*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2007
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172*

*http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru*

ФАЗОВЫЕ ПОТОКИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КРУГЕ ПУАНКАРЕ. I [1]

А. Ф. Андреев, И. А. Андреева [2]

Как показал еще А. Пуанкаре, нормальная автономная система дифференциальных уравнений на плоскости $\mathbb{R}^2$ с полиномиальными правыми частями в принципе допускает полное качественное исследование на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{R}}^2$. С тех пор такие исследования были проведены для линейных, квадратичных и кубических однородных систем, для ряда семейств неоднородных квадратичных систем, для некоторых систем с линейными и кубическими членами в правых частях. В настоящей работе мы делаем попытку подвергнуть такому исследованию одно семейство кубических A_2-систем (т. е. кубических систем без постоянных и линейных членов в правых частях уравнений).

Мы будем рассматривать систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_0x^3 + p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3 \equiv X(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax^2 + bxy + cy^2 \equiv Y(x,y), \end{aligned} \tag{0.1}$$

где a, b, c, $p_0, \ldots, p_3$ $(\in \mathbb{R})$ — параметры, X, Y — взаимно простые формы от x и y (в частности, $|a| + |p_0| \neq 0$, $|c| + |p_3| \neq 0$).

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (грант НШ-4609.2006.1, НИИММ им. акад. В.И.Смирнова СПбГУ.)

Соглашение 0.1. Будем считать, что в системе (0.1) первый ненулевой из коэффициентов c, b, a и первый ненулевой из коэффициентов p_3, p_2, p_1, p_0 положительны. Это не ограничивает общности, ибо всегда может быть достигнуто заменами в (0.1) вида $x \to -x$, $y \to -y$, $t \to -t$.

Мы ставим своей задачей выявить все возможные топологические типы фазовых потоков системы (0.1) на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{R}}^2_{x,y}$ (или, что равносильно [3, § 13], в круге Пуанкаре $\overline{\Omega}$, а именно: выяснить топологические типы всех возможных предельных множеств траекторий системы (0.1) в круге $\overline{\Omega}$ и указать все возможные разбиения этого круга на элементарные инвариантные ячейки [3, § 16], каждая из которых имеет один источник и один сток.

Цель данной части I этого исследования — выяснить все возможные топологические типы конечной особой точки $O(0,0)$ системы (0.1) и указать их коэффициентные критерии.

§ 1. Исследование особой точки $O(0,0)$ системы (0.1)

В процессе исследования точки O мы постоянно будем опираться на книги [1, 2]. В частности, будем употреблять введенные в них термины и обозначения. Наиболее употребительны из них следующие.

O-кривая системы: ее полутраектория $L_p^{+(-)} : \varphi = \varphi(t,p) \to O$ при $t \to +\infty$ $(-\infty)$, $\varphi(0,p) = p \neq O$.

TO-кривая системы: ее O-кривая, которая, будучи дополнена точкой O, касается в ней некоторой O-полупрямой; последняя определяет в таком случае исключительное (тангенциальное) направление системы в точке O.

$O_{+(-)}$-кривая: O-кривая, примыкающая к точке O из полуплоскости $x > 0$ $(x < 0)$; *$O^{+(-)}$-кривая*: O-кривая, примыкающая к точке O по направлению $x = 0$, $y \geqslant 0$ $(y \leqslant 0)$.

Пучок O-кривых типа N (узловой): семейство O-кривых $L_p^s : \varphi = \varphi(t,p)$, $p \in \Gamma$, где Γ — простая открытая дуга, $\Gamma \cap L_p^s = \{p\}$, $s\,(\in \{+,-\})$ — фиксировано; *пучок O-кривых типа S (седловой)*: пучок состоящий из одной TO-кривой L_p^+ или L_p^-.

$N_{+(-)}$, $S_{+(-)}$ $(N^{+(-)}, S^{+(-)})$ — пучки O-кривых типов N, S, состоящие из $O_{+(-)}$ $(O^{+(-)})$-кривых.

Введем еще обозначения $P(u) := X(1,u)$, $Q(u) := Y(1,u)$.

Для выявления TO-кривых системы (0.1) применим метод исключительных направлений. Согласно [2, с. 50; 3, с. 364; 4, с. 107] уравнение возможных исключительных направлений системы (0.1) в точке O имеет вид

$$F(\varphi) \equiv Y(\cos\varphi, \sin\varphi)\,\cos\varphi = 0. \tag{1.1}$$

Из условий на (0.1) следует, что $F(\varphi) \not\equiv 0$. Поэтому [2, с. 49; 3, с. 365] каждая O-кривая системы (0.1) является либо TO-кривой, либо O-спиралью. При этом наличие у системы хотя бы одной TO-кривой гарантирует отсутствие у нее O-спиралей, и наоборот. Умножая уравнение (1.1) почленно на r^3, получим уравнение возможных исключительных прямых системы (0.1) для точки O

$$x(ax^2 + bxy + cy^2) = 0. \tag{1.2}$$

Поскольку, в чем мы скоро убедимся, система (0.1) всегда имеет TO-кривые и их совокупность всегда может быть разбита на конечное число ($\geqslant 2$) непересекающихся пучков типов N и S, топологический тип ее особой точки O мы будем описывать в терминах этих пучков с помощью ее А-схемы.

Определение 1.1. А-*схемой изолированной особой точки O плоской вещественной автономной системы дифференциальных уравнений* (множество всех TO-кривых которой не пусто и может быть разбито на конечное число непересекающихся пучков типов N, S) будем называть слово A_O из букв N, S, фиксирующее круговой порядок следования пучков типов N, S O-кривых системы при обходе точки O в (+)-направлении, начиная с некоторого из них.

Наше исследование точки O распадается на пять случаев, каждые два из которых различаются числом или кратностями прямых (1.2). В любом из них мы действуем по следующей программе.

1) Для каждой из прямых (1.2) выясняем вопросы: а) существуют ли у системы (0.1) O-кривые, примыкающие к O вдоль нее, и если да, то б) какова структура множества O-кривых, примыкающих к O вдоль каждой из ее O-полупрямых (т. е. каково число образуемых ими пучков типов N, S и каков порядок следования этих пучков при полуобходе точки O в (+)-направлении).

2) На основании полученных в пункте 1) результатов составляем А-схему A_O точки O.

3) По А-схеме точки O составляем ее В-схему: слово B_O из букв E, H, P, фиксирующее круговой порядок следования *O-секторов Бендиксона* типов E (эллиптический), H (гиперболический), P (параболический) при обходе точки O в (+)-направлении, начиная с некоторого из них. Мы используем для этого следуюшее правило. Если $A_O = W_1 \ldots W_n$ (здесь $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$

$W_k = N \vee S$), B — круг с центром O и границей C, $L_k\,(\in W_k)$, $k = \overline{1,n}$, — O-кривые системы (0.1) (представители пучков W_k), каждая из которых имеет общую точку с C и притом только одну, то кривые L_k (и точка O) разбивают круг B на n секторов $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$, причем $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$ сектор Σ_k (имеющий боковыми границами кривые L_k и L_{k+1}, $L_{n+1} = L_1$) является [1, § 1.1.2; 2, § I.2] O-сектором Бендиксона типа E, H или P, смотря по тому являются ли пучки W_k, W_{k+1} соответственно пучками типа N, пучками типа S или пучками альтернативных типов. В-схема B_0 описывает топологический тип точки O в терминах секторов Бендиксона E, H, P.

Случай 1. $c > 0$, $d = b^2 - 4ac > 0$. В этом случае уравнение (1.2) определяет простые прямые $x = 0$, $y = q_1 x$ и $y = q_2 x$, $q_1 < q_2$, $P(q_i) \neq 0$, $i = 1, 2$.

1) Исследование прямой $x = 0$. Рассматривая систему (0.1) в областях $|y| > 0$, произведем в ней замену переменных

$$x = vy, \quad Y(v,1)\, y\, dt = d\tau. \tag{1.3}$$

Получим систему

$$\frac{dy}{d\tau} = y, \quad \frac{dv}{d\tau} = V(v)\, y - v, \tag{1.4}$$

где $V(v) =\frac{X(v,1)}{Y(v,1)}$ – аналитическая в точке $v = 0$ функция, $V_0 =:$ $V(0) =\frac{X(0,1)}{c} = \frac{p_3}{c} \geqslant 0$. Система (1.4) определена на всей плоскости y, v и имеет на ней особую точку $O(0,0)$. Выясним вопросы о существовании у нее $O_\pm$-кривых вида $v = v(y)$ и о структуре множеств таких O-кривых.

$O(0,0)$ — особая точка системы (1.4) с собственными значениями $\lambda_{1,2} = \pm 1$, т. е. простое седло. Ее сепаратрисные многообразия суть $y = 0$ и $v = \frac{1}{2}V_0 y(1 + o_y(1))$. $o_y(1) \to 0$ при $y \to 0$. Следовательно, система (1.4) имеет ровно две O-кривые вида $v = v(y)$: одну O_+-кривую и одну O_--кривую. Из этого в силу (1.3) следует, что для системы (0.1) при $c > 0$ к точке O вдоль прямой $x = 0$ примыкают ровно две O-кривые: $x = \frac{1}{2}V_0 y^2(1 + o_y(1))$, $y \neq 0$. Они образуют пучок S^+ и пучок S^-.

2) Исследование прямых $y = q_i x$, $i = 1, 2$. Пусть q — любое из чисел q_1, q_2. Рассматривая систему (0.1) в областях $|x| > 0$, произведем в ней замену переменных

$$y = (q + z)x, \quad P(q + z)\, x\, dt = d\tau. \tag{1.5}$$

Получим систему

$$\frac{dx}{d\tau} = x^2, \quad \frac{dz}{d\tau} = -qx + \mu z + Z(x,z), \tag{1.6}$$

где $\mu = \dfrac{(-1)^i\, c\,(q_2-q_1)}{P(q)}$, i — номер q как корня $Q(u)$, а $Z(x,z)$ — аналитическая в точке $(0,0)$ функция, исчезающая в ней вместе с частными производными первого порядка. Система (1.6) определена на всей плоскости x,z и имеет особую точку $O(0,0)$. Выясним вопросы о существовании у нее $O_{\pm}$-кривых вида $z=z(x)$ и о структуре множеств этих O-кривых.

$O(0,0)$ — особая точка системы (1.6) с собственными значениями $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\mu\neq 0$. Замена переменных

$$z = \frac{q}{\mu}x + z_1, \quad \mu\, d\tau = dt_1 \tag{1.7}$$

преобразует ее в систему

$$\frac{dx}{dt_1} = \frac{x^2}{\mu}, \quad \frac{dz_1}{dt_1} = z_1 + Z_1(x,z_1), \tag{1.8}$$

где функция $Z_1(x,z_1)$ обладает теми же свойствами, что и функция $Z(x,z)$ в (1.6). На основании [1, § 6.1] или [2, § V.1] заключаем, что для системы (1.8) $O(0,0)$ — седло-узел, для которого $\mu x<0$ — седловая область, $\mu x>0$ — узловая область, $x=0$ — разделяющее их сепаратрисное многообразие. Из этого в силу замен (1.7) и (1.5) следует, что для системы (0.1) к особой точке O вдоль прямой $y=qx$ примыкают лишь $O_{\pm}$-кривые, образующие пучок N_+, и пучок S_-, если $\mu>0$, пучок S_+ и пучок N_-, если $\mu<0$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1. *В случае* 1 А-*схема* A_0 *и* В-*схема* B_0 *особой точки* $O(0,0)$ *системы* (0.1) *в зависимости от знаков величин* $P(q_i)=X(1,q_i)$, $i=1,2$, $q_{1,2}=\dfrac{-b\mp\sqrt{d}}{2c}$, *имеют вид, указанный в таблице* 1.

Таблица 1. A_O и B_O в случае 1.

$P(q_1)$	$P(q_2)$	A_O	B_O
$+$	$+$	$S^-SNS^+NS = S^-SNS$	$HPPPPH = HPH = PH^2$
$+$	$-$	S^-SSS^+NN	$HHHPEP = H^3PEP$
$-$	$+$	S^-NNS^+SS	$PEPHHH = PEPH^3$
$-$	$-$	$S^-NSS^+SN = NSS^+S$	$PPHHPP = PH^2P = PH^2$

В таблице 1 первоначальный перечень пучков O-кривых в слове A_O начинается всегда с пучка S^-, а перечень O-секторов в слове B_O — с сектора, первой боковой границей которого является O-кривая S^-. Упрощение этих слов достигается за счет использования равенств: $NSN = N$, $PP = P$ (что означает объединение двух N-пучков или двух P-секторов и разделяющей их O-кривой в один N-пучок или P-сектор), а также за счет круговой перестановки букв и использования условной записи типа $HH = H^2$.

Случай 2. $c > 0$, $d = 0$. В этом случае уравнение (1.2) определяет прямые: $x = 0$ (простая) и $y = qx$ (двукратная). Для прямой $x = 0$ справедливы результаты случая 1.

Изучим прямую $y = qx$. Для этого, считая $|x| > 0$, произведем в (0.1) замену переменных

$$y = (q + z)x, \quad P(q + z)x\,dt = d\tau. \tag{1.9}$$

Получим систему (она определена и при $x = 0$ и имеет особую точку $O(0, 0)$)

$$\frac{dx}{d\tau} = x^2, \quad \frac{dz}{d\tau} = -(q + z)x + \frac{cz^2}{P(q + z)}. \tag{1.10}$$

Для нее мы должны выяснить те же вопросы, что и для системы (1.6). Но для системы (1.10) $O(0, 0)$ — особая точка с собственными значениями $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Изучим ее.

1) $q \neq 0$. В этом подслучае система (1.10) имеет нильпотентное линейное приближение. Замена времени $(z + q)\,d\tau = -dt_1$ и замена переменной x

$$x = \psi(z) + x_1, \quad \psi(z) \equiv \frac{cz^2}{(q + z)P(q + z)}, \tag{1.11}$$

преобразуют ее в систему канонического для систем с нильпотентной особой точкой $(0, 0)$ вида [1, 2]:

$$\frac{dz}{dt_1} = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt_1} = X_1(z, x_1),$$

$$X_1(z, x_1) = -\frac{(\psi(z) + x_1)^2}{(q + z)} - \psi'(z)x_1, \tag{1.12}$$

для которой мы должны изучить особую точку $O(0, 0)$. Но общий случай такой системы изучен в [1, § 6.2] и в [2, § V.2]. Применим разработанный там алгоритм к системе (1.12).

В обозначениях из [1, 2]

$$X_1(z, x) \equiv f_1(z) + g_1(z)x_1 + h_1(z)x_1^2,$$

где f_1, g_1, h_1 — аналитические в точке $z = 0$ функции:

$$f_1(z) = a_1 z^\alpha + \ldots \equiv -\frac{c^2 z^4}{P^2(q)q^3} + \ldots, \quad g_1(z) = b_1 z^\beta + \ldots \equiv -\frac{2cz}{P(q)q} + \ldots,$$

$$h_1(z) = c_1 z^\gamma + \ldots \equiv -\frac{1}{q} + \ldots,$$

т. е. $\alpha = 4,\ \beta = 1,\ a_1 = -\dfrac{c^2}{P^2(q)q^3},\ b_1 = -\dfrac{2c}{P(q)q}$.

Следовательно, для системы (1.12) имеет место случай $\alpha > 2\beta + 1$, а потому [1, 2] она имеет лишь следующие O-кривые:

$$x_1 = \frac{b_1}{\beta+1} z^{\beta+1} + \ldots \equiv -\frac{c}{P(q)q} z^2 + \ldots \equiv -\psi(z),\ z \neq 0,\ \text{и}$$

$$x_1 = \frac{a_1}{b_1} z^{\alpha-\beta} + \ldots \equiv -\frac{c}{2P(q)q^2} z^3 + \ldots,$$

одну — в области $qz < 0$ и пучок N в области $qz > 0$. Из этого в силу (1.11) следует, что для системы (1.10) при $q \neq 0$ в областях $|x| > 0$ существуют лишь следующие O-кривые вида $z = z(x)$

$$z = \pm\sqrt{\frac{P(q)qx}{c} + \ldots}. \tag{1.13}$$

Они лежат в полуплоскости $P(q)qx > 0$ и образуют в полуплоскости $qz > 0$ пучок типа N, а в полуплоскости $qz < 0$ — пучок типа S.

Подставляя (1.13) в первое из равенств (1.9), получим аналитическое представление всех O-кривых системы (0.1), примыкающих к точке O вдоль прямой $y = qx$:

$$y = \left(q \pm \sqrt{\frac{P(q)qx}{c} + \ldots} \right) x \tag{1.14}$$

Если $P(q)q > 0$ (< 0), то O-кривые (1.14) суть O_+-кривые (O_--кривые); при $q > 0$ они образуют пучки S_+, N_+ (S_-, N_-), а при $q < 0$ — пучки N_+, S_+ (N_-, S_-). В любом случае последовательность пучков соответствует положительному обходу точки O.

2) $q = 0$. В этом подслучае система (1.10) (в которой $P(0) = p_0 \neq 0$) имеет в точке $O(0,0)$ невырожденное квадратичное приближение и легко исследуется методом нормальных секторов Фроммера [2, гл. II, III; 4, гл. II]. Ее исключительные прямые для точки O суть $x = 0$, $z = 0$ и $z = \frac{2p_0 x}{c}$. Все

они простые, причем направления $x = 0$, $|z| > 0$, и $z = 0$, $|x| > 0$, могут быть заключены в нормальные сектора 2-го типа (являются седловыми), а направления $z = \frac{2p_0 x}{c}$, $|x| > 0$, — в нормальные сектора 1-го типа (являются узловыми). Из этого в силу (1.9) следует, что для системы (0.1) к особой точке O вдоль прямой $y = 0$ примыкают лишь следующие O-кривые: $y = 0$, $|x| > 0$ и $y = \frac{2p_0}{c} x^2$, $|x| > 0$; первые образуют пучки S_+ и S_-, вторые — пучки N_+ и N_-.

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 2. *В случае* 2 *A-схема* A_0 *и B-схема* B_0 *особой точки* O *системы* (0.1) *в зависимости от знаков величин* $q = -\dfrac{b}{2c}$ *и* $P(q) = X(1, q)$ *имеют вид, указанный в таблице* 2.

Таблица 2. Схемы A_O и B_O в случае 2.

q	$P(q)$	A_O	B_O
$+$	$+$	$S^- S N S^+$	$HPPH = HPH = PH^2$
$-$	$-$	$S^- N S S^+$	$PPHH = PHH = PH^2$
$+$	$-$	$S^- S^+ S N$	$HHPP = HHP = PH^2$
$-$	$+$	$S^- S^+ N S$	$HPPH = HPH = PH^2$
0	$+$	$S^- S N S^+ N S = S^- S N S$	$HPPPPH = HPH = PH^2$
0	$-$	$S^- N S S^+ S N = N S S^+ S$	$PPHHPP = PHHP = PH^2$

Случай 3. $c > 0$, $d < 0$. В этом случае уравнение (1.2) определяет одну прямую: $x = 0$ (простую). Для нее сохраняет силу все, сказанное в случае 1. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 3. *В случае* 3 *A-схема и B-схема особой точки* O *имеют вид:* $A_O = S^- S^+$, $B_O = HH$.

Случай 4. $c = 0$, $b > 0$, $p_3 > 0$. В этом случае уравнение (1.2) определяет прямые: $x = 0$ (двукратная) и $y = qx$ (простая), $q = -\dfrac{a}{b}$, $P(q) = X(1, q) \neq 0$.

1) Исследование прямой $x = 0$. Рассматривая систему (0.1) в областях $|y| > 0$, произведем в ней последовательно замены переменных

$$x = vy \quad \text{и} \quad X(v, 1)\, y\, dt = d\tau. \tag{1.15}$$

Получим систему

$$\frac{dy}{d\tau} = V(v)\,vy, \quad \frac{dv}{d\tau} = y - V(v)v^2, \tag{1.16}$$

где $V(v) = \frac{b+av}{X(v,1)}$ — аналитическая в точке $(0,0)$ функция, $V_0 := V(0) = \frac{b}{p_3} > 0$. Система (1.16) определена на всей плоскости y, v и имеет на ней нильпотентную особую точку $O(0,0)$. Нас интересуют ее O-кривые вида $v = v(y)$.

Следуя [1, 2], произведем в (1.16) замену

$$y = \psi(v) + y_1, \quad \psi(v) = V(v)v^2 \equiv V_0 v^2 + \dots . \tag{1.17}$$

Получим систему

$$\frac{dv}{d\tau} = y_1, \quad \frac{dy_1}{d\tau} = Y_1(v, y_1), \tag{1.18}$$

где

$$Y_1(v, y_1) = f_1(v) + g_1(v)y_1,$$

$$f_1(v) = a_1 v^\alpha + \dots \equiv V_0^2 v^3 + \dots, \quad g_1(v) = b_1 v^\beta + \dots \equiv -V_0 v + \dots,$$

т. е. $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $a_1 = V_0^2$, $b_1 = -V_0$, $\alpha = 2\beta + 1$, $a_1 > 0$. Такой набор параметров α, β, a_1, b_1 свидетельствует [1, 2] о том, что для системы (1.18) особая точка $O(0,0)$ — седло с сепаратрисными многообразиями $y_1 = -V_0 v^2 + \dots \equiv -\psi(v)$ и $y_1 = \frac{1}{2}V_0 v^2 + \dots$. Из этого в силу (1.17) следует, что для системы (1.16) особая точка $O(0,0)$ — седло с сепаратрисными многообразиями $y = 0$ и $y = \frac{3}{2}V_0 v^2 + \dots$, а потому эта система имеет лишь две O-кривые вида $v = v(y)$: $v = \pm\sqrt{\frac{2p_3}{3b}y + \dots}$, $y > 0$. Из этого в силу (1.15) следует, что в случае 4 для системы (0.1) к точке O по направлению $x = 0$ примыкают две O-кривые: $x = \pm y\sqrt{\frac{2p_3}{3b}y + \dots}$, $y > 0$. Они образуют пучки S_+^+ и S_-^+.

2) Исследование прямой $y = qx$. Произведем в системе (0.1) замену (1.5). Получим систему вида (1.6) с $\mu = \frac{b}{P(q)}$.

Используя результаты, полученные для системы (1.6), заключаем, что в случае 4 $O_\pm$-кривые системы (0.1), примыкающие к точке O вдоль прямой $y = qx$, образуют пучок N_+ и пучок S_-, если $P(q) > 0$, пучок S_+ и пучок N_-, если $P(q) < 0$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 4. *В случае* 4 А-*схема и* В-*схема особой точки* O *системы* (0.1) *имеют вид:*

$P(q) > 0 \Rightarrow A_O = N_+ S_+^+ S_-^+ S_-,\ B_O = PHHP = PH^2,$

$P(q) < 0 \Rightarrow A_O = S_+ S_+^+ S_-^+ N_-,\ B_O = HHPP = H^2 P.$

Случай 5. $c = b = 0,\ a > 0,\ p_3 > 0$. В этом случае уравнение (1.2) определяет одну (трехкратную) прямую: $x = 0$. Для ее изучения сделаем в (0.1) замену (1.15). Получим систему

$$\frac{dy}{d\tau} = V(v)v^2 y, \quad \frac{dv}{d\tau} = y - V(v)v^3, \tag{1.19}$$

где $V(v) = \frac{a}{X(v,1)}$, $V_0 := V(0) = \frac{a}{p_3} > 0$. Для нее $O(0,0)$ — нильпотетнтная особая точка. Нас интересуют ее O-кривые вида $v = v(y)$.

Произведем в (1.19) замену

$$y = \psi(v) + y_1, \quad \psi(v) = V(v)v^3 \equiv V_0 v^3 + \dots . \tag{1.20}$$

Получим (v, y_1)-систему вида (1.18), для которой $f_1(v) = V_0^2 v^5 + \dots$, $g_1(v) = -2V_0 v^2 + \dots$, т.е. $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $a_1 = V_0^2$, $b_1 = -2V_0$, $\alpha = 2\beta + 1$, $a_1 > 0$. Для нее [1, 2] особая точка $O(0,0)$ — седло с сепаратрисными многообразиями $y_1 = -\psi(v)$ и $y_1 = \frac{1}{3}V_0 v^3 + \dots \Rightarrow$ (в силу (1.20)) и для системы (1.19) особая точка $O(0,0)$ — седло с сепаратрисными многообразиями $y = 0$ и $y = \frac{4}{3}V_0 v^3 + \dots$, где $V_0 = \frac{a}{p_3}$, $\Rightarrow$ система (1.19) имеет лишь две O-кривые вида $v = v(y)$: $v = \sqrt[3]{\frac{3p_3}{4a} y + \dots}$, $y \neq 0$. Из этого в силу (1.15) следует: для системы (0.1) к особой точке O вдоль прямой $x = 0$ примыкают ровно две O-кривые: $x = \sqrt[3]{\frac{3p_3}{4a} y^4 + \dots}$, $y \neq 0$. Они образуют пучки S_+^+ и S_-^+.

Теорема 1. 5. *В случае* 5 А-*схема и* В-*схема точки* O *системы* (0.1) *имеют вид*: $A_O = S_+^- S_+^+$, $B_O = HH$.

Литература

1. Андреев А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйшая школа, 1979. 136 с.

2. Андреев А. Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. СПб.: Изд. С.-Петербург. ун-та, 2003. 160 с.

3. Андронов А. А. и др. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.

4. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.