ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2024
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

О существовании и единственности положительного решения краевой задачи с симметричными граничными условиями для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

Абдурагимов Г.Э.
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»
gusen_e@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача с симметричными граничными условиями для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на отрезке $[0, 1]$, описывающая деформацию упругой балки. С помощью специальных топологических средств в полуупорядоченных пространствах с конусом, основанных на принципе неподвижной точки, установлены достаточные условия существования и единственности положительного решения исследуемой задачи. Доказательство существования по крайней мере одного положительного решения краевой задачи проводилось с применением индекса неподвижной точки оператора. Для доказательства единственности решения соответственно была привлечена теорема о неподвижных точках α – вогнутых операторов.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, конус, индекс неподвижной точки оператора.

1 Введение

В работе на основе методов фунционального анализа с помощью специальных топологических средств получены достаточные условия существования и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) четвертого порядка, описывающую деформацию упругой балки с закрепленными концами.

Краевые задачи для обыкновенных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка часто встречаются в механике твердых материалов. Получены условия существования и единственности положительных решений уравнения упругой балки. Большая часть этих результатов получена путем понижения порядка рассматриваемых задач до краевых задач для ОДУ второго порядка и последующее редуцирование к интегральным уравнениям, исследование которых проводится различными топологическими приемами, основанными, в основном, на принципе неподвижной точки оператора в простраствах с конусом. В этом контексте также часто применяется метод верхнего и нижнего решений. В данном случае не представляет возможным сведение краевой задачи к задаче с ОДУ второго порядка и соответственно применение упомянутых выше методов решения краевых задач.Публикаций, посвященным краевым задачам для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с симметричными граничными условиями относительно мало, в частности, отметим среди последних публикаций [1, 2, 3, 4, 5, 6]. В близкой к настоящей статье постановке задачи соответствущие результаты были получены в работах [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Заметим, что достаточно эффективным инструментом исследования вопросов существования положительных решений краевых задач для нелинейных ОДУ является теорема Красносельского о неподвижной точке конусного расширения (сжатия).

В предложенной статье для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения краевой задачи мы воспользовались индексом неподвижной точки. Для доказательства единственности решения соответственно была привлечена теорема о неподвижных точках α – вогнутых операторов. Полученные результаты дополняют исследования автора по указанной тематике.

2 Предварительные сведения и обозначения

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1 *[14, 15] Пусть P – конус в банаховом пространстве E. Для $q > 0$ определим $\Omega_q = \{x \in P : \|x\| < q\}$. Предположим, что $T : \overline{\Omega_q} \to P$ –*

компактное отображение такое что для $u \in \partial\Omega_q$

(i) *если* $\|u\| \le \|Au\|$, $u \in \partial\Omega_q$, *то* $ind(T, \Omega_q, P) = 0$;

(ii) *если* $\|u\| \ge \|Au\|$, $u \in \partial\Omega_q$, *то* $ind(T, \Omega_q, P) = 1$.

Далее, для всех $u, v \in E$ обозначение $u \sim v$ означает, что существуют положительные числа λ и μ такие, что $\lambda u \le u \le \mu v$. Очевидно, символ $\sim$ является отношением эквивалентности. Выбрав $h > \theta$ (θ обозначает нулевой элемент E), обозначим через P_h множество $P_h = \{x \in E : x \sim h\}$. Легко видеть, что $P_h \subset P$ выпукло и $\lambda P_h = P_h$ для всех $\lambda > 0$.

Теорема 1 *[16] Пусть* E *— вещественное банахово пространство,* $h > \theta$. *Предположим, что конус* P *– нормальный [17, с. 17] и оператор* T *удовлетворяет следующим условиям:*

(A_1) : $T : P_h \to P_h$ *монотонен;*

(A_2) : *для* $x \in P_h$ *и* $t \in (0, 1)$ *существует* $\alpha(t) \in (0, 1)$ *такое что* $T(tx) \ge t^{\alpha(t)}Tx$;

(A_3) : *существует постоянная* $l \ge 0$ *такая что* $x_0 \in [\theta, lh]$.

Тогда операторное уравнение $x = Tx + x_0$ *имеет единственное решение в* P_h.

3 Основные результаты

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(4)}(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{3.1}$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$x(1) = x'(1) = 0, \tag{3.3}$$

где $f(t, u)$ — неотрицательная, непрерывная и монотонно возрастающая по u на $[0, 1] \times [0, \infty)$ функция, причем $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Определение 1 *Под положительным решением задачи* (3.1)–(3.3) *будем понимать функцию* $x \in \mathbb{C}^4_{[0,1]}$ *положительную в интервале* $(0, 1)$, *удовлетворяющую всюду на указанном интервале уравнению* (3.1) *и граничным условиям* (3.2), (3.3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (3.1)–(3.3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s))\, ds, \qquad 0 \le t \le 1, \tag{3.4}$$

где $G(t,s)$ – функция Грина оператора $-\frac{d^4}{dt^4}$ с краевыми условиями (3.2), (3.3):

$$G(t,s) = \frac{1}{6} \begin{cases} s^2(1-t)^2[(t-s)+2(1-s)t], & \text{если } 0 \le s \le t, \\ t^2(1-s)^2[(s-t)+2(1-t)s], & \text{если } t \le s \le 1. \end{cases}$$

В [18] показано, что имеют место следующие свойства:

1. $G(t,s) \ge 0, \qquad t,s \in [0,1];$
2. $\max_{0\le t\le 1} G(t,s) = G(\tau(s), s), \qquad s \in [0,1],$
   где $\tau(s) = \begin{cases} \frac{1}{3-2s}, & \text{если } 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ \frac{2s}{1+2s}, & \text{если } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases};$
3. $\varphi(t) G(\tau(s), s) \le G(t,s) \le G(\tau(s), s), \qquad t,s \in [0,1],$
   где $\varphi(t) = min\{t^2, (1-t)^2\}$.

Обозначим через $\tilde{K}$ конус неотрицательных функций пространства $\mathbb{C}_{[0,1]}$, удовлетворяющих условию

$$x(t) \ge \varphi(t)\|x\|, \qquad t \in [0,1], \tag{3.5}$$

где $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$.

В операторной форме уравнение (3.4) можно переписать в виде

$$x = Ax,$$

где A, определенный равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s))\, ds, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Несложно показать, что из теоремы Арцела - Асколи следует полная непрерывность оператора A.

Справедлива

Лемма 2 *Оператор A инвариантен относительно конуса $\tilde{K}$.*

Доказательство. В силу приведенных выше свойств функции Грина для любого $x \in \tilde{K}$ имеем

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\,ds \geq \varphi(t)\int_0^1 G(\tau(s),s)f(s,x(s))\,ds$$
$$= \varphi(t)\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\,ds = \varphi(t)\|Ax\|.$$

Следовательно, $A(\tilde{K}) \subset \tilde{K}$.
Лемма доказана.

Введем для удобства следующие обозначения

$$f^0_{\min} = \lim_{u\to 0^+}\min_{0\leq t\leq 1}\frac{f(t,u)}{u}, \qquad f^\infty_{\min} = \lim_{u\to +\infty}\min_{0\leq t\leq 1}\frac{f(t,u)}{u},$$

$$f^0_{\max} = \lim_{u\to 0^+}\max_{0\leq t\leq 1}\frac{f(t,u)}{u}, \qquad f^\infty_{\max} = \lim_{u\to +\infty}\max_{0\leq t\leq 1}\frac{f(t,u)}{u},$$

$$\Omega_r = \{x \in \tilde{K} : \|x\| < r\}, \qquad \partial\Omega_r = \{x \in \tilde{K} : \|x\| = r\},$$

$$\Omega_R = \{x \in \tilde{K} : \|x\| < R\}, \qquad \partial\Omega_R = \{x \in \tilde{K} : \|x\| = R\},$$

где $0 < r < R$.

Теорема 2 *Предположим, что* $f^0_{\min} = \infty$ *и* $f^\infty_{\min} = 0$.

Тогда краевая задача (3.1)–(3.3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Из условия $f^0_{\min} = \infty$ следует, что найдется число $\alpha > 0$ такое, что

$$f(t,u) \geq \delta u, \qquad t \in [0,1], \quad 0 < u \leq L,$$

где $\delta > \left(\int_0^1 G(1/2,s)\varphi(s)\,ds\right)^{-1}$.

Взяв $r = L$, для любого $x \in \partial\Omega_r$ имеем

$$A(x)(1/2) = \int_0^1 G(1/2,s)f(s,x(s))\,ds \geq \delta\int_0^1 G(1/2,s)x(s)\,ds$$
$$\geq \delta\int_0^1 G(1/2,s)\varphi(s)\|x\|\,ds = \delta\int_0^1 G(1/2,s)\varphi(s)\,ds\cdot\|x\| > \|x\|.$$

Откуда следует $\|Ax\| > \|x\|$.

Таким образом, в силу леммы 1

$$ind(A, \Omega_r, \tilde{K}) = 0. \tag{3.6}$$

Далее, поскольку $f^{\infty}_{\min} = 0$ существует число $H > 0$ такое, что

$$f(t,u) \le \mu u, \qquad t \in [0,1], \quad u \ge H,$$

где $0 < \mu < \left(\int_0^1 G(\tau(s),s)\varphi(s)\,ds\right)^{-1}$.

Положив $R = H$, имеем

$$A(x)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\,ds \le \int_0^1 G(\tau(s),s)f(s,x(s))\,ds$$
$$\le \mu\int_0^1 G(\tau(s),s)x(s)\,ds \le \mu\int_0^1 G(\tau(s),s)\,ds\cdot\|x\| < \|x\|.$$

Следовательно, для любых $x \in \partial\Omega_R$ справедливо соотношение $\|Ax\| < \|x\|$.

По лемме 1

$$ind(A, \Omega_R, \tilde{K}) = 1. \tag{3.7}$$

Выбрав $0 < r < R$, из аддитивности индекса неподвижной точки и (3.6), (3.7) соответственно имеем

$$ind(A, \Omega_R \backslash \overline{\Omega_r}, \tilde{K}) = ind(A, \Omega_R, \tilde{K}) - ind(A, \Omega_r, \tilde{K}) = 1.$$

Следовательно, оператор A имеет неподвижную точку в $\Omega_R \backslash \overline{\Omega_r}$, что в свою очередь равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (3.1)–(3.3) в указанной области. Теорема доказана.

Замечание 1. *При выполнении условий $f^0_{\max} = \infty$ и $f^{\infty}_{\max} = 0$ по приведенной в теореме 2 схеме несложно показать наличие по крайней мере одного положительного решения задачи* (3.1)–(3.3).

Для доказательства единственности положительного решения задачи (3.1)–(3.3) воспользуемся теоремой 1.

Несложно показать, что функция Грина задачи (3.1)–(3.3) обладает свойством

$$\psi(t)G(\tau(s),s) \le G(t,s) \le \frac{1}{2}\psi(t)s, \qquad t,s \in [0,1], \tag{3.8}$$

где $\psi(t) = t^2(1-t)^2$.

Теорема 3 *Предположим, что*

$$(H_1): \int_0^1 G(\tau(s),s)f(s,\psi(s))\,ds > 0;$$

(H_2) : *для любого* $\lambda \in (0,1)$ *и* $u \geq 0$ *существует число* $\sigma \in (0,1)$ *такое что*

$$f(t,\lambda u) \geq \lambda^\sigma f(t,u), \qquad t \in [0,1].$$

Тогда краевая задача (3.1)–(3.3) *имеет единственное положительное решение.*

Доказательство. Во первых, легко видеть, что конус $\tilde{K}$ нормальный. Ввиду того, что $f(t,u)$ монотонно возрастает по второму аргументу оператор $A : \tilde{K} \to \tilde{K}$ монотонен.

Далее, покажем что оператор A удовлетворяет условиям (A_1), (A_2) теоремы 1. Из (H_2) следует, что для $t \in [0,1]$

$$(A\lambda x)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,\lambda x(s))\,ds \geq \lambda^\sigma \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\,ds = \lambda^\sigma (Ax)(t).$$

Итак,

$$A(\lambda x) \geq \lambda^{\alpha(\lambda)} Ax, \qquad \lambda \in (0,1), \quad x \in \tilde{K}, \tag{3.9}$$

где $\alpha(\lambda) = \sigma$.

Покажем теперь, что оператор A отображает конус $\tilde{K}_\psi$ (конус $\tilde{K}_\psi$ определен аналогично P_h) в себя. В силу (H_1), (H_2) и (8) имеем

$$(A\psi)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,\psi(s))\,ds \geq \int_0^1 G(\tau(s),s)f(s,\psi(s))\,ds \cdot \psi(t),$$

$$(A\psi)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,\psi(s))\,ds \leq \frac{1}{2}\int_0^1 sf(s,\psi(s))\,ds \cdot \psi(t).$$

Пусть

$$\xi_1 = \int_0^1 G(\tau(s),s)f(s,\psi(s))\,ds, \qquad \xi_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 sf(s,\psi(s))\,ds.$$

В силу (H_1), $\quad 0 < \xi_1 \leq \xi_2$. Окончательно имеем

$$\xi_1\psi(t) \leq (A\psi)(t) \leq \xi_2\psi(t), \qquad t \in [0,1].$$

Следовательно, $A\psi \in \tilde{K}_\psi$. Для любого $x \in \tilde{K}_\psi$ можно указать достаточно малое число $t_0 \in (0,1)$ такое, что

$$t_0\psi \le x \le \frac{1}{t_0}\psi.$$

Из (3.9) соответственно получим

$$A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \le \frac{1}{\lambda^{\alpha(\lambda)}}Ax, \qquad \forall\lambda \in (0,1), \quad x \in \tilde{K}. \tag{3.10}$$

В силу (3.9) и (3.10) имеем

$$Ax \ge A(t_0\psi) \ge t_0^{\alpha(t_0)}A\psi, \qquad Ax \le A\left(\frac{1}{t_0}\psi\right) \le \frac{1}{t_0^{\alpha(t_0)}}A\psi.$$

Таким образом $Ax \in \tilde{K}_\psi$. Поэтому $A : \tilde{K}_\psi \to \tilde{K}_\psi$. Это вместе с (3.9) свидетельствует о том, что оператор A удовлетворяет условиям (A_1) и (A_2) теоремы 1.

Наконец, взяв $x_0(t) \equiv 0$, на основании теоремы 1 заключаем, что уравнение $x = Ax$ имеет единственное решение $x^* \in \tilde{K}$. Последнее равносильно существованию единственного положительного решения краевой задачи (3.1)–(3.3).

Список литературы

[1] Zhang Y., Cui Y. Positive solutions for two-point boundary value problems for fourth-order differential equations with fully nonlinear terms. *Math. Probl. Eng.*, 2020; (2020):1–7.

[2] Asaduzzaman Md. Existence results for a nonlinear fourth order ordinary differential equation with four-point boundary value conditions. *ATNAA*, 2020; (4):233–242.

[3] Yan D. Positive solutions for a singular superlinear fourth-order equation with nonlinear boundary conditions. *J. Funct. Spaces*, 2020; (2020):1–6.

[4] Almuthaybiri S., Tisdell C. Sharper existence and uniqueness results for solutions to fourth-order boundary value problems and elastic beam analysis. *Open Math.*, 2020; (18):1006–1024.

[5] Zhang Y., Chen L. Positive solution for a class of nonlinear fourth-order boundary value problem. *AIMS Math.*, 2023; (8):1014–1021.

[6] Chen H., Cui Y. Existence and uniqueness of solutions to the nonlinear boundary value problem for fourth-order differential equations with all derivatives. *J. Inequal. Appl.*, 2023; (2023):1–13.

[7] Harjani S., Kishin S. Existence and uniqueness of positive solutions for a nonlinear fourth-order boundary value problem. *Positivity*, 2010; (14):849–858.

[8] Абдурагимов Э. И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения
Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.. 2010. Т. 76, № 2. С. 5–12.

[9] Абдурагимов Э. И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // *Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.*. 2014. Т. 121, № 10. С. 9–16.

[10] Абдурагимов Э. И., Абдурагимова П. Э., Гаджиева Т. Ю. Двухточечная краевая задача для одного нелинейного ОДУ 4-го порядка. Существование, единственность положительного решения и численный метод его построения // *Вестник Даг. гос. университета. Сер. 1: Естественные науки.* 2019. № 3. С. 79–85.

[11] Абдурагимов Г. Э., Абдурагимова П. Э., Курамагомедова М. М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка // *Вестник российских университетов. Математика.* 2021. Т. 25, № 136. С. 341–347.

[12] Абдурагимов Г. Э., Абдурагимова П. Э., Курамагомедова М. М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка // *Математические заметки СВФУ.* 2022. Т. 29, № 4. С. 3–10.

[13] Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения $4n$-го порядка // *Изв. вузов. Сер.: Математика.* 2023. № 9. С. 20–26.

[14] Amann H. Fixed point equations and nonlinear problems in ordered Banach spaces. *SIAM Rev.*, 1976; (18):620–709.

[15] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. New York: Springer, 1985. 74 p.

[16] Zhai C. B., Yang C., Guo C. M. Positive solution of operator equation on ordered Banach spaces and applications. *Comput. Math. Appl.*, 2008; (56):3150–3156.

[17] Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 396 с.

[18] Pei M., Chang S. K. Monotone iterative technique and symmetric positive solutions for a fourth-order boundary value problem. *Math. Comput. Modelling.*, 2010; (51):1260–1267.

On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem with symmetric boundary conditions for one nonlinear fourth-order ordinary differential equation

G. E. Abduragimov
Dagestan State University
gusen_e@mail.ru

Abstract. The paper considers a boundary value problem with symmetric boundary conditions for one nonlinear fourth-order ordinary differential equation on the segment $[0, 1]$, which describes the deformation of an elastic beam. Using special topological means in semi-ordered spaces with a cone, based on the fixed point principle, sufficient conditions for the existence and uniqueness of a positive solution to the problem under study are established. The proof of the existence of at least one positive solution to the boundary value problem was carried out using the index of the operator's fixed point. To prove the uniqueness of the solution, the theorem on fixed points of α - concave operators - was accordingly used.

Keywords: boundary value problem, positive solution, Green's function, cone, operator fixed point index.