ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений
Управление в нелинейных и сложных системах
Компьютерное моделирование динамических и управляемых систем

Управление подвижной платформой с маятником

Братищев А. В.

Донской государственный технический университет

avbratishchev@spark-mail.ru

Аннотация. Установлена связь понятий устойчивости многообразия в смысле А. А. Ляпунова, Ф. Р. Гантмахера и А. А. Колесникова. Введено понятие частичного положения равновесия по заданному отображению. В рамках синергетической теории управления найдена формула вектора управления, когда агрегированные переменные являются первыми интегралами динамической системы, а вектор управления входит в регулятор линейным образом. Эти понятия и результаты используются в задаче управления платформой с закреплённым маятником, когда требуется стабилизовать платформу в наперёд заданном положении, а маятник – в нижнем положении равновесия.

Ключевые слова: уравнения Лагранжа, первый интеграл, инвариантное множество, устойчивость, платформа, маятник, синергетический регулятор.

Введение

В статье [1] мы вывели уравнение свободного движения платформы на горизонтальной плоскости с закреплённым на ней маятником в виде системы уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_2}-\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=(M+m)x'_2+ml\cos x_5\cos x_7 x'_6-ml\sin x_5\sin x_7\,x'_8- \\ \qquad -ml\sin x_5\cos x_7\,x_6^2-2\,ml\cos x_5\sin x_7\,x_6x_8-ml\sin x_5\cos x_7\,x_8^2=0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_4}-\dfrac{\partial L}{\partial x_3}=(M+m)x'_4+ml\cos x_5\sin x_7 x'_6+ml\sin x_5\cos x_7\,x'_8- \\ \qquad -ml\sin x_5\sin x_7\,x_6^2+2\,ml\cos x_5\cos x_7\,x_6x_8-ml\sin x_5\sin x_7\,x_8^2=0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_6}-\dfrac{\partial L}{\partial x_5}=\cos x_5\cos x_7 x'_2+\cos x_5\sin x_7\,x'_4+lx'_6-\ l\sin x_5\cos x_5\,x_8^2-g\sin x_5=0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_8}-\dfrac{\partial L}{\partial x_7}=\sin x_5\sin x_7 x'_2-\sin x_5\cos x_7\,x'_4-l\,sin^2 x_5\,x'_8-2\,l\sin x_5\ \cos x_5\,x_6x_8=0 \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x_1 \coloneqq x,\ x_2 \coloneqq x',\ x_3 \coloneqq y,\ x_4 \coloneqq y',\ x_5 \coloneqq \theta,\ x_6 \coloneqq \theta',\ x_7 \coloneqq \varphi,\ x_8 \coloneqq \varphi'.$ x_1, x_3 – декартовы координаты цента масс платформы, θ, φ – сферические координаты маятника относительно центра масс платформы в подвижной системе координат. M - масса плоской горизонтальной платформы. В центре масс закреплена невесомая упругая нить длиной l с точечной массой m на конце. L – функция Лагранжа системы: $L=\frac{M+m}{2}(x_2^2+x_4^2)+ml((sinx_5cosx_7)'x_2+(sinx_5sinx_7)'x_4)+\frac{ml^2}{2}(x_6^2+sin^2 x_5\,x_8^2)-mglcosx_5$.

В той же статье формула (1) преобразована в нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'_1=x_2 \\ x'_2=\dfrac{ml\sin x_5\cos x_7}{M+m\sin^2 x_5}\left(x_6^2+\sin^2 x_5\,x_8^2-\dfrac{g}{l}\cos x_5\right)=:f_2 \\ x'_3=x_4 \\ x'_4=\dfrac{ml\sin x_5\sin x_7}{M+m\sin^2 x_5}\left(x_6^2+\sin^2 x_5\,x_8^2-\dfrac{g}{l}\cos x_5\right)=:f_4 \\ x'_5=x_6 \\ x'_6=\dfrac{\sin x_5}{M+m\sin^2 x_5}\left(\cos x_5\,(-mx_6^2+Mx_8^2)+\dfrac{g(M+m)}{l}\right)=:f_6 \\ x'_7=x_8 \\ x'_8=-2\dfrac{\cos x_5}{\sin x_5}x_6x_8=:f_8 \end{cases}. \tag{2}$$

Было показано, что в силовом поле, имеющем характер сил трения, платформу с маятником всегда можно стабилизировать в том смысле, что тележка останавливается в какой-то точке, а колебания маятника затухают.

В работе [2] методом аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) А. А. Колесникова спроектировано управление платформой, которое гарантирует её движение в ограниченной области независимо от начального состояния системы. Руководствуясь его же идеей о выборе агрегированных переменных исходя из «внутренних свойств системы» [3], мы использовали первые интегралы системы (1), которые были найдены в работе [4]. Метод АКАР приводит к устойчивому в определённом смысле (смысле А. А. Колесникова) инвариантному многообразию регулятора. Поэтому в п.1 статьи мы изучаем связь этого понятия с соответствующими понятиями А. М. Ляпунова и Ф. Р. Гантмахера. В п.2 для аффинной по управлению системы установлена общая формула вычисления вектора управления. В п.3 решается задача синтеза вектора управления, при котором платформа останавливается в наперёд заданной точке, а маятник – в нижнем положении равновесия. Отсутствие состояний равновесия у

системы (2) побудило ввести в п.4 понятие частичного положения равновесия по заданному отображению. Там же приведены результаты численных экспериментов на S-модели регулятора [5],
подтверждающих работу предложенного регулятора.

1. Условная устойчивость и устойчивость в смысле А. А. Колесникова

Приведём исходное определение устойчивости, данное А. М. Ляпуновым в диссертации [6]. Обозначим $q^0(t) \coloneqq \left(q_i^0(t), q_i^{0\prime}(t)\right) \coloneqq \left(q_1^0(t), \dots, q_n^0(t), \; q_1^{0\prime}(t), \dots, q_n^{0\prime}(t)\right), \; t \geq t_0$ невозмущённое (опорное) решение системы уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial q'_1} - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1 \\ \quad \cdots \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial q'_n} - \dfrac{\partial L}{\partial q_n} = Q_n \end{cases}, \tag{3}$$

а через $q(t) \coloneqq \left(q_i(t, t_0, q_0), q_i'(t, t_0, q_0)\right), \; t \geq t_0$, решение задачи Коши с начальными условиями $\left(q_i(t_0), q_i'(t_0)\right) = q_0 \coloneqq (q_{i0}, q_{i0}') \in R^{2n}$.

Пусть дано непрерывное отображение $Q(q_i, q_i') \coloneqq \left(Q_1(q_i, q_i'), \dots, Q_m(q_i, q_i')\right), m \leq n$, от 2n переменных. Невозмущённое движение называется устойчивым по отношению к величинам Q_j , если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall q_0$ со свойством $\rho\left(q_0, q^0(t_0)\right) < \delta$ соответствующее решение задачи Коши $q(t)$ удовлетворяло условию $\forall t \geq t_0 \;\; \rho\left(Q(q_i(t), q_i'(t)), Q\left(q_i^0(t), q_i^{0\prime}(t)\right)\right) < \varepsilon$. Здесь ρ – евклидово расстояние в R^{2n}. Далее А. М. Ляпунов замечает, что в ряде задач механики на начальные данные в приведённом определении приходится накладывать условия вида $\mathrm{f}\left(q_{i0} - q_i(t_0), q'_{i0} - q_i'(t_0)\right) = 0$ или вида $\mathrm{f}\left(q_{i0} - q_i(t_0), q'_{i0} - q_i'(t_0)\right) < 0$, где f – некоторая функция «возмущений» $\left(q_{i0} - q_i(t_0), q'_{i0} - q_i'(t_0)\right)$. В этом случае он называет невозмущённое движение $q^0(t)$ устойчивым по отношению к величинам $\mathrm{Q_j}$ для возмущений, подчинённых соответствующим условиям.

Впоследствии данные определения получили развитие в разных направлениях ([7] - [11] и др.). Так, инвариантное множество $\mathcal{L}$ системы (3) называется устойчивым в смысле Ляпунова, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall q_0$ со свойством $\rho(q_0, \mathcal{L}) < \delta$ соответствующее решение задачи Коши $q(t)$ удовлетворяет условию $\forall t \geq t_0 \;\; \rho(q(t), \mathcal{L}) < \varepsilon$.

Остановимся на определении условной устойчивости в смысле Ф. Р. Гантмахера. Без потери общности он предполагает, что система (3) имеет положение равновесия в нуле: $q_1 = \cdots = q_n = 0$, и заданы m функций от обобщённых координат и их производных (наблюдаемые значения) $x_1 = Q_1(q_i, q_i'), \dots, x_m = Q_m(q_i, q_i')$. Предполагается, что эти функции обращаются в ноль в положении равновесия и на движениях системы (3) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \Phi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \quad \cdots \\ \dfrac{dx_m}{dt} = \Phi_m(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}, \tag{4}$$

причём $\Phi_j(t, 0, \dots, 0) \equiv 0, \; j = 1, \dots, m$. Последнее условие означает, что система имеет положение равновесия в нуле: $x_1 = \cdots = x_m = 0$. Предполагается, что это положение устойчиво: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 = (x_1^0, \dots, x_1^0)$ со свойством $\|x_0\| < \delta$ соответствующее решение задачи Коши $x(t, t_0, x_0)$ удовлетворяет условию $\forall t \geq t_0\ \ \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$.

При этих условиях нулевое положение системы (3) названо условно устойчивым (по отношению к функциям Q_j), если : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall q_0 \coloneqq (q_{i0}, q_{i0}{}') \in R^{2n}$ со свойством: $\|Q(q_{i0}, q_{i0}{}')\| < \delta$, соответствующее решение задачи Коши $q(t) \coloneqq \big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big)$ системы (3) удовлетворяет условию $\big\|Q\big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big)\big\| < \varepsilon,\ t \geq t_0$. Нулевое положение системы (3) называется асимптотически условно устойчивым (по отношению к функциям Q_j), если для каждого такого положения q_0 $\lim_{t\to+\infty} Q_j\big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big) = 0$, $j = 1, \dots, m$.

Заметим, что из данного Ф. Р. Гантмахером определения можно извлечь больше информации. Во-первых, множество $\mathcal{L} \coloneqq \{(q_i, q_i{}') \colon Q_1(q_i, q_i{}') = 0, \dots, Q_m(q_i, q_i{}') = 0\}$ является инвариантным множеством системы (3). Действительно, возьмём произвольную точку $q_0 \coloneqq (q_{i0}, q_{i0}{}') \in \mathcal{L}$. Для соответствующего решения задачи Коши $q(t) \coloneqq \big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big)$ функции $Q_j\big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big)$ по определению удовлетворяют системе (4), и обращаются в ноль в точке t_0. Но тогда в силу теоремы единственности решения задачи Коши эти функции должны тождественно равняться нулю. То есть $\forall\ t \geq t_0\ \ q(t) \in \mathcal{L}$. Во-вторых, если точка «Q-близка» к $\mathcal{L}$: $\|Q(q_{i0}, q_{i0}{}')\| < \delta$, то и вся траектория $\big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big)$ «Q-близка» к $\mathcal{L}$: $\big\|Q\big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big)\big\| < \varepsilon,\ t \geq t_0$.

Это замечание подводит к такому определению условной устойчивости инвариантного многообразия. Пусть непрерывно дифференцируемое отображение $\Psi(q_i, q_i{}') \coloneqq (\Psi_1(q_i, q_i{}'), \dots,$ $(\Psi_m(q_i, q_i{}'), m \leq n$, имеет невырожденную матрицу Якоби по всем переменным, и многообразие $\mathcal{L} \coloneqq \{(q_i, q_i{}') \colon \Psi_1(q_i, q_i{}') = 0, \dots, \Psi_m(q_i, q_i{}') = 0\}$ является инвариантным для системы (3): $\forall q_0 \coloneqq (q_{i0}, q_{i0}{}') \in \mathcal{L}\ \big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big) \in \mathcal{L},\ t \geq t_0$. Назовём это многообразие условно устойчивым по отношению к отображению Ψ, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall q_0 \coloneqq (q_{i0}, q_{i0}{}')$ со свойством: $\|\Psi(q_{i0}, q_{i0}{}')\| < \delta$, соответствующее решение задачи Коши $q(t) \coloneqq \big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big)$ системы (3) удовлетворяет условию $\big\|\Psi\big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big)\big\| < \varepsilon,\ t \geq t_0$. Многообразие $\mathcal{L}$ назовём асимптотически условно устойчивым (по отношению к отображению Ψ), если для каждого такого состояния q_0 $\lim_{t\to+\infty} \Psi_j\big(q_i(t, t_0, q_0), q_i{}'(t, t_0, q_0)\big) = 0,\ j = 1, \dots, m$.

В частности, в условиях определения Ф. Р. Гантмахера соответствующее множество $\mathcal{L}$ будет условно устойчивым по отношению к отображению Ψ в смысле данного определения.

Напомним теперь метод АКАР [3] в применении к системе (3). В этом методе по образному выражению автора наперёд заданное многообразие

$\mathcal{L} \coloneqq \{(q_i, q_i{}') \colon\ \Psi_1(q_i, q_i{}') = 0, \dots,\ \Psi_m(q_i, q_i{}') = 0\}$

«навязывается» системе с помощью конструктивно задаваемого управления по состоянию. Здесь функции $\Psi_1(q_i, q_i{}'), \dots, \Psi_m(q_i, q_i{}'), m \leq n$, непрерывно дифференцируемы, и их матрица Якоби не вырождена, то есть имеет ранг $= m$. Имеет место разновидность обратной задачи динамики нахождения синергетического регулятора по заданным функциям.

Известно [12], что многообразие $\mathcal{L}$ инвариантно тогда и только тогда, когда функции $\Psi_j(q_i, q_i{}')$ удовлетворяют системе уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_1}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{1k}\,(q_i, q_i{}')\Psi_k \\ \qquad \cdots \\ \frac{d\Psi_m}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{mk}\,(q_i, q_i{}')\Psi_k \end{cases}$$

на траекториях синергетического регулятора. В большинстве исследований А. А. Колесников конкретизирует эту систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\Psi_1}{dt} = \dfrac{-1}{T_1}\Psi_1 \\ \quad . \ . \ . \\ \dfrac{d\Psi_m}{dt} = \dfrac{-1}{T_1}\Psi_m \end{cases}, \tag{5}$$

где $T_j > 0$ – фиксированные параметры. Левые производные вычисляются в силу системы уравнений регулятора, и полученная система будет составной частью проектируемого регулятора. Выбор вида (5) объясняется тем, что такая система является уравнением экстремалей вариационной задачи для поиска оптимального управления [3]. Эта система, очевидно, разрешима в явном виде на траекториях регулятора, и решение задачи Коши с начальными данными (q_{i0}, q_{i0}') имеет вид

$$\begin{cases} \Psi_1(q_i(t), q_i'(t)) = \Psi_1(q_{i0}, q_{i0}')exp\left(-\dfrac{t-t_0}{T_1}\right) \\ \qquad . \ . \ . \\ \Psi_m(q_i(t), q_i'(t)) = \Psi_m(q_{i0}, q_{i0}')exp\left(-\dfrac{t-t_0}{T_m}\right) \end{cases}.$$

Из вида системы следует, что многообразие $\mathcal{L}$ является асимптотически условно устойчивым по отношению к агрегированным переменным $\Psi_1, \dots, \Psi_m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Возникает естественные вопрос о связи условной асимптотической устойчивости многообразия по отношению к $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ и его устойчивости в смысле Ляпунова [11]. А. А. Колесников в конкретных задачах строит функции Ляпунова для обоснования того, что из (5) следует устойчивость по Ляпунову. В работе [13] в случае линейных функций Ψ_j доказано, что эти виды устойчивости равносильны. Преимущество устойчивости по А. А. Колесникову в том, что m нулей характеристического многочлена матрицы Якоби состояния равновесия синергетического регулятора вычисляются явно и всегда отрицательны [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Базовые положения метода АКАР легли в основу метода адаптивного управления на многообразиях [15]. В этой же монографии отмечены 2 особенности метода: 1) отсутствие необходимости задавать целевую функцию вариационной задачи управления, 2) включение информации о естественных свойствах свободной системы и желаемых свойствах регулятора в целевую функцию и агрегированные переменные.

2. Проектирование синергетического регулятора с помощью первых интегралов системы

Пусть у автономной системы

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x) \\ \ . \quad . \quad . \\ x_n' = f_n(x) \end{cases}, \qquad x = (x_1, \dots, x_n), \tag{6}$$

известны первые интегралы $\Psi_1(x) = C_1, \dots, \Psi_m(x) = C_m,\ m < n$. Требуется спроектировать аффинный по управлению синергетический регулятор

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x) + \sum_{j=1}^m a_{1j}(x)u_j(x) \\ \qquad . \quad . \quad . \\ x_n' = f_n(x) + \sum_{j=1}^m a_{nj}(x)u_j(x) \end{cases}, \tag{7}$$

где $a_{ij}(x)$ – заданные функции, у которого инвариантное многообразие $\mathcal{L}:=\left\{x\colon \begin{cases}\Psi_1(x)=0\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \Psi_m(x)=0\end{cases}\right\}$

будет устойчивым в смысле Колесникова. То есть $\left(\Psi_i\left(x(t)\right)\right)'_t=\frac{-1}{T}\Psi_i(x(t)),\ i=1,\dots,m,$ на движениях $x(t)$ этого регулятора. Параметр T регулирует степень притяжения траекторий к многообразию.

Напомним, что производные первых интегралов в силу системы (6) должны равняться нулю:

$$\begin{cases}\Psi'_{1x_1}(x)f_1(x)+\dots+\Psi'_{1x_n}(x)f_n(x)\equiv 0\\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \Psi'_{mx_1}(x)f_1(x)+\dots+\Psi'_{mx_n}(x)f_n(x)\equiv 0\end{cases}. \tag{8}$$

Введём матрицы-столбцы $X(t):=\left(x_i(t)\right)$, $F(x):=\left(f_i(x)\right)$, $U(x)=:(u_i(x))$. $X'(t):=\left(x_i{}'(t)\right)$. $A(x):=\left(a_{ij}(x)\right)$. Тогда систему (7) можно записать в матричном виде $X'=F(x)+A(x)U(x)$.

Обозначим $\frac{d\Psi}{dx}(x):=\left(\Psi'_{i\,x_j}(x)\right)$ матрицу Якоби отображения $\Psi(x)=:\left(\Psi_1(x)\dots,\Psi_m(x)\right)$, и запишем в матричной форме условие (8): $\frac{d\Psi}{dx}(x)F(x)=0$.

Выберем функции $\Psi_1(x),\dots,\Psi_m(x)$ в качестве агрегированных переменных. Эти переменные на траекториях синергетического регулятора должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases}\Psi'_{1x_1}(x)\left(f_1(x)+\sum\limits_{j=1}^{m}a_{1j}(x)u_j(x)\right)+\dots+\Psi'_{1x_n}(x)(f_n(x)+\sum\limits_{j=1}^{m}a_{nj}(x)u_j(x))=\\ =\sum\limits_{i=1}^{n}\Psi'_{1x_i}(x)\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}(x)u_j(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\Psi'_{1x_i}(x)a_{ij}(x)\right)u_j(x)=\frac{-1}{T}\Psi_1(x)\\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \Psi'_{mx_1}(x)\left(f_1(x)+\sum\limits_{j=1}^{m}a_{1j}(x)u_j(x)\right)+\dots+\Psi'_{mx_n}(x)(f_n(x)+\sum\limits_{j=1}^{m}a_{nj}(x)u_j(x))=\\ =\sum\limits_{i=1}^{n}\Psi'_{mx_i}(x)\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}(x)u_j(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\Psi'_{mx_i}(x)a_{ij}(x)\right)u_j(x)=\frac{-1}{T}\Psi_m(x)\end{cases}.$$

Последние равенства системы можно переписать в матричном виде $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dx}}(x)A(x)U(x)=\frac{-1}{T}\Psi(\mathrm{x})$. Если предположить, что квадратная матрица $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dx}}(x)A(x)$ не вырождена, то управление вычисляется по формуле $U(x)=\frac{-1}{T}\left(\frac{d\Psi}{dx}(x)A(x)\right)^{-1}\Psi(x)$, а синергетический регулятор принимает такой вид

$$X'_t=F(x)-\frac{1}{T}A\left(\frac{d\Psi}{dx}(x)A(x)\right)^{-1}\Psi(x).$$

3. Синтез синергетического регулятора для платформы с маятником

Из физических соображений следует, что состояния вида

$q_0 \coloneqq (x_1^0, 0, x_3^0, 0, \pi, 0, x_7^0, x_8^0)$ и $q_0 \coloneqq (x_1^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0, x_7^0, x_8^0)$

являются состояниями равновесия системы. Однако они не входят в область определения нормальной системы (2) (в силу восьмого уравнения), но входят в область определения системы (1).

Выберем по произвольным числам x_7^0, x_8^0 какую-либо дважды непрерывно дифференцируемую функцию $x_7(t),\ t \in [0, \infty)$, со свойством:

$$x_7(0) = x_7^0,\ x_8(t) \coloneqq x'_7(t),\ x_8(0) = x_8^0\ .$$

Подстановкой проверяется, что отображения

$$x(t, q_0) \coloneqq \left(x_1^0, 0, x_3^0, 0, \pi, 0, x_7(t), x_8(t)\right) \text{ и}$$
$$x(t, q_0) \coloneqq \left(x_1^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0, x_7(t), x_8(t)\right)$$

являются решениями задачи Коши системы (1) с соответствующими начальными данными $(x_1^0, 0, x_3^0, 0, \pi, 0, x_7^0, x_8^0)$ и $(x_1^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0, x_7^0, x_8^0)$.

Отсюда следует, в частности, что для этих состояний равновесия не имеет места теорема единственности решения задачи Коши.

Множества

$$\mathcal{L}_1(x_1^0, x_3^0) := \{(x_1^0, 0, x_3^0, 0, \pi, 0, x_7, x_8) : x_7, x_8\ \in R\}$$
$$\mathcal{L}_2(x_1^0, x_3^0) := \{(x_1^0, 0, x_3^0, 0, \pi, 0, x_7, x_8) : x_7, x_8\ \in R\}$$

являются многообразиями нуль-динамики системы (1), если считать выходными переменными $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$: любая траектория из этих множеств соответствует нахождению платформы с маятником в одном и том же положении равновесия в любой момент времени.

Если же начальная скорость платформы не равна нулю ($x_2^0 \neq 0$ или $x_4^0 \neq 0$) или начальная угловая скорость $x_6^0 \neq 0$, то опять же по физическим соображениям маятник под действием силы тяжести отклонится от положения равновесия и система начнёт двигаться по определённой траектории. То есть задача Коши будет иметь единственной решение.

Уравнение движения рассматриваемой системы в форме Лагранжа под действием каких-либо обобщённых сил $Q_1, \dots, Q_4$ имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_2} - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_4} - \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = Q_2 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_6} - \dfrac{\partial L}{\partial x_5} = Q_3 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_8} - \dfrac{\partial L}{\partial x_7} = Q_4 \end{cases}.$$

Нормальная форма этой системы примет вид [1]

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x'_2 = f_2 + \dfrac{1}{M}\dfrac{1}{M + m\,sin^2 x_5}\Big((M + m\,sin^2 x_5\, sin^2 x_7)Q_1 - \\ - m\,sin^2 x_5 \sin x_7 \cos x_7\, Q_2 - \dfrac{M}{l}\cos x_5 \cos x_7\, Q_3\Big) + \dfrac{1}{Ml}\dfrac{\sin x_7}{\sin x_5}Q_4 \\ x_3' = x_4 \\ x'_4 = f_4 + \dfrac{1}{M}\dfrac{1}{M + m\,sin^2 x_5}\ \big(-m\,sin^2 x_5 \sin x_7 \cos x_7\, Q_1 + \\ +(M + m\,sin^2 x_5 \cos^2 x_7)\ \ Q_2 - \dfrac{M}{l}\cos x_5 \sin x_7\, Q_3\Big) - \dfrac{1}{Ml}\dfrac{\cos x_7}{\sin x_5}Q_4 \\ x_5' = x_6 \\ x'_6 = f_6 - \dfrac{1}{l}\dfrac{1}{M + m\,sin^2 x_5}\Big(\cos x_5\,(\cos x_7\, Q_1 + \sin x_7\, Q_2) - \dfrac{M+m}{ml}Q_3\Big) \\ x_7' = x_8 \\ x'_8 = f_8 + \dfrac{1}{Ml}\dfrac{1}{\sin x_5}(\sin x_7\, Q_1 - \cos x_7\, Q_2) + \dfrac{(M+m)}{Mml^2}\dfrac{1}{sin^2 x_5}Q_4 \end{cases} \qquad (9)$$

Очевидно, последняя имеет структуру системы (7), в которой $\mathrm{U(x)} =: (Q_i(x))$ и $\mathrm{A(x)} \coloneqq \big(a_{ij}(x)\big) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{M + m\,sin^2 x_5\, sin^2 x_7}{M(M + m\,sin^2 x_5)} & -\dfrac{m\,sin^2 x_5 \sin x_7 \cos x_7}{M(M + m\,sin^2 x_5)} & \dfrac{-M\cos x_5 \cos x_7}{Ml(M + m\,sin^2 x_5)} & \dfrac{\sin x_7}{Ml \sin x_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{m\,sin^2 x_5 \sin x_7 \cos x_7\, F_1}{M(M + m\,sin^2 x_5)} & \dfrac{M + m\,sin^2 x_5 \cos^2 x_7}{M(M + m\,sin^2 x_5)} & \dfrac{-M\cos x_5 \sin x_7}{Ml(M + m\,sin^2 x_5)} & -\dfrac{\cos x_7}{Ml\sin x_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-\cos x_5 \cos x_7}{l(M + m\,sin^2 x_5)} & \dfrac{-\cos x_5 \sin x_7}{l(M + m\,sin^2 x_5)} & \dfrac{-(M+m)}{ml^2(M + m\,sin^2 x_5)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\sin x_7}{Ml\sin x_5} & \dfrac{-\cos x_7}{Ml\sin x_5} & 0 & \dfrac{M+m}{Mml^2 \sin^2 x_5} \end{pmatrix}.$$

В задаче управления, решаемой в [2], использовались только обобщённые силы Q_1, Q_2 (то есть сила прикладывается только к платформе), а в качестве агрегированных переменных были выбраны первые интегралы свободной системы (1)

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = (M+m)x_2 + ml\cos x_5 \cos x_7 x_6 - ml \sin x_5 \sin x_7 x_8 \\ \Phi_2(x) = (M+m)x_4 + ml\cos x_5 \sin x_7 x_6 + ml\sin x_5 \cos x_7 x_8 \end{cases}.$$

Мы также будем использовать только эти силы. Поскольку требуется, чтобы тележка остановилась в наперёд заданной точке плоскости x_1^0, x_3^0, рассмотрим такие агрегированные переменные

$$\begin{cases} \Psi_1 \coloneqq \Phi_1(x) + x_1 - x_1^0 = (M+m)x_2 + ml\cos x_5 \cos x_7 x_6 - ml\sin x_5 \sin x_7 x_8 + x_1 - x_1^0 \\ \Psi_2 \coloneqq \Phi_2(x) + x_3 - x_3^0 = (M+m)x_4 + ml\cos x_5 \sin x_7 x_6 + ml\sin x_5 \cos x_7 x_8 + x_3 - x_3^0 \end{cases}.$$

Имеем

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dx}} = \begin{pmatrix} 1 & M+m & 0 & 0 & ml(-\sin x_5 \cos x_7\, x_6 - \cos x_5 \sin x_7\, x_8) & ml\cos x_5 \cos x_7 \\ 0 & 0 & 1 & M+m & ml(-\sin x_5 \sin x_7\, x_6 + \cos x_5 \cos x_7\, x_8) & ml \cos x_5 \sin x_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} ml(-\cos x_5 \sin x_7\, x_6 - \sin x_5 \cos x_7\, x_8) & -ml \sin x_5 \sin x_7 \\ ml(\cos x_5 \cos x_7\, x_6 - \sin x_5 \sin x_7\, x_8) & ml \sin x_5 \cos x_7 \end{matrix}\Bigg),$$

Отсюда $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dx}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dx}}(x)$. Непосредственно проверяется, что матрица $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dx}}(x)$ является левой обратной к матрице $A(x)$: $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dx}}(x)A(x) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dx}}A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Потребуем от агрегированных переменных $\Psi(\mathrm{x})$ условие устойчивости по А. А. Колесникову $\Psi'_t(\mathrm{x}) = \frac{-1}{T}\Psi(\mathrm{x})$ на траекториях синергетического регулятора

$$\Psi'_t(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dx}}\mathrm{X}'(t) = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dx}}\big(F(x) + A(x)U(x)\big) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dx}}(x)\right)F(x)$$
$$+ \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{dx}}A(x)U(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} + U(x) = \frac{-1}{T}\Psi(\mathrm{x}).$$

Отсюда вектор управления равен $U(x) = \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ Q_2(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{T}\Psi(\mathrm{x})$, а синергетический регулятор принимает вид $X'_t = F(x) - A(x)\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{T}\Psi(\mathrm{x})\right)$. Или, учитывая (9), в развёрнутом виде

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x'_2 = f_2 - \dfrac{1}{M}\dfrac{1}{M + m\, sin^2\, x_5}\Bigg((M + m\, sin^2\, x_5\, sin^2\, x_7)\left(x_2 + \dfrac{1}{T}\Psi_1(x)\right) - \\ \qquad - m\, sin^2\, x_5 \sin x_7 \cos x_7 \left(x_4 + \dfrac{1}{T}\Psi_2(x)\right)\Bigg) \\ x_3' = x_4 \\ x'_4 = f_4 - \dfrac{1}{M}\dfrac{1}{M + m\, sin^2\, x_5}\Bigg(-m\, sin^2\, x_5 \sin x_7 \cos x_7 \left(x_2 + \dfrac{1}{T}\Psi_1(x)\right) + \\ \qquad + (M + m\, sin^2\, x_5 \cos^2 x_7)\left(x_4 + \dfrac{1}{T}\Psi_2(x)\right)\Bigg) \\ x_5' = x_6 \\ x'_6 = f_6 + \dfrac{1}{l}\dfrac{1}{M + m\, sin^2\, x_5}\Bigg(\cos x_5 \cos x_7 \left(x_2 + \dfrac{1}{T}\Psi_1(x)\right) + \\ \qquad + \cos x_5 \sin x_7 \left(x_4 + \dfrac{1}{T}\Psi_2(x)\right)\Bigg) \\ x_7' = x_8 \\ x'_8 = f_8 - \dfrac{1}{Ml}\dfrac{1}{\sin x_5}\left(\sin x_7 \left(x_2 + \dfrac{1}{T}\Psi_1(x)\right) - \cos x_7 \left(x_4 + \dfrac{1}{T}\Psi_2(x)\right)\right) \end{cases} . \qquad (10)$$

4. Проблема устойчивости синергетического регулятора. Вычислительный эксперимент

Особенность рассматриваемой задачи проектирования в том, что устойчивое состояние системы полностью определяется первыми шестью координатами $(x_1^0, 0, x_3^0, 0, \pi, 0)$. Любая точка фазового пространства вида $(x_1^0, 0, x_3^0, 0, \pi, 0, x_7, x_8)$ не принадлежит области определения правой части системы (10) из-за восьмого уравнения. Однако она является состоянием равновесия системы уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_2} - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = Q_1 = -x_2 - \dfrac{1}{T}\Psi_1(x) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_4} - \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = Q_2 = -x_4 - \dfrac{1}{T}\Psi_2(x) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_6} - \dfrac{\partial L}{\partial x_5} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_8} - \dfrac{\partial L}{\partial x_7} = 0 \end{cases}, \qquad (11)$$

в чём несложно убедиться подстановкой. Таким образом проблема проектирования связана с понятием устойчивости состояния равновесия по части переменных.

Сформулируем подходящее понятие устойчивости в общем случае для уравнений Лагранжа. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial q'_1} - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1 \\ \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial q'_n} - \dfrac{\partial L}{\partial q_n} = Q_n \end{cases}, \qquad (12)$$

и «измеряемые величины» $P(q) \coloneqq \big(p_1(q_1, q'_1, \dots, q_n, q'_n), \ \dots \ , p_m(q_1, q'_1, \dots, q_n, q'_n)\big): X \to R^m$.

$$\begin{cases} y_1 := p_1(q_1, q'_1, \dots, q_n, q'_n) \\ \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \\ y_m := p_m(q_1, q'_1, \dots, q_n, q'_n) \end{cases}. \qquad (13)$$

Точку $y_{0=}(y_1^0, \dots, y_m^0) \in Im(P)$ назовём частичным положением равновесия системы (12), (13) по отображению $P(q)$, если для каждого состояния q_0 со свойством $P(q_0) = y_0$ решение задачи Коши системы (12) $q(t, t_0, q_0)$, $t \geq t_0$, удовлетворяет условию $P\big(q(t, t_0, q_0)\big) \equiv y_0$. Это определение равносильно тому, что множество точек фазового пространства вида $\mathcal{L} := \{q \in X: P(q) = y_0\}$ является инвариантным множеством системы (12).

Предположим, что система (12) полна на некоторой окрестности V множества $\mathcal{L}$ в смысле [9]: для всех $q_0 \in V$ решение задачи Коши $q(t, t_0, q_0)$, $t \geq t_0$ существует и принадлежит V. Будем говорить, что система (12), (13) в частичном положении равновесия y_0 устойчива по отношению к отображению $P(q)$, если отображение $q_0 \to P\big(q(t, t_0, q_0)\big)$ непрерывно во всех точках $q_0 \in \mathcal{L}$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \|q_1 - q_0\| < \delta \ \to \ \forall \, t \geq t_0 \ \|P(q(t, t_0, q_1) - y_0\| < \varepsilon$.

Если кроме того найдётся такая окрестность V_0 множества $\mathcal{L}$, что $\forall q_1 \in V_0$ $\lim_{t\to\infty} P\big(q(t,t_0,q_1)\big) = y_0$, то будем говорить, что частичное положение равновесия y_0 асимптотически устойчиво по отношению к отображению $P(q)$.

Ранее понятие частичного положения равновесия по функции было дано для нормальной системы дифференциальных уравнений [9]. Для нашей задачи оно не подходит.

В нашем случае в связи с системой (11) и «терминальным» положением» $y_0 \coloneqq (x_1^{00}, 0, x_3^{00}, 0, \pi, 0)$ в качестве измеряемых величин выберем $P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\colon R^8 \to R^6$, то есть

$$\begin{cases} y_1 = p_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) := x_1 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_6 := p_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = x_6 \end{cases}, \tag{14}$$

Покажем, что y_0 будет частичным положением равновесия по так определённому отображению P. Фиксируем произвольные числа x_7^0, x_8^0 и дважды непрерывно дифференцируемую функцию $x_7(t)$, $t \in [0,\infty)$, со свойством: $x_7(0) = x_7^0$, $x_7{}'(0) = x_8^0$, $x_8(t) \coloneqq x_7{}'(t)$. Образуем $q_0 \coloneqq (x_1^{00}, 0, x_3^{00}, 0, \pi, 0, x_7^0, x_8^0)$. Оно удовлетворяет условию $P(q_0) = y_0$. Решением задачи Коши системы (11) с начальными данными $x_1^{00}, 0, x_3^{00}, 0, \pi, 0, x_7^0, x_8^0$ будет восьмёрка функций $x(t,t_0,q_0) \coloneqq \big(x_1^{00}, 0, x_3^{00}, 0, \pi, 0, x_7(t), x_8(t)\big)$. В этом можно убедиться подстановкой в уравнения этой системы. И в тоже время $P\big(q(t,t_0,q_0)\big) \equiv y_0$. Таким образом, точка $y_0 \coloneqq (x_1^{00}, 0, x_3^{00}, 0, \pi, 0)$ является частичным положением равновесия системы (11), (14) по отображению $P(x) = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$.

Несложно проверить, что у системы (10) вообще нет состояний равновесия.

Рассматриваемая задача управления предполагает проверку частичного положения равновесия на асимптотическую устойчивость в смысле А. А. Ляпунова. В настоящее время неизвестны какие-либо теоретические результаты по такой проверке. Поэтому была спроектирована S-модель синергетического регулятора для численных экспериментов по проверке устойчивости частичного положения равновесия. Приведём результаты одного такого эксперимента.

Произвольным образом были выбраны следующие параметры. Масса платформы $M = 10$. Длина упругой несгибаемой нити $l = 3$. Масса груза $m = 2$. $T = 1$. Начальное состояние системы $q_0 = (-10,\ 3,\ 5, -4,\ 2,\ 3,\ 4, -2)$. Конечное (терминальное) положение платформы $x_1^{00} = 10$, $x_3^{00} = -15$. Время моделирования $t = 500$. На первых 8 графиках изображены изменения фазовых переменных синергетического регулятора.

Первая координата платформы приближается к $x_1^{00} = 10$, а её скорость стремится к нулю (Рис.1,2).

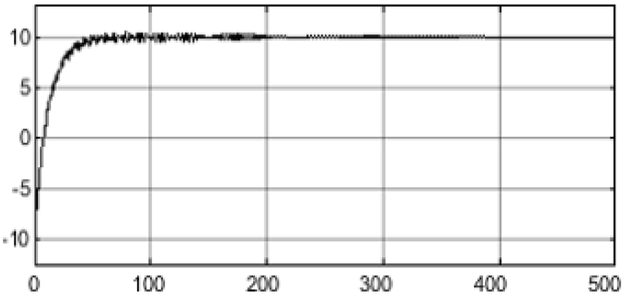

Рис.1. График первой координаты платформы

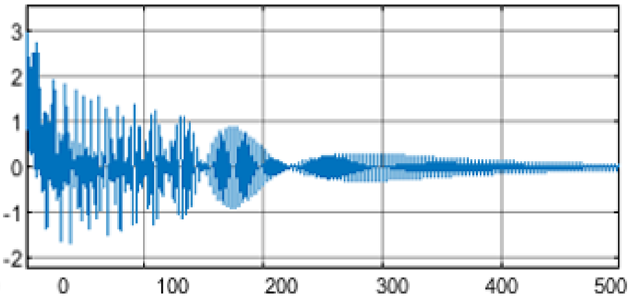

Рис.2. График скорости первой координаты платформы.

Вторая координата платформы приближается к $x_3^{00} = -15$, а её скорость стремится к нулю Рис.3,4).

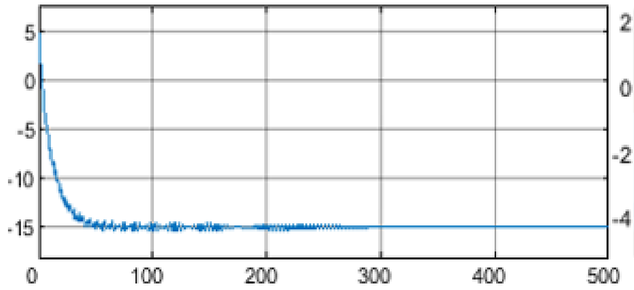

Рис.3. График второй координаты платформы.

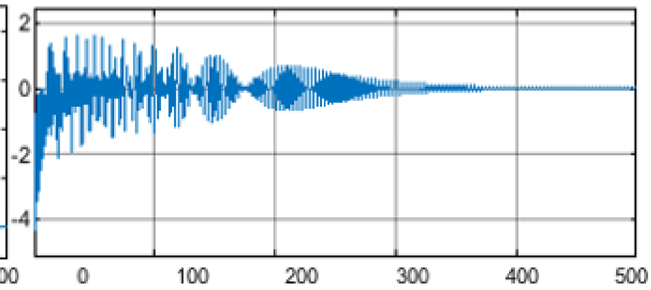

Рис.4. График скорости второй координаты платформы.

Угловая координата вращения маятника вокруг начала координат в вертикальной плоскости приближается к 1800, а соответствующая угловая скорость стремится к нулю (Рис.5,6). То есть маятник стабилизируется в нижнем положении равновесия.

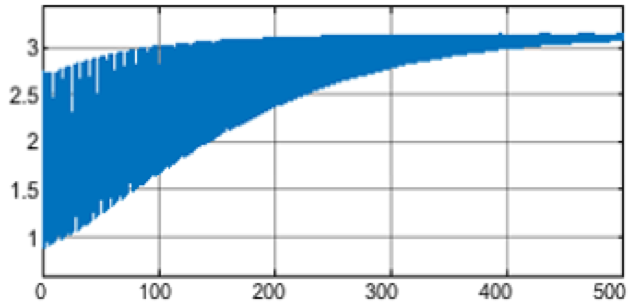

Рис.5. График угла поворота маятника относительно вертикальной оси.

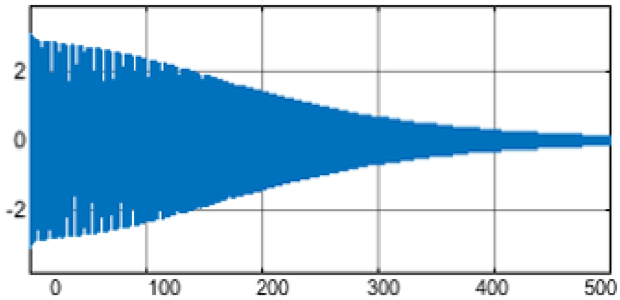

Рис.6. График угловой скорости поворота маятника относительно вертикальной оси.

Угловая координата вращения маятника вокруг вертикальной оси неограниченно растет со скоростью, которая периодически из меняется от 0 до -40.

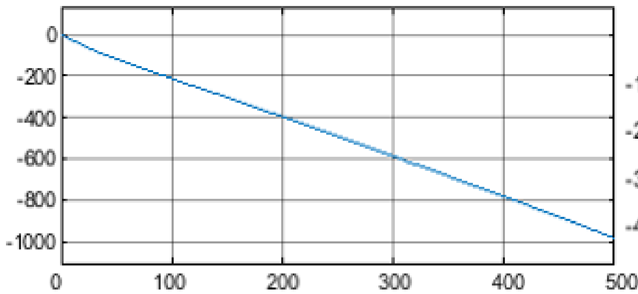

Рис.7. График угла поворота маятника вокруг вертикальной оси.

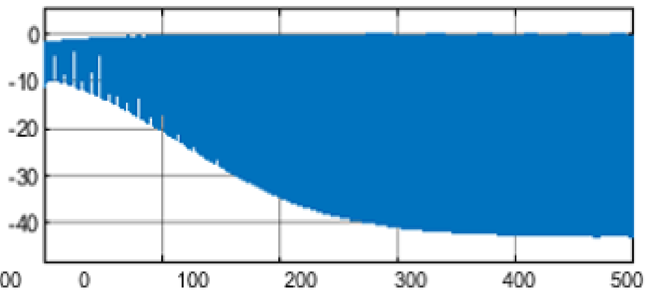

Рис.8. График угловой скорости поворота маятника вокруг вертикальной оси.

На Рис.9 изображена траектория движения цента масс платформы. Направление движения складывается из неравномерного движения из начального положения $(x_1^0, x_3^0) = (-10,5)$ в терминальное $(x_1^{00},\ x_3^{00}) = (10.-15)$ вдоль некоторой кривой и стремящегося к нулю колебания.

На Рис.10 изображен след движения конечной точки маятника относительно центра масс платформы. Видно, что этот след спускается к нижнему положению маятника.

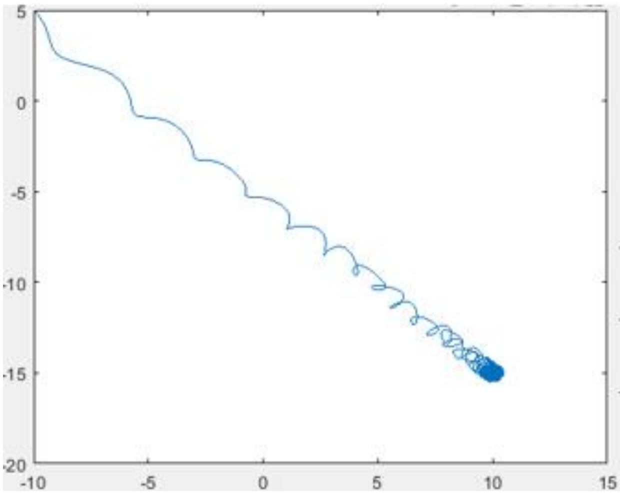

Рис.9. Траектория движения платформы.

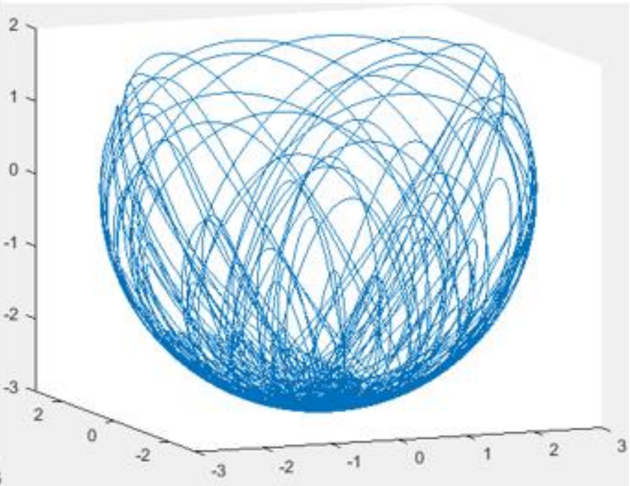

Рис.10. Траектория движения конца маятника относительно точки подвеса.

Заключение. Результаты численных экспериментов

1) Особенность изучаемых систем Лагранжа (1) и (8) состоит в том, что они не имеет изолированных состояний равновесия, хотя моделируемая физическая система имеет 2 естественных состояния. Поэтому при исследовании на устойчивость системы приходится вводить понятие частичного положения равновесия.

2) Цель проектирования регулятора в том, чтобы он переводил систему из любого неустойчивого начального состояния в наперёд заданное состояние равновесия. Метод АКАР гарантирует устойчивость в смысле А. А. Колесникова. При этом численными экспериментами часто удается обосновать, что терминальное состояние обладает свойством асимптотической устойчивости в смысле А. А. Ляпунова. Представляется важной задача изучения взаимосвязи этих двух типов устойчивости.

3) Вычислительные эксперименты показывают, что платформа движется из начального положения в требуемое конечное вдоль некоторой кривой, определяемой её параметрами, начальным и конечным положениями, осуществляя при этом небольшие кругообразные отклонения относительно этой кривой.

4) Из рис.8 видно, что при этом маятник будет вращаться с переменной не стремящейся к нулю угловой скоростью относительно вертикальной оси.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Братищев А. В. Управление колебаниями маятника на подвижной платформе. Дифференциальные уравнения и процессы управления [Электронный ресурс]: электрон. журн. / СПбГУ. № 4, с.75-86, 2020. - Режим доступа: http://www.math.spbu.ru/diffjournal

[2] A V Bratishchev First integrals of the system "platform with pendulum" and controlling of it. 2021 J. Phys.: Conf. Ser. Volume 2131 Mathematical modeling and computational methods in problems of hydro-aerodynamics, magnetohydrodynamics, plasma physics and astrophysics. 022020. P.1-11.

[3] Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного анализа. М.: КомКнига, 2006.- 240 с.

[4] Братищев А. В. Качественный анализ уравнения движения системы «подвижная платформа с маятником». Дифференциальные уравнения и процессы управления

[Электронный ресурс]: электрон. журн. / СПбГУ. № 4, с.49-64, 2021. - Режим доступа: http://www.math.spbu.ru/diffjournal

[5] Дэбни Дж., Харман Т. Simulink 4. Секреты мастерства. М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2003. – 404 с.

[6] Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.- 474 с.

[7] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.- 300 с.

[8] Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движений по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.- 256 с.

[9] Мирошник И. В., Никифоров И. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.- 450 с.

[10] Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.- 320 с.

[11] Зубов В. И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973.- 272 с.

[12] Леви-Чевита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т.2. Ч.2. М: ИЛ, 1950.-556 с.

[13] Братищев А. В. О характеристическом уравнении состояния равновесия автономной системы, имеющей притягивающее инвариантное многообразие. Дифференциальные уравнения и процессы управления [Электронный ресурс]: электрон. журн. / СПбГУ. № 2, с.15-23, 2017. - Режим доступа: http://www.math.spbu.ru/diffjournal

[14] Братищев А. В. Факторизация характеристического многочлена состояния равновесия автономной системы, имеющей притягивающее инвариантное многообразие. Дифференциальные уравнения и процессы управления [Электронный ресурс]: электрон. журн. / СПбГУ. № 4, с.1-17, 2018. - Режим доступа: http://www.math.spbu.ru/diffjournal

[15] Тюкин И. Ю., Терехов В. А. Адаптация в нелинейных динамических системах. М.: Издательство ЛКИ, 2014.- 384 с.

Control of a movable platform with a pendulum

Bratishchev A.V.

Don State Technical University

avbratishchev@spark-mail.ru

Abstract. The connection between the concepts of stability of a variety in the sense of A. A. Lyapunov, F. R. Gantmacher and A. A. Kolesnikov is established. The concept of partial equilibrium position according to a given mapping is introduced. Within the framework of the synergetic control theory, the formula of the control vector is found when the aggregated variables are common integrals of a dynamical system, and the control vector enters the controller in a linear manner. These concepts and results are used in the task of controlling a platform with a fixed pendulum, when it is necessary to stabilize the platform in a predetermined position, and the pendulum in the lower equilibrium position.

Keywords: Lagrange equations, general integral, invariant set, platform, pendulum, synergetic regulator.