ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2024
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

О «классических» и «квантовых» пределах при интегрировании системы автономных дифференциальных уравнений

Хатунцева О.Н.

Публичное акционерное общество «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

ol-khatun@yandex.ru

Аннотация. Проведенные в более ранних работах автора исследования показывают возможность возникновения стохастического процесса при численном интегрировании систем автономных дифференциальных уравнений (АДУ) типа Лоренца. В них также отмечено, что при увеличении в системе АДУ количества уравнений (степеней свободы) стохастический характер процесса уменьшается – происходит «детерминизация» процесса. В данной работе делается попытка охарактеризовать процесс перехода от одного итерационного шага к другому (при интегрировании системы АДУ численными методами) некоторым средним для всех уравнений системы значением интервала времени, а затем определить связь между этой величиной и изменением энтропии системы. Найдены два предельных случая при описании такой системы: «классический» - когда время монотонно растет при переходе от одного итерационного шага к другому, и «квантовый» - когда время определено неоднозначно и возможно нарушение причинно-следственных связей в системе.

Ключевые слова: время, хаос, автономные дифференциальные уравнения, система уравнений Лоренца, стохастические процессы, квантовые системы.

1. Введение

Исследования, связанные с изучением динамических систем, вызывают не только теоретический интерес, но и имеют широкую практическую направленность, поскольку решения довольно простых математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями, несут черты поведения систем, имеющих место в природе и технике, как на микро-, так и на макроуровне вплоть до астрономических масштабов [1-5]. Так, например, система автономных дифференциальных уравнений (АДУ) Лоренца является моделью турбулентного течения для определенного класса задач, связанных с конвекцией. При этом проблема полного описания турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса далека от завершения [6-10].

АДУ типа Лоренца, подчиняющиеся теореме Коши о существовании и единственности, не имеют аналитических решений, а численные решения (в определенном диапазоне параметров) приводят к возникновению странных аттракторов. Проведенные в работах [11,12] исследования показывают, что «детерминированный хаос», возникающий в системах автономных дифференциальных уравнений типа Лоренца, при задании любого конечного фиксированного шага по времени, вполне может быть ассоциирован со стохастическим, а не являться, по сути, детерминированным процессом. Этот вывод основывается на том, что если на двух итерационных шагах зафиксировать координаты точек, из которых «выходит», и в которые «приходит» система, то интервалы времени в каждом уравнении АДУ, при предположении о гладкости траекторий перехода, могут оказаться разные, так как при их одинаковых значениях может не выполняться условие совместности уравнений. Если этот факт игнорировать, и при численном интегрировании уравнений автономной системы задавать произвольный фиксированный шаг по времени для всех уравнений, то на каждом итерационном шаге решение каждого из уравнений может «попадать», по сути, на разные ветви решения системы АДУ. В этом случае процесс приобретет стохастический характер.

В работе [13] показано, что если пытаться для каждого уравнения подбирать свою величину шага по времени, чтобы решение «попадало» на «правильные» ветви, то может оказаться, что в некоторые моменты шаги по времени будут иметь мнимые или комплексные значения. Это означает, что при рассмотрении процесса только на области действительных значений интервалов времени, будет также наблюдаться его стохастический характер. В работе [13] также показано, что при увеличении в системе АДУ количества уравнений (степеней свободы) стохастический характер процесса уменьшается за счет уменьшения амплитуды колебаний относительно мнимой оси – происходит «детерминизация» процесса.

Исследования, проведенные в данной работе, показывают возможность нахождения «усредненного» решения на заданном итерационном шаге при интегрировании системы АДУ численными методами, если использовать специальным образом найденное «среднее» значение интервала времени для всех уравнений системы. Однако, для определенного класса систем, невозможно однозначно детерминировано задать интервал времени для одного итерационного шага даже в комплексном пространстве. Это, в свою очередь, приводит к необходимости описания ее эволюции в вероятностном гильбертовом пространстве. Такие системы, к которым, ко всему прочему, применим еще и Гамильтонов формализм, могут быть описаны уравнениями, аналогичными уравнению Шредингера.

В работе также исследуются вопросы, связанные с изменением энтропии системы на заданном итерационном шаге.

2. Определение среднего значения интервала времени для всех уравнений в системе, описываемой автономными дифференциальными уравнениями, на каждом итерационном шаге

Рассмотрим систему автономных дифференциальных уравнений, состоящую из N уравнений, где $N \geq 3$:

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad j = 1,2,\ldots N. \tag{1}$$

В этой системе могут быть функции f_j, которые зависят, как от всех, так и не от всех N переменных.

При переходе к численному интегрированию, производные, стоящие в левых частях автономных дифференциальных уравнений, заменим на соответствующие дроби: $\dot{x}_j \approx \delta x_j / \delta t_j$, и уравнения системы (1) запишем в виде:

$$\delta x_j \approx f_j(x_1, x_2, \dots, x_N)\delta t_j \,. \tag{2}$$

В уравнениях (2) учитываются возможные отличия значений интервалов времени для каждого *j*-го уравнения системы при переходе к дискретному виду (см. [11-13]).

Каждое из уравнений системы (2) домножим на все значения x_k, такие что $k \neq j$, и просуммируем эти уравнения. В результате получим

$$\sum_{j=1}^{N} \prod_{k \neq j} x_k \delta x_j \approx \sum_{j=1}^{N} \prod_{k \neq j} x_k f_j(x_1, x_2, \dots, x_N)\delta t_j \,. \tag{3}$$

Левая часть соотношения (3) равна изменению объема фазового пространства в данном процессе на заданном итерационном шаге:

$$\sum_{j=1}^{N} \prod_{k \neq j} x_k \delta x_j = \delta\Omega, \quad \text{где} \quad \Omega = \prod_{j=1}^{N} x_j \,. \tag{4}$$

Поделив и умножив выражение под знаком суммы в правой части соотношения (3) на x_j, можно переписать его в виде:

$$\sum_{j=1}^{N} \prod_{k \neq j} x_k f_j(x_1, x_2, \dots, x_N)\delta t_j = \Omega \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j(x_1, x_2, \dots, x_N)}{x_j} \delta t_j \,. \tag{5}$$

Объединяя преобразованные выражения (4) и (5), получим соотношения:

$$\frac{\delta\Omega}{\Omega} \approx \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j}{x_j} \delta t_j \qquad \text{или} \qquad \delta \ln \Omega \approx \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j}{x_j} \delta t_j \,. \tag{6}$$

Поделив левую и правую части соотношения (6) на величину $\sum_{j=1}^{N} f_j / x_j$, запишем

$$\frac{\delta \ln \Omega}{\sum_{j=1}^{N} f_j / x_j} \approx \langle \delta t \rangle, \tag{7}$$

где

$$\langle \delta t \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \delta t_j}{\sum_{j=1}^{N} f_j / x_j} \tag{8}$$

- среднестатистическое значение интервала времени на заданном итерационном шаге.

Учитывая выражение (4), выражение (7) можно переписать в виде:

$$\langle \delta t \rangle \approx \frac{\delta \ln \Omega}{\sum_{j=1}^{N} f_j / x_j} = \frac{\delta \ln \prod_{j=1}^{N} x_j}{\sum_{j=1}^{N} f_j / x_j}. \tag{9}$$

Покажем теперь, что если изначально не вводить возможное отличие интервалов времени на заданном итерационном шаге для каждого уравнения системы, а предположить возможность использования некоторого среднего для всех уравнений системы значения интервала времени, то после нахождения выражения для фазового объема и перехода к дискретному представлению, найденное среднее значение интервала времени также будет определяться соотношением (9).

В самом деле, поделив каждое *j*-ое дифференциальное уравнение системы (1) на переменную x_j, запишем

$$\frac{\dot{x}_j}{x_j} = \frac{d \ln x_j}{dt} = \frac{f_j(x_1, \ldots, x_N)}{x_j}. \tag{10}$$

Просуммируем все, полученные таким образом уравнения в системе:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{f_j(x_1, .., x_N)}{x_j} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{N} \ln x_j = \frac{d}{dt} \ln \prod_{j=1}^{N} x_j. \tag{11}$$

Предполагая возможность использования некоторого среднего для всех уравнений системы значения интервала времени на заданном итерационном шаге и переходя на этом этапе преобразований к дискретному представлению, можно записать:

$$\langle \delta t \rangle \approx \frac{\delta \ln \prod_{j=1}^{N} x_j}{\sum_{j=1}^{N} f_j / x_j}. \tag{12}$$

Выражение (12) полностью совпадает с выражением (9), найденным для среднестатистического интервала времени в дискретном представлении на каждом шаге интегрирования системы АДУ в предположении, что интервалы времени для разных уравнений системы могут быть разными из-за несовместности этих уравнений.

Таким образом, можно заключить, что если выбирать среднее значение интервала времени в соответствии с выражением (9), то при численном интегрировании системы АДУ можно определить осредненное на каждом итерационном шаге решение данной системы.

Однако при задании интервала времени в соответствии с выражением (9) также могут возникнуть неопределенности при интегрировании системы АДУ. В самом деле, выражение в числителе под знаком логарифма в (9): $\prod_{j=1}^{N} x_j$, в общем случае может быть как положительным, так и отрицательным. Логарифм от отрицательного значения является комплексным числом и выражается соотношением:

$$\ln\prod_{j=1}^{N}x_j=\ln\left|\prod_{j=1}^{N}x_j\right|+i\pi\,,\quad \text{если}\quad \prod_{j=1}^{N}x_j<0\,. \tag{13}$$

То, каким будет значение интервала времени - действительным или комплексным (мнимым) - зависит от того будет ли знакопостоянным или знакопеременным значение $\prod_{j=1}^{N}x_j$ на заданном итерационном шаге:

$$\langle\delta t\rangle\approx\begin{cases}\dfrac{\delta\ln\left|\prod_{j=1}^{N}x_j\right|}{\sum_{j=1}^{N}f_j/x_j}-\textit{знакопостоянное}\ \prod_{j=1}^{N}x_j\\[2ex] \dfrac{\delta\ln\left|\prod_{j=1}^{N}x_j\right|}{\sum_{j=1}^{N}f_j/x_j}\pm i\dfrac{\pi}{\sum_{j=1}^{N}f_j/x_j}-\textit{знакопеременное}\ \prod_{j=1}^{N}x_j\end{cases}. \tag{14}$$

В тех системах, где в принципе могут реализовываться значения $\Omega=\prod_{j=1}^{N}x_j$ с разными знаками, не существует запрета на выбор такой последовательности итерационных шагов, чтобы на каждом шаге значения $\Omega=\prod_{j=1}^{N}x_j$ изменяли свой знак. Эти системы будем рассматривать именно при таком выборе последовательности итерационных шагов и, соответственно описывать их только с помощью нижнего выражения в (14). Комплексное значение среднего интервала времени в этом выражение можно представить в виде:

$$\langle\delta t\rangle\approx\frac{\sqrt{\left(\delta\ln\left|\prod_{j=1}^{N}x_j\right|\right)^2+\pi^2}}{\left|\sum_{j=1}^{N}f_j/x_j\right|}\cdot\exp\left(\pm i\cdot arctg\left(\frac{\pi}{\delta\ln\left|\prod_{j=1}^{N}x_j\right|}\right)\right). \tag{15}$$

Или, по-другому, учитывая (4), можно записать

$$\langle\delta t\rangle\approx\frac{\left|\delta\ln|\Omega|\right|}{\left|\sum_{j=1}^{N}f_j/x_j\right|}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{(\delta\ln|\Omega|)^2}}\cdot\exp\left(\pm i\cdot arctg\left(\frac{\pi}{\delta\ln|\Omega|}\right)\right). \tag{16}$$

Выражение (16) позволяет выделить два предельных случая для знакопеременных значений $\prod_{j=1}^{N}x_j$:

1) Если выполняется условие: $\left|\delta\ln|\Omega|\right|/\pi>>1$, то этот случай можно считать «классическим» предельным случаем:

$$\left\langle \delta t_{kl} \right\rangle \approx \frac{\left| \delta \ln |\Omega| \right|}{\left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|}. \tag{17}$$

Выражение (17) совпадает с модулем выражения в (14) для знакопостоянного значения $\prod_{j=1}^{N} x_j$. В «классическом» предельном случае, полное время – сумма временных интервалов, описываемых выражением (17), на нескольких итерациях - будет монотонно расти с увеличением количества итерационных шагов.

2) Если выполняется условие: $\left| \delta \ln |\Omega| \right| / \pi << 1$, то этот случай будем называть «квантовым» предельным случаем:

$$\left\langle \delta t_{kv} \right\rangle \approx \frac{\pi}{\left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|} \cdot e^{\pm i \cdot arctg\left(\frac{\pi}{\delta \ln |\Omega|} \right)}. \tag{18}$$

В «квантовом» предельном случае, в соответствии с выражением (18), временной интервал может принимать два комплексных значения в зависимости от знака «+» или «-» в показателе экспоненты:

$$\left\langle \delta t_{kv}^{+} \right\rangle \approx \frac{\pi}{\left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|} \cdot e^{i \cdot arctg\left(\frac{\pi}{\delta \ln |\Omega|} \right)} \quad \text{и} \quad \left\langle \delta t_{kv}^{-} \right\rangle \approx \frac{\pi}{\left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|} \cdot e^{-i \cdot arctg\left(\frac{\pi}{\delta \ln |\Omega|} \right)}, \tag{19}$$

каждое из которых может реализовываться на каждом итерационном шаге.

При этом в случае рассмотрения динамического процесса с течением «внешнего» времени, задаваемого на области действительных чисел, будет наблюдаться потеря причинно-следственных связей, и процесс будет выглядеть, как случайный.

Учитывая, что при $|x| > 1$,

$$arctg(x) = \pm \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1) x^{2n+1}}, \tag{20}$$

выражения (19) при выполнении условия: $\left| \delta \ln |\Omega| \right| / \pi << 1$, можно переписать в виде:

$$\left\langle \delta t_{kv}^{+} \right\rangle \approx \pm \frac{i\pi}{\left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|} \cdot e^{-i \frac{\delta \ln |\Omega|}{\pi}} \quad \text{и} \quad \left\langle \delta t_{kv}^{-} \right\rangle \approx \mp \frac{i\pi}{\left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|} \cdot e^{i \frac{\delta \ln |\Omega|}{\pi}}. \tag{21}$$

Интересно отметить, что интервалы времени, задаваемые выражениями (21), зависят от величины изменения логарифма полного объема фазового пространства на данном итерационном шаге: $\delta \ln|\Omega|$, которую, в свою очередь, можно охарактеризовать, как изменение энтропии системы.

В самом деле, если размерность фазового пространства достаточно велика, то плотность вероятности φ обнаружения точки в фазовом пространстве объема $|\Omega|$ можно представить, как $\varphi \approx 1/|\Omega|$. Учитывая выражение для энтропии [14]:

$$S = -\int \varphi \ln \varphi dx_1 ... dx_N = -\langle \ln \varphi \rangle, \tag{22}$$

можно записать: $\langle \ln|\Omega| \rangle \approx S$. Предполагая, что $\delta \ln|\Omega| \approx \delta \langle \ln|\Omega| \rangle$, получаем соотношение: $\delta \ln|\Omega| \approx \delta S$.

Суммируя интервалы времени, определяемые выражениями (21), нельзя получить полное время процесса, как сумму отдельных временных интервалов. Однако задавая в показателе экспоненты новое значение изменения объема фазового пространства, можно получить новое значение интервала времени, за которое это изменение произошло, но только как одно из двух возможных значений и, при этом, заданное в области комплексных чисел.

Используя выражения (21), можно задать базисные функции и скалярное произведение в гильбертовом пространстве, определяющие эволюцию процесса системы АДУ в фазовом пространстве. В самом деле, рассмотрим интеграл на интервале изменения координат, соответствующий одному итерационному шагу:

$$\int \langle \delta t_{kv}^{+} \rangle \langle \delta t_{kv}^{-} \rangle dx_1 \cdots dx_N = \int \frac{\pi^2}{\left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|^2} dx_1 \cdots dx_N \approx \frac{\pi^2}{\left\langle \left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|^2 \right\rangle} \prod_{j=1}^{N} \delta x_j . \tag{23}$$

Здесь $\prod_{j=1}^{N} \delta x_j$ характеризует объем фазового пространства, определенный, как произведение изменений всех переменных на интервале изменения координат, соответствующий одному итерационному шагу, по которому производится интегрирование.

В соотношении (23) учитывается, что выражение: $\left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|^2$, принимает значение, для некоторых координат точки из интервала значений изменения координат. При небольшом изменении объема фазового пространства значение этого выражения на заданном интервале можно считать константой, равной среднему значению. В самом деле, поскольку

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{f_j}{x_j} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\dot{x}_j}{x_j} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{N} \ln x_j = \frac{d}{dt} \ln \prod_{j=1}^{N} x_j = \frac{d \ln \Omega}{dt}, \tag{24}$$

то при малом изменении Ω, изменение правой части соотношения (24) также будет мало и, следовательно,

$$\left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|^2 \approx \left\langle \left| \sum_{j=1}^{N} f_j / x_j \right|^2 \right\rangle. \tag{25}$$

Поделив левую и правую части выражения (23) на значение, стоящее в его правой части, учитывая (25), а также то, что

$$\delta \ln \Omega = \frac{\delta \Omega}{\Omega} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\delta x_j}{x_j}, \tag{26}$$

можно получить нормировку в гильбертовом пространстве для системы АДУ:

$$\int_{-1}^{1} \Psi^* \Psi \prod_{j=1}^{N} d\tilde{x}_j = 1, \tag{27}$$

где $\tilde{x}_j = x_j / \delta x_j$, $\delta x_j = const$ на рассматриваемом интервале, а Ψ и Ψ^* задаются соотношениями:

$$\Psi \approx \exp\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{i}{\pi \tilde{x}_j} \right), \qquad \Psi^* \approx \exp\left(-\sum_{j=1}^{N} \frac{i}{\pi \tilde{x}_j} \right). \tag{28}$$

Переменные $\tilde{x}_j$ в (27)-(28) могут изменяться, как при изменении x_j, при фиксированных δx_j, так и при изменении δx_j, при фиксированных x_j. Если в выражениях (27)-(28) зафиксировать координаты x_j, а δx_j считать изменяемыми величинами, то введя обозначение: $\tilde{x}_j = x_j / \delta x_j := 1/(\pi k_j \xi_j)$, где $k_j = const$, можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi \prod_{j=1}^{N} d\xi_j = 1, \tag{29}$$

где

$$\Psi \approx \Psi_0 \exp\left(i \sum_{j=1}^{N} k_j \xi_j \right), \qquad \Psi^* \approx \Psi_0 \exp\left(-i \sum_{j=1}^{N} k_j \xi_j \right), \tag{30}$$

$$\Psi_0 = \frac{(-1)^{N/2}}{\pi^{N/2}} \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k_j \xi_j}}. \tag{31}$$

Поскольку степенная функция меняется значительно медленнее экспоненты, то значение Ψ_0, определяемое выражением (31), в некотором приближении можно считать константой.

Уравнения (1) можно переписать для новых переменных ξ_j в виде:

$$\dot{\xi}_j = g_j(\xi_1, \ldots, \xi_N), \qquad j = 1, \ldots N. \tag{32}$$

Используя базисные функции, задаваемые выражениями (30), можно находить собственные значения операторов, действующих в гильбертовом пространстве с нормировкой (29). Причем, для значений, заданных некоммутируемыми операторами, будут выполняться соотношения неопределенности. Эти неопределенности являются результатом несовместности дифференциальных уравнений в системе АДУ.

3. Моделирование эволюции системы, описываемой автономными дифференциальными уравнениями, для которых примен*и*м Гамильтонов формализм

Если число уравнений N в системе (32) - четное, и все переменные в них можно разбить на два множества: $\{q_j\} \in Q$, и $\{p_j\} \in P$, $j = 1,\dots,N/2$, такие что $\dot{q}_j = p_j / m_j$, $\dot{p}_j = g_j(q_1,\dots,q_{N/2}) = -\partial V(q_1,\dots,q_{N/2})/\partial q_j$, где m_j - некоторые постоянные коэффициенты, тогда для этой системы можно записать функцию Гамильтона:

$$\mathrm{H}(q,p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j^2}{2m_j} + V(q_1,\dots,q_n), \quad \text{здесь} \quad n = N/2. \tag{33}$$

В «классическом» предельном случае, когда эволюцию системы при последовательных переходах от одного итерационного шага к другому определена однозначно, функция Гамильтона будет сохраняться в течение всего времени.

В «квантовом» предельном случае эволюция системы определена только в гильбертовом – вероятностном – пространстве, и функция Гамильтона, в случае рассмотрения динамического процесса с течением «внешнего» времени, будет сохраняться только в среднем. Нормировку в гильбертовом пространстве (см. соотношение (29)) для системы, к которой применим Гамильтонов формализм, описанный выше, можно записать в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{j=1}^{n} dp_j = 1, \tag{34}$$

где Ψ и Ψ^* (см. (30)) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} k_{qj} q_j \right) \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} k_{pj} p_j \right), \\ \Psi^* &= \Psi_0 \exp\left(-i\sum_{j=1}^{n} k_{qj} q_j \right) \exp\left(-i\sum_{j=1}^{n} k_{pj} p_j \right), \end{aligned} \tag{35}$$

здесь k_{qj} и k_{pj} - константы в показателе экспонент (35), являющиеся множителями у переменных q_j и p_j, соответственно. При этом считаем, что $\Psi_0 \approx const$.

Используя (34)-(35), можно записать среднее значение для функции Гамильтона в гильбертовом пространстве:

$$\overline{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{H} \Psi \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{j=1}^{n} dp_j, \tag{36}$$

где

$$\hat{\mathrm{H}}(q,p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{p}_j^2}{2m_j} + \hat{V} \tag{37}$$

- оператор, действующий в гильбертовом пространстве, такой, что при подстановке в левую часть (36) выражения для среднего значения функции Гамильтона $\overline{H}$:

$$\overline{H} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{p}_j^2}{2m_j} + \overline{V}, \tag{38}$$

$$\overline{p}_j = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{p}_j \Psi \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{j=1}^{n} dp_j, \qquad \overline{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{V} \Psi \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{j=1}^{n} dp_j, \tag{39}$$

должно получиться тождественное равенство.

Нетрудно заметить, что операторы $\hat{p}_j$ и $\hat{V}$, входящие в (37) и (39) и удовлетворяющие вышеприведенному требованию, можно записать в виде:

$$\hat{p}_j = -ib\partial/\partial q_j, \qquad \hat{V} = V(q_1, \ldots, q_n), \tag{40}$$

где $b=const$, такая что $bk_{qj} = \overline{p}_j$.

В результате подстановки (40) в (37), оператор для функции Гамильтона приобретает вид:

$$\hat{\mathrm{H}}(q, p) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{b^2}{2m_j} \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} + V(q_1, \ldots, q_n). \tag{41}$$

Используя (41), можно записать уравнение для определения функции Гамильтона системы автономных дифференциальных уравнений, обладающих вышеприведенными свойствами, в «квантовом» предельном случае:

$$\hat{\mathrm{H}}\Psi = \overline{H}\Psi. \tag{42}$$

Уравнение (42) с оператором $\hat{\mathrm{H}}$, определяемым соотношением (41), аналогично уравнению Шредингера [15].

Таким образом, можно отметить, что результатом несовместности автономных дифференциальных уравнений для систем, обладающих свойствами «квантового» предельного случая, может стать невозможность однозначного детерминированного задания времени для одного итерационного шага. Это, в свою очередь, приводит к потере в системе детерминизма и влечет необходимость описания ее эволюции в вероятностном гильбертовом пространстве. Такие системы, к которым ко всему прочему, применим еще и Гамильтонов формализм, могут быть описаны уравнениями, аналогичными уравнению Шредингера.

4. Заключение

В ранее проведенных исследованиях [11-13] было показано, что в системах автономных дифференциальных уравнений возможно возникновение не только детерминированного хаоса, имеющего сложную для анализа и интерпретации структуру, а истинной недетерминированности - «стохастичности», обусловленной несовместностью дифференциальных уравнений из-за конечности временного шага. В данной работе подняты вопросы о возможности нахождения и использования «усредненного» времени при интегрировании системы АДУ численными методами в случае отсутствия условия совместности для ее уравнений. Найдены два предельных случая при описании такой системы: «классический» - когда время монотонно растет при переходе от одного итерационного шага к другому, и «квантовый» - когда интервалы времени на каждом итерационном шаге не могут быть определены однозначно, в связи с чем, возможно нарушение причинно-следственных связей в системе. При этом «среднее» время протекания процесса в такой системе может быть задано с помощью скалярного произведения базисных функций в гильбертовом пространстве, определяющих вероятностный характер реализаций событий в стохастической системе. Системы этого класса, к которым ко всему прочему, применим еще и Гамильтонов формализм, могут быть описаны уравнениями, аналогичными уравнению Шредингера.

Интересно также отметить, что приведенный в данной работе подход позволяет получить соотношения, задающие связь величины интервала времени и изменения объема фазового пространства на каждом итерационном шаге, как для «классического» - в среднем детерминированного случая, так и для полностью недетерминированного - «квантового» - случая. Возможно, в будущем это позволит по-новому взглянуть на природу времени в динамических системах и отличие квантовомеханических процессов от классических.

Литература

[1] Пчелинцев А.Н. Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17. № 2. С. 191 – 201.

[2] Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. - М.: Едиториал УРСС; 2004.

[3] Гонченко А.С., Коротков А.Г., Самылина Е.А. Об обратимой трехмерной системе, содержащей аттрактор и репеллер Лоренца // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2022. №2 https://diffjournal.spbu.ru/pdf/22207-jdecp-gonchenko.pdf

[4] Подлужный И.А., Флоринский А.А. Три свойства одной дискретной динамической системы в пространстве бесконечно дифференцируемых функций // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019. №1 https://diffjournal.spbu.ru/pdf/florinskiy2-2.pdf

[5] Хатунцева О.Н. О возможности описания аномальных гравитационных сил во Вселенной с позиции фракталоподобного характера распределения вещества в ней // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2022. №4 https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2022.4/article.1.4.html

[6] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистком подходе к турбулентности. - М.: Мир, 1991. - 368 с.

[7] Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=158211

[8] Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=164194

[9] Хатунцева О.Н. Обобщенное аналитическое решение плоской задачи Пуазейля для турбулентного режима течения несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=165492

[10] Хатунцева О.Н. Учет производства энтропии в системе уравнений Навье-Стокса при описании турбулентного течения вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости // Труды МАИ. 2023. № 131. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=175916, DOI: 10.34759/trd-2023-131-10

[11] Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Естественные и технические науки. 2017. № 11. С. 255-257.

[12] Хатунцева О.Н. О стохастических свойствах динамического хаоса в системах автономных дифференциальных уравнений, типа системы Лоренца // Труды МАИ. 2020. № 112. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=116313. DOI: 10.34759/trd-2020-112-1

[13] Хатунцева О.Н. О «детерминизации» стохастических процессов при увеличении в системе степеней свободы // Труды МАИ. 2023. № 128. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=171388 DOI: 10.34759/trd-2023-128-07
[14] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т.Х. Физическая кинетика. М.: Наука, 2002.
[15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Т3 Квантовая механика. Нерелятивисткая теория; 1973.

On "classical" and "quantum" limits at the integration of a system of autonomous differential equations

O.N. Khatuntseva

Korolev, RSC S.P. Korolev Rocket and Space Corporation «Energia», Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education " Moscow Institute of Physics and Technology (State University)"

ol-khatun@yandex.ru

Abstract. The studies carried out in the author's earlier works show the possibility of a stochastic process in the numerical integration of systems of autonomous differential equations (ADE) of the Lorentz type. They also noted that with an increase in the number of equations (degrees of freedom) in the ADE system, the stochastic nature of the process decreases – the "determinization" of the process occurs. In this paper, an attempt is made to characterize the process of transition from one iterative step to another (when integrating the ADE system by numerical methods) by some average value of the time interval for all the equations of the system, and then to determine the relationship between this value and the change in the entropy of the system. Two limiting cases are found when describing such a system: "classical" - when time monotonically increases during the transition from one iterative step to another, and "quantum" - when time is defined ambiguously and a violation of cause-and-effect relationships in the system is possible.

Keywords: time, chaos, autonomous differential equations, Lorentz system of equations, stochastic processes, quantum systems.