ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2008
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

ФАЗОВЫЕ ПОТОКИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КРУГЕ ПУАНКАРЕ. III [1]

А. Ф. Андреев, И. А. Андреева [2]

Мы продолжаем начатое в частях I и II этого исследования [2,3] изучение поведения в круге Пуанкаре $\overline{\Omega}$ траекторий вещественной автономной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_0x^3 + p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3 \equiv X(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax^2 + bxy + cy^2 \equiv Y(x,y), \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $p_0, \ldots, p_3, a, b, c\,(\in \mathbb{R})$ — параметры, подчиненные лишь условию: формы $X(x,y)$ и Yx,y — взаимно просты.

В части I (§ 1) для системы (0.1) была изучена конечная особая точка $O(0,0)$: выявлены все возможные для нее топологические типы, указаны критерии их реализации. В части II (§§ 2–5) найдены и изучены все возможные для (0.1) бесконечно удаленные особые точки (БО-точки, т. е. особые точки, лежащие на границе Γ круга $\overline{\Omega}$.

В настоящей части III (§§ 6–10) перечисляются все существующие у системы (0.1) в круге Пуанкаре особые точки и описываются их топологические типы для любого возможного случая, характеризующегося 1) фиксированной парой $(\overline{m}, \overline{n})$, где $\overline{m}$ и $\overline{n})$ — степени полиномов $P(u) \equiv X(1,u)$ и $Q(u) \equiv$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (НШ-954.2008.1) и РФФИ (08-01-00346), НИИММ им. акад. В.И.Смирнова СПбГУ.

$Y(1, u)$ соответственно, 2) фиксированной парой (m, n), где $m \in \{0, \dots, \overline{m}\}$ — число различных вещественных корней полинома $P(u)$, $n \in \{0, \dots, \overline{n}\}$ — то же самое для полинома $Q(u)$, 3) фиксированной возрастающей последовательностью всех $m+n$ вещественных корней полиномов P, Q.

В III части мы используем понятия и обозначения, введенные в частях I, II, и полученные в них результаты, сопровождая их ссылками вида: номер части, точка, номер объекта из нее. Например, § I.1, формула (I.1.2), теорема II.3.1. В частности, считаем сохраняющим силу соглашение I.0.1, т. е. считаем, что в системе (0.1) первый ненулевой из коэффициентов $p_3, \dots, p_0$ и первый ненулевой из коэффициентов c, b, a — положительны.

Топологический тип точки O мы описываем ее A-схемой (словом A_O из букв N, S, порядок следования которых в нем совпадает с круговым порядком следования пучков O-кривых системы (0.1) типов N (узловой, открытый) и S (седловой, состоящий из одной O-кривой) при обходе точки O в $(+)$-направлении, начиная с некоторого из них), а тип любой БО-точки — ее $A^{\pm}$-схемами (см. определение II.2.2, ниже оно воспроизводится).

Как следует из теоремы II.2.1, БО-точками системы (0.1) являются: 1) особые точки системы (II.2.1) $O_0(0,0)$ и $O_i(u_i, 0)$, $P(u_i) = 0$, $i = \overline{1, m}$; при $p_0 = 0$ $\exists\, i_0 \in \{1, \dots, m\}$: $u_{i_\circ} = 0$, т. е. $O_{i_\circ} = O_0$; 2) особая точка $O^0(0,0)$ системы (II.2.2); она является особой, если $p_3 = 0$. Здесь (II.2.1) и (II.2.2) — системы, полученные из (0.1) с помощью замен Пуанкаре $x = \dfrac{1}{z}$, $y = \dfrac{u}{z}$ и $y = \dfrac{1}{z}$, $x = \dfrac{v}{z}$ и замены $dt = -z^2\, d\tau$ [4, § 13].

$A^{+(-)}$-схема произвольной БО-точки O' есть слово $A^{+(-)}_{O'}$ из букв $N\,S$, фиксирующее порядок следования пучков типов N, S O'-кривых системы (II.2.1) или (II.2.2), примыкающих к точке O' из области $z > 0$ $(z < 0)$, при полуобходе точки O' в этой области в $+$- направлении по u. Ниже для $A^{\pm}$-схем любой БО-точки O_i, $i \in \{0, \dots, m\}$, мы используем обозначения $A^{+(-)}_i := A^{+(-)}_{O_i}$.

Замечание 0. 2. Если $P(0) \neq 0$, то $A^{+(-)}_0 = N(N)$. Это следует из таблицы II.3.1, случай $k = 0$.

Учитывая это замечание, далее при выписывании $A^{+(-)}$-схем точек O_i, $i = \overline{0, m}$, мы будем делать это лишь для точек O_i, $i = \overline{1, m}$, различая для каждой из них случаи $u_i = 0$ и $u_i \neq 0$.

§ 6. $\mathbf{p_3 > 0}$, $\mathbf{c > 0}$.

Для системы (0.1) при этих условиях 1) $(\overline{m}, \overline{n}) = (3, 2)$, 2) $m \in \{3, 2, 1\}$, $n \in \{2, 1, 0\} \Rightarrow$ возможны девять различных пар $(m,\ n)$; при любой из них система имеет конечную особую точку $O(0, 0)$ и БО-точки $O_i(u_i, 0)$, $i = \overline{0, m}$.

6. 1. (m,n) = (3,2):
$P(u) = p_3(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$, $u_1 < u_2 < u_3$, $Q(u) = c(u-q_1)(u-q_2)$, $q_1 < q_2$, $u_i \neq q_j\ \forall\forall\ i, j$. Для корней u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, полиномов P, Q при упорядочении всех их по возрастанию возможны десять различных случаев последования. Но среди них есть четыре пары случаев-перевертышей, в каждой из которых один случай может быть сведен к другому.

Определение 6. 1. Два случая последования корней полиномов P, Q, упорядоченных по возрастанию, которые при замене в (0.1) $(t, y) \to (-t, -y)$ (при этой замене условия § 6 не нарушаются) и изменении нумераций корней u_i, $i = \overline{1, 3}$, и q_j, $j = 1,\ 2$, на обратные переходят друг в друга, будем называть *взаимно обратными относительно данной замены.*

Нетрудно убедиться в том, что из упомянутых десяти, например, следующие шесть случаев последования корней полиномов P, Q попарно независимы в смысле определения 6.1: 1) $u_1 < u_2 < u_3 < q_1 < q_2$, 2) $u_1 < q_1 < q_2 < u_2 < u_3$, 3) $u_1 < q_1 < u_2 < u_3 < q_2$, 4) $q_1 < u_1 < u_2 < u_3 < q_2$, 5) $u_1 < u_2 < q_1 < u_3 < q_2$, 6) $u_1 < q_1 < u_2 < q_2 < u_3$, а для каждого из четырех остальных случаев существует взаимно обратный среди этих шести, к которому он и сводится указанной заменой. Поэтому далее в п. 6.1 мы рассматриваем лишь случаи 1)–6) последования корней P, Q. Для каждого из них, как следует из теорем I.1.1, II.3.1 и II.4.1, A-схема точки O и $A^{\pm}$-схемы точек O_i, $i = \overline{1, 3}$, имеют вид, указанный в таблицах 6.1_1 и 6.1_2.

Таблица 6.1_1. A-схемы особой точки O к п. 6.1.

Случай	A_O
$1, 2, 3$	$S^-SNS^+NS = SSNS$
$4, 5$	S^-NNS^+SS
6	S^-SSS^+NN

Таблица 6.1_2. $A^{\pm}$-схемы БО-точек O_i, $i=\overline{1,3}$, к п. 6.1.

Слу-чай	$A_1^{+(-)}$		$A_2^{+(-)}$		$A_3^{+(-)}$	
	$u_1=0$	$u_1\neq 0$	$u_2=0$	$u_2\neq 0$	$u_3=0$	$u_3\neq 0$
1, 2	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
3	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$
4	$(O)\,NN$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$
5	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$
6	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$

Замечание 6.1. В слове A_O в таблице 6.1_1 верхний индекс $-(+)$ при букве S или N означает следующее: ей соответствует пучок, образованный O-кривыми системы (0.1), примыкающими к точке O по направлению $x=0$, $y<0$ ($x=0$, $y>0$), а буквам без индексов, непосредственно следующим за нею, соответствуют пучки, образованные O_+-кривыми (O_--кривыми), т. е. O-кривыми, примыкающими к O из области $x>0$ ($x<0$).

6.2. (m,n) = (3,1): $P(u)$ имеет тот же вид, что и в п. 6.1, $Q(u)=c(u-q)^2$, $u_i\neq q$, $i=\overline{1,3}$. Для корней u_1, u_2, u_3, q полиномов P, Q возможны четыре случая последования по возрастанию, которые образуют две пары случаев, взаимно обратных в смысле определения 6.1. Независимыми в этом смысле являются, например, случаи: 1) $u_1<u_2<u_3<q$, и 2) $u_1<u_2<q<u_3$. Для каждого из них, как следует из теорем I.1.2, II.3.1 и II.4.1, схемы A_O и $A_i^{\pm}$, $i=\overline{1,3}$, имеют вид, указанный в следующей таблице.

Таблица 6. 2. A-схемы особых точек O и O_i, $i=\overline{1,3}$, к п. 6.2.

Слу-чай	A_O			$A_i^{+(-)}$, $i=\overline{1,3}$
	$q<0$	$q=0$	$q>0$	
1	S^-S^+NS	$S^-SNS^+NS=SSNS$	S^-SNS^+	табл. 6.1_2, строка 1
2	S^-NSS^+	$S^-NSS^+SN=NSSS$	S^-S^+SN	табл. 6.1_2, строка 1

6. 3. (m,n) = (3,0): $P(u)$ имеет тот же вид, что и в п. 6.1, $Q(u)>0$ $\forall\, u\in\mathbb{R}$. Согласно теоремам I.1.3, II.3.1 и II.4.1 A-схемы особых точек O и O_i, $i=\overline{1,3}$, имеют вид, указанный в таблице 6.3.

Таблица 6. 3. A-схемы особых точек O и O_i, $i=\overline{1,3}$, к п. 6.3.

A_O	$A_i^{+(-)}$, $i=\overline{1,3}$
S^-S^+	табл. 6.1_2, строка 1

6. 4. (m,n) = (2,2): $P(u)=p_3(u-u_1)^{k_1}(u-u_2)^{k_2}$, $u_1<u_2$, а) $k_1=1$, $k_2=2$ или б) $k_1=2$, $k_2=1$; $Q(u)$ имеет тот же вид, что и в п. 6.1, $u_i\neq q_j$ $\forall\forall\ i,j$.

Для корней u_1, u_2, q_1, q_2 полиномов P, Q возможны шесть различных случаев последования по возрастанию:
1) $u_1<u_2<q_1<q_2$, 2) $u_1<q_1<q_2<u_2$, 3) $u_1<q_1<u_2<q_2$, 4) $q_1<q_2<u_1<u_2$, 5) $q_1<u_1<q_2<u_2$, 6) $q_1<u_1<u_2<q_2$. Для каждого из них возможны подслучаи а) и б). Однако для любого из подслучаев 1б)–6б) существует взаимно обратный в смысле определения 6.1 среди подслучаев 1а)–6а). Поэтому мы рассматриваем здесь лишь последние. Для каждого из них согласно теоремам I.1.1, II.3.1 и II.4.1 A-схемы особых точек O и O_i, $i=1,2$, имеют вид, указанный в таблице 6.4.

Таблица 6.4. A-схемы особых точек

O и O_i, $i = 1, 2$, к п. 6.4 (для подслучаев 1а)–6а))

Случай	A_O	$A_1^{+(-)}$		$A_2^{+(-)}$		
		$u_1 = 0$	$u_1 \neq 0$	$u_2 = 0$	$u_2 < 0$	$u_2 > 0$
1, 2	$S^-SNS^+NS = SSNS$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$
3	$S^-SNS^+NS = SSNS$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$N\,(N)$	$NS\,(O)$	$O\,(SN)$
4	$S^-NSS^+SN = NSSS$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$
5	S^-NNS^+SS	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$
6	S^-NNS^+SS	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$N\,(N)$	$NS\,(O)$	$O\,(SN)$

6.5. (m,n) = (2,1): $P(u)$ имеет тот же вид, что и в п. 6.4, $Q(u)$ — тот же, что и в п. 6.2. Для корней u_1, u_2, q полиномов P, Q возможны три случая последования по возрастанию: 1) $u_1 < u_2 < q$, 2) $u_1 < q < u_2$, 3) $q < u_1 < u_2$. Для каждого из них, как и в п. 6.4, возможны подслучаи а) и б). Подслучаи 1б)–3б) — взаимно обратны в смысле определения 6.1 подслучаям 3а)–1а) соответственно. Для подслучаев же 1а)–3а) согласно теоремам I.1.2, II.3.1 и II.4.1 A-схемы особых точек O и O_i, $i = 1, 2$, имеют вид, указанный в таблице 6.5.

Таблица 6.5. A-схемы особых точек O и $O_{1,2}$ к п. 6.5

Случай	A_O	$A^{+(-)_i}$, $i = \overline{1,2}$
1а), 2а)	табл. 6.2, строка 1	табл. 6.4, строка 1
3а)	табл. 6.2, строка 2	табл. 6.4, строка 1

6.6. (m,n) = (2,0): $P(u)$ имеет тот же вид, что и в п. 6.4, $Q(u)$ — тот же, что и в п. 6.3.

Для корней u_1, u_2 полинома P, возможны случаи а) и б). Для любого из них согласно теоремам I.1.3, II.3.1 и II.4.1 искомые A-схемы особых точек O и O_i, $i = 1, 2$, имеют вид, указанный в таблице 6.6.

Таблица 6.6. A-схемы особых точек O и $O_{1,2}$ к п. 6.6

Случай	A_O	$A_1^{+(-)}$			$A_2^{+(-)}$		
		$u_1 = 0$	$u_1 < 0$	$u_1 > 0$	$u_2 = 0$	$u_2 < 0$	$u_2 > 0$
а	S^-S	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$N\,(S)$	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$
б	S^-S	$N\,(N)$	$NS\,(O)$	$O\,(SN)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$N\,(S)$

6.7. (m,n) = (1,2): $P(u) = p_3(u - u_1)^3$ или $P(u) = p_3(u - u_1)P_1(u)$, $P_1(u) > 0\ \forall\, u \in \mathbb{R}$, $Q(u)$ как и в п. 6.1.

Для корней u_1, q_1, q_2 полиномов P, Q возможны случаи последования по возрастанию: 1) $u_1 < q_1 < q_2$, 2) $q_1 < u_1 < q_2$, 3) $q_1 < q_2 < u_1$. В любом из них A-схемы особых точек O и O_1 согласно теоремам I.1.1, II.3.1 и II.4.1 имеют вид, указанный в таблице 6.7, строки 1, 2, 3.

6.8. (m,n) = (1,1): $P(u)$ как в п. 6.7, $Q(u)$ как в п. 6.2.

Для корней u_1, q полиномов P, Q возможны случаи: 1) $u_1 < q$, 2) $q < u_1$. В этих случаях согласно теоремам I.1.2, II.3.1 и II.4.1 A-схемы особых точек O и O_1 имеют вид, указанный в таблице 6.7, строки 4 и 5.

6.9. (m,n) = (1,0): $P(u)$ как в п. 6.7, $Q(u)$ как в п. 6.3. Согласно теоремам I.1.3, II.3.1 и II.4.1 A-схемы особых точек O и O_1 имеют вид, указанный в таблице 6.7, строка 6.

Таблица 6.7. A-схемы особых точек O и O_1 к п. 6.7–6.9.

(m,n)	Случай	A_O	$A_1^{+(-)}$	
			$u_1 = 0$	$u_1 \neq 0$
$(1,2)$	1	$S^-SNS^+NS = SSNS$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
	2	S^-NNS^+SS	$O\,(NN)$	$S\,(N)$
	3	$S^-NSS^+SN = NSSS$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
$(1,1)$	1	табл. 6.2, строка 1	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
	2	табл. 6.2, строка 2	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
$(1,0)$		S^-S^+	$NN\,(O)$	$N\,(S)$

§ 7. $\mathbf{p_3 = 0}$, $\mathbf{p_2 > 0}$, $\mathbf{c > 0}$.

Для системы (0.1) при указанных условиях 1) $(\overline{m}, \overline{n}) = (2,2)$, 2)$m, n \in \{2,1,0\} \Rightarrow$ возможны девять различных пар $\{m,\, n\}$; при любой из них система (0.1) имеет особые точки: O, O_i, $i = \overline{0, m}$, и O^0.

Замечание 7.0. При условиях § 7 $A_{O^0}^{+(-)} = S(N)$. Это следует из таблицы II.5.1, строка 1.

Учитывая замечания 0.2 и 7.0, мы в § 7 для каждой пары (m,n) будем выписывать лишь A-схемы особых точек O и O_i, $i = \overline{1, m}$.

7. 1. (m,n) = (2,2): $P(u) = p_2(u-u_1)(u-u_2)$, $u_1 < u_2$, $Q(u)$ как в п. 6.1, $u_i \neq q_j$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Для корней u_1, u_2, q_1, q_2 полиномов P, Q возможны шесть различных случаев последования по возрастанию. Среди них есть две пары случаев взаимно обратных в смысле следующего определения.

Определение 7.1. Получается из определения 6.1, если использовать в нем вместо замены $(t, y) \to (-t, -y)$ замену $x \to -x$ (относительно которой услович § 7 инвариантны).

Нетрудно убедиться в том, что следующие случаи последования корней полиномов P, Q попарно независимы в смысле определения 7.1: 1) $u_1 < u_2 <$

$q_1 < q_2$, 2) $u_1 < q_1 < q_2 < u_2$, 3) $u_1 < q_1 < u_2 < q_2$, 4) $q_1 < u_1 < u_2 < q_2$. Для каждого из них согласно теоремам I.1.1, II.3.1 и II.4.1 A-схема точки O и $A^{\pm}$-схемы точек O_i, $i = 1, 2$, имеют вид, указанный в таблице 7.1.

Таблица 7.1. A-схемы особых точек O и O_i, $i = 1, 2$, к п. 7.1.

Случай	A_O	$A_1^{+(-)}$		$A_2^{+(-)}$	
		$u_1 = 0$	$u_1 \neq 0$	$u_2 = 0$	$u_2 \neq 0$
1	$S^-SNS^+NS = SSNS$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
2	$S^-NSS^+SN = NSSS$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
3	S^-NNS^+SS	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$
4	$S^-SNS^+NS = SSNS$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$

7.2. (m,n) = (2,1): $P(u)$ как в п. 7.1, $Q(u)$ как в п. 6.2, $u_i \neq q$, $i = 1, 2$. Для корней u_1, u_2, q полиномов P, Q возможны три случая последования по возрастанию: 1) $u_1 < u_2 < q$, 2) $u_1 < q < u_2$, 3) $q < u_1 < u_2$. Для любого из них из них согласно теоремам I.1.2, II.3.1 и II.4.1 A-схемы точек O и $O_{1,2}$ имеют вид, указанный в таблице 7.2, строки 1,2.

7.3. (m,n) = (2,0): $P(u)$ как в п. 7.1, $Q(u)$ как в п. 6.3. Как следует из теорем I.1.3, II.3.1 и II.4.1, A-схемы особых точек O и $O_{1,2}$ имеют вид, указанный в таблице 7.2, строка 3.

Таблица 7.2. A-схемы особых точек O и $O_{1,2}$ к пп. 7.2, 7.3.

(m,n)	Случай	A_O	$A_1^{+(-)}$		$A_2^{+(-)}$	
			$u_1 = 0$	$u_1 \neq 0$	$u_2 = 0$	$u_2 \neq 0$
(2,1)	1, 3	табл. 6.2, случай 1	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
	2	табл. 6.2, случай 2	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
(2,0)		S^-S^+	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$

7. 4. (m,n) = (1,2): $P(u) = p_2(u - u_1)^2$, $Q(u)$ имеет тот же вид, что и п. 6.1, $u_1 \neq q_1$, q_2. Для корней u_1, q_1, q_2 полиномов P, Q возможны случаи последования по возрастанию: 1) $u_1 < q_1 < q_2$, 2) $q_1 < u_1 < q_2$, 3) $q_1 < q_2 < u_2$. Для каждого, как следует из теорем I.1.1, II.3.1 и II.4.1 A-схемы особых точек O и O_1 имеют вид, указанный в таблице 7.3, строки 1,2.

7. 5. (m,n) = (1,1): $P(u)$ как в п. 7.4, $Q(u)$ как в пп. 6.2, $u_1 \neq q$. Для корней u_1, q полиномов P, Q возможны случаи: 1) $u_1 < q$, 2) $q < u_1$. Для любого из них, как следует из теорем I.1.2, II.3.1 и II.4.1, A-схемы точек O и O_1 имеют вид, указанный в таблице 7.3, строка 3.

7. 6. (m,n) = (1,0): $P(u)$ как в п. 7.4, $Q(u)$ как в пп. 6.3. Из теорем I.1.2, II.3.1 и II.4.1 следует, что A-схемы особых точек O и O_1 имеют вид, указанный в таблице 7.3, строка 4.

Таблица 7. 3. A-схемы особых точек O и O_1 к пп. 7.4–7.6.

(m,n)	Случай	A_O	$A_1^{+(-)}$		
			$u_1 = 0$	$u_1 < 0$	$u_1 > 0$
$(1,2)$	1,3	табл. 6.7, строка 1	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$
	2	табл. 6.7, строка 1	$N\,(N)$	$NS\,(O)$	$O\,(SN)$
$(1,1)$	1,2	табл. 6.2, строка 1	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$
$(1,0)$		S^-S^+	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$

7. 7. (m,n) = (0,2), (0,1) или (0,0): $P(u) > 0\ \forall\, u \in \mathbb{R}$, $Q(u)$ как в п. 6.1, 6.2 или 6.3 соответственно. $\forall\,(m,n)$ система (0.1) имеет особые точки O, O_0 и O^0. Согласно теоремам I.1.1 – I.1.3 A-схемы особой точки O имеют вид, указанный в таблице 7.4. $A^{\pm}$-схемы БО-точек O_0 и O^0 даны в замечаниях 0.2 и 7.0.

Таблица 7.4. A-схемы особой точки O к п. 7.7.

(m,n)	A_O
$(0,2)$	$S^-SNS^+NS = SSNS$
$(0,1)$	табл. 6.2, случай 1
$(0,0)$	S^-S^+

§ 8. $\mathbf{p_3 > 0,\ c = 0,\ b > 0.}$

При указанных условиях 1) $(\overline{m},\overline{n}) = (3,1), 2) m \in \{3,2,1\}$, $n = 1 \Rightarrow$ возможны три различные пары (m,n); для любой из них система (0.1) имеет особые точки O и O_i, $i = \overline{0,m}$. Выпишем их A-схемы (с учетом замечания 0.2).

8. 1. (m,n) = (3,1): $P(u)$ как п. 6.1, $Q(u) = b(u-q)$, $u_i \neq q$, $i = \overline{1,3}$. Для корней u_1, u_2, u_3, q полиномов P, Q возможны четыре случая последования по возрастанию: 1) $u_1 < u_2 < u_3 < q$, 2) $u_1 < u_2 < q < u_3$, 3) $u_1 < q < u_2 < u_3$ и 4) $q < u_1 < u_2 < u_3$. В каждом из них согласно теоремам I.1.4, II.3.1 и II.4.1 A-схемы особых точек O и O_i, $i = \overline{1,3}$, имеют вид, указанный в таблице 8.1.

Таблица 8.1. A-схемы особых точек O и O_i, $i=\overline{1,3}$, к п. 8.1.

Случай	A_O	$A_1^{+(-)}$		$A_2^{+(-)}$		$A_3^{+(-)}$	
		$u_i=0$	$u_1\neq 0$	$u_2=0$	$u_2\neq 0$	$u_3=0$	$u_3\neq 0$
1	NS^+S^+S	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	N (S)	$O\,(NN)$	$S\,(N)$
2	SS^+S^+N	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
3	NS^+S^+S	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
4	SS^+S^+N	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$

8. 2. (m,n) = (2,1): $P(u)$ как п. 6.4, $Q(u)$ как п. 8.1. Для корней u_1, u_2, q полиномов P, Q возможны те же случаи последования 1)–3), что и в п. 6.5, а для каждого из них те же подслучаи а) и б). Как следует из теорем I.1.4, II.3.1 и II.4.1, A-схемы особых точек O и O_i, $i=1,2$, для каждого из подслучаев 1а)–3а) имеют вид, указанный в таблице 8.2.а, а для каждого из подслучаев 1б)–3б) — вид, указанный в таблице 8.2.б.

Таблица 8.2.а. A-схемы особых точек O и $O_{1,2}$ к п. 8.2.

Подслучай	A_O	$A_1^{+(-)}$		$A_2^{+(-)}$		
		$u_1=0$	$u_1\neq 0$	$u_2=0$	$u_2<0$	$u_2>0$
1а)	NS^+S^+S	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$N\,(N)$	$NS\,(O)$	$O\,(SN)$
2а)	NS^+S^+S	$O\,(NN)$	$S\,(N)$	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$
3а)	SS^+S^+N	$NN\,(O)$	$N\,(S)$	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$

Таблица 8.2.б. A-схемы особых точек O и $O_{1,2}$ к п. 8.2.

Под-случай	A_O	$A_1^{+(-)}$			$A_2^{+(-)}$	
		$u_1 = 0$	$u_1 < 0$	$u_1 > 0$	$u_2 = 0$	$u_2 \neq 0$
1б)	NS^+S^+S	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$	$O\,(NN)$	$S\,(N)$
2б)	SS^+S^+N	$N\,(N)$	$O\,(NS)$	$SN\,(O)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$
3б)	SS^+S^+N	$N\,(N)$	$NS\,(O)$	$O\,(SN)$	$NN\,(O)$	$N\,(S)$

8.3. (m,n) = (1,1): $P(u)$ как п. 6.7, $Q(u)$ как п. 8.1. Для корней u_1, q полиномов P, Q возможны случаи: 1) $u_1 < q$, 2) $q < u_1$. Как следует их теорем I.1.4, II.3.1 и II.4.1, A-схемы точек O и O_1 в случае 1) имеют вид, указанный в таблице 8.2.а, строка 1, а в случае 2) — вид, указанный там же, строка 3.

§ 9. $\mathbf{p_3 > 0,\ c = b = 0,\ a > 0}$.

Для системы (0.1) при указанных условиях 1) $(\overline{m}, \overline{n}) = (3,0)$; 2) $m \in \{3,2,1\}$, $n = 0 \Rightarrow$ возможны три различные пары (m,n); при любой из них система имеет особые точки: O и O_i, $i = \overline{0,m}$. Выпишем их A-схемы, учитывая при этом замечание 0.2.

9.1. (m,n) = (3,0): $P(u)$ как п. 6.1, $Q(u) \equiv a > 0\ \forall\, u$.

9.2. (m,n) = (2,0): $P(u)$ как п. 6.4, $Q(u) \equiv a > 0$.

9.3. (m,n) = (1,0). $P(u)$ как п. 6.7, $Q(u) \equiv a > 0$.

Как следует из теорем I.1.5, II.3.1 и II.4.1, для любого из этих случаев A-схемы особых точек O и O_i, $i = \overline{1,m}$, имеют вид, указанный в таблице 9.1.

Таблица 9.1. A-схемы особых точек O и O_i, $i = \overline{1,m}$, к §. 9.

(m,n)	Слу-чай	A_O	$A_i^{+(-)}$, $i = \overline{1,m}$,
$(3,0)$		S^-S^+	табл. 6.1_2, строка 1
$(2,0)$	а б	S^-S^+ S^-S^+	табл. 8.2.а, строка 3 табл. 8.2.б, строка 3
$(1,0)$		S^-S^+	табл. 6.7, строка 1

§ 10. $\mathbf{p_3 = p_2 = 0,, p_1 > 0, c > 0}$.

Для системы (0.1) при этих условиях 1) $(\overline{m}, \overline{n}) = (1,2)$; 2) $m = 1$, $n \in \{2,1,0\} \Rightarrow$ возможны три различные пары (m,n); при любой из них система имеет особые точки: O, O_i, $i = 0,1$, O^0. $A^{\pm}$-схемы точки O_0 в случае $O_1 \neq O_0$ доставляет замечание 0.2, $A^{\pm}$-схемы точки O^0 — следующее замечание.

Замечание 10.1. При условиях §10 $A_{O^0}^{+(-)} = S_0^+ N\,(NS_0^-)$, где $S^{+(-)}$: $v = 0$, $z > 0$ ($v = 0$, $z < 0$).

10.1. (m,n) = (1,2): $P(u) = p_1(u - u_1)$, $Q(u)$ как в п. 6.1.

10.2. (m,n) = (1,1): $P(u) = p_1(u - u_1)$, $Q(u)$ как в п. 6.2.

10.3. (m,n) = (1,0): $P(u) = p_1(u - u_1)$, $Q(u)$ как в п. 6.3.

Для этих случае справедливо сказанное соответственно в пп. 6.7–6.9. A-схемы особых точек O и O_1 имеют вид, указанный в таблице 6.7.

Цель данной статьи, сформулированная во введении, достигнута. Используя аккумулированную здесь информацию, можно для любой заданной системы вида (0.1) построить ее глобальнай (в круге Пуанкаре $\overline{\Omega}$) фазовый портрет и, в частности, выяснить для нее разбиение круга $\overline{\Omega}$ на элементарные инвариантные ячейки (с одним источником и с одним стоком каждая).

Литература

1. Андреев А. Ф. Введение в локальную качественную теорию диффе-

ренциальных уравнений. СПб.: Изд. С.-Петербург. ун-та, 2003. 160 с.

2. А н д р е е в А. Ф., А н д р е е в а И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2007, N 4. С. 17–26.

3. А н д р е е в А. Ф., А н д р е е в а И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. II // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2008, N 1. С. 1–10.

4. А н д р о н о в А. А. и др. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.

Андреев Алексей Федорович — профессор кафедры дифференциальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета;

Дом. телефон: 271–64–27
раб. телефон: 428–69–59, местн. 3059

Андреева Ирина Алексеевна — доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета;

Дом. телефон: 271–64–27
E-mail: irandr@inbox.ru