ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2009
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ФАЗОВЫЕ ПОТОКИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КРУГЕ ПУАНКАРЕ. IV$_1$ [1]

А. Ф. Андреев, И. А. Андреева [2]

Продолжаем начатое в одноименных статьях, части I,II,III [2,3,4], исследование поведения траекторий динамической системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_0x^3 + p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3 \equiv X(x,y),\\ \frac{dy}{dt} &= ax^2 + bxy + cy^2 \equiv Y(x,y), \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $p_0, \ldots, p_3, a, b, c\,(\in \mathbb{R})$ — параметры, подчиненные лишь условию: формы $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ — взаимно просты. Исследование проводится методом отображения траекторий системы в круг Пуанкаре [5].

В части I [2] мы выявили все возможные для (0.1) топологические типы (Т-типы) ее конечной особой точки $O(0,0)$ и указали их коэффициентные критерии. В части II [3] сделано то же самое для каждой из ее бесконечно удаленных особых точек (БО-точек). В части III [4] для каждого случая системы (0.1), характеризующегося 1) фиксированной парой (m,n), где $m\,(n)$ — число прямых, на которых $\dot{x} = 0$ (соответственно $\dot{y} = 0$), и 2) фиксированным круговым порядком следования этих $m+n$ прямых при обходе точки

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (НШ-954.2008.1) и РФФИ (08-01-00346), НИИММ им. акад. В.И.Смирнова СПбГУ.

O в (+)-направлении, мы описали Т-типы всех существующих у нее в этом случае особых точек.

В настоящей IV части (которая в свою очередь будет состоять из нескольких частей) мы для каждого из рассмотренных в III части случаев строим (в описательной форме) фазовый портрет (ФП) системы в круге Пуанкаре $\bar{\Omega}$, если этот портрет имеет определенный вид, все возможные его варианты — в противном случае. В настоящей IV части мы по-прежнему считаем, что в системе (0.1) первое ненулевое из чисел $p_3, \ldots p_0$ и первое ненулевое число из чисел c, b, a положительны, а также используем понятия и обозначения, введенные в частях I–III, и полученные в них результаты.

§ 0. Методика исследования

0.1. Некоторые определения. Введем для системы (0.1) несколько новых понятий.

0.1.1. *Тoподинамический тип* (ТД-*тип*) *особой точки.* Для конечной особой точки $O(0,0)$ это понятие вводится так. Слово A_O, определяющее Т-тип точки O (см. часть I), т.е. слово из букв N, S, фиксирующее круговой порядок следования (при обходе точки O в +-направлении) пучков O-кривых системы узлового (N) и седлового (S) типов модифицируется: каждый из символов N, S в нем снабжается правым верхним индексом + или −, смотря по тому состоит ли соответствующий ему пучок из O^+-кривых или из O^--кривых. Получающееся при этом слово $\tilde{\mathrm{A}}_O$ трактуется как слово, определяющее топодинамический тип точки O, и называется ТД-*типом* этой *точки*, а каждый из его символов $N^\pm$, $S^\pm$ — ТД-*типом* соответствующего ему *пучка* O-кривых.

Для произвольной БО-точки это понятие вводится аналогично. Так, для любой БД-точки $O_i(u_i, 0)$, $u_i \in \mathbb{R}$, роль исходного слова A_O играют слова $\mathrm{A}_i^\pm$, определяющие Т-тип точки O_i (см. часть II [3]), роль $O^{+(-)}$-кривых — O_i-кривые, не лежащие на оси $z = 0$ и примыкающие к O_i с возрастанием t (с убыванием t). Получающиеся слова $\tilde{\mathrm{A}}_i^\pm$ и определяют ТД-тип точки O_i.

Для любой точки O_i нам будет полезна и модификация каждого из слов $\tilde{\mathrm{A}}_i^\pm$, состоящая в следующем: каждый из символов $N^\pm$, $S^\pm$ в нем дополняется еще и правым нижним индексом + (−), если соответствующий ему пучок O_i-кривых примыкает к точке O_i из области $u > u_i$ ($u < u_i$), где $u = \dfrac{y}{x}$. Для слов, полученных в результате этой модификации, сохраняются прежние обозначения и названия. Требующиеся для нее индексы имеются в таблицах части II [3].

0.1.2. *Бездорожная карта* (БД-*карта*) *системы.* Это графическая схема, которая строится следующим образом.

1) В круге $\bar{\Omega}$ изображается поле направлений системы: отмечаются ее особые точки, проводятся образы изоклин нуля и бесконечности ее траекторий, указываются стрелками направления векторного поля в областях между этими ≪изоклинами≫ и на границе Γ круга $\bar{\Omega}$ между БО-точками.

2) Возле каждой особой точки изображаются примыкающие к ней пучки полутраекторий системы с указанием их ТД-типов: каждый из пучков типа S^+ (S^-) изображается одной дугой со стрелкой. обращенной к точке (от точки), каждый из пучков типа N^+ (N^-) — двумя-тремя такими дугами. Для пучков БО-точек $O_i(u_i, 0)$ эти дуги располагаются в области, указываемой нижним индексом пучка, если таковой у него существует, симметрично относительно направления $u = u_i$ — в противном случае.

0.1.3. *Максимальная простая инвариантная ячейка* (МП-*ячейка*) *круга* Ω. Это инвариантная для системы область круга Ω, в которой поток системы имеет лишь один источник и лишь один сток и которая не является собственной подобластью другой такой области.

0.2. Программа исследования

Каждый из случаев системы (0.1), которые нам предстоит рассмотреть, мы изучаем по следующей общей программе.

0.2.1. Для фиксированного случая составляем перечень особых точек системы и выясняем ТД-тип каждой из них. Делаем это на основании результатов частей I, II [2,3] и оформляем в виде слова $\tilde{\mathrm{A}}_O$ и таблицы ТД-типов БО-точек.

Поскольку ТД-типы БО-точек зависят от знаков вещественных корней полиномов $P(u)$, $Q(u)$ (см. § 1), для каждого случая возникает ряд подслучаев и мы переходим к их поочередному исследованию.

0.2.2. Для фиксированного подслучая, используя ТД-типы особых точек системы, составляем перечень их сепаратрис и строим БД-карту системы. По ней выясняем глобальное (при всех t) поведение каждой из сепаратрис: для α (ω)-сепаратрисы особой точки ищем ее ω (α)-предельную точку.[3] При этом мы руководствуемся правилом, которое (в автодорожных терминах) формулируется так: начав движение от особой точки O' по ее α-сепаратрисе S^- и попав по выходе из малой окрестности этой точки на ≪бездорожье≫ (где

[3] См. ниже замечание 0.1 по этому поводу.

$\ll$дороги$\gg$ (сепаратрисы) нам и предстоит прочертить), двигаемся, воспринимая указатели направления векторного поля как предписывающие знаки, а символы ТД-типов пучков N^+, S^+ особых точек — как знаки разрешенных парковок; начав движение от точки O' по ее ω-сепаратрисе S^+, на $\ll$бездорожье$\gg$ двигаемся, воспринимая те же символы в противоположном смысле. Траектория этого движения от старта до парковки и есть возможное максимальное продолжение исходной сепаратрисы.

Если все сепаратрисы ведут себя однозначно (каждая из них имеет фиксированную для данного подслучая пару предельных точек), то они осуществляют вполне определенное разбиение круга Ω на МП-ячейки, число которых равно числу различных сепаратрис. В противном случае получается несколько вариантов такого разбиения.

0.2.3. Для данного подслучая составляем перечень МП-ячеек круга Ω, для каждой из них описываем границу, указываем источник и сток. Границу ячейки описываем словом из обозначений ее граничных сепаратрис, перечисленных в порядке, соответствующем положительному обходу ячейки по ее границе; участки границы, лежащие на Γ, опускаем.

0.2.4. Результат исследования любого подслучая каждого случая оформляем в виде таблицы, описывающей поведение сепаратрис и вид МП-ячеек для него (или в виде нескольких возможных ее вариантов). Эта таблица представляет собой описательный фазовый портрет (ФП) системы (0.1) в круге Пуанкаре $\bar{\Omega}$ для этого ее подслучая (или его вариант). Построить по ней обычный графический ФП системы и наоборот — минутное дело.

Замечание 0.1. Система (0.1) не имеет предельных циклов (ни обыкновенных, ни особых), ибо при наличии такого цикла для индекса Пуанкаре $I(O)$ единственной конечной особой точки O системы (0.1) должно было бы выполняться равенство $I(O) = 1$. В действительности же для системы (0.1) всегда $I(O) = 0$. Это на основании части I дает формула Бендиксона для индекса Пуанкаре изолированной особой точки O $I(O) = 1 + \frac{e-h}{2}$, где e — число эллиптических секторов, h — число гиперболических секторов, примыкающих к точке O [5. С.553].

§ 1. $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (\mathbf{3}, \mathbf{2})$.

Условия § 1 означают, что для системы (0.1)

$$P(u) \equiv X(1,u) = p_3(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3), \quad p_3 > 0, \quad u_1 < u_2 < u_3,$$

$$Q(u) \equiv Y(1,u) = c(u-q_1)(u-q_2), \quad c > 0, \quad q_1 < q_2, \quad u_i \neq q_j \ \forall\forall\ i,j.$$

При этих условиях образы изоклин бесконечности траекторий системы (0.1) в круге Пуанкаре $\bar{\Omega}$ суть его диаметры $O_i^- O_i^+$, $i = \overline{1,3}$, образы изоклин нуля — диаметры $Q_j^- Q_j^+$, $j = 1,2$, где $O_i^{+(-)}(u_i, 0)$, $Q_j^{+(-)}(q_j, 0) \in \Gamma^{+(-)} := \Gamma|_{x>0(x<0)}$. Ее особыми точками в $\bar{\Omega}$ (согласно частям I,II) являются конечная особая точка $O(0,0)$ и БО-точки $O_i^{\pm}(u_i, 0)$, $i = \overline{0,3}$, $u_0 = 0$.

При условиях § 1 для корней полиномов $P(u)$, $Q(u)$ существует шесть случаев последования по возрастанию, попарно независимых в смысле определения III.6.1, т. е. не переходящих друг в друга при замене в системе (0.1) $(t,y) \to (-t,-y)$ и изменении нумераций корней полиномов P, Q на обратные. Таковы, например, нижеследующие случаи 1.1–1.6. Их мы изучаем в этом параграфе по программе пункта 0.2.

1.1. Случай $\mathbf{u_1 < u_2 < u_3 < q_1 < q_2}$.

Для этого случая Т-тип особой точки O (согласно таблицам I.1 и III.6.1$_1$) описывает слово $\mathrm{A}_O = S_0 S_1 N S_2$, где S_0, S_1 и S_2 — седловые пучки O-кривых (сепаратрисы точки O), примыкающие к O по направлениям OO_-^0 ($x = 0$, $y < 0$), OQ_1^+ и OQ_2^- соответственно, N — узловой пучок O-кривых системы. Из этого следует: S_0 есть ω-сепаратриса точки O, S_1 и S_2 — ее α-сепаратрисы, а потому ТД-тип точки O описывается словом

$$\tilde{\mathrm{A}}_O = S_0^+ S_1^- N^- S_2^-. \tag{1.1.0}$$

Т-типы БО-точек O_i, $i = \overline{0,3}$, указаны в замечании III.0.2 и в таблице III.6.1$_2$. Но эти точки суть особые точки системы (II.2.1) на оси $z = 0$. Из рассмотрения этой системы и следует, что $\forall\, i \in \{0, \dots, 3\}$ ТД-тип точки O_i в зависимости от знака числа u_i описывается словами $\tilde{\mathrm{A}}_i^{\pm}$, указанными в таблице 1.1.0. Символы $N^{\pm}$, $S^{\pm}$ в этих словах, как правило, снабжены и нижними знаковыми индексами, смысл которых указан в п. 0.1.

Таблица 1.1.0. ТД-типы БО-точек в случае 1.1.

Подслучай		$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_2^{+(-)}$	$\tilde{A}_3^{+(-)}$
1	$0 < u_1$	$N_-^-\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$	$S_-^+\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
2	$u_1 = 0$	$N_-^-\,N_+^+\,(\emptyset)$	–	$S_-^+\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
3	$u_1 < 0 < u_2$	$N_+^+\,(N_-^+)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$S_-^+\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
4	$u_2 = 0$	$\emptyset\,(N_-^+\,N_+^-)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	–	$N_+^+\,(S_-^-)$
5	$u_2 < 0 < u_3$	$N_-^-\,(N_+^-)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$S_+^-\,(N_-^+)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
6	$u_3 = 0$	$N_-^-\,N_+^+\,(\emptyset)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$S_+^-\,(N_-^+)$	–
7	$u_3 < 0 < q_1$	$N_+^+\,(N_-^+)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$S_+^-\,(N_-^+)$	$N_-^-\,(S_+^+)$
8	$q_1 \leq 0$	$N^+\,(N^+)$	$N_-^-\,S_+^+$	$S_+^-\,(N_-^+)$	$N_-^-\,(S_+^+)$

Как видно из таблицы 1.1.0, в случае 1.1 мы различаем восемь подслучаев с различными наборами ТД-типов БО-точек в любых двух из них. Реализуем для каждого из этих восьми подслучаев пп. 2–4 программы 0.2. Для этого введем одно новое обозначение.

Пусть $\tilde{S}_i^{+(-)} := S_{O_i^{+(-)}}$ — сепаратриса БО-точки $O_i^{+(-)}$, $i = \overline{1,3}$.

Для любого из подслучаев $1, 3, 5, 7, 8$ список сепаратрис особых точек имеет вид:

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \tilde{S}_2^+,\ \tilde{S}_1^-,\ \tilde{S}_3^-, \tag{1.1.1}$$

в подслучаях $2, 4$ и 6 одна из них отсутствует. Как показывает дальнейшее исследование, возможно совпадение некоторых двух из сепаратрис (1.1.1).

Подслучай 1.1.1: $0 < u_1$. В этом подслучае любая $\alpha\,(\omega)$-сепаратриса любой особой точки системы (0.1) имеет определенную $\alpha\,(\omega)$-предельную точку (ведет себя однозначно), все сепаратрисы (1.1.1) различны и разбивают круг Ω на МП-ячейки Ω_i, $i = \overline{1,6}$. Этот общий вывод конкретизирует таблица 1.1.1.

Таблица 1.1.1. ФП для подслучая $0 < u_1$.

Столбец 1 / Строка	2 S	3 $\alpha(S) \to \omega(S)$	4 Ω_i	5 $\partial\Omega_i$	6 Источник $\to$ Сток
1	S_0	$O_0^+ \to O$	Ω_1	$S_1 S_0 \tilde{S}_2^+$	$O_0^+ \to O_3^+$
2	$\tilde{S}_2^+$	$O_0^+ \to O_2^+$	Ω_2	$\tilde{S}_2^+$	$O_0^+ \to O_1^+$
3	S_1	$O \to O_3^+$	Ω_3	$S_2 S_1$	$O \to O_3^+$
4	S_2	$O \to O_3^+$	Ω_4	$S_0 S_2 \tilde{S}_3^-$	$O_0^+ \to O_3^+$
5	$\tilde{S}_3^-$	$O_3^- \to O_3^+$	Ω_5	$\tilde{S}_3^- \tilde{S}_1^-$	$O_2^- \to O_3^+$
6	$\tilde{S}_1^-$	$O_1^- \to O_3^+$	Ω_6	$\tilde{S}_1^-$	$O_0^- \to O_3^+$

Замечание 1. 1. Ниже в каждой из таблиц, описывающих ФП системы, в целях экономии места мы опускаем "шапку таблицы"(которая содержит нумерацию и названия столбцов), ибо она стандартна.

Подслучай 1.1.3: $u_1 < 0 < u_2$. В этом подслучае поведение сепаратрис S_2, $\tilde{S}_1^-$ и $\tilde{S}_3^-$ неоднозначно: они по одному разу пересекают полуось $y = 0$, $x < 0$, причем, если это происходит при значениях x, скажем, x_2, x_1^- и x_3^- соответственно, то $x_3^- < x_2$, для x_1^- возможно любое из следующих равенств–неравенств: 1) $x_1^- < x_3^-$, 2) $x_1^- = x_3^-$, 3)$x_3^- < x_1^- < x_2$, 4) $x_1^- = x_2$, 5) $x_2^- < x_1^-$, а каждому из последних пяти равенств–неравенств соответствует свой определенный вариант взаимного расположения сепаратрис (1.1.1). Следовательно, подслучай 1.1.3 распадается на подподслучаи 1.1.3$_k$, $k = \overline{1,5}$. Для любого из них ФП описывает таблица с тем же номером.

Таблица 1.1.3$_1$. ФП для подподслучая $x_1^- < x_3^-$.

1–5	Как в таблице 1.1.1 с заменами $O_0^+ \leftrightarrow O_1^+$				
6	$\tilde{S}_1^-$	$O_2^- \to O_1^-$	Ω_6	$\tilde{S}_1^-$	$O_2^- \to O_0^-$

Таблица 1.1.3$_3$. ФП для подподслучая $x_3^- < x_1^- < x_2$.

1	S_0	$O_1^+ \to O$	Ω_1	$S_0\tilde{S}_2^+S_1$	$O_1^+ \to O_3^+$
2	$\tilde{S}_2^+$	$O_1^+ \to O_2^+$	Ω_2	$\tilde{S}_2^+$	$O_1^+ \to O_0^+$
3	S_1	$O \to O_3^+$	Ω_3	S_1S_2	$O \to O_3^+$
4	S_2	$O \to O_3^+$	Ω_4	$S_2\tilde{S}_1^-S_0$	$O_1^+ \to O_3^+$
5	$\tilde{S}_1^-$	$O_1^+ \to O_1^-$	Ω_5	$\tilde{S}_1^-\tilde{S}_3^-$	$O_1^+ \to O_0^-$
6	$\tilde{S}_3^-$	$O_3^- \to O_0^-$	Ω_6	$\tilde{S}_3^-$	$O_2^- \to O_0^-$

Таблица 1.1.3$_5$. ФП для подподслучая $x_2 < x_1^-$.

1,2,6	См. таблицу 1.1.3$_3$.				
3	S_1	$O \to O_3^+$	Ω_3	$S_1\tilde{S}_1^-$	$O \to O_3^+$
4	$\tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_4	$\tilde{S}_1^-S_2$	$O \to O_0^-$
5	S_2	$O \to O_0^-$	Ω_5	$S_2\tilde{S}_3^-S_0$	$O_1^+ \to O_0^-$

Таблица 1.1.3$_2$. ФП для подподслучая $x_1^- = x_3^-$.

1–3	См. таблицы 1.1.3$_{1,3}$.				
4	S_2	$O \to O_3^+$	Ω_4	$S_2\tilde{S}_1^-S_0$	$O_1^+ \to O_3^+$
6	$\tilde{S}_3^- \equiv \tilde{S}_1^-$	$O_3^- \to O_1^-$	Ω_6	$\tilde{S}_1^-$	$O_2^- \to O_0^+$

Таблица 1.1.3$_4$. ФП для подподслучая $x_1^- = x_2$.

1,2,6	См. таблицы 1.1.3$_{3,5}$				
3	S_1	$O \to O_3^+$	Ω_3	S_1S_2	$O \to O_3^+$
5	$S_2 \equiv \tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_5	$S_2\tilde{S}_3^-S_0$	$O_1^+ \to O_0^-$

В подподслучае 1.1.3$_2$ $\Omega_5 = \emptyset$, в подподслучае 1.1.3$_4$ $\Omega_4 = \emptyset$.

Подслучай 1.1.5: $u_2 < 0 < u_3$. Для сепаратрис $S_2, \tilde{S}_1^-$ и $\tilde{S}_3^-$ возможны те же пять вариантов взаимного расположения, что и в подслучае 1.1.3 $\Rightarrow$ подслучай 1.1.5 также распадается на пять подподслучаев: 1.1.5$_k$, $k = \overline{1,5}$. Фазовые портреты системы для них описывают одноименные таблицы, причем $\forall\, k \in \{1,\dots,5\}$ таблица 1.1.5$_k$ получается из таблицы 1.1.3$_k$ 1) заменой ее второй строки строкой

2	$\tilde{S}_2^+$	$O_2^+ \to O_3^+$	Ω_2	$\tilde{S}_2^+$	$O_0^+ \to O_3^+,$

2) перестановкой в ней символов $O_0^- \rightleftarrows O_2^-$.

Подслучай 1.1.7: $u_3 < 0 < q_1$. Поведение $S_2, \tilde{S}_1^-$ и $\tilde{S}_3^-$ неоднозначно: как и в подслучаях 1.1.3, 1.1.5 они пересекают полуось $y = 0$, $x < 0$, при значениях x : x_2, x_1^- и x_3^-, но теперь $x_3^- < x_1^-$, а для x_2 возможно любое из равенств-неравенств: 1) $x_1^- < x_2$, 2) $x_2 = x_1^-$, 3) $x_3^- < x_2 < x_1^-$, 4) $x_2 = x_3^-$, 5) $x_2 < x_3^-$ $\Rightarrow$ подслучай 1.1.7 также распадается на пять подподслучаев: 1.1.7$_k$, $k = \overline{1,5}$, но последние определяются иными, чем в подслучаях 1.1.3, 1.1.5 условиями. Фазовые портреты системы для них описываются одноименными таблицами.

Таблица 1.1.7$_1$. ФП для подподслучая $x_1^- < x_2$.

1,2,6	См. таблицу 1.1.7$_3$.				
3	S_1	$O \to O_0^+$	Ω_3	S_1S_2	$O \to O_0^+$
4	S_2	$O \to O_0^+$	Ω_4	$S_2\tilde{S}_1^-S_0$	$O_1^+ \to O_0^+$
5	$\tilde{S}_1^-$	$O_1^+ \to O_1^-$	Ω_5	$\tilde{S}_1^-\tilde{S}_3^-$	$O_1^+ \to O_2^-$

Таблица 1.1.7$_3$. ФП для подподслучая $x_3^- < x_2 < x_1^-$.

1	S_0	$O_1^+ \to O$	Ω_1	$S_0\tilde{S}_2^+S_1$	$O_1^+ \to O_0^+$
2	$\tilde{S}_2^+$	$O_2^+ \to O_0^+$	Ω_2	$\tilde{S}_2^+$	$O_3^+ \to O_0^+$
3	S_1	$O \to O_0^+$	Ω_3	$S_1\tilde{S}_1^-$	$O \to O_0^+$
4	$\tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_4	$\tilde{S}_1^-S_2$	$O \to O_2^-$
5	S_2	$O \to O_2^-$	Ω_5	$S_2\tilde{S}_3^-S_0$	$O_1^+ \to O_2^-$
6	$\tilde{S}_3^-$	$O_1^+ \to O_0^-$	Ω_6	$\tilde{S}_3^-$	$O_1^+ \to O_0^-$

Таблица 1.1.7$_5$. ФП для подподслучая $x_2 < x_3^-$.

1–3	См. таблицу 1.1.7$_3$.				
4	$\tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_4	$\tilde{S}_1^-\tilde{S}_3^-$	$O \to O_2^-$
5	$\tilde{S}_3^-$	$O \to O_3^-$	Ω_5	$\tilde{S}_3^-S_2$	$O \to O_0^-$
6	S_2	$O \to O_0^-$	Ω_6	S_2S_0	$O_1^+ \to O_0^-$

Таблица 1.1.7$_2$. ФП для подподслучая $x_1^- = x_2$.

1,2,6	См. таблицы 1.1.7$_{1,3}$				
3	S_1	$O \to O_0^+$	Ω_3	S_1S_2	$O \to O_0^+$
5	$S_2 \equiv \tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_5	$S_2\tilde{S}_3^-S_0$	$O_1^+ \to O_2^-$

Таблица $1.1.7_4$. ФП для подподслучая $x_2 = x_3^-$.

1–3	См. таблицы $1.1.7_{3,5}$				
4	$\tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_4	$\tilde{S}_1^- S_2$	$O \to O_2^-$
6	$S_2 \equiv \tilde{S}_3^-$	$O \to O_3^-$	Ω_6	$S_2 S_0$	$O_1^+ \to O_0^-$

В подподслучае $1.1.7_2$ $\Omega_4 = \emptyset$, в подподслучае $1.1.7_4$ $\Omega_5 = \emptyset$.

Подслучай 1.1.8: $q_1 \leqslant 0$. Все сепаратрисы (1.1.1) присутствуют, различны и ведут себя однозначно. Фазовый портрет системы описывает таблица 1.1.8, совпадающая с таблицей $1.1.7_5$.

Обращаемся к подслучаям $2, 4, 6$ случая 1.1. В каждом из них одна из сепаратрис (1.1.1) отсутствует.

Замечание 1.2. В некоторых из случаев 1.1 – 1.6 таблица, описывающая фазовый портрет системы для подслучая вида $u_i = 0$, $i \in \overline{1,3}$, может быть получена из одной из ФП-таблиц для соседнего подслучая простейшей его деформацией: удалением одних ее фрагментов, заменой других. При реализации этой идеи будем первую из названных таблиц трактовать как *искомую*, вторую — как *базовую* для первой.

Подслучай 1.1.2: $u_1 = 0$. Сепаратриса ($\tilde{S}_1^-$ отсутствует, остальные пять различны и ведут себя однозначно. Таблица 1.1.2 (ФП для подслучая $u_1 = 0$) получается деформацией любой базовой для нее таблицы согласно строке 1 таблицы 1.1.9.

Подслучай 1.1.4: $u_2 = 0$. $\tilde{S}_2^+$ отсутствует. Для S_2, $\tilde{S}_1^-$ и $\tilde{S}_3^-$ возможны те же варианты взаимного расположения, что и в подслучаях 1.1.3, 1.1.5 $\Rightarrow$ подслучай 1.1.4 распадается на пять подподслучаев: $1.1.4_k$, $k = \overline{1,5}$. Итоговая таблица для любого из последних получается деформацией любой базовой для нее таблицы (см. таблицу 1.1.9, строка 2).

Подслучай 1.1.6: $u_3 = 0$. $\tilde{S}_3^-$ отсутствует. Для S_2 и $\tilde{S}_1^-$ возможны следующие варианты взаимного расположения (в обозначениях из подслучая 1.1.3): 1) $x_1^- < x_2$, 2) $x_1^- = x_2$, 3) $x_2 < x_1^-$; они порождают для подслучая 1.1.6 подподслучаи $1.1.6_k$, $k = \overline{1,3}$. $\forall\, k \in \{1, 2, 3\}$ итоговая таблица $1.1.6_k$ получается деформацией любой базовой для нее таблицы (см. таблицу 1.1.9, строка 3).

Таблица 1.1.9. ФП для подслучая $u_i = 0$, $i = \overline{1,3}$.

Искомая таблица	Базовая таблица	Деформация базовой таблицы	
		Удаляемые фрагменты	Замена
1.1.2	$1.1.1, 1.1.3._1$	Строка 6, символ S_1^- в строке 5	$O_1 \to O_0$
$1.1.4_k$ $(k = \overline{1,5})$	$1.1.3_k, 1.1.5_k$	Строка 2, символ $\tilde{S}_2^+$ в строке 1	$O_2 \to O_0$
$1.1.6_k$ $(k = \overline{1,3})$	$1.1.5_{k+2}, 1.1.7_k$	Строка 6, символ $\tilde{S}_3^-$ в строке 5	$O_3 \to O_0$

1.2. Случай $\mathbf{u_1 < q_1 < q_2 < u_2 < u_3}$.

Действуем по программе пункта 0.2. Сначала находим: ТД-тип точки O имеет вид (1.1.0), ТД-типы БО-точек — вид, указанный в таблице 1.2.0.

Таблица 1.2.0. ТД-типы БО-точек в случае 1.2.

Подслучай		$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_2^{+(-)}$	$\tilde{A}_3^{+(-)}$
1	$0 < u_1$	$N_-^-\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$	$S_-^+\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
2	$u_1 = 0$	$N_-^-\,N_+^+\,(\emptyset)$	–	$S_-^+\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
3	$u_1 < 0 < q_1$	$N_+^+\,(N_-^+)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$S_-^+\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
4	$q_1 \le 0 \le q_2$	$N^+\,(N^+)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$S_-^+\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
5	$q_2 < 0 < u_2$	$N_+^+\,(N_-^+)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$S_-^+\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
6	$u_2 = 0$	$\emptyset\,(N_-^+\,N_+^-)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	–	$N_+^+\,(S_-^-)$
7	$u_2 < 0 < u_3$	$N_-^-\,(N_+^-)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$S_+^-\,(N_-^+)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
8	$u_3 = 0$	$N_-^-\,N_+^+\,(\emptyset)$	$N_-^-\,S_+^+$	$S_+^-\,(N_-^+)$	–
9	$u_3 < 0$	$N_+^+\,(N_-^+)$	$N_-^-\,S_+^+$	$S_+^-\,(N_-^+)$	$N_-^-\,(S_+^+)$

Далее изучаем подслучаи случая 1.2. Начинаем с подслучаев 1,3–5,7,9. Для каждого из них список сепаратрис особых точек, как следует из ТД-типов последних, имеет вид

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \tilde{S}_2^+,\ \tilde{S}_1^-,\ \tilde{S}_3^-. \tag{1.2.0}$$

Подслучай 1.2.1: $0 < u_1$. Глобальное поведение всех сепаратрис однозначно. Они разбивают круг Ω на шесть МП-ячеек. Фазовый портрет системы описывает таблица 1.2.1.

Таблица 1.2.1. ФП для подслучая $0 < u_1$.

1	S_0	$O_0^+ \to O$	Ω_1	S_0S_1	$O_0^+ \to O_1^+$
2	S_1	$O \to O_1^+$	Ω_2	$S_1\tilde{S}_2^+$	$O \to O_1^+$
3	$\tilde{S}_2^+$	$O \to O_2^+$	Ω_3	$\tilde{S}_2^+S_2$	$O \to O_3^+$
4–6	См. таблицу 1.1.1.				

Подслучай 1.2.3: $u_1 < 0 < q_1$. Для сепаратрис $S_2, \tilde{S}_1^-$ и $\tilde{S}_3^-$ возможны те же пять вариантов взаимного расположения, что и в подслучае 1.1.3. Возникают подподслучаи $1.2.3_k$, $k = \overline{1,5}$. Результаты их исследования содержат таблицы $1.2.3_1, \ldots, 1.2.3_5$.

Таблица $1.2.3_1$. ФП для подподслучая $x_1^- < x_3^-$.

1–4	Как в таблице 1.2.1 с $O_0^+ \rightleftarrows O_1^+$
5, 6	Как в таблице $1.1.3_1$.

Таблица $1.2.3_3$. ФП для подподслучая $x_3^- < x_1^- < x_2$.

1, 2, 6	Как в таблице $1.2.3_5$.				
3	$\tilde{S}_2^+$	$O \to O_2^+$	Ω_3	$\tilde{S}_2^+S_2$	$O \to O_3^+$
4	S_2	$O \to O_3$	Ω_4	$S_2\tilde{S}_1^-S_0$	$O_1^+ \to O_3^+$
5	$\tilde{S}_1^-$	$O_1^+ \to O_1^-$	Ω_5	$\tilde{S}_1^-\tilde{S}_3^-$	$O_1^+ \to O_0^-$

Таблица 1.2.3$_5$. ФП для подподслучая $x_2 < x_1^-$.

1	S_0	$O_1^+ \to O$	Ω_1	S_0S_1	$O_1^+ \to O_0^+$
2	S_1	$O \to O_0^+$	Ω_2	$S_1\tilde{S}_2^+$	$O \to O_0^+$
3	$\tilde{S}_2^+$	$O \to O_2^+$	Ω_3	$\tilde{S}_2^+\tilde{S}_1^-$	$O \to O_3^+$
4	$\tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_4	$\tilde{S}_1^-S_2$	$O \to O_0^-$
5	S_2	$O \to O_0^-$	Ω_5	$S_2\tilde{S}_3^-S_0$	$O_1^+ \to O_0^-$
6	$\tilde{S}_3^-$	$O_3^- \to O_0^-$	Ω_6	$\tilde{S}_3^-$	$O_2^- \to O_0^-$

Таблица 1.2.3$_2$. ФП для подподслучая $x_1^- = x_3^-$.

1–3	Как в таблицах 1.2.3$_{1,3}$				
4	S_2	$O \to O_3^+$	Ω_4	$S_2\tilde{S}_1^-S_0$	$O_0^+ \to O_3^+$
6	$\tilde{S}_1^- = \tilde{S}_3^-$	$O_3^- \to O_1^-$	Ω_6	$\tilde{S}_1^-$	$O_2^- \to O_0^-$

Таблица 1.2.3$_4$. ФП для подподслучая $x_1^- = x_2$.

$1, 2, 6$	Как в таблицах 1.2.3$_{3,5}$				
3	$\tilde{S}_2^+$	$O \to O_2^+$	Ω_3	$\tilde{S}_2^+S_2$	$O \to O_3^+$
5	$\tilde{S}_1^- = S_2$	$O \to O_1^-$	Ω_5	$S_2\tilde{S}_3^-S_0$	$O_1^+ \to O_0^-$

В подподслучае 1.2.3$_2$ $\Omega_5 = \emptyset$, в подподслучае 1.2.3$_4$ $\Omega_4 = \emptyset$.

Подслучай 1.2.4: $q_1 \leqslant 0 \leqslant q_2$. Поведение всех сепаратрис определённо. Фазовый портрет системы описывает таблица 1.2.3$_5$.

Подслучай 1.2.5: $q_2 < 0 < u_2$. Поведение сепаратрис S_1 и $\tilde{S}_2^+$ неоднозначно. Они по одному разу пересекают полуось $y = 0$, $x > 0$, но для абсцисс x_1 и x_2^+ точек пересечения возможны варианты: 1) $x_2^+ < x_1$, 2) $x_1 = x_2^+$, 3)

$x_1 < x_2^+$. Возникают подподслучаи $1.2.5_k$, $k = \overline{1,3}$. Результаты их исследования излагаются в одноименных таблицах.

Таблица $1.2.5_1$. (ФП для подподслучая $x_2^+ < x_1$) совпадает с таблицей $1.2.3_5$.

Таблица $1.2.5_3$. ФП для подподслучая $x_1 < x_2^+$.

$1,2$	Как в таблице 1.1.1 с $O_0^+ \rightleftarrows O_1^+$				
3	S_1	$O \to O_3^+$	Ω_3	$S_1\tilde{S}_1^-$	$O \to O_3^+$
4–6	Как в таблице $1.2.3_5$.				

Таблица $1.2.5_2$. ФП для подподслучая $x_1 = x_2^+$.

1	S_0	$O_1^+ \to O$	Ω_1	S_0S_1	$O_1^+ \to O_0^+$
3	$S_1 \equiv \tilde{S}_2^+$	$O \to O_2^+$	Ω_3	$S_1\tilde{S}_1^-$	$O \to O_3^+$
4–6	Как в таблицах $1.2.5_{1,3}$.				

В подподслучае $1.2.5_2$ $\Omega_2 = \emptyset$.

Подслучай 1.2.7: $u_2 < 0 < u_3$. Все сепаратрисы ведут себя однозначно. Фазовый портрет системы описывает таблица $1.1.5_5$.

Подслучай 1.2.9: $u_3 < 0$. Поведение всех сепаратрис определенно. Итоговый результат дает таблица 1.2.9.

Таблица 1.2.9. ФП для подслучая $u_3 < 0$.

1–5	Как в таблице $1.1.5_5$ с $O_3^+ \rightleftarrows O_0^+$				
6	$\tilde{S}_3^-$	$O_1^+ \to O_3^-$	Ω_6	$\tilde{S}_3^-$	$O_1^+ \to O_0^-$

Переходим к изучению подслучаев 2, 6, 8 случая 1.2 (см. таблицу 1.2.0). В каждом из них система имеет лишь пять сепаратрис: из списка (1.2.0) в подслучае 2 исчезает $\tilde{S}_1^-$, в подслучае 6 — $\tilde{S}_2^+$, в подслучае 8 — $\tilde{S}_3^-$. Итоговые таблицы для этих подслучаев получаются из базовых для них таблиц (см. замечание 1.2) по схеме, указанной в таблице 1.2.10.

Таблица 1.2.10. ФП для подслучая $u_i = 0$, $i = \overline{1,3}$.

Искомая таблица	Базовые таблицы	Удаляемые фрагменты	Замена
1.2.2	1.2.1, $1.2.3_1$	Строка 6, символ $\tilde{S}_1^-$ в стр. 5	$O_1 \to O_0$
1.2.6	$1.2.5_3$, 1.2.7	Строка 2, символ $\tilde{S}_2^+$ в стр. 1	$O_2 \to O_0$
1.2.8	1.2.7, 1.2.9	Строка 6, символ $\tilde{S}_3^-$ в стр. 5	$O_3 \to O_0$

1.3. Случай $\mathbf{u_1 < q_1 < u_2 < u_3 < q_2}$.

ТД-тип точки O описывается словом (1.1.0), ТД-типы БО-точек — таблицей 1.3.0.

Таблица 1.3.0. ТД-типы БО-точек в случае 1.3.

Подслучай		$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_2^{+(-)}$	$\tilde{A}_3^{+(-)}$
1	$0 < u_1$	$N_-^- \, (N_+^-)$	$N_+^+ \, (S_-^-)$	$N_+^- \, (S_-^+)$	$S_-^- \, (N_+^+)$
2	$u_1 = 0$	$N_-^- \, N_+^+ \, (\emptyset)$	–	$N_+^- \, (S_-^+)$	$S_-^- \, (N_+^+)$
3	$u_1 < 0 < u_2$	$N^+ \, (N^+)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	$N_+^- \, (S_-^+)$	$S_-^- \, (N_+^+)$
4	$u_2 = 0$	$N_-^+ \, N_+^- \, (\emptyset)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	–	$S_-^- \, (N_+^+)$
5	$u_2 < 0 < u_3$	$N_+^- \, (N_-^-)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	$N_-^+ \, (S_+^-)$	$S_-^- \, (N_+^+)$
6	$u_3 = 0$	$\emptyset \, (N_-^- \, N_+^+)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	$N_-^+ \, (S_+^-)$	–
7	$u_3 < 0$	$N^+ \, (N^+)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	$N_-^+ \, (S_+^-)$	$S_+^+ \, (N_-^-)$

Мы различаем в этом случае семь подслучаев. В каждом нечетном из них система имеет шесть сепаратрис:

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \tilde{S}_1^-,\ \tilde{S}_2^-,\ \tilde{S}_3^+, \tag{1.3.1}$$

в каждом четном — одна из этих сепаратрис отсутствует: в подслучае 2 отсутствует $\tilde{S}_1^-$, в подслучае 4 — $\tilde{S}_2^-$, в подслучае 6 — $\tilde{S}_3^+$. В любом подслучае сепаратрисы ведут себя однозначно. Фазовые портреты для подслучаев случая 1.3 описывают таблицы $1.3.k$, $k = \overline{1,7}$.

Таблица 1.3.1. ФП для подслучая $0 < u_1$.

<table>
<tr><td>$1, 5, 6$</td><td colspan="5">Как в таблице 1.3.3 с $O_0^+ \rightleftarrows O_1^+$.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>S_1</td><td>$O \to O_1^+$</td><td>Ω_2</td><td>$S_1\tilde{S}_1^-\tilde{S}_2^-$</td><td>$O \to O_1^+$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\tilde{S}_1^-$</td><td>$O_1^- \to O_1^+$</td><td>Ω_3</td><td>$\tilde{S}_1^-\tilde{S}_3^+$</td><td>$O_0^- \to O_1^+$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\tilde{S}_3^+$</td><td>$O_3^+ \to O_1^+$</td><td>Ω_4</td><td>$\tilde{S}_3^+$</td><td>$O_2^+ \to O_1^+$</td></tr>
</table>

Таблица 1.3.3. ФП для подслучая $u_1 < 0 < u_3$.

1	S_0	$O_1^+ \to O$	Ω_1	S_0S_1	$O_1^+ \to O_0^+$
2	S_1	$O \to O_0^+$	Ω_2	$S_1\tilde{S}_3^+\tilde{S}_1^-$	$O \to O_0^+$
3	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O_0^+$	Ω_3	$\tilde{S}_3^+$	$O_2^+ \to O_0^+$
4	$\tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_4	$\tilde{S}_1^-\tilde{S}_2^-$	$O \to O_0^-$
5	$\tilde{S}_2^-$	$O \to O_2^-$	Ω_5	$\tilde{S}_2^-S_2$	$O \to O_3^-$
6	S_2	$O \to O_3^-$	Ω_6	S_2S_0	$O_1^+ \to O_3^-$

Таблица 1.3.5. ФП для подслучая $u_2 < 0 < u_3$.

<table>
<tr><td>1–$3, 6$</td><td colspan="5">Как в таблице 1.3.3 с $O_0^+ \rightleftarrows O_2^+$.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\tilde{S}_1^-$</td><td>$O \to O_1^-$</td><td>Ω_4</td><td>$\tilde{S}_1^-\tilde{S}_2^-$</td><td>$O \to O_3^-$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\tilde{S}_2^-$</td><td>$O_2^- \to O_3^-$</td><td>Ω_5</td><td>$\tilde{S}_2^-$</td><td>$O_0^- \to O_3^-$</td></tr>
</table>

Таблица 1.3.7. ФП для подслучая $u_3 < 0$.

$1, 4–6$	Как в таблице 1.3.5 с $O_0^- \rightleftarrows O_3^-$.				
2	S_1	$O \to O_2^+$	Ω_2	$S_1\tilde{S}_3^+$	$O \to O_2^+$
3	$\tilde{S}_3^+$	$O \to O_3^+$	Ω_3	$\tilde{S}_3^+\tilde{S}_1^-$	$O \to O_0^+$

Таблица 1.3.2. ФП для подслучая $u_1 = 0$.

$1, 3, 5, 6$	Как в таблице 1.3.3 с $O_1 = O_0$.				
2	S_1	$O \to O_0^+$	Ω_2	$S_1\tilde{S}_3^+\tilde{S}_2^-$	$O \to O_0^+$

Таблица 1.3.4. ФП для подслучая $u_2 = 0$.

$1–3, 6$	Как в таблицах 1.3.3, 1.3.5 с $O_2 = O_0$.				
4	$\tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_4	$\tilde{S}_1^- S_2$	$O \to O_3^-$

Таблица 1.3.6. ФП для подслучая $u_3 = 0$.

$1, 4–6$	Как в таблицах 1.3.5, 1.3.7 с $O_3 = O_0$.				
2	S_1	$O \to O_2^+$	Ω_2	$S_1\tilde{S}_1^-$	$O \to O_2^+$

В подслучае 1.3.2 $\Omega_4 = \emptyset$, в подслучае 1.3.4 $\Omega_5 = \emptyset$, в подслучае 1.3.6 $\Omega_3 = \emptyset$.

1.4. Случай $\mathbf{u_1 < q_1 < u_2 < q_2 < u_3}$.

ТД-тип точки O имеет вид

$$\tilde{A}_O = S_0^+ S_1^- S_2^+ (S^0)^- N_1^- N_2^+,$$

где S_0, S_1, S_2, S^0 — сепаратрисы точки O, примыкающие к ней по направлениям OO_-^0 ($x = 0$, $y < 0$), OQ_1^+, OQ_2^+, OO_+^0 ($x = 0$, $y > 0$) соответственно, N_1, N_2 — узловые пучки O-кривых, примыкающие к O по направлениям OQ_1^-, OQ_2^-. ТД-типы БО-точек описывает таблица 1.4.0.

Таблица 1.4.0. ТД-типы БО-точек в случае 1.4.

Подслучай		$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_2^{+(-)}$	$\tilde{A}_3^{+(-)}$
1	$0 < u_1$	$N_-^-\,(N_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$	$N_+^-\,(S_-^+)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
2	$u_1 = 0$	$N_-^-\,N_+^+\,(\emptyset)$	–	$N_+^-\,(S_-^+)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
3	$u_1 < 0 < u_2$	$N^+\,(N^-)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$N_+^-\,(S_-^+)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
4	$u_2 = 0$	$N_-^+\,N_+^-\,(\emptyset)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	–	$N_+^+\,(S_-^-)$
5	$u_2 < 0 < u_3$	$N^-\,(N^-)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$N_-^+\,(S_+^-)$	$N_+^+\,(S_-^-)$
6	$u_3 = 0$	$N_-^-\,N_+^+)\,(\emptyset)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$N_-^+\,(S_+^-)$	–
7	$u_3 < 0$	$N_+^+\,(N_-^+)$	$N_-^-\,(S_+^+)$	$N_-^+\,(S_+^-)$	$N_-^-\,(S_+^+)$

Замечание 1.3. Из шести случаев системы (0.1), которые мы изучаем в § 1, два случая (4 и 6) обратимы в смысле определения III.6.1: при замене в (0.1) $(t, y) \to (-t, -y)$ и изменении нумераций корней полиномов P, Q на обратные каждый из них переходит в себя (это видно и из таблиц 1.4.0 и 1.6.0). Поэтому для каждого из них нам достаточно изучить лишь первую (или вторую) половину его подслучаев. Результаты для остальных легко получить, используя свойство обратимости случая.

Следуя замечанию 1.3, изучаем лишь подслучаи 1–4 случая 1.4. В подслучаях 1 и 3 сепаратрисы особых точек системы суть

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S^0,\ \tilde{S}_1^-,\ \tilde{S}_2^-,\ \tilde{S}_3^-,$$

в подслучае 2 отсутствует $\tilde{S}_1^-$, в подслучае 4 — $\tilde{S}_2^-$. В любом из этих подслучаев поведение всех сепаратрис однозначно. Фазовый портрет системы для них описывают таблицы 1.4.k, $k = \overline{1, 4}$.

Таблица 1.4.1. ФП для подслучая $0 < u_1$.

1–3, 6, 7	Как в таблице 1.4.3 с $O_0^+ \rightleftarrows O_1^+$.				
4	S^0	$O \to O_3^+$	Ω_4	$S^0\tilde{S}_1^-\tilde{S}_2^-$	$O \to O_3^+$
5	$\tilde{S}_1^-$	$O_1^- \to O_3^+$	Ω_5	$\tilde{S}_1^-$	$O_0^- \to O_3^+$

Таблица 1.4.3. ФП для подслучая $u_1 < 0 < u_3$.

Подслучай		$\tilde{\mathrm{A}}_0^{+(-)}$	$\tilde{\mathrm{A}}_1^{+(-)}$	$\tilde{\mathrm{A}}_2^{+(-)}$	$\tilde{\mathrm{A}}_3^{+(-)}$
1	S_0	$O_1^+ \to O$	Ω_1	S_0S_1	$O_1^+ \to O_0^+$
2	S_1	$O \to O_0^+$	Ω_2	S_1S_2	$O_2^+ \to O_0^+$
3	S_2	$O_2^+ \to O$	Ω_3	S_2S^0	$O_2^+ \to O_3^+$
4	S^0	$O \to O_3^+$	Ω_4	$S^0\tilde{S}_1^-$	$O \to O_3^+$
5	$\tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_5	$\tilde{S}_1^-\tilde{S}_2^-$	$O \to O_0^-$
6	$\tilde{S}_2^-$	$O \to O_2^-$	Ω_6	$\tilde{S}_2^-\tilde{S}_3^-$	$O \to O$
7	$\tilde{S}_3^-$	$O \to O_3^-$	Ω_7	$\tilde{S}_3^-S_0$	$O_1^+ \to O$

Таблица 1.4.2. ФП для подслучая $u_1 = 0$.

1–3, 6, 7	Как в таблицах 1.4.1, 1.4.3 с $O_1 = O_0$.				
4	S^0	$O \to O_3^+$	Ω_4	$S^0\tilde{S}_2^-$	$O \to O_3^+$

Таблица 1.4.4. ФП для подслучая $u_2 = 0$.

1–4, 7	Как в таблице 1.4.3 с $O_2 = O_0$.				
5	$\tilde{S}_1^-$	$O \to O_1^-$	Ω_5	$\tilde{S}_1^-\tilde{S}_3^-$	$O \to O$

В подслучае 1.4.2 $\Omega_5 = \emptyset$, в подслучае 1.4.4 $\Omega_6 = \emptyset$.

1.5. Случай $\mathbf{u_1 < u_2 < q_1 < u_3 < q_2}$.

ТД-тип особой точки O имеет вид

$$\tilde{A}_O = S_0^+ N_1^+ N_2^- (S^0)^- S_1^+ S_2^-, \tag{1.5.0}$$

где S_0, S^0, S_1, S_2 — сепаратрисы точки O, примыкающие к ней соответственно по направлениям OO_-^0 $(x = 0,\, y < 0)$, OO_+^0 $(x = 0,\, y > 0)$, OQ_1^-, OQ_2^-, N_1, N_2 — узловые пучки O-кривых, примыкающие к O по направлениям OQ_1^+, OQ_2^+. ТД-типы БО-точек имеют вид, указанный в таблице 1.5.0.

Таблица 1.5.0. ТД-типы БО-точек в случае 1.5.

Подслучай		$\tilde{\mathrm{A}}_0^{+(-)}$	$\tilde{\mathrm{A}}_1^{+(-)}$	$\tilde{\mathrm{A}}_2^{+(-)}$	$\tilde{\mathrm{A}}_3^{+(-)}$
1	$0 < u_1$	$N_-^- \, (N_+^-)$	$N_+^+ \, (S_-^-)$	$S_-^+ \, (N_+^-)$	$S_-^- \, (N_+^+)$
2	$u_1 = 0$	$N_-^- N_+^+ \, (\emptyset)$	–	$S_-^+ \, (N_+^-)$	$S_-^- \, (N_+^+)$
3	$u_1 < 0 < u_2$	$N_+^+ \, (N_-^+)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	$S_-^+ \, (N_+^-)$	$S_-^- \, (N_+^+)$
4	$u_2 = 0$	$\emptyset \, (N_-^+ N_+^-)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	–	$S_-^- \, (N_+^+)$
5	$u_2 < 0 < u_3$	$N^- \, (N^-)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	$S_+^- \, (N_-^+)$	$S_-^- \, (N_+^+)$
6	$u_3 = 0$	$\emptyset \, (N_-^- N_+^+)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	$S_+^- \, (N_-^+)$	–
7	$u_3 < 0 < q_3$	$N_-^+ \, (N_+^+)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	$S_+^- \, (N_-^+)$	$S_+^+ \, (N_-^-)$
8	$q_2 \leqslant 0$	$N^+ \, (N^+)$	$N_-^- \, (S_+^+)$	$S_+^- \, (N_-^+)$	$S_+^+ \, (N_-^-)$

В каждом из подслучаев $1, 3, 5, 7, 8$ система имеет сепаратрисы

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S^0,\ \tilde{S}_2^+,\ \tilde{S}_3^+,\ \tilde{S}_1^-. \tag{1.5.1}$$

В подслучаях $1, 3, 5$ все они различны, ведут себя однозначно и разбивают круг Ω на семь МП-ячеек (см. таблицы 1.5.1, 1.5.3, 1.5.5).

Таблица 1.5.1. ФП для подслучая $0 < u_1$.

$1, 2, 4, 6, 7$	Как в таблице 1.5.3 с $O_1^+ \rightleftarrows O_0^+$.				
3	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O$	Ω_3	$\tilde{S}_3^+\tilde{S}_1^-$	$O_0^- \to O$
5	$\tilde{S}_1^-$	$O_1^- \to O$	Ω_5	$\tilde{S}_1^- S_1 S^0$	$O_2^- \to O$

Таблица 1.5.3. ФП для подслучая $u_1 < 0 < u_2$.

1	S_0	$O_1^+ \to O$	Ω_1	$S_0\tilde{S}_2^+\tilde{S}_3^+$	$O_1^+ \to O$
2	$\tilde{S}_2^+$	$O_1^+ \to O_2^+$	Ω_2	$\tilde{S}_2^+$	$O_1^+ \to O_0^+$
3	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O$	Ω_3	$\tilde{S}_3^+\tilde{S}_1^- S_1 S^0$	$O_2^- \to O$
4	S^0	$O \to O$	Ω_4	S^0	$O \to O$
5	$\tilde{S}_1^-$	$O_2^- \to O_1^-$	Ω_5	$\tilde{S}_1^-$	$O_2^- \to O_0^-$
6	S_1	$O_2^- \to O$	Ω_6	$S_1 S_2$	$O_2^- \to O_3^-$
7	S_2	$O \to O_3^-$	Ω_7	$S_0 S_2$	$O_1^+ \to O_3^-$

Таблица 1.5.5. ФП для подслучая $u_2 < 0 < u_3$.

1	S_0	$O_1^+ \to O$	Ω_1	$S_0\tilde{S}_2^+$	$O_1^+ \to O$
2	$\tilde{S}_2^+$	$O_2^+ \to O$	Ω_2	$\tilde{S}_2^+\tilde{S}_3^+$	$O_0^+ \to O$
3–7	Как в таблице 1.5.3				

В подслучае 7 сепаратрисы S^0 и $\tilde{S}_3^+$ ведут себя неоднозначно. Они по одному разу пересекают полуось $y = 0$, $x > 0$, скажем, в точках с абсциссами x^0, x_3^+, для которых возможны варианты последования: 1) $x^0 < x_3^+$, 2) $x_0 = x_3^+$, 3) $x_3^+ > x^0$. Возникают подподслучаи $1.5.7_k$, $k = \overline{1,3}$. Фазовые портреты для них описывают одноименные таблицы.

Таблица 1.5.7$_1$. ФП для подподслучая $x^0 < x_3^+$.

$1, 4–7$	См. таблицу 1.5.5.				
2	$\tilde{S}_2^+$	$O_2^+ \to O$	Ω_2	$\tilde{S}_2^+ \tilde{S}_3^+ S_1 S^0$	$O_3^- \to O$
3	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^- \to O_3^+$	Ω_3	$\tilde{S}_3^+ \tilde{S}_1^-$	$O_3^- \to O_0^+$

Таблица 1.5.7$_3$. ФП для подподслучая $x_3^+ < x^0$.

$1, 5–7$	См. таблицу 1.5.7$_1$.				
2	$\tilde{S}_2^+$	$O_2^+ \to O$	Ω_2	$\tilde{S}_2^+ \tilde{S}_3^+$	$O \to O$
3	$\tilde{S}_3^+$	$O \to O_3^+$	Ω_3	$\tilde{S}_3^+ S^0$	$O \to O_0^+$
4	S^0	$O \to O_0^+$	Ω_4	$S^0 \tilde{S}_1^- S_1$	$O_3^- \to O_0^+$

Таблица 1.5.7$_2$. ФП для подподслучая $x^0 = x_3^+$.

$1, 5–7$	Как в таблице 1.5.7$_1$, 1.5.7$_3$ с $S^0 \equiv S_3^+$.				
2	$\tilde{S}_2^+$	$O_2^+ \to O$	Ω_2	$\tilde{S}_2^+ \tilde{S}_3^+$	$O \to O$
3	$S^0 = \tilde{S}_3^+$	$O \to O_3^+$	Ω_3	$S^0 \tilde{S}_1^- S_1$	$O_3^- \to O_0^+$

Подслучай 1.5.8: $q_2 < 0$. Все семь сепаратрис (1.5.1) присутствуют и ведут себя однозначно. Фазовый портрет системы описывает таблица 1.5.7$_3$.

Переходим к подслучаям $2, 4, 6$ случая 1.5. В каждом из них одна из сепаратрис (1.5.1) отсутствует: в подслучае 2 — $\tilde{S}_1^-$, в подслучае 4 — $\tilde{S}_2^+$, в подслучае 6 — $\tilde{S}_3^-$. Фазовый портрет системы для этих подслучаев описывают таблицы $1.5.2, 1.5.4, 1.5.6$.

Таблица 1.5.2. ФП для подслучая $u_1 = 0$.

$1, 2, 4, 6$	Как в таблицах 1.5.1, 1.5.3 с $O_1 = O_0$.				
3	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O$	Ω_3	$\tilde{S}_3^+ S_1 S^0$	$O_2^- \to O$

Таблица 1.5.4. ФП для подслучая $u_2 = 0$.

1	S_0	$O_1^+ \to O$	Ω_1	$S_0 \tilde{S}_3^+$	$O_1^+ \to O$
3–6	Как в таблицах 1.5.3, 1.5.5 с $O_2 = O_0$.				

Таблица 1.5.6. ФП для подслучая $u_3 = 0$.

$1, 4$–6	Как в таблицах 1.5.3, $1.5.7_1$ с $O_3 = O_0$.				
2	$\tilde{S}_2^+$	$O_2^+ \to O$	Ω_2	$\tilde{S}_2^+ \tilde{S}_1^- S_1 S^0$	$O_0^- \to O$

В подслучае 1.5.2 $\Omega_5 = \emptyset$, в подслучае 1.5.4 $\Omega_2 = \emptyset$, в подслучае 1.5.6 $\Omega_4 = \emptyset$.

1.6. Случай $\mathbf{q_1 < u_1 < u_2 < u_3 < q_2}$.

Реализуя пункт 1 программы 0.2, находим: 1) ТД-тип особой точки O имеет вид (1.5.0), 2) ТД-типы БО-точек — вид, указанный в таблице 1.6.0.

Таблица 1.6.0. ТД-типы БО-точек в случае 1.6.

Подслучай		$\tilde{A}_0^{+(-)}$	$\tilde{A}_1^{+(-)}$	$\tilde{A}_2^{+(-)}$	$\tilde{A}_3^{+(-)}$
0	$0 \leqslant q_1$	$N^-\,(N^-)$	$S^-_-\,(N^+_+)$	$N^-_+\,(S^+_-)$	$S^-_-\,(N^+_+)$
1	$q_1 < 0 < u_1$	$N^-_-\,(N^-_+)$	$S^-_-\,(N^+_+)$	$N^-_+\,(S^+_-)$	$S^-_-\,(N^+_+)$
2	$u_1 = 0$	$\emptyset\,(N^-_-\,N^+_+)$	–	$N^-_+\,(S^+_-)$	$S^-_-\,(N^+_+)$
3	$u_1 < 0 < u_2$	$N^+_-\,(N^+_+)$	$S^+_+\,(N^-_-)$	$N^-_+\,(S^+_-)$	$S^-_-\,(N^+_+)$
4	$u_2 = 0$	$N^+_-\,N^-_+\,(\emptyset)$	$S^+_+\,(N^-_-)$	–	$S^-_-\,(N^+_+)$
5	$u_2 < 0 < u_3$	$N^-_+\,(N^-_-)$	$S^+_+\,(N^-_-)$	$N^+_-\,(S^-_+)$	$S^-_-\,(N^+_+)$
6	$u_3 = 0$	$\emptyset\,(N^-_-\,N^+_+)$	$S^+_+\,(N^-_-)$	$N^+_-\,(S^-_+)$	–
7	$u_3 < 0 < q_2$	$N^+_-\,(N^+_+)$	$S^+_+\,(N^-_-)$	$N^+_-\,(S^-_+)$	$S^+_+\,(N^-_-)$
8	$q_2 \leqslant 0$	$N^+\,(N^+)$	$S^+_+\,(N^-_-)$	$N^+_-\,(S^-_+)$	$S^+_+\,(N^-_-)$

Случай 1.6 обратим (см. замечание 1.3), а потому мы изучаем для него лишь подслучаи 0–4. Список сепаратрис особых точек для каждого из его подслучаев $0, 1, 3$ имеет вид

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S^0,\ \tilde{S}_1^+,\ \tilde{S}_3^+,\ \tilde{S}_2^-, \tag{1.6.1}$$

в каждом из подслучаев $2, 4$ одна из них отсутствует: в подслучае 2 — $\tilde{S}_1^+$, в подслучае 4 — $\tilde{S}_2^-$.

<u>Подслучай 1.6.0: $0 \leqslant q_1$.</u> Поведение всех сепаратрис однозначно. Фазовый портрет системы описывает таблица $1.6.1_1$ (см. ниже).

<u>Подслучай 1.6.1: $q_1 < 0 < u_1$.</u> Поведение сепаратрис S_0, S^0, $\tilde{S}_1^+$ и $\tilde{S}_3^+$ неоднозначно; все они по одному разу пересекают полуось $y = 0$, $x > 0$, причем, если это происходит соответственно при значениях x

$$x_0,\ x^0,\ x_1^+\ \text{ и }\ x_3^+, \tag{1.6.2}$$

то для трех последних из этих чисел имеют место неравенства $x^0 < x_3^+ < x_1^+$, а для x_0 возможно любое из положений на оси x: 1) $x_0 < x_1^+$, 2) $x_0 = x_1^+$, 3) $x_3^+ < x_0 < x_1^+$, 4) $x_0 = x_3^+$, 5) $x^0 < x_0 < x_3^+$, 6) $x_0 < x^0$, 7) $x_0 < x^0$. Следовательно, подслучай 1.6.1 распадается на подподслучаи $1.6.1_k$, $k =$

$\overline{1,7}$, с однозначным поведением всех семи или шести сепаратрис в каждой. Фазовые портреты системы для этих подподслучаев описывают таблицы с теми же номерами.

Таблица $1.6.1_1$. ФП для подподслучая $x_1^+ < x_0$.

1	S_0	$O_0^+ \to O$	Ω_1	S_0S_2	$O_0^+ \to O_3^-$
2	$\tilde{S}_1^+$	$O_1^+ \to O$	Ω_2	$\tilde{S}_1^+S_0$	$O_0^+ \to O$
3	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O$	Ω_3	$\tilde{S}_3^+\tilde{S}_1^+$	$O_2^+ \to O$
4	S_1	$O_0^- \to O$	Ω_4	$S_1S^0\tilde{S}_3^+$	$O_0^- \to O$
5	S^0	$O \to O$	Ω_5	S^0	$O \to O$
6	S_2	$O \to O_3^-$	Ω_6	$S_2S_1\tilde{S}_2^-$	$O_0^- \to O_3^-$
7	$\tilde{S}_2^-$	$O_0^- \to O_2^-$	Ω_7	$\tilde{S}_2^-$	$O_0^- \to O_1^-$

Таблица $1.6.1_3$. ФП для подподслучая $x_3^+ < x_0 < x_1^+$.

1	$\tilde{S}_1^+$	$O_1^+ \to O_3^-$	Ω_1	$\tilde{S}_1^+$	$O_0^- \to O_3^-$
2	S_0	$O_2^+ \to O$	Ω_2	$S_0S_2\tilde{S}_1^+$	$O_2^+ \to O_3^-$
3	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O$	Ω_3	$\tilde{S}_3^+S_0$	$O_2^+ \to O$
4–7	См. таблицу $1.6.1_1$.				

Таблица $1.6.1_5$. ФП для подподслучая $x^0 < x_0 < x_3^+$.

1, 5–7	См. таблицу $1.6.1_3$.				
2	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O_3^-$	Ω_2	$\tilde{S}_3^+\tilde{S}_1^+$	$O_2^+ \to O_3^-$
3	S_0	$O_0^- \to O$	Ω_3	$S_0S_2\tilde{S}_3^+$	$O_0^- \to O_3^-$
4	S_1	$O_0^- \to O$	Ω_4	$S_1S^0S_0$	$O_0^- \to O$

Таблица $1.6.1_7$. ФП для подподслучая $x_0 < x^0 < x_3^+$.

$1, 2, 6, 7$	См. таблицу $1.6.1_5$.				
3	S_1	$O_1^- \to O$	Ω_3	$S_1 S^0 \tilde{S}_3^+$	$O_0^- \to O_3^-$
4	S^0	$O \to O_3^-$	Ω_4	$S^0 S_0 S_2$	$O \to O_3^-$
5	S_0	$O \to O$	Ω_5	S_0	$O \to O$

Таблица $1.6.1_2$. ФП для подподслучая $x_1^+ = x_0$.

1	$\tilde{S}_1^+ \equiv S_0$	$O_1^+ \to O$	Ω_1	$\tilde{S}_1^+ S_2$	$O_2^+ \to O_3^-$
3–7	См. таблицы $1.6.1_{1,3}$ с $\tilde{S}_1^+ \equiv S_0$.				

Таблица $1.6.1_4$. ФП для подподслучая $x_3^+ = x_0$.

$1, 4$–7	См. таблицы $1.6.1_{3,5}$ с $\tilde{S}_3^+ \equiv S_0$.				
2	$\tilde{S}_1^+ \equiv S_0$	$O_3^+ \to O$	Ω_2	$\tilde{S}_3^+ S_0 \tilde{S}_1^+$	$O_2^+ \to O_3^-$

В подподслучае $1.6.1_2$ $\Omega_2 = \emptyset$, в подподслучае $1.6.1_4$ $\Omega_3 = \emptyset$, в подподслучае $1.6.1_6$ $\Omega_4 = \emptyset$.

Таблица $1.6.1_6$. ФП для подподслучая $x^0 = x_0$.

$1, 2, 5$–7	См. таблицы $1.6.1_{5,7}$ с $S^0 \equiv S_0$.				
3	S_1	$O_0^- \to O$	Ω_3	$S_1 S_0 S_2 \tilde{S}_3^+$	$O_0^- \to O_3^-$

Подслучай 1.6.3: $u_1 < 0 < u_2$. Сепаратрисы S_0, S^0, $\tilde{S}_1^+$ и $\tilde{S}_3^+$, как и в подслучае 1.6.1, по одному разу пересекают полуось $y = 0$, $x > 0$, в точках (1.6.2), но в этом подслучае для двух пар из чисел (1.6.2) имеют место неравенства

$$x_0 < x_1^+, \quad x^0 < x_3^+,$$

а для всех их возможны любые неубывающие последовательности, согласующиеся с этими неравенствами, а именно:

1) $x_0 < x_3^+ < x_0 < x_1^+$, 2) $x^0 < x_0 < x_3^+ < x_1^+$, 3) $x^0 < x_0 < x_1^+ < x_3^+$, 4) $x_0 < x^0 < x_3^+ < x_1^+$, 5) $x_0 < x^0 < x_1^+ < x_3^+$, 6) $x_0 < x_1^+ < x^0 < x_3^+$, 7) $x^0 < x_3^+ = x_0 < x_1^+$, 8) $x^0 < x_0 < x_3^+ = x_1^+$, 9) $x^0 = x_0 < x_3^+ < x_1^+$, 10) $x^0 = x_0 < x_1^+ < x_3^+$, 11) $x_0 < x^0 < x_3^+ = x_1^+$, 12) $x_0 < x^0 = x_1^+ < x_3^+$, 13) $x^0 = x_0 < x_3^+ < x_1^+$.

Следовательно, подслучай 1.6.3 распадается на подподслучаи $1.6.3_k$, $k = \overline{1,13}$, с однозначным поведением всех семи, шести или пяти сепаратрис каждый.

Сначала строим фазовый портрет системы для подподслучаев $1.6.3_k$, $k = \overline{1,6}$; в каждом из них все семь сепаратрис различны (см. таблицы $1.6.3_k$, $k = \overline{1,6}$).

Таблица $1.6.3_1$. ФП для подподслучая $x^0 < x_3^+ < x_0 < x_1^+$.

1	$\tilde{S}_1^+$	$O_2^+ \to O_1^+$	Ω_1	$\tilde{S}_1^+$	$O_2^+ \to O_0^+$
2	S_0	$O_2^+ \to O$	Ω_2	$S_0 S_2 \tilde{S}_1^+$	$O_2^+ \to O_3^-$
3	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O$	Ω_3	$\tilde{S}_3^+ S_0$	$O_2^+ \to O$
4–7	См. таблицу $1.6.1_1$ с $O_0^- \rightleftarrows O_1^-$.				

Таблица $1.6.3_2$. ФП для подподслучая $x^0 < x_0 < x_3^+ < x_1^+$.

$1, 5$–7	См. таблицу $1.6.3_1$.				
2	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O_3^-$	Ω_2	$\tilde{S}_3^+ \tilde{S}_1^+$	$O_2^+ \to O_3^-$
3	S_0	$O_1^- \to O$	Ω_3	$S_0 S_2 \tilde{S}_3^+$	$O_1^- \to O_3^-$
4	S_1	$O_1^- \to O$	Ω_4	$S_2 S^0 S_0$	$O_1^- \to O$

Таблица 1.6.3$_3$. ФП для подподслучая $x^0 < x_0 < x_1^+ < x_3^+$.

1	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O_0^+$	Ω_1	$\tilde{S}_3^+$	$O_2^+ \to O_0^+$
2	$\tilde{S}_1^+$	$O_1^- \to O_1^+$	Ω_2	$\tilde{S}_1^+ \tilde{S}_3^+$	$O_1^- \to O_0^+$
3	S_0	$O_1^- \to O$	Ω_3	$S_0 S_2 \tilde{S}_1^+$	$O_1^- \to O_3^-$
4–7	См. таблицу 1.6.3$_2$.				

Таблица 1.6.3$_4$. ФП для подподслучая $x_0 < x^0 < x_3^+ < x_1^+$.

$1, 2, 6, 7$	См. таблицу 1.6.3$_2$.				
3	S_1	$O_1^- \to O$	Ω_3	$S_1 S^0 \tilde{S}_3^+$	$O_1^- \to O_3^-$
4	S^0	$O \to O_3^-$	Ω_4	$S^0 S_0 S_2$	$O \to O_3^-$
5	S_0	$O \to O$	Ω_5	S_0	$O \to O$

Таблица 1.6.3$_5$. ФП для подподслучая $x_0 < x^0 < x_1^+ < x_3^+$.

1	$\tilde{S}_3^+$	$O_3^+ \to O_0^+$	Ω_1	$\tilde{S}_3^+$	$O_2^+ \to O_0^+$
2	$\tilde{S}_1^+$	$O_1^- \to O_1^+$	Ω_2	$\tilde{S}_1^+ \tilde{S}_3^+$	$O_1^- \to O_0^+$
3	S_1	$O_1^- \to O$	Ω_3	$S_1 S^0 \tilde{S}_1^+$	$O_1^- \to O_3^-$
4	S^0	$O \to O_3^-$	Ω_4	$S^0 S_0 S_2$	$O \to O_3^-$
5–7	См. таблицу 1.6.3$_4$.				

Таблица $1.6.3_6$. ФП для подподслучая $x_0 < x_1^+ < x^0 < x_3^+$.

$1, 5–7$	См. таблицу $1.6.3_5$.				
2	S_1	$O_1^- \to O$	Ω_2	$S_1 S^0 \tilde{S}_3^+$	$O_1^- \to O_0^+$
3	S^0	$O \to O_0^+$	Ω_3	$S^0 S_0 \tilde{S}_1^+$	$O \to O_0^+$
4	$\tilde{S}_1^+$	$O \to O_1^+$	Ω_4	$\tilde{S}_1^+ S_0 S_2$	$O \to O_3^-$

Обращаясь к остальным подподслучаям, замечаем, что $\forall\, k \in \{7, \ldots, 12\}$ существует $l \in \{1, \ldots, 6\}$: таблица $1.6.3_k$ получается из таблицы $1.6.3_{l(k)}$, если подвергнуть последнюю следующей деформации: 1) отождествить в ней сепаратрисы, совпадающие в подподслучаях $1.6.3_k$, 2) удалить из нее строку с опустевшей в результате этого отождествления ячейкой, 3) заменить в ней одну из строк, соседних с пустой (для $k = 12$ — обе), логически подходящей(ими) новой(ыми). Эту идею реализует таблица $1.6.3_{14}$. Из нее видно, что $\forall\, k \in \{7, \ldots, 12\}$ номер $l(k)$ принимает два значения; таблицы $1.6.3_{l(k)}$ с этими номерами мы называем *базовыми* для таблицы $1.6.3_k$.

Таблицу $1.6.3_{13}$ мы выписываем явно.

Таблица $1.6.3_{14}$. ФП для подподслучаев $1.6.3_{7,\ldots,12}$.

Подподслучай k	№ $l(k)$	Тождественные сепаратрисы	Пустая строка	Новая строка (Новые строки)					
7	$1, 2$	$\tilde{S}^+ \equiv S_0$	3	2	$\tilde{S}_3^+ = S_0$	$O_3^+ \to O$	Ω_2	$\tilde{S}_3^+ S_2 \tilde{S}_1^+$	$O_2^+ \to O_3^-$
8	$2, 3$	$\tilde{S}_3^+ \equiv \tilde{S}_1^+$	2	–					
9	$2, 4$	$S^0 \equiv S_0$	4	3	S_1	$O_1^- \to O$	Ω_3	$S_1 S_0 S_2 \tilde{S}_3^+$	$O_1^- \to O_3^-$
10	$3, 5$	$S^0 \equiv S_0$	4	3	S_1	$O_1^- \to O$	Ω_3	$S_1 S_0 S_2 \tilde{S}_1^+$	$O_1^- \to O_3^-$
11	$4, 5$	$\tilde{S}_3^+ \equiv \tilde{S}_1^+$	2	3	S_1	$O_1^- \to O$	Ω_3	$S_1 S^0 \tilde{S}_1^+$	$O_1^- \to O_3^-$
12	$5, 6$	$S^0 \equiv \tilde{S}_1^+$	3	2	S_1	$O_1 \to O$	Ω_2	$S_1 S^0 \tilde{S}_3^+$	$O_1^- \to O_0^+$
				4	$S^0 \equiv \tilde{S}_1^+$	$O \to O_1^+$	Ω_4	$\tilde{S}_1^+ S_0 S_2$	$O \to O_3^-$

Таблица $1.6.3_{13}$. ФП для подподслучая $x_3^+ = x_1^+$, $x^0 = x_0$.

1	$\tilde{S}_3^+ \equiv \tilde{S}_1^+$	$O_3^+ \to O_1^+$	Ω_1	$\tilde{S}_3^+$	$O_2^+ \to O_0^+$
3	S_1	$O_1^- \to O$	Ω_3	$S_1 S^0 S_2 \tilde{S}_1^+$	$O_1^- \to O_3^-$
5	$S^0 \equiv S_0$	$O \to O$	Ω_5	S^0	$O \to O$
6	S_2	$O \to O_3^-$	Ω_6	$S_2 S_1 \tilde{S}_2^-$	$O_1^- \to O_3^-$
7	$\tilde{S}_2^-$	$O_1^- \to O_2^-$	Ω_7	$\tilde{S}_2^-$	$O_1^- \to O_0^-$

Переходим к рассмотрению подслучаев $2, 4$ случая 1.6 (см. таблицу 1.6.0).

Подслучай 1.6.2: $u_1 = 0$. Сепаратриса $\tilde{S}_1^+$ отсутствует. Для взаименого расположения S_0, S^0 и $\tilde{S}_3^+$ возможны варианты: 1) $x_0 > x_3^+$, 2) $x_0 = x_3^+$, 3) $x^0 < x_0 < x_3^+$, 4) $x_0 = x^0$, 5) $x_0 < x^0$. Возникают подподслучаи $1.6.2_k$, $k = \overline{1, 5}$.

Но те же пять вариантов взаимного расположения сепаратрис S_0, S^0 и $\tilde{S}_3^+$ имеют место и в подслучаях 1.6.1, 1.6.3, если изучать в них вопрос о взаимном расположении лишь этих сепаратрис (забыть о $\tilde{S}_1^+$). При нашем (полном) изучении подслучаев 1.6.1, 1.6.3 эти пять вариантов реализуются в подслучае 1.6.1 для подподслучаев $1.6.1_k$, $k = \overline{3, 7}$, в подслучае 1.6.3 для подподслучаев $1.6.3_k$, $k = 1, 2, 4, 7, 9$ соответственно. Используя эти соображения, приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Таблица $1.6.2_k$ (*ФП для подподслучая* $1.6.2_k$) *получается*

при $k = 1$ *из любой из таблиц* $1.6.1_3$, $1.6.3_1$,

при $k = 3$ *из любой из таблиц* $1.6.1_5$, $1.6.3_4$,

при $k = 5$ *из любой из таблиц* $1.6.1_7$, $1.6.3_9$,

при $k = 2$ *из любой из таблиц* $1.6.1_4$, $1.6.3_2$,

при $k = 4$ *из любой из таблиц* $1.6.1_6$, $1.6.3_7$,

а) заменой в ней O_1 *на* O_0, *б) удалением из нее строки 1, а из ее строки 2 — символа* $\tilde{S}_1^+$.

Подслучай 1.6.4: $u_2 = 0$. Сепаратриса S_2^- отсутствует. Для взаимного расположения сепаратрис S_0, S^0, $\tilde{S}_1^+$ и $\tilde{S}_3^+$ возможны те же 13 вариантов, что и в подслучае 1.6.3, откуда следует что подслучай 1.6.4 распадается на 13 подподслучаев $1.6.4_k$, $k = \overline{1, 13}$. $\forall\, k \in \{1, \ldots, 13\}$ таблица $1.6.4_k$ (ФП для подподслучая $1.6.4_k$) получается из таблицы $1.6.3_k$ *а*) заменой в ней O_2 на O_0, *б*) удалением из нее строки 7, а из ее строки 6 — символа $\tilde{S}_2^-$.

Литература

1. Андреев А. Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. СПб.: Изд. С.-Петербург. ун-та, 2003. 160 с.

2. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2007, N 4. С. 17–26. http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal

3. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. II // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2008, N 1. С. 1–13. http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal

4. Андреев А. Ф., Андреева И. А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. III // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2008, N 3. С. 39–53. http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal

5. Андронов А. А. и др. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.

Андреев Алексей Федорович — профессор кафедры дифференциальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета;

Дом. телефон: 271–64–27
раб. телефон: 428–69–59, местн. 3059

Андреева Ирина Алексеевна — доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета;

Дом. телефон: 271–64–27
E-mail: irandr@inbox.ru