

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 2023

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Моделирование динамических систем

## Динамика трех связанных генераторов квазипериодических колебаний

А. П. Кузнецов<sup>1</sup>, Ю. В. Седова<sup>1</sup>, Н. В. Станкевич<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и  
электроники им. В.А. Котельникова РАН

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа  
экономики»

[arkuz@rambler.ru](mailto:arkuz@rambler.ru), [sedovayv@yandex.ru](mailto:sedovayv@yandex.ru), [stankevichnv@mail.ru](mailto:stankevichnv@mail.ru)

**Аннотация.** Рассмотрена динамика трех связанных генераторов, способных демонстрировать автономные квазипериодические колебания. Обсуждается сложное устройство ляпуновских карт системы, выявляющее инвариантные торы разной размерности, квазипериодические бифуркации торов и резонансную паутину Арнольда на базе торов разной размерности. Рассмотрены случаи разных типов настройки индивидуальных генераторов (периодические колебания, квазипериодические колебания). Проведен детальный численный бифуркационный анализ состояния равновесия и предельных циклов, формирующих сложную картину динамических режимов. Обсуждается аналогия и отличия от случая трех связанных осцилляторов ван дер Поля.

**Ключевые слова:** квазипериодические колебания, инвариантные торы, ляпуновские показатели, резонансная паутина Арнольда

# 1 Введение

Как известно, двумерные диссипативные динамические системы с непрерывным временем могут демонстрировать состояния равновесия или периодические колебания, которым отвечают предельные циклы в фазовом пространстве [1]. В трехмерных системах в дополнение к этому могут наблюдаться режимы хаотической динамики, демонстрирующие хаотические аттракторы [2]. Несколько реже для трехмерных автономных диссипативных систем встречаются случаи квазипериодических колебаний, когда в фазовом пространстве наблюдается притягивающий инвариантный тор. В радиоэлектронике наиболее ранним известным примером является система [3], представляющая собой разновидность схемы Чуа. Еще один пример, привлекавший внимание, - система Лоренц-84 [4, 5, 6], моделирующая долговременную циркуляцию атмосферы. Система Лоренц-84 демонстрирует не только квазипериодические колебания, но и богатую динамику, которой посвящена достаточно обширная литература. Для задач биохимии примеры трехмерных системы с квазипериодической динамикой представлены в [7, 8]. Если говорить о радиофизике, то в [9, 10] было предложено несколько вариантов систем (квазипериодических генераторов), описываемых трехмерными системами дифференциальных уравнений и допускающих экспериментальную реализацию. Трехмерная система с квазипериодичностью с использованием мемристора обсуждалась также в [11]. Пример квазипериодического радиофизического генератора, описываемого четырехмерной системой, был дан и изучен в [12, 13, 14, 15, 16]. Появление подобных примеров инициировало изучение ситуаций, представляющих собой либо внешнее воздействие на квазипериодические генераторы, либо случай двух связанных генераторов [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Такие системы демонстрируют квазипериодические колебания с большим числом несоизмеримых частот, чему отвечают высокоразмерные торы в фазовом пространстве. Отметим, что с данной тематикой связана проблема квазипериодических бифуркаций (бифуркаций инвариантных торов), которая все еще остается недостаточно изученной [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. Эта проблема привлекает внимание как для систем с непрерывным временем, так и для дискретных отображений (бифуркации инвариантных кривых).

В настоящей работе мы, в развитие задачи о динамике двух квазипериодических генераторов [19], рассмотрим случай трех связанных подсистем. Мы выберем случай диссипативной связи и конфигурацию системы в виде цепочки. В качестве основного инструмента будем использовать компьютерное моделирование в рамках анализа ляпуновских показателей [34, 35]. Будем

использовать, по аналогии с [19], построение карт ляпуновских показателей. Это позволяет выявлять глобальное устройство плоскости параметров, включая такие моменты, как организация иерархии торов разной размерности и очень сложно устроенные структуры типа резонансной паутины Арнольда [21]. Отметим, что ляпуновский анализ с достаточной высокой в численных расчетах точностью позволяет выявлять тип бифуркаций торов по методике [22]. Кроме того, будем использовать бифуркационный анализ состояний равновесия и предельных циклов.

## 2 Индивидуальная система

Уравнения отдельного генератора, способного демонстрировать автономные квазипериодические колебания [9, 10], имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - k\dot{x}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Они могут быть переписаны в стандартной форме для системы трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - ky^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $x$ ,  $y$ ,  $z$  - динамические переменные. Уравнения (1) (или (2)) представляют собой некоторое трехмерное обобщение системы типа осциллятора ван дер Поля [36, 37], что становится понятным, если отбросить в уравнениях (1) переменную  $z$ . Соответственно, параметр  $\omega_0$ , который будет иметь существенное значение при дальнейшем рассмотрении, можно интерпретировать как собственную частоту генератора. Модель (2) имеет одну неподвижную точку с координатой  $(0, 0, \varepsilon)$ , которая может быть устойчивой при  $\lambda < -\varepsilon$ . Параметр  $\lambda$  отвечает за бифуркацию Андронова-Хопфа; далее будем полагать  $\lambda = -1$ . Значения остальных параметров выбираем аналогично [9, 10]  $\varepsilon = 4$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ .

В индивидуальном генераторе при данных значениях параметров в диапазоне  $6.201 < \omega_0 < 8.45$  наблюдаются двухчастотные квазипериодические режимы  $T_2$ , за исключением очень узких резонансных интервалов. На рис. 1 представлена соответствующая иллюстрация в виде графиков трех пока-

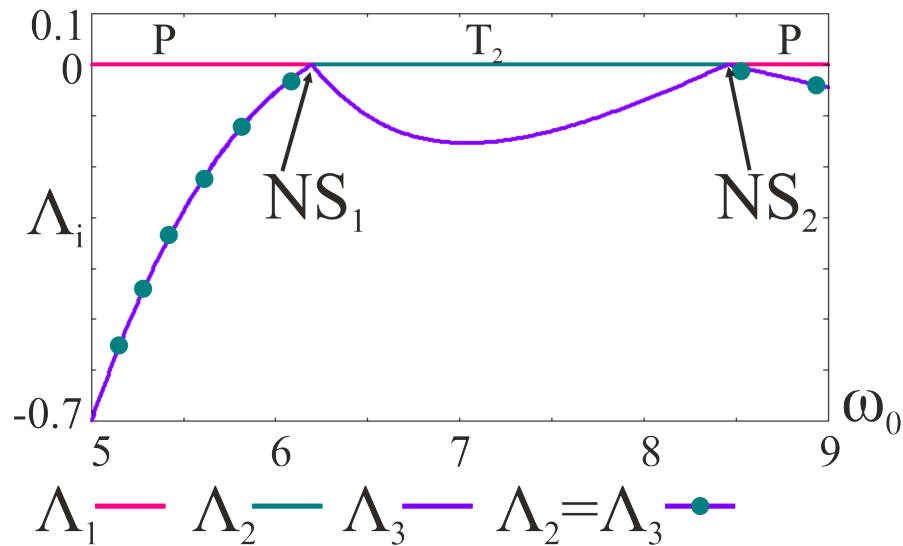


Рис. 1: Графики ляпуновских показателей индивидуального генератора квазипериодических колебаний;  $T_2$  - область существования двухчастотного тора,  $P$  - область существования основного предельного цикла,  $NS$  - точки бифуркаций Неймарка-Сакера

зателей Ляпунова  $\Lambda_i$  в зависимости от параметра  $\omega_0$ . Вне указанного диапазона наблюдаются периодические колебания  $P$ , которым отвечает предельный цикл в фазовом пространстве, характеризующийся одним нулевым и двумя отрицательными показателями Ляпунова:  $\Lambda_1 = 0$ ,  $\Lambda_{2,3} < 0$ . В точке  $NS_1$  ( $\omega_0 = 6.201$ ) происходит бифуркация Неймарка-Сакера, когда этот цикл теряет устойчивость, и от него мягким образом отделяется устойчивый инвариантный тор. Отметим характерное поведение показателей Ляпунова для бифуркации Неймарка-Сакера: до порога бифуркации два отрицательных показателя равны друг другу  $\Lambda_2 = \Lambda_3 < 0$ , в точке бифуркации они становятся нулевыми, и далее показатель  $\Lambda_3$  снова уходит в отрицательную область [22]. Таким образом, в области квазипериодичности  $T_2$  показатели  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ , а  $\Lambda_3 < 0$ . В точке  $NS_2$  ( $\omega_0 = 8.45$ ) наблюдается обратная бифуркация Неймарка-Сакера, когда тор превращается в устойчивый предельный цикл.

На рис. 2 показан фазовый портрет системы (2) в трехмерном пространстве  $(x, y, z)$  для значения частоты генератора  $\omega_0 = 2\pi$ , отвечающего режиму квазипериодических колебаний. В этом случае фазовым портретом является двухчастотный инвариантный тор.

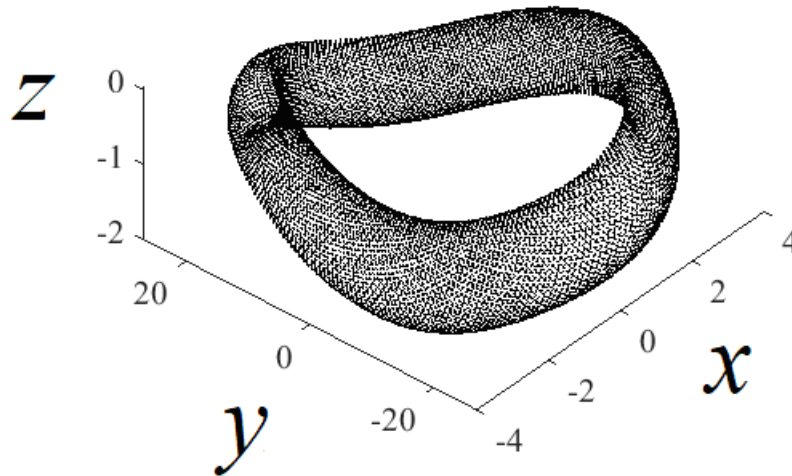


Рис. 2: Фазовый портрет квазипериодического генератора в виде двухчастотного тора,  $\omega_0 = 2\pi$

### 3 Три связанных генератора

Перейдем теперь к случаю трех связанных квазипериодических генераторов. Уравнения такой системы записываются в виде:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 - (\lambda + z_1 + x_1^2 - \beta x_1^4)\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + M_C(x_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\
 \dot{z}_1 &= b(\varepsilon - z_1) - kx_1^2, \\
 \ddot{x}_2 - (\lambda + z_2 + x_2^2 - \beta x_2^4)\dot{x}_2 + (\omega_0 + \Delta_1)^2 x_2 + M_C(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - \dot{x}_3) &= 0, \\
 \dot{z}_2 &= b(\varepsilon - z_2) - kx_2^2, \\
 \ddot{x}_3 - (\lambda + z_3 + x_3^2 - \beta x_3^4)\dot{x}_3 + (\omega_0 + \Delta_2)^2 x_3 + M_C(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= 0, \\
 \dot{z}_3 &= b(\varepsilon - z_3) - kx_3^2.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь индексы у переменных относятся к номеру генератора,  $\omega_0$  - собственная частота первого генератора,  $\Delta_1, \Delta_2$  - частотные расстройки второго и третьего генераторов относительно первого,  $M_C$  - коэффициент связи. Отметим, что связь введена через скорость изменения переменной  $x$  по аналогии со случаем осцилляторов ван дер Поля [36, 37]. Это отвечает диссипативному типу связи, стремящейся подавить колебания генераторов, поскольку связь добавляется аддитивно к параметру  $\lambda$ , отвечающему за бифуркацию Андронова-Хопфа. Топология связи отвечает цепочке, когда первый генератор связан со вторым, второй - с первым и третьим, а третий - со вторым. Случай другой топологии (кольца, когда каждый генератор связан с каждым) требует специального рассмотрения.

Уравнения (3) представляет собой девятимерную систему дифференциальных уравнений, которую мы будем исследовать с помощью численного компьютерного моделирования в рамках двух- и однопараметрического анализа показателей Ляпунова, а также бифуркационного анализа состояний равновесия и предельных циклов. Динамика системы (3) определяется частотными параметрами  $\omega_0$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и величиной связи  $M_C$ . Мы будем выбирать фиксированными частоты первого и третьего генераторов, соответственно,  $\omega_0$  и  $\Delta_2$ , и варьировать частоту второго генератора, меняя параметр  $\Delta_1$ . (Аналогичное исследование для трех связанных осцилляторов ван дер Поля представлено в [38].) В соответствии с рис. 1 это позволяет рассмотреть три основных ситуации:

- первый и третий генераторы находятся в режиме периодических колебаний;
- первый генератор находится в режиме периодических колебаний, третий в режиме квазипериодических колебаний;
- первый и третий генераторы находятся в режиме квазипериодических колебаний.

Для всех трех случаев второй генератор при вариации  $\Delta_1$  переходит от режима периодических колебаний к квазипериодическим и обратно. Таким образом, каждый случай будет соответствовать различному числу несоизмеримых частот, которые могут проявляться в ансамбле, от четырех до шести. Результаты мы будем представлять на плоскости параметров частотная расстройка второго генератора  $\Delta_1$  - величина связи  $M_C$ .

## 4 Первый случай: четыре несоизмеримые частоты

### 4.1 Ляпуновский анализ

Для системы связанных генераторов (3) выберем сначала частотные параметры  $\omega_0 = 5$ ,  $\Delta_2 = 1$ , когда в соответствии с рис. 1 первый и третий генератор демонстрируют режим периодических колебаний. Тогда при вариации параметра  $\Delta_1$  второй генератор при  $\Delta_{1a} = 1.201$  демонстрирует переход от предельного цикла к квазипериодическому режиму через бифуркацию Неймарка-Сакера и обратно при  $\Delta_{1b} = 3.45$ . На рис. 3а, 3б показаны ляпуновская карта системы (3) и ее увеличенный фрагмент на плоскости параметров

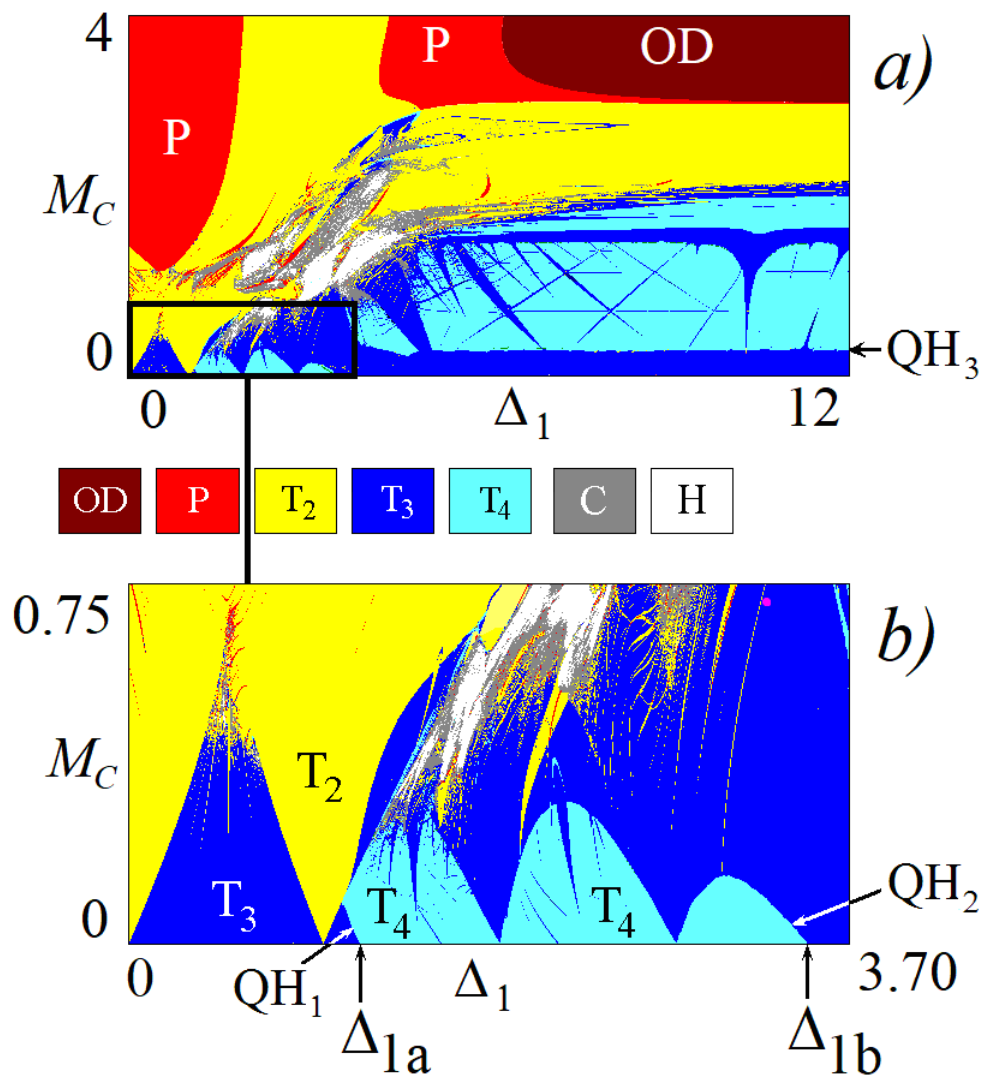


Рис. 3: Карта показателей Ляпунова (а) и ее увеличенный фрагмент (b) для  $\omega_0 = 5$ ,  $\Delta_2 = 1$ ; QH - квазипериодические бифуркации Хопфа трехчастотных торов

Тип режима	Обозначение	Спектр ляпуновских показателей
Устойчивое состояние равновесия (режим "гибели колебаний")	OD	$\Lambda_{1,2,3,4,5,6,7} < 0$
периодический	P	$\Lambda_1 = 0, \Lambda_{2,3,4,5,6,7} < 0$
двухчастотный	T <sub>2</sub>	$\Lambda_{1,2} = 0, \Lambda_{3,4,5,6,7} < 0$
трехчастотный	T <sub>3</sub>	$\Lambda_{1,2,3} = 0, \Lambda_{4,5,6,7} < 0$
четырёхчастотный	T <sub>4</sub>	$\Lambda_{1,2,3,4} = 0, \Lambda_{5,6,7} < 0$
пятичастотный	T <sub>5</sub>	$\Lambda_{1,2,3,4,5} = 0, \Lambda_{6,7} < 0$
шестичастотный	T <sub>6</sub>	$\Lambda_{1,2,3,4,5,6} = 0, \Lambda_7 < 0$
хаос	C	$\Lambda_1 > 0, \Lambda_{2,3,4,5,6,7} \leq 0$
гиперхаос	HC	$\Lambda_{1,2} > 0, \Lambda_{3,4,5,6,7} \leq 0$

Таблица 1: Тип режима и спектр показателей Ляпунова.

( $\Delta_1, M_C$ ). Тип режима определяется по спектру ляпуновских показателей аналогично [19], причем размерность инвариантных торов определяется числом нулевых показателей в соответствии с таблицей 1.

На рис. 3 можно видеть области T<sub>2</sub> двух-, T<sub>3</sub> трех- и T<sub>4</sub> четырехчастотных торов, периодических режимов P, гибели колебаний (oscillation death) OD, хаоса и гиперхаоса H. Обсудим устройство карты подробнее. Проще всего организована область  $\Delta_1 < \Delta_{1a}$ , когда все индивидуальные генераторы находятся в режиме предельных циклов. На увеличенном фрагменте карты рис. 3b в этом случае можно видеть два языка двухчастотных торов T<sub>2</sub>, между которыми расположена область трехчастотной квазипериодичности T<sub>3</sub>. Устройство этих языков можно пояснить с помощью графиков старших ляпуновских показателей для фиксированных уровней связи, показанных на рис. 4.

Обсудим сначала случай малой связи. На рис. 4a для  $M_C = 0.02$  при малой частотной расстройке  $\Delta_1$  равны нулю два ляпуновских показателя  $\Lambda_{1,2} = 0$ , а остальные отрицательные. В точке QSN<sup>2</sup> третий показатель  $\Lambda_3$  тоже обращается в ноль. Возникает трехчастотный тор T<sub>3</sub>, когда равны нулю три старших показателя  $\Lambda_{1,2,3} = 0$ , а остальные отрицательные. Характер поведения ляпуновских показателей в соответствии с методикой [22] позволяет определить тип этой бифуркации, как седло-узловую бифуркацию инвариантных торов QSN<sup>2</sup>. В этом случае двухчастотный устойчивый тор сталкивается с седловым тором, в результате чего возникает притягивающий трехчастотный тор. На рис. 4a стрелками обозначено еще одно резонансное окно такого типа, ограниченное двумя седло-узловыми бифуркациями двухчастот-



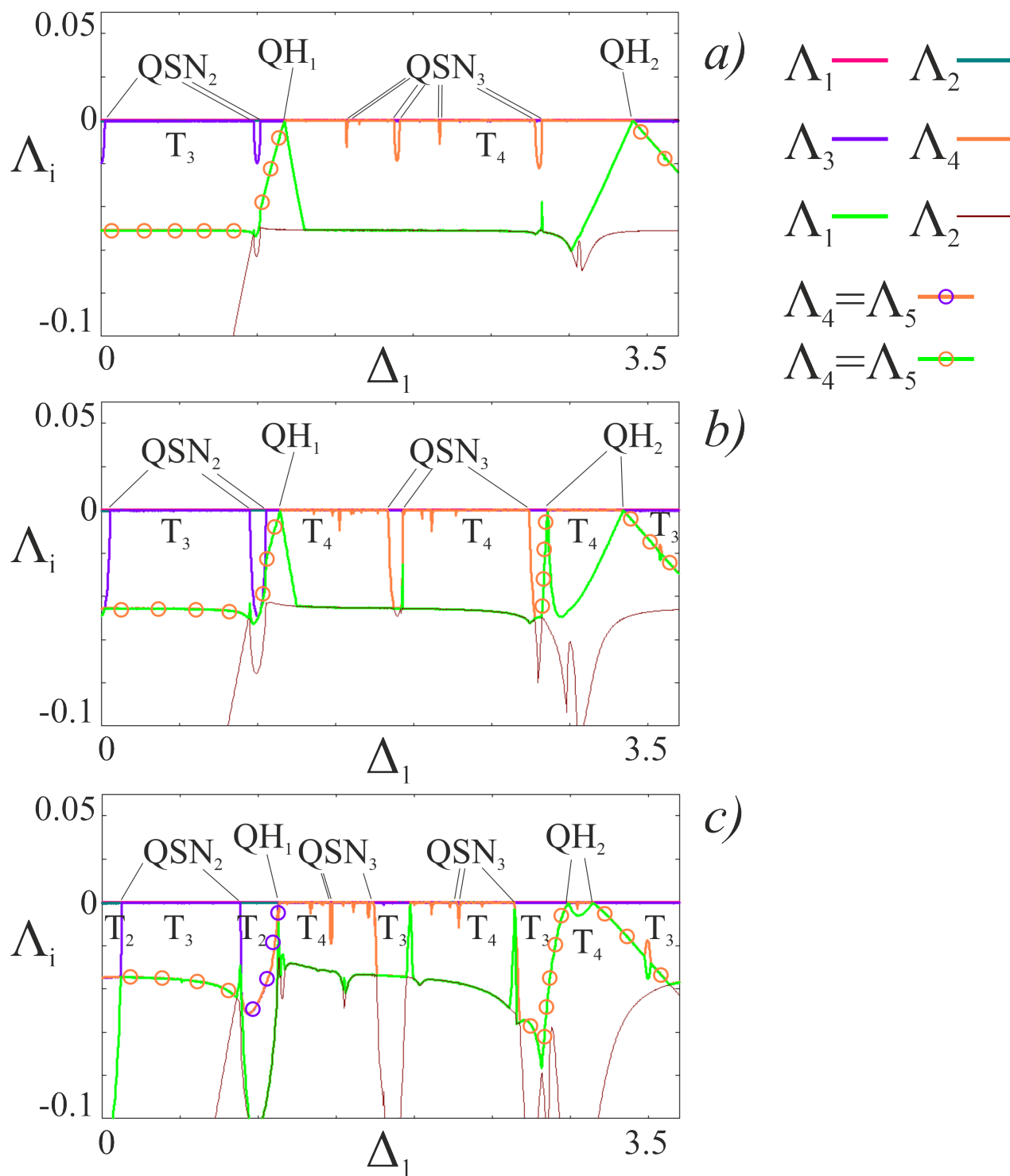


Рис. 4: Графики показателей Ляпунова  $\Lambda_i$  для  $\omega_0 = 5$ ,  $\Delta_2 = 1$ ; а)  $M_C = 0.02$ , б)  $M_C = 0.05$ , в)  $M_C = 0.12$ ;  $QSN^2$  - седло-узловые бифуркации двухчастотных торов,  $QSN^3$  - седло-узловые бифуркации трехчастотных торов,  $QH$  - квазипериодические бифуркации Хопфа

ных торов  $QSN^2$ .

При большой связи на ляпуновской карте рис. 3а в области  $\Delta_1 < \Delta_{1a}$  перекрывание языков двухчастотных торов приводит к периодическому режиму Р полной синхронизации трех генераторов.

В обсуждаемом случае картина оказывается аналогичной случаю трех связанных генераторов ван дер Поля [38]. Существенные отличия возникают при переходе частотного параметра  $\Delta_1$  через значение  $\Delta_{1a}$ , когда второй генератор переходит в режим квазипериодических колебаний. В соответствии с этим на карте рис. 3б появляется область четырехчастотной квазипериодичности  $T_4$ . Такой переход происходит через другую бифуркацию инвариантных торов - квазипериодическую бифуркацию Хопфа  $QH_1$ . На рис. 3б линия этой бифуркации выходит из точки  $\Delta_1 = \Delta_{1a}$ . Эту бифуркацию также можно диагностировать по методике [22] по графикам показателей Ляпунова, рис. 4а. Условием ее является равенство до порога бифуркации двух старших ненулевых показателей  $\Lambda_4 = \Lambda_5 < 0$ . (Такие линии отмечены кружочками на рис. 4а.) В момент бифуркации показатель  $\Lambda_4$  становится нулевым, а  $\Lambda_5$  вновь отрицательным. При этом тор  $T_4$  рождается мягким образом из тора  $T_3$ .

В свою очередь, в область четырехчастотных торов погружена система языков трехчастотных торов, имеющих острия на оси частотной расстройки  $\Delta_1$ . На рис. 4а показаны стрелками границы четырех таких языков  $QSN^3$ , которым отвечают седло-узловые бифуркации уже трехчастотных торов [22]. В этом случае при вариации параметра к нулю подходит и становится равным нулю только один показатель Ляпунова, в обсуждаемом случае  $\Lambda_4$ , а  $\Lambda_5 < 0$ . Тогда при пересечении границы языка устойчивый тор  $T_3$  сталкивается с седловым тором той же размерности, в результате чего возникает устойчивый тор  $T_4$ .

При переходе через значение  $\Delta_1 = \Delta_{1b}$  второй генератор снова переходит в режим предельного цикла, и снова возникают трехчастотные торы через квазипериодическую бифуркацию Хопфа  $QH_2$ , проходимость в обратном порядке, рис. 3б и рис. 4а.

С ростом связи языки двухчастотных и трехчастотных торов на карте рис. 3 расширяются. При этом их границы сначала остаются линиями седло-узловых бифуркаций  $QSN$ , но при увеличении связи могут превратиться в линии квазипериодических бифуркаций Хопфа  $QH$ , что иллюстрируют рис. 4б, 4с. Этот переход происходит через некоторую бифуркационную ситуацию ко-размерности два, однако, такие бифуркации торов практически не изучались.

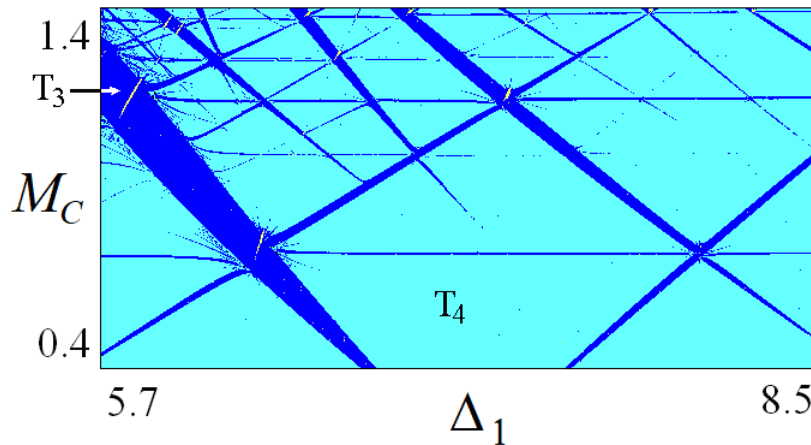


Рис. 5: Увеличенный фрагмент карты на рис. 3а: резонансная паутина Арнольда на базе четырехчастотных торов,  $\omega_0 = 5$ ,  $\Delta_2 = 1$

Отметим, что при еще большем увеличении связи на ляпуновских картах на рис. 3 появляются области хаоса С и гиперхаоса Н. В этом случае инвариантные торы разрушаются.

Обратимся, однако, вновь к рис. 3а. Можно видеть, что в области  $\Delta_1 > \Delta_{1b}$  при больших значениях  $\Delta_1$  при возрастании связи трехчастотные торы превращаются снова в четырехчастотные. Этот переход связан с новой квазипериодической бифуркацией Хопфа  $QH_3$ . Этот результат представляется несколько неожиданным, поскольку все три индивидуальных генератора находятся в режиме предельных циклов. Возникновение четырехчастотного режима связано с особенностями квазипериодических генераторов. В этом проявляется еще одно существенное отличие от случая трех осцилляторов ван дер Поля [38].

Указанная область четырехчастотных торов пронизана узкими полосами трехчастотных, формируя структуру, получившую название резонансной паутины Арнольда [21]. Ее "портрет" в виде фрагмента ляпуновской карты показан на рис. 5.

При дальнейшем увеличении связи на рис. 3а возможными становятся двухчастотные торы, отвечающие широкой полосе, не имеющей резонансных включений. Далее возникает очень узкая область периодического режима, а при  $M_C > 3.0$  устойчивым остается только состояние равновесия: наблюдается режим гибели колебаний OD.

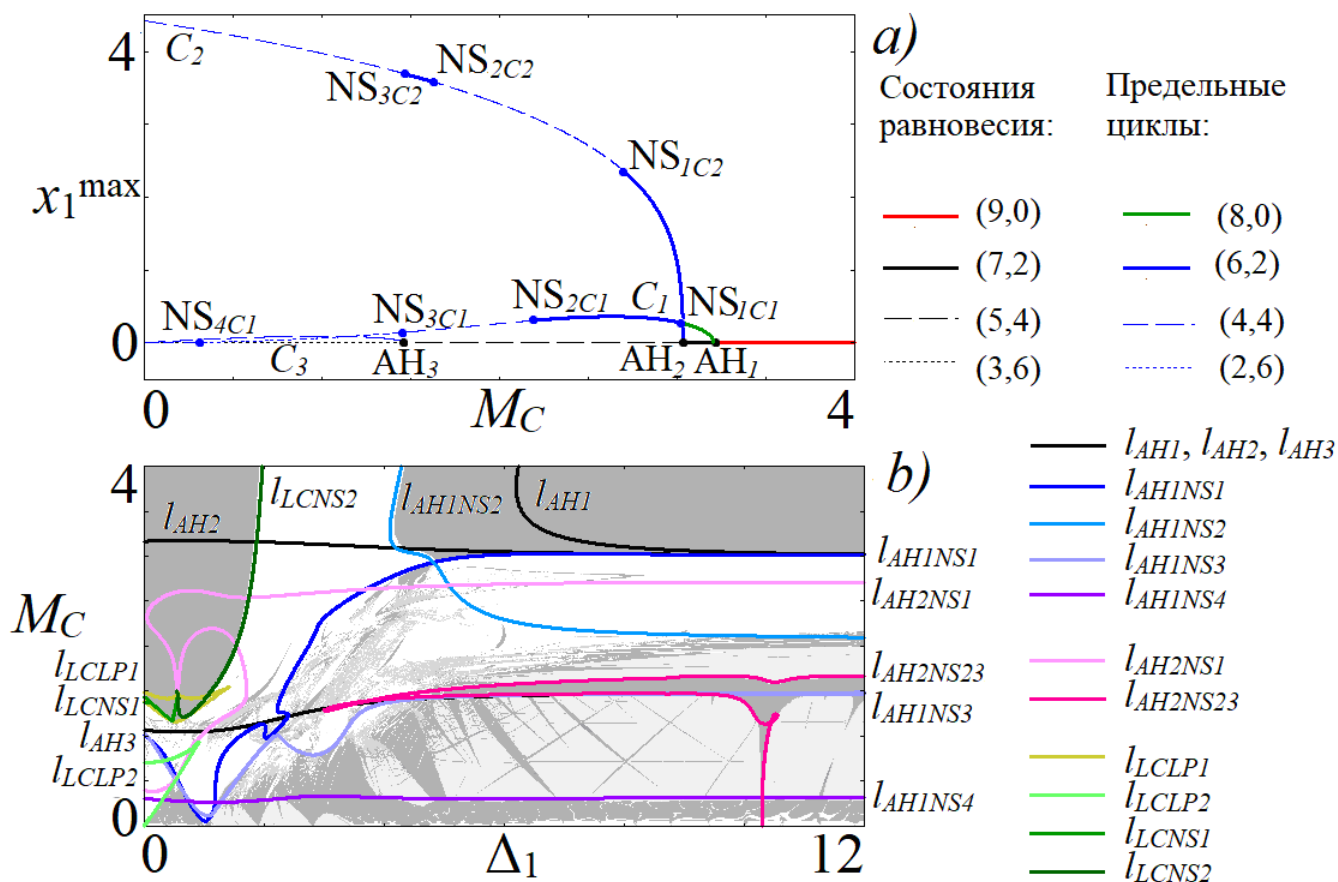


Рис. 6: а) Однопараметрическая бифуркационная диаграмма,  $\Delta_1 = 9$ ; б) бифуркационные линии на плоскости параметров,  $\omega_0 = 5$ ,  $\Delta_2 = 1$

## 4.2 Бифуркационный анализ состояний равновесия и предельных циклов

Проиллюстрировать особенности динамики исследуемой системы можно также, проанализировав бифуркации, которые происходят от состояния равновесия. На рис. 6 представлены однопараметрическая (рис. 6а) и двухпараметрическая (рис. 6б) бифуркационные диаграммы, полученные с помощью пакета для численного бифуркационного анализа ХРРАУТ [39]. Однопараметрическая диаграмма построена в зависимости от величины связи  $M_C$ , стартуя из устойчивого состояния равновесия в области гибели колебаний и с уменьшением силы связи для  $\Delta_1 = 9$ . Далее будем использовать обозначение  $(m, n)$  для указания размерности устойчивого и неустойчивого многообразия неподвижных точек и циклов. Справа на рис. 6а представлено соответствие типа и цвета линий для различных состояний равновесия и циклов. Для состояния равновесия в соответствии с рис. 6а наблюдаются три последовательные би-

фуркации Андронова-Хопфа, в результате которых устойчивый фокус  $(9,0)$  сначала трансформируется в седло-фокус  $(7,2)$  ( $АН_1$ ), затем в седло-фокус  $(5,4)$  ( $АН_2$ ) и затем в  $(3,6)$  ( $АН_3$ ). При малых связях состояние равновесия имеет шестимерное неустойчивое многообразие.

Каждая из бифуркаций ассоциируется с рождением предельного цикла, которые также изображены на бифуркационной диаграмме зеленым и синим цветом, рис. 6а. В результате первой бифуркации мы видим рождение устойчивого предельного цикла  $C_1(8,0)$ , с которым при уменьшении силы связи наблюдается последовательность бифуркаций Неймарка-Сакера: в результате первой ( $NS_{1C_1}$ ) цикл теряет устойчивость по двум направлениям и трансформируется в  $C_1(6,2)$ , в результате второй ( $NS_{2C_1}$ ) еще два направления теряют устойчивость, и теперь цикл имеет четырехмерное неустойчивое многообразие  $C_1(4,4)$ . После третьей бифуркации Неймарка-Сакера ( $NS_{3C_1}$ ) неустойчивое многообразие цикла  $C_1(2,6)$  становится шестимерным. В точке ( $NS_{4C_1}$ ) происходит обратная бифуркация Неймарка-Сакера, и цикл вновь становится типа  $(4,4)$ .

Вторая бифуркация Андронова-Хопфа ( $АН_2$ ) также ассоциируется с рождением предельного цикла, однако цикл рождается седловым и имеет двумерное неустойчивое многообразие  $C_2(6,2)$ . Он также претерпевает каскад бифуркаций Неймарка-Сакера, состоящий из трех бифуркаций, но только в этом случае, бифуркация  $NS_{1C_2}$  приводит к трансформации цикла в  $C_2(4,4)$ , а затем имеет место обратная бифуркация Неймарка-Сакера ( $NS_{2C_2}$ ), которая трансформирует его обратно в  $C_2(6,2)$ . При дальнейшем уменьшении параметра цикл вновь претерпевает прямую бифуркацию Неймарка-Сакера ( $NS_{3C_2}$ ), и к нулевой связи подходит цикл с четырехмерным неустойчивым многообразием  $C_2(4,4)$ .

На рис. 6а также представлен цикл, появляющийся в результате третьей бифуркации Андронова-Хопфа состояния равновесия ( $АН_3$ ), в результате которой рождается седловой цикл с четырехмерным неустойчивым многообразием  $C_3(4,4)$ . Данный цикл при уменьшении параметра связи не испытывает бифуркаций.

Стоит отметить, что циклы, родившиеся в результате первой и третьей бифуркации Андронова-Хопфа, имеют малую амплитуду, и с уменьшением силы связи эта амплитуда стремится к нулю. В то время, как цикл, рождающийся в результате бифуркации  $АН_2$  сразу имеет большой радиус и, амплитуда еще немного увеличивается при уменьшении силы связи до нулевой.

Линии всех перечисленных бифуркаций были также построены на плос-

кости параметров частотная расстройка - величина связи ( $\Delta_1$ ,  $M_C$ ) по аналогии с рис. 3а и показаны на рис. 6б. В работе [24] показано, что нет строгого соответствия между бифуркациями циклов, состояний равновесия и бифуркациями квазипериодических режимов. Однако в определенных областях пространства параметров такие бифуркационные линии совпадают и помогают разобраться со структурой пространства параметров.

Линии бифуркаций Андронова-Хопфа показаны черным цветом. Линия первой потери устойчивости неподвижной точки ( $l_{AH1}$ ) ограничивает область гибели колебаний ОД, внутри которой состояние равновесия устойчиво. Вторая линия бифуркации Андронова-Хопфа ( $l_{AH2}$ ) при больших частотных расстройках сливается с первой, и вместе они дают вырожденную бифуркацию Андронова-Хопфа, в результате которой в системе рождается не предельный цикл, а двухчастотный тор. При меньших расстройках  $\Delta_1$  мы видим, как эти линии расходятся. При этом вторая бифуркация Андронова-Хопфа, происходящая с седловой точкой, не дает особого изменения в динамике системы. Линия третьей бифуркации Андронова-Хопфа ( $l_{AH3}$ ) расположена при меньших значениях силы связи. При малых частотных расстройках не видно изменения динамики при этой бифуркации. Для больших значений расстройки линия совпадает с одной из линий рождения тора и соответствует изменению количества несоизмеримых частот квазипериодических колебаний, т.е. происходит смена трехчастотных квазипериодических колебаний на четырехчастотные с уменьшением связи.

Линиями различных оттенков синего цвета на рис. 6б изображены линии бифуркаций Неймарка-Сакера, происходящие на базе цикла  $C_1$ , а линиями различных оттенков розового отмечены линии бифуркации Неймарка-Сакера, происходящие с циклом  $C_2$ . На рис. 6б хорошо видно, что данные линии соответствуют смене различных областей динамических режимов. Абсолютно ожидаемым результатом является то, что область периодических колебаний ограничена линиями бифуркации Неймарка-Сакера, в результате которых в системе рождаются двухчастотные квазипериодические колебания. Область, возникающая из режима гибели колебаний ОД, ограничивается двумя линиями бифуркации Неймарка-Сакера, первая линия (темно-синяя линия  $l_{AH1NS1}$ ) соответствует бифуркации устойчивого цикла, родившегося в результате АН<sub>1</sub>. Вторая линия (светло-синяя линия  $l_{AH1NS2}$ ) представляет собой линию второй бифуркации Неймарка-Сакера, происходящей также с циклом  $C_1$ , родившимся в результате первой бифуркации Андронова-Хопфа.

Интересно, что данные бифуркационные линии хорошо соответствуют из-

менениям динамики системы (3), которые мы наблюдаем с помощью анализа спектра показателей Ляпунова. Особенно хорошо это видно для больших значений параметра частотной расстройки  $\Delta_1$ . Так мы видим, что линия второй бифуркации Неймарка-Сакера на базе цикла  $C_1$  ( $l_{AH1NS2}$ ) соответствует переходу от двухчастотной к трехчастотной квазипериодичности. Линия третьей бифуркации Неймарка-Сакера ( $l_{AH1NS3}$ ), которая частично совпадает с линией бифуркации Андронова-Хопфа ( $l_{AH3}$ ), при больших частотных расстройках соответствует переходу к четырехчастотной квазипериодичности. Четвертая бифуркационная линия цикла  $C_1$  ( $l_{AH1NS4}$ ) проходит на границе обратного перехода от четырехчастотной к трехчастотной квазипериодичности. Линии бифуркаций Неймарка-Сакера на базе цикла  $C_2$  отмечены розовыми цветами. Первая бифуркация цикла  $C_2$  ( $l_{AH2NS1}$ ) не дает изменения динамики системы, однако, организует сложную структуру бифуркационных линий при малых частотных расстройках. Бифуркации  $NS_{2C2}$  и  $NS_{3C2}$  соответствуют пересечению одной бифуркационной линии ( $l_{AH2NS23}$ ) дважды. На плоскости параметров эта линия соответствует границе области трехчастотной квазипериодичности внутри четырехчастотной.

При малых значениях частотной расстройки данные линии приблизительно соответствуют изменению динамических режимов. Так, видно, что линии  $l_{AH1NS1}$  и  $l_{AH1NS3}$  проходят по границе языка двухчастотной квазипериодичности с основанием в ненулевой частотной расстройке. При этом данные бифуркационные линии, не проходят по границе языка периодических режимов при малых частотных расстройках и достаточно большой силе связи. Мы построили продолжение предельного цикла из языка периода 1. Данный предельный цикл имеет достаточно сложную бифуркационную структуру, и все бифуркации, которые с ним наблюдались, также нанесены на плоскость параметров ( $l_{LCLP1}$ ,  $l_{LCLP2}$ ,  $l_{LCNS1}$ ,  $l_{LCNS2}$ ) различными оттенками зеленого цвета. На рисунке можно выделить две линии седло-узловых бифуркаций ( $l_{LCLP1}$ ,  $l_{LCLP2}$ ). Линия  $l_{LCLP1}$  формирует при больших силах связи область периодических колебаний. Устойчивый цикл, родившийся в результате седло-узловой бифуркации, претерпевает бифуркацию Неймарка-Сакера, и таким образом происходит переход из языка периодических колебаний в двухчастотные квазипериодические. Линии  $l_{LCNS1}$ ,  $l_{LCNS2}$  соответствуют границам языка периодических колебаний. Линия седло-узловой бифуркации  $l_{LCLP2}$  наблюдается при малых силах связи и частично совпадает с границами языка двухчастотной квазипериодичности, выходящего из точки нулевой частотной расстройки.

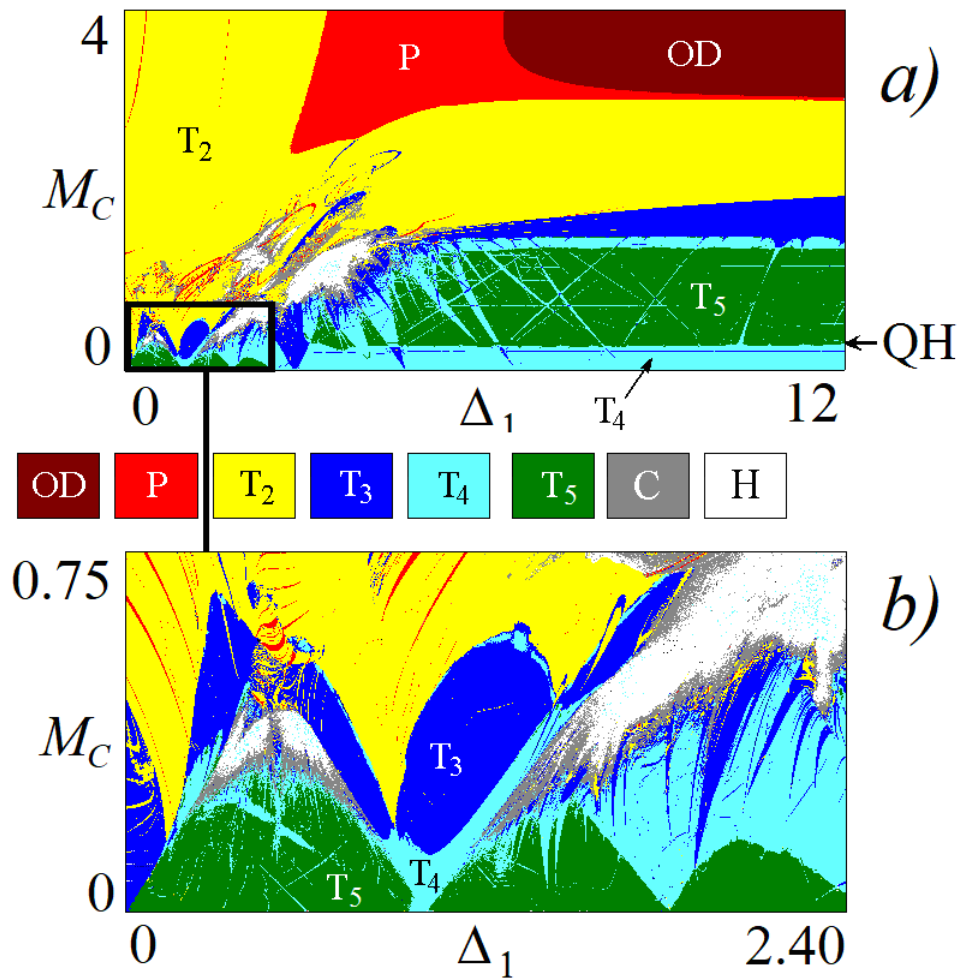


Рис. 7: Карта ляпуновских показателей (а) и ее увеличенный фрагмент (b),  $\omega_0 = 6$ ,  $\Delta_2 = 1$

## 5 Второй случай: пять несоизмеримых частот

Далее рассмотрим случай, когда первый генератор демонстрирует периодические автоколебания до порога бифуркации рождения тора, а в третьем наблюдаются квазипериодические колебания за порогом бифуркации. Во втором генераторе, варьируя  $\Delta_1$ , будем наблюдать переход от периодических колебания к квазипериодическим и обратно. Такая ситуация может быть реализована в случае, когда собственная частота первого генератора  $\omega_0 = 6$ , а третьего для  $\Delta_2 = 1$  равна значению  $(\omega_0 + \Delta_2) = 7$ .

На рис. 7 представлены иллюстрации в виде карты показателей Ляпунова (а) и ее увеличенного фрагмента (b). В обсуждаемом случае второй генератор переходит из режима периодических колебаний в квазипериодический при  $\Delta_1 = 0.201$  и обратно при  $\Delta_1 = 2.45$ . Теперь в этом диапазоне расстроек  $\Delta_1$  становятся возможными пятичастотные квазипериодические колебания



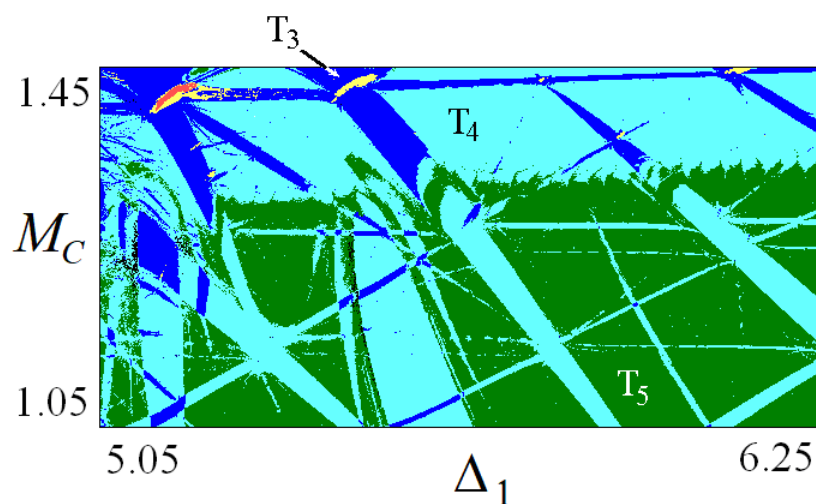


Рис. 8: Увеличенный фрагмент карты на рис. 7а: резонансная паутина Арнольда на базе пятичастотных торов,  $\omega_0 = 6$ ,  $\Delta_2 = 1$

$T_5$ , рис. 7б. В область таких режимов погружены языки четырехчастотных торов  $T_4$ . Внутри этих языков, в свою очередь, наблюдаются области трех-, двухчастотных торов, а также хаоса  $C$  и гиперхаоса  $H$ .

При больших значениях расстройки  $\Delta_1$  второй индивидуальный генератор переходит в режим периодических колебаний, и на рис. 7а наблюдаются четырехчастотные торы (отмечены стрелочкой). С ростом связи они, однако, через квазипериодическую бифуркацию Хопфа  $QH$  снова превращаются в пятичастотные. В эту область встроена система узких пересекающихся полос четырехчастотных торов. Таким образом, наблюдается резонансная паутина Арнольда, но уже на базе пятичастотных торов. Ее можно видеть также на увеличенном фрагменте карты на рис. 8 в нижней части рисунка. С ростом связи снова возникает полоса четырехчастотных торов, в которую встроены языки трехчастотных.

## 6 Третий случай: шесть несоизмеримых частот

Выберем теперь в соответствии с рис. 1 и рис. 2 значение частоты первого генератора  $\omega_0 = 2\pi$ , что отвечает квазипериодической динамике в этом генераторе. Частотную расстройку третьего генератора снова выбираем  $\Delta_2 = 1$ , что также отвечает квазипериодической динамике. Будем варьировать частоту второго генератора. В этом случае при  $-0.08 < \Delta_1 < 2.17$  этот генератор находится в режиме квазипериодических колебаний и переходит в периодический режим вне этого диапазона. На рис. 9 показана соответствующая

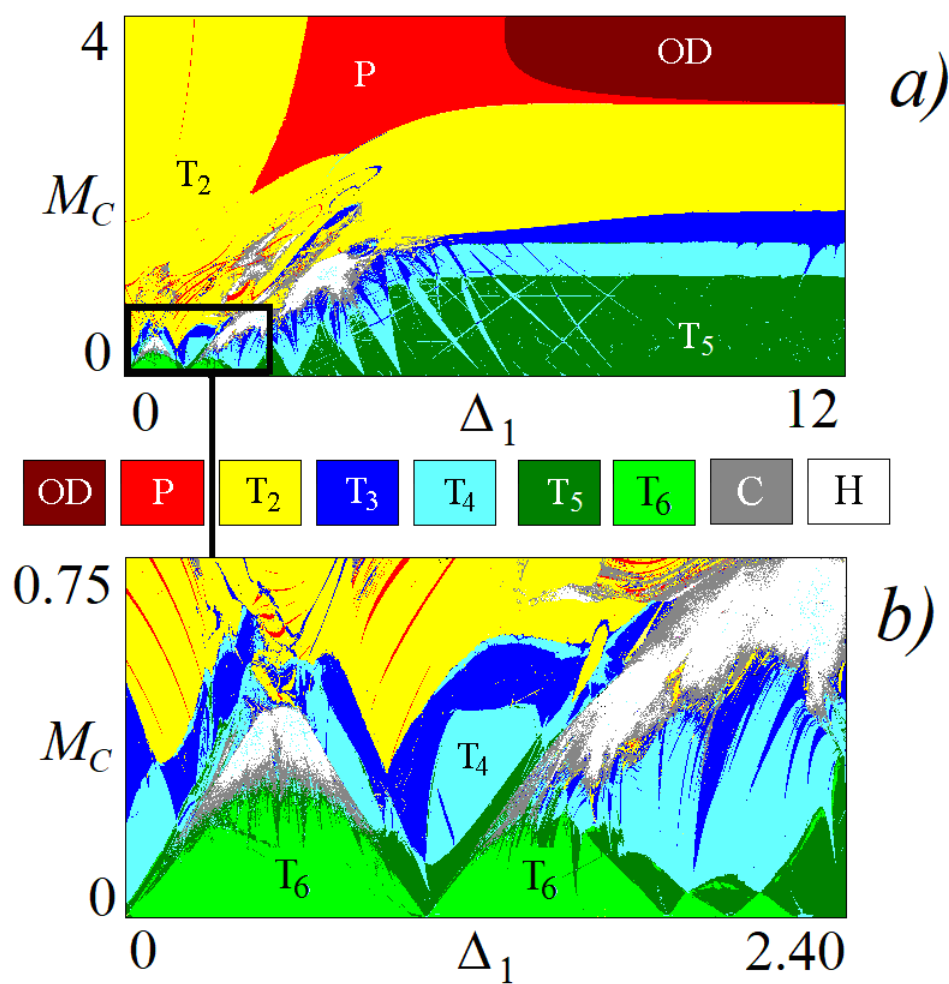


Рис. 9: Карта ляпуновских показателей (а) и ее увеличенный фрагмент (b),  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\Delta_2 = 1$

ющая ляпуновская карта (а) и ее увеличенный фрагмент (b). Можно видеть, что теперь при малой связи в указанном диапазоне расстройек  $\Delta_1$  при сравнительно небольшой связи наблюдаются режимы шестичастотных торов  $T_6$ . Это не удивительно - все три индивидуальных генератора демонстрируют двухчастотные квазипериодические режимы. В этой области можно видеть резонансные языки пятичастотных торов, имеющих острия на оси абсцисс.

При больших частотных расстройках  $\Delta_1$  наблюдаются пятичастотные торы, которые через последовательность квазипериодических бифуркаций Хопфа переходят в режимы четырехчастотных торов, а затем - трех- и двухчастотных.

## 7 Заключение

Таким образом, задачи о динамике квазипериодических генераторов оказываются достаточно сложными с позиций многообразия наблюдаемых режимов. Естественным развитием случая двух связанных генераторов является переход к анализу трех связанных генераторов. Такая система может быть в значительной мере изучена с помощью двухпараметрического ляпуновского анализа, выявляющего локализацию на плоскости параметров режимов разного типа, в частности квазипериодических колебаний с разным числом несоизмеримых частот. В случае квазипериодических колебаний в одном из индивидуальных генераторов и периодических колебаний в двух других картина оказывается иной, чем в случае трех связанных генераторов ван дер Поля. Наблюдаются квазипериодические бифуркации Хопфа трехчастотных торов и седло-узловые бифуркации таких торов. Четырехчастотные торы могут возникать и в случае, когда все три индивидуальных генератора находятся в режиме предельных циклов при достаточно большой частоте второго генератора, что является еще одним отличием от трех связанных осцилляторов ван дер Поля. В этом случае наблюдается также структура типа резонансной паутины Арнольда на базе четырехчастотных торов. Бифуркационный анализ выявляет несколько бифуркаций Андронова-Хопфа состояний равновесия и Неймарка-Сакера предельных циклов. На плоскости параметров эти бифуркации в определенной мере отвечают перестройке режимов квазипериодичности разной размерности. В случае периодических колебаний в первом и двухчастотных во втором и третьем генераторах возникают пятичастотные колебания, со встроенными резонансными языками четырехчастотных торов. При переходе второго генератора в периодический режим пятичастотные то-

ры также могут возникать. Возникает также резонансная паутина Арнольда на базе таких пятичастотных торов. В случае квазипериодических колебаний во всех трех генераторах наблюдается возникновение шестичастотных торов.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

## Литература

- [1] Андронов А., Витт А., Хайкин С. Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959.
- [2] Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge university press, 2002.
- [3] Matsumoto T. Chaos in electronic circuits // Proceedings of the IEEE. 1987. Vol. 75. no. 8. P. 1033–1057.
- [4] Shilnikov A., Nicolis G., Nicolis C. Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5. no. 06. P. 1701–1711.
- [5] Broer H., Simó C., Vitolo R. Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // Nonlinearity. 2002. Vol. 15. no. 4. P. 1205.
- [6] Broer H., Vitolo R., Simó C. Quasi-periodic Hénon-like attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // EQUADIFF 2003. World Scientific, 2005. P. 601–606.
- [7] Straube R., Flockerzi D., Müller S. C., Hauser M. J. Origin of bursting pH oscillations in an enzyme model reaction system // Physical Review E. 2005. Vol. 72. no. 6. P. 066205.
- [8] Straube R., Flockerzi D., Hauser M. Sub-Hopf/fold-cycle bursting and its relation to (quasi-) periodic oscillations // Journal of Physics: Conference Series / IOP Publishing. Vol. 55. 2006. P. 020.
- [9] Kuznetsov A., Kuznetsov S., Mosekilde E., Stankevich N. Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space // The European Physical Journal Special Topics. 2013. Vol. 222. no. 10. P. 2391–2398.

- [10] Кузнецов А.П., Станкевич Н.В. Автономные системы с квазипериодической динамикой. Примеры и свойства: Обзор // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Vol. 23. no. 3. P. 71–93.
- [11] Bao B., Wu P., Bao H. et al. Numerical and experimental confirmations of quasi-periodic behavior and chaotic bursting in third-order autonomous memristive oscillator // Chaos, Solitons & Fractals. 2018. Vol. 106. P. 161–170.
- [12] Анищенко В.С., Николаев С.М. Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ. 2005. Vol. 31. no. 19. P. 88–94.
- [13] Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Physical Review E. 2007. Vol. 76. no. 4. P. 046216.
- [14] Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Physical Review E. 2006. Vol. 73. no. 5. P. 056202.
- [15] Анищенко В.С., Николаев С.М. Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // Russian Journal of Non-linear Dynamics. 2006. Vol. 2. no. 3. P. 267–278.
- [16] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. М.-Ижевск. РХД, 2011.
- [17] Кузнецов А.П., Седова Ю.В. Воздействие гармонического сигнала на генератор квазипериодических колебаний Анищенко-Астахова // Письма в ЖТФ. 2022. Vol. 48. no. 4.
- [18] Stankevich N. V., Kurths J., Kuznetsov A. P. Forced synchronization of quasiperiodic oscillations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 20. no. 1. P. 316–323.
- [19] Kuznetsov A., Kuznetsov S., Shchegoleva N., Stankevich N. Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2019. Vol. 398. P. 1–12.

- [20] Кузнецов А.П., Седова Ю.В., Станкевич Н.В. Два связанных квазипериодических генератора, возбуждаемых гармоническим сигналом // Журнал технической физики. 2021. Vol. 91. no. 11. P. 1619–1624.
- [21] Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web // Bulletin of the belgian mathematical society-Simon stevin. 2008. Vol. 15. no. 5. P. 769–787.
- [22] Vitolo R., Broer H., Simó C. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2011. Vol. 16. no. 1. P. 154–184.
- [23] Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. Numerical Bifurcation Analysis of Maps. Cambridge University Press, 2019. Vol. 34.
- [24] Kamiyama K., Komuro M., Endo T., Aihara K. Classification of bifurcations of quasi-periodic solutions using lyapunov bundles // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24. no. 12. P. 1430034.
- [25] Komuro M., Kamiyama K., Endo T., Aihara K. Quasi-periodic bifurcations of higher-dimensional tori // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26. no. 07. P. 1630016.
- [26] Sekikawa M., Inaba N. Chaos after Accumulation of Torus Doublings // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2021. Vol. 31. no. 01. P. 2150009.
- [27] Borkowski L., Stefanski A. Stability of the 3-torus solution in a ring of coupled Duffing oscillators // The European Physical Journal Special Topics. 2020. Vol. 229. no. 12. P. 2249–2259.
- [28] Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2012. Vol. 8. no. 1. P. 3–28.
- [29] Gonchenko A., Gonchenko S., Turaev D. Doubling of invariant curves and chaos in three-dimensional diffeomorphisms // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. Vol. 31. no. 11. P. 113130.
- [30] Banerjee S., Giaouris D., Missailidis P., Imrayed O. Local bifurcations of a quasiperiodic orbit // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. Vol. 22. no. 12. P. 1250289.

- [31] Patra M., Banerjee S. Bifurcation of quasiperiodic orbit in a 3D piecewise linear map // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2017. Vol. 27. no. 10. P. 1730033.
- [32] Hidaka S., Inaba N., Sekikawa M., Endo T. Bifurcation analysis of four-frequency quasi-periodic oscillations in a three-coupled delayed logistic map // Physics Letters A. 2015. Vol. 379. no. 7. P. 664–668.
- [33] Zhusubaliyev Z. T., Avrutin V., Medvedev A. Doubling of a closed invariant curve in an impulsive Goodwin  $\tau^{\text{TM}}$ s oscillator with delay // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. Vol. 153. P. 111571.
- [34] Pikovsky A., Politi A. Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics. Cambridge University Press, 2016.
- [35] Kuznetsov N., Leonov G., Mokaev T. et al. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system // Nonlinear dynamics. 2018. Vol. 92. no. 2. P. 267–285.
- [36] Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear science. Cambridge University Press, 2003.
- [37] Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O. From Simple to Complex. Springer, 2009.
- [38] Emelianova Y. P., Kuznetsov A., Sataev I., Turukina L. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2013. Vol. 244. no. 1. P. 36–49.
- [39] Ermentrout B., Simulating A. Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students // SIAM, Philadelphia. 2002.

## Dynamics of three coupled generators of quasi-periodic oscillations

A. P. Kuznetsov, Yu. V. Sedova, N. V. Stankevich

Kotelnikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS,  
Saratov Branch

apkuz@rambler.ru, sedovayv@yandex.ru, stankevichnv@mail.ru

**Abstract.** The dynamics of three coupled generators capable of demonstrating autonomous quasi-periodic oscillations is studied. The complex structure of the Lyapunov charts of the system is discussed, which reveals invariant tori of different dimensions, quasi-periodic bifurcations of tori, and Arnold's resonant web based on tori of different dimensions. Cases of different types of tuning of individual generators (periodic oscillations, quasi-periodic oscillations) are considered. A detailed numerical bifurcation analysis of the equilibrium state and limit cycles, which form a complex picture of dynamic regimes, is carried out. Common features and differences compared to the case of three coupled van der Pol oscillators are discussed.

**Keywords:** quasi-periodic oscillations, invariant tori, Lyapunov exponents, Arnold resonance web

**Acknowledgements.** This work was supported by the Russian Science Foundation, project 21-12-00121, <https://rscf.ru/en/project/21-12-00121/>