{1}{\delta},\, xy_x'-y=-\frac{\gamma}{\delta}$	3’	$x=\frac{1}{\alpha},\, y=-\frac{\beta}{\alpha},\, y_x'=\delta,\, xy_x'-y=\gamma$
4	$x=-\frac{\gamma}{\delta},\, y=\frac{1}{\delta},\, y_x'=-\frac{\alpha}{\beta},\, xy_x'-y=\frac{1}{\beta}$	4’	$x=\frac{1}{\delta},\, y=-\frac{\gamma}{\delta},\, y_x'=-\frac{\beta}{\alpha},\, xy_x'-y=\frac{1}{\alpha}$
5	$x=\frac{1}{\beta},\, y=-\frac{\alpha}{\beta},\, y_x'=-\frac{\delta}{\gamma},\, xy_x'-y=\frac{1}{\gamma}$	5’	$x=-\frac{\alpha}{\beta},\, y=\frac{1}{\beta},\, y_x'=-\frac{\gamma}{\delta},\, xy_x'-y=\frac{1}{\delta}$
6	$x=\frac{1}{\gamma},\, y=-\frac{\delta}{\gamma},\, y_x'=\beta,\, xy_x'-y=\alpha$	6’	$x=-\frac{\delta}{\gamma},\, y=\frac{1}{\gamma},\, y_x'=\frac{1}{\beta},\, xy_x'-y=-\frac{\alpha}{\beta}$

Замечание. Аналогично можно применить группу D_6 к уравнению (10), тогда общие решения ещё 11-ти уравнений будут выражаться через решение (14) уравнения (10) (см. пункт 3).

Обе группы диэдра, связанные преобразованием $\boldsymbol{f}$ (8), (9) входят в граф 24-го порядка, изображенный на рис. 2.

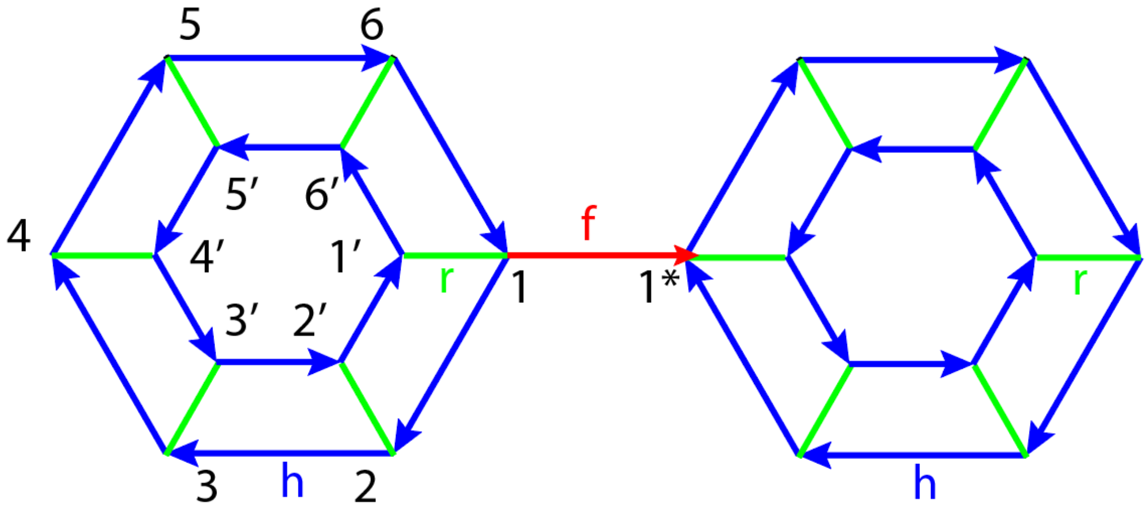

Рис. 2. Граф группы 24-го порядка

На рис. 2 вершина 1 – обозначает класс уравнений (7); 1* – уравнение (10); $\boldsymbol{f}$ – это степенное преобразование (8), (9).

Таким образом, граф 24-го порядка на рис. 2 наглядно иллюстрирует, что решения всех его уравнений-вершин выражаются через решение (14) обобщённо-однородного уравнения 1* (10).

8. Заключение

1. Найдено нетривиальное степенное преобразование, представляющее интерес для применения к полиномиальным и дробно-полиномиальным ОДУ.

2. С помощью этого степенного преобразования двухпараметрический класс ОДУ 2-го порядка с полиномиальными правыми частями приведён к обобщённо-однородному ОДУ 2-го порядка, которое легко интегрируется. Причём, существенные параметры, присутствующие в показателях при переменных в исходном классе уравнений, преобразовались в полученном уравнении в коэффициенты, а показатели стали фиксированными.

3. Найдено общее решение уравнений исходного двухпараметрического класса ОДУ.

4. К исходному и преобразованному классам уравнений применены преобразования группы диэдра 12-го порядка. Получены решения 11-ти двухпараметрических классов уравнений, связанных с исходным классом уравнений (7).

Список литературы:

[1] Хакимова З.Н., Зайцев О.В. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Актуальные вопросы современной науки, №3. – СПб., 2014. – С. 3-11.

[2] Хакимова З.Н. Интегрирование дискретных инвариантов в классе полиномиальных дифференциальных уравнений 2-го класса // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, 2014 – С. 8-16.

[3] Хакимова З.Н. Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2017». – СПб.: РГПУ, 2017. – С. 112-117.

[4] Хакимова З.Н. Дифференциальные уравнения степенного вида, интегрируемые в полиномах // Некоторые актуальные проблемы современной математики и

математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2019». – СПб.: РГПУ, 2019. – С. 97-101.

[5] Хакимова З.Н. Об интегрировании дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2020». – СПб.: РГПУ, 2020. – С. 115-118.

[6] Хакимова З.Н. Об интегрировании дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений. Часть 2: уравнение Льенара // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2021». – СПб.: РГПУ, 2021. – С. 92-95.

[7] Хакимова З.Н. О дискретных группах уравнений Пенлеве // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2022». – СПб.: РГПУ, 2022. – С. 211-215.

[8] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464с. [8]

[9] Хакимова З. Н., Зайцев О. В. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2021. – N 1(4). – С. 61-92. – URL:https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4.html

[10] Хакимова З. Н. Решения через четвертый трансцендент Пенлеве дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений второго порядка // Перспективы науки. – Тамбов: ТМБпринт. – 2021. – № 8 (143). – С. 54-60.

[11] Хакимова З. Н., Тимофеева Л.Н., Зайцев О. В. Решения в полиномах дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений, порожденных вторым уравнением Пенлеве [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2021. – N 3(7). – С. 141-152. – URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.3/article.1.9.html

[12] Хакимова З. Н. Расширения дискретных групп преобразований обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера // Перспективы науки. – Тамбов: ТМБпринт. – 2022. – № 3 (150). – С. 55-59.

[13] Хакимова З. Н. Расширение группы диэдра для 4-го уравнения Пенлеве с помощью степенного преобразования // Перспективы науки. – Тамбов: ТМБпринт. – 2021. – № 11 (146). – С. 45-53.

[14] Хакимова З. Н. Решения степенных дифференциальных уравнений в тригонометрических функциях // Перспективы науки. – Тамбов: ТМБпринт. – 2022. – № 6 (153). – С. 44-48.

[15] Polyanin A. D., Zaytsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. – CRC Press. Boca Raton – London, 2018.

On the solution of a two-parameter second-order equation with a polynomial right-hand side

Khakimova Z.N.

Mozhaisky Military Space Academy, Saint-Petersburg

vka@mil.ru

Abstract. A two-parameter class of ordinary differential equations of the 2nd order with a polynomial right-hand side is considered. A two-parameter power-law transformation is found that transforms the original class of equations with arbitrary essential exponents into an equation with fixed exponents with variables.

General solutions of all equations of the studied class of equations are found. We also found general solutions for 11 more two-parameter classes of polynomial and fractional-polynomial equations, which are related to the original class of equations by transformations that are generators of the 12th order dihedral group.

Keywords: Ordinary differential equation (ODE) of the 2nd order, ODE of polynomial form, ODE of fractional-polynomial form, exact solution of ODE, discrete group of transformations, discrete group graph, dihedral group.