ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2023
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Посвящается светлой памяти моего отца
Абдурагимова Эльдерхана Исрапиловича

О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения четного порядка

Абдурагимов Г.Э.
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»
gusen_e@mail.ru

Аннотация. В настоящей статье рассматривается двухточечная краевая задача для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения четного порядка с сильной нелинейностью на отрезке $[0, 1]$ с однородными граничными условиями. С использованием специальных топологических средств получены достаточные условия существования и единственности положительного решения рассматриваемой задачи. Существование положительного решения доказано с помощью известной теоремы Красносельского о неподвижной точке в конусе, единственность соответственно установлена с применением принципа сжатых отображений. Приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий выполнение достаточных условий однозначной разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, конус.

1 Введение

Вопросам разрешимости краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений посвящено немало работ, в частности [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], в которых основном, в них рассмотрены вопросы существования положительного решения, его поведения и асмиптотики и др. Работ, посвященных получению условий, обеспечивающих единственность положительного решения задач с однородными краевыми условиями для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и более высокого порядков немного, отметим, например, [9, 10, 11, 12, 13]. Из цитируемых выше работ близкими по тематике данному исследованию являются статьи [9, 13], в которых рассмотрены нелинейные краевые задачи с аналогичными краевыми условиями. В [9] получены достаточные условия существования положительных решений краевой задачи для некоторого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения n порядка с различными вариациями граничных условий с помощью теоремы Красносельского о неподвижной точке в конусе. В [13] с помощью метода линейных преобразований Ц. На установлены достаточные условия существования единственного положительного решения аналогичной краевой задачи для частного случая нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка и предложен численный алгоритм построения такого решения. В данной статье авторами предпринята попытка обобщить упомянутые выше результаты с помощью теоремы о неподвижной точке в частично упорядоченных множествах. В заключении приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

2 Предварительные сведения и обозначения

Для удобства приведем некоторые обозначения и утверждения, которые будут использованы при доказательстве основных результатов работы.

Определение 1 *[14, с. 17] Пусть E — вещественное банахово пространство. Множество $K \subset E$ называется конусом, если выполнены следующие условия:*

1. *множество K замкнуто;*
2. *из $u, v \in K$ вытекает, что $\alpha u + \beta v \in K$ при всех $\alpha, \beta \geq 0$;*

3. *из каждой пары векторов (точек) x, $-x$ по крайней мере один не принадлежит K, если $x \neq \theta$, где θ – нуль пространства E*

Теорема 1 *[15] Пусть E — банахово пространство и $K \subset E$ – конус в E. Предположим что Ω_1 и Ω_2 являются открытыми подмножествами E с $0 \in \Omega_1$ и $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Пусть $T : K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right) \to K$ вполне непрерывный оператор. Кроме того, предположим, что выполнено одно из двух условий:*

H1 : $\|Tu\| \leq \|u\|,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *и* $\|Tu\| \geq \|u\|,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$

H2 : $\|Tu\| \leq \|u\|,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$ *и* $\|Tu\| \geq \|u\|,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Тогда оператор T имеет фиксированную точку в $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$.

Обозначим через C — пространство $C[0,1]$, через $\mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$ и через $\mathbb{W}^{(2n)}$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$ с $(2n-1)$ абсолютно непрерывной производной.

Лемма 1 *Пусть $y \in C$. Тогда краевая задача*

$$x^{(2n)}(t) + y(t) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < t < 1, \tag{2.1}$$

$$x(0) = x'(0) = \ldots x^{(2n-2)}(0) = 0, \tag{2.2}$$

$$x(1) = 0, \tag{2.3}$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) y(s)\, ds,$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t^{2n-1}(1-s)^{2n-1} - (t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}, & \text{если } 0 \leq s \leq t, \\ \dfrac{t^{2n-1}(1-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}, & \text{если } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Применяя преобразование Лапласа к задаче (2.1)–(2.3), получим

$$s^{2n} x(s) - s^{2n-2} x'(0) = -y(s), \tag{2.4}$$

где $u(s)$ и $y(s)$ преобразования Лапласа $u(t)$ и $y(t)$ соответственно. Инверсия уравнения (2.4) дает окончательно решение:

$$x(t) = \int_0^1 \frac{t^{2n-1}(1-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} y(s)\, ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} y(s)\, ds.$$

Лемма доказана.

Следствие 1 *Справедливо неравенство*

$$\frac{1}{(2n-1)!}\varphi(t)\varphi(s) \leq G(t,s) \leq \frac{1}{(2n-1)!}\varphi(s), \quad t,s \in [0,1],$$

где $\varphi(t) = min\{t, 1-t\}$.

3 Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(2n)}(t) + f(t,(Tx)(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{3.1}$$

$$x(0) = x'(0) = \ldots x^{(2n-2)}(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$x(1) = 0, \tag{3.3}$$

где $n \in \mathbb{N}$, линейный оператор $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ непрерывен, функция $f(t,u)$ монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Определение 2 *Под положительным решением задачи* (3.1)–(3.3) *будем понимать функцию* $x \in \mathbb{W}^{(2n)}$, *положительную в интервале* $(0,1)$, *удовлетворяющую на указанном интервале уравнению* (3.1) *и граничным условиям* (3.2), (3.3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (3.1)–(3.3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{3.4}$$

где $G(t,s)$ была ранее определена в лемме 1.

Предположим, что функция $f(t,u)$ в области $[0,1]\times[0,\infty)$ удовлетворяет условию

$$f(t,u) \leq b(t) + \beta u^{p/q}, \quad p,q \in (1,\infty), \tag{3.5}$$

где $\beta > 0$, $b \in \mathbb{L}_q$.

Отметим, что условие (3.4) обеспечивает действие оператора Немыцкого $N\colon \mathbb{L}_p \to \mathbb{L}_q$, определяемого соотношением $(Nu)(t) = f(t,u(t))$ для каждого $u \in \mathbb{L}_p$.

В операторной форме уравнение (3.4) можно переписать в виде

$$x = GNTx,$$

где $G\colon \mathbb{L}_q \to C$, $(Gu)(t) = \int_0^1 G(t,s)u(s)\,ds$ — оператор Грина.

Положим
$$A = GNT,$$
где оператор A определенный равенством
$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right)\, ds, \quad 0 \le t \le 1,$$
действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций, монотонен и вполне непрерывен [16, с. 161].

Обозначим через $\tilde{K}$ конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию
$$x(t) \ge \varphi(t)\|x\|_C.$$

В дальнейшем под полуупорядочиванием $u \prec v$ и $u \overline{\prec} v$ в конусе $\tilde{K}$ пространства C соответственно будем понимать $u(t) \le v(t)$ и $u(t) > v(t)$ при всех $t \in [0,1]$.

Лемма 2 *Оператор A инвариантен относительно конуса $\tilde{K}$.*

Доказательство. В силу следствия 1 имеем
$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right)\, ds \ge$$
$$\ge \frac{1}{(2n-1)!}\varphi(t) \int_0^1 \varphi(s) f\left(s, (Tx)(s)\right)\, ds.$$

С другой стороны
$$\|Ax\|_C \le \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^1 \varphi(s) f\left(s, (Tx)(s)\right)\, ds.$$

Таким образом, очевидно
$$(Ax)(t) \ge \varphi(t)\|Ax\|_C.$$
Лемма доказана.

Введем следующие обозначения:
$$\Omega_1 = \left\{x \in \tilde{K} : \|x\|_C < r_1\right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{x \in \tilde{K} : \|x\|_C < r_2\right\},$$
$$\Omega = \overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1,$$
где r_1 и r_2 – некоторые положительные числа, причем $r_1 < r_2$.

Теорема 2 *Предположим, что* $f(t,u)$ *удовлетворяет условию* (3.5) *и*

1. $p > q > 1$,
2. $\frac{p-q}{q}\left(\frac{2q\,(1+q')^{\frac{1}{q'}}\,(2n-1)!}{p\beta\gamma^{\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p-q}} \geq \frac{\|b\|_{\mathbb{L}_q}}{2\,(1+q')^{\frac{1}{q'}}\,(2n-1)!}$,
   где γ *– норма оператора* T, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$.
3. $\lim_{u\to+\infty}\left\{\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}\right\}=\infty$.

Тогда краевая задача (3.1)–(3.3) *имеет по крайней мере одно положительное решение* $x \in K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$.

Доказательство. Доказательство настоящей теоремы основывается на применении теоремы 1. Вначале установим существование числа $r_2 > 0$ такого, что при $x \in K \cap \partial\Omega_2$

$$\|Ax\|_C \leq \|x\|_C. \tag{3.6}$$

В силу условия (3.5) и следствия 1 при $x \in K \cap \partial\Omega_2$ имеем

$$\begin{aligned}\|Ax\|_C = \max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\,ds \leq \\ \leq \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^1 \varphi(s)b(s)\,ds + \frac{\beta}{(2n-1)!}\int_0^1 \varphi(s)\,(Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds \leq \\ \leq \frac{1}{(2n-1)!}\|\varphi\|_{\mathbb{L}_{q'}}\|b\|_{\mathbb{L}_q} + \frac{\beta}{(2n-1)!}\|\varphi\|_{\mathbb{L}_{q'}}\|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \leq \\ \leq \frac{1}{2\,(1+q')^{\frac{1}{q'}}\,(2n-1)!}\left(\|b\|_{\mathbb{L}_q} + \beta\gamma^{\frac{p}{q}}\|x\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}}\right).\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi(r) = r - Ar^{\sigma} - B, \qquad r > 0,$$

где $A > 0$, $B \geq 0$, $\sigma > 1$.

Несложно проверить, что наибольшее значение ψ достигается при

$$r = r_{max} = \left(\frac{1}{\sigma A}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}.$$

Отсюда, положив $A = \dfrac{\beta\gamma^{\frac{p}{q}}}{2\left(1+q'\right)^{\frac{1}{q'}}(2n-1)!}$, $B = \dfrac{\|b\|_{\mathbb{L}_q}}{2\left(1+q'\right)^{\frac{1}{q'}}(2n-1)!}$ и $\sigma = \frac{p}{q}$, в силу условия (2) теоремы, обеспечивающего неотрицательность значения ψ в точке r_{max}, при $r_2 = r_{max} = \left(\dfrac{2q\left(1+q'\right)^{\frac{1}{q'}}(2n-1)!}{p\beta\gamma^{\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p-q}}$ получим соотношение (3.6).

Найдем теперь такое положительное число $r_1 < r_2$, что при $x \in K \cap \partial\Omega_1$

$$\|Ax\|_C \geq \|x\|_C. \tag{3.7}$$

Очевидно, из условия (3) теоремы вытекает, что $f(t,u) \geq \delta u$, $\delta > 0$ на множестве $[0,1]\times(0,\infty)$. Принимая во внимание это обстоятельство и следствие 1, при $x \in K \cap \partial\Omega_1$ имеем

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s,(Tx)(s)\right) ds \geq$$
$$\geq \frac{1}{(2n-1)!}\varphi(t)\delta\int_0^1 \varphi(s)\left(Tx\right)(s)\,ds \geq$$
$$\geq \frac{1}{(2n-1)!}\delta\varphi(t)\|x\|_C\int_0^1 \varphi(s)\left(T\varphi\right)(s)\,ds.$$

Нормируя последнее неравенство, получим

$$\|Ax\|_C \geq \frac{\delta}{2(2n-1)!}\int_0^1 \varphi(s)\left(T\varphi\right)(s)\,ds \cdot \|x\|_C.$$

Выбрав теперь δ так, чтобы

$$\frac{\delta}{2(2n-1)!}\int_0^1 \varphi(s)\left(T\varphi\right)(s)\,ds < 1,$$

легко убедиться в справедливости (3.7) для любого $r_1 \in (0, r_2)$.

Согласно теореме 1 с учетом леммы 1 оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в $K \cap \Omega$, что равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения $x \in K \cap \Omega$ краевой задачи (3.1)–(3.3).
Теорема доказана полностью.

Теорема 3 *При выполнении условий теоремы 2 краевая задача* (3.1)–(3.3) *имеет единственное положительное решение $x \in K \cap \Omega$, если функция*

$f(t,u)$ дифференцируема по u, производная $f'_u(t,u)$ монотонно возрастает по второму аргументу и

$$\gamma\|\rho\|_{\mathbb{L}_{p'}} < 2(2n-1)!, \tag{3.8}$$

где $\rho(t) \equiv \left|f'_u\left(t, r_2\left(T1\right)(t)\right)\right|$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$.

Доказательство. Введем обозначение $y(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$, где $x_i \in K\cap\Omega$, $i=1,2$.

В силу монотонности производной $f'_u(t,u)$ по u, используя соответствующую теорему о среднем, получим

$$|(Ax_1)(t)-(Ax_2)(t)| = \left|\int_0^1 G(t,s) f'_u\left(s,\left(T\tilde{x}\right)(s)\right)(Ty)(s)\,ds\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^1 \varphi(s) f'_u\left(s, r_2\left(T1\right)(s)\right)\left|(Ty)(s)\right| ds \leq$$
$$\leq \frac{1}{2(2n-1)!}\|\rho\|_{\mathbb{L}_{p'}}\|Ty\|_{\mathbb{L}_p} \leq \frac{\gamma}{2(2n-1)!}|\rho\|_{\mathbb{L}_{p'}}\|y\|_C,$$

где $\left(T\tilde{x}\right)(t)$ принимает значения промежуточные между значениями $\left(Tx_1\right)(t)$ и $\left(Tx_2\right)(t)$.

С учетом условия (3.8) теоремы на основании принципа сжатых отображений заключаем, что краевая задача (3.1)–(3.3) имеет единственное положительное решение $x \in K\cap\Omega$.
Теорема доказана полностью.

В конце работы приведем нетривиальный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Пример 1 *Рассмотрим следующую краевую задачу*

$$x^{(2n)}(t) + p(t)\left(\int_0^1 x(s)ds\right)^{\frac{p}{q}} = 0, \qquad n\in\mathbb{N}, \qquad 0<t<1, \tag{3.9}$$
$$x(0)=x'(0)=\ldots x^{(2n-2)}(0)=0, \tag{3.10}$$
$$x(1)=0, \tag{3.11}$$

где $p(t)\geq 0$ – суммируемая на $[0,1]$ функция, $p>q>1$.

Легко видеть, что $f(t,u)=u^{p/q}$ неотрицательна, непрерывна на $[0,1]\times[0,\infty)$ и не убывает по второму аргументу. Более того, взяв $b(t)=0$ и $\beta=1$ на основании теоремы 2 несложно убедиться в существовании по *меньшей мере одного положительного решения задачи* (3.9)–(3.11) *такого что* $\|x\|_C \le r_2$, *где* $r_2 = \left(\dfrac{2q\,(1+q')^{\frac{1}{q'}}\,(2n-1)!}{p} \right)^{\frac{q}{p-q}}$.

Далее, очевидно, $\rho(t) = \frac{p}{q} r_2^{\frac{p}{q}-1} p(t)$, $t \in [0,1]$. *В силу условия* (3.8), *потребовав* $p(t) < \dfrac{1}{(1+q')^{\frac{1}{q'}}}$, *согласно теореме 3 положительное решение задачи* (3.9)–(3.11) *единственное.*

Список литературы

[1] Li Z., Shu XB., Miao T. The existence of solutions for Sturm–Liouville differential equation with random impulses and boundary value problems. *Bound. Value Probl.*, 2022; (97):1–23.

[2] Talib I., Abdeljawad T., Abdulah M. A. New results and applications on the existence results for nonlinear coupled systems. *Adv. Differ. Equ.*, 2021; (368):1–22.

[3] Cabada A., Iglesias J. Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, 2021; (66):1–19.

[4] Wang F., Ding R. On positive solutions of second-order delayed differential system with indefinite weight. *Bound. Value Probl.*, 2021; (96):1–17.

[5] Yang Z. Positive solutions of a second-order nonlinear Robin problem involving the first-order derivative. *Adv. Differ. Equ.*, 2021; (313):1–16.

[6] Zhang Y., Abdella K., Feng W. Positive solutions for second - order differential equations with singularities and separated integral boundary condition. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2020; (75):1–12.

[7] Ying He. Existence theory for single positive solution to fourth - order value problems. *Advances in Pure Mathematics*, 2014; (4):480–486.

[8] Liu Y. Miltiple positive of nonlinear singular boundary value problem for fourth-order equations. *Advances Mathematics Letters*, 2004; (4):747–757.

[9] Moustafa El-S. Positive solutions of boundary value problems for nth order ordinary differential equations. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2008; (1):1–9.

[10] Абдурагимов Э. И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения
Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.. 2010. Т. 76, № 2. С. 5–12.

[11] Абдурагимов Э. И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // *Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.*. 2014. Т. 121, № 10. С. 9–16.

[12] Абдурагимов Э. И., Абдурагимова П. Э., Гаджиева Т. Ю. Двухточечная краевая задача для одного нелинейного ОДУ 4-го порядка. Существование, единственность положительного решения и численный метод его построения // *Вестник Даг. гос. университета. Сер. 1: Естественные науки.* 2019. № 3. С. 79–85.

[13] Абдурагимов Г. Э., Абдурагимова П. Э., Курамагомедова М. М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка // *Вестник российских университетов. Математика.* 2021. Т. 25, № 136. С. 341–347.

[14] Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 396 с.

[15] Krasnosel'skii M. A. Positive Solutions of Operator Equations. Noordhoff: Groningen, 1964. 396 p.

[16] Крейн С. Г. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544 с.

On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional differential equation of even order

G. E. Abduragimov
Dagestan State University
gusen_e@mail.ru

Abstract. In this article, we consider a two-point boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of even order with strong nonlinearity on the interval $[0, 1]$ with homogeneous boundary conditions. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a positive solution of the problem under consideration are obtained using special topological tools. The existence of a positive solution is proved using the well-known Krasnoselsky theorem on a fixed point in a cone, and uniqueness is established accordingly using the contraction mapping principle. A non-trivial example is given, illustrating the fulfillment of sufficient conditions for the unique solvability of the problem posed.

Keywords: boundary value problem, positive solution, Green's function, cone.