А. Ф. Андреев

Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений

УДК 517. 925 : (0. 75. 8)
ББК 22. 1616 я 73
А 65

Р е ц е н з е н т ы: кафедра мат. анализа Рос. гос. пед. ун-та им. А. И. Герцена (зав. каф. д-р физ.-мат. наук, проф. В.Д.Будаев), д-р физ.-мат. наук, проф. Г.С.Осипенко (С.-Петерб. гос. техн. ун-т)

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета

Андреев А. Ф.

Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений: Учеб. пособие. — СПб.: Издательство С.-Петерб. университета, 2001. 160 с.

ISBN 5-288-02634-3

В пособии излагаются методы, позволяющие исследовать поведение траекторий достаточно гладкой динамической системы в окрестности ее состояния равновесия. Рассматриваются как классические, так и более поздние результаты в этой области, в том числе результаты автор.

Книга предназначена для студентов старших курсов, аспирантов и специалистов в области качественной теории дифференциальных уравнений.

Библиогр. 42 назв. Ил. 35.

Тем. план 2001, № 61 **ББК 22.161.6я73**

ISBN 5-288-02634-3

Оглавление

Предисловие

Задачей качественной теории автономных систем дифференциальных уравнений является разработка методов, позволяющих исследовать поведение траекторий такой системы во всей области ее задания без интегрирования системы. Первый шаг такого исследования состоит в изучении поведения траекторий системы в окрестности каждой из ее особых точек. Развитие методов локального изучения системы — задача локальной качественной теории дифференциальных уравнений.

Основоположниками качественной теории дифференциальных уравнений являются знаменитый французский математик Жюль Анри Пуанкаре (1854–1912) и знаменитый русский математик Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918). Им принадлежат постановки исходных задач, плодотворные идеи их решений и фундаментальные конкретные результаты, получившие широкий резонанс в научном мире. Их первыми последователями были швед И. Бендиксон (1861–1920), француз А. Дюлак (1870–1955), немец О. Перрон (1880–1975), американец Д. Биркгофф (1884–1944), русские В. В. Степанов (1889–1950), И. Г. Петровский (1901–1973), Н. Г. Четаев (1902–1959) и др. Бурное развитие качественной теории дифференциальных уравнений во всем мире возобновилось во второй половине XX столетия после окончания Второй мировой войны и выхода в свет в 1949 г. одноименной монографии москвичей В. В. Немыцкого и В. В. Степанова. В Санкт-Петербургском (тогда Ленинградском) государственном университете школу качественной теории дифференциальных уравнений основал Николай Павлович Еругин (1907–1990), учениками которого являются нынешний заведующий кафедрой дифференциальных уравнений нашего университета В. А. Плисс и автор этих строк.

Основу данной книги составляет материал одноименного спецкурса, читаемого автором на математико-механическом факультете СПбГУ. Этот курс имеет своей целью изложение методов, позволяющих исследовать поведение траекторий достаточно гладкой динамической системы в окрестности ее состояний равновесия. Курс включает в себя результаты, изложенные как в известных монографиях, так и в журнальных статьях (в частности, в статьях автора).

Предлагаемая книга посвящена плоским динамическим системам. В ней сначала для системы класса $C!$ (непрерывность + единственность) освещается вопрос о возможных топологических типах расположения траекторий в малой окрестности изолированной особой точки. Затем рассматриваются квазиоднородные системы, и для них излагаются методы исследования особых точек на предмет выяснения их топологических типов. Показывается, что для системы с невырожденным однородным приближением в особой точке и достаточно гладкими возмущениями высшего порядка малости излагаемые методы достаточны для полного решения задачи с точностью до решения проблемы различения центра, фокуса и центро-фокуса. Эта теория иллюстрируется примером исследования системы с невырожденным линейным приближением в особой точке. Рассматриваются также случаи, когда система имеет в особой точке ненулевое линейное приближение с одним или с двумя нулевыми характеристическими корнями. Затрагивается и проблема различения центра и фокуса.

Во Введении мы напоминаем читателю общие свойства решений и траекторий n-мерной ($n \geqslant 1$) автономной системы дифференциальных уравнений, известные ему из общего курса обыкновенных дифференциальных уравнений, а также рассматриваем случай, когда $n = 1$.

В книге принят следующий порядок нумерации глав, параграфов, утверждений, формул. Главы нумеруются римскими цифрами, параграфы, теоремы, формулы и прочие объекты — арабскими. В каждой главе нумерация параграфов своя — одним порядковым числом, нумерация условий, лемм, теорем, формул также своя — двумя числами (номер параграфа, номер объекта данной категории). При ссылке на определение, теорему, формулу или другой объект данной главы указывается номер объекта в этой главе. При ссылке на такой объект из другой главы перед его номером в этой главе ставится ее римский номер.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему коллеге по кафедре Александру Васильевичу Осипову, оказавшему автору неоценимую помощь при подготовке рукописи к печати.

0. Введение

§ 1. Общие свойства движений и траекторий автономных систем дифференциальных уравнений

Будем трактовать пространство R^n, $n \in N$, одновременно и как аффинное пространство с точками $p = (p^1, \ldots, p^n)$, $p^k \in R, k = \overline{1, n}$, и как ассоциированное с ним евклидово линейное пространство с векторами $\vec{pq} = (q^1 - p^1, \ldots, q^n - p^n)$ и с ортонормированным базисом. Вектор $\vec{Op} = (p^1 - 0, \ldots, p^n - 0) = (p^1, \ldots, p^n)$ и точку p не будем различать и будем обозначать одним и тем же символом p. Символом $|p|$ будем обозначать длину вектора p.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{dt} = V(p)\,, \tag{1.1}$$

где $t \in R$, $p = (p^1, p^2, \ldots, p^n) \in R^n$, $n \geqslant 1$, вектор-функция $V : D \to R^n$ — непрерывна, $D(\subset R^n)$ — область, $R \times D$ — область единственности для решений системы (1.1). Задание системы (1.1) равносильно заданию в области D непрерывного векторного поля V — поля скоростей движений, описываемых этой системой. Область D называется *фазовым пространством* системы.

Решение (движение) системы (1.1), выпущенное из точки $p \in D$ в момент $\tau \in R$, будем обозначать символом $\varphi(t, \tau, p)$ и считать заданным на его максимальном (относительно области D) интервале существования $I_{\max}$. Множество $\{\varphi(t, \tau, p),\ t \in I_{\max}\}$ называется *траекторией* этого движения, его ограничение на $t \geqslant \tau$ $(t \leqslant \tau)$ — *положительной* (*отрицательной*) *полутраекторией* этой траектории. Движение, выпущенное из точки $p \in D$ в момент $\tau = 0$, будем обозначать символом $\varphi(t, p)$, а его максимальный интервал существования — символом $I_p = (\alpha_p, \beta_p)$.

Из общего курса обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [10, 12, 23]) известны следующие свойства движений и траекторий автономной системы (1.1).

1. **Свойство инвариантности движений относительно сдвига по t.** *Если $\varphi(t), t \in (\alpha, \beta)$, — движение системы, то $\forall \tau \in R$ $\varphi(t + \tau)$, $t \in (\alpha - \tau, \beta - \tau)$, — движение системы.*

2. **Свойство единственности для траекторий.** *$\forall p \in D$ и $\forall \tau \in R$ $\varphi(t, \tau, p) \equiv \varphi(t - \tau, p), t - \tau \in I_p$, т. е. движение $\varphi(t, \tau, p)$, выпущенное из точки p в момент τ, проходит ту же траекторию L_p, что и движение $\varphi(t, p)$, но с запаздыванием на τ. Здесь и далее $L_p = \{\varphi(t, p),\ t \in I_p\}$, $L_p^{+(-)} = L_p \big|_{t \geq 0\ (t \leq 0)}$.*

3. **Признак продолжимости движения на все $t \geqslant 0$ $(t \leqslant 0)$.** *Если $L_p^{+(-)} \subset K$(компакт) $\subset D$, то для движения $\varphi(t, p)$ $I_p = (\alpha_p, +\infty)$ $(I_p = (-\infty, \beta_p))$.*

4. **Свойство интегральной непрерывности.** $\varphi(t, p) \in C(U)$, $U = \{(t, p) \mid p \in D, t \in I_p\}$.

5. **Свойство группы.** *$\forall p \in D$ $\varphi(t_2, \varphi(t_1, p)) = \varphi(t_1 + t_2, p)$ для всех t_1, t_2, при которых имеют смысл обе части равенства.*

6. **Свойство потока.** *Если $\forall p \in D$ движение $\varphi(t, p)$ определено на $I_p = R$, то совокупность всех этих движений представляет собой однопараметрическую группу преоб-*

разований области D на себя (или динамическую систему в D, или непрерывный фазовый поток на D).

Если не все движения системы продолжимы на всю ось t, то существует непрерывная положительная функция $\psi : D \to R$, такая, что после умножения правых частей системы на $\psi(p)$ получается *орбитально эквивалентная система* (т. е. система, имеющая те же траектории), любое движение $\varphi(t, p)$ которой продолжимо на $I_p = R$ [22, с. 28–30]. При этом для любой траектории L_p полученной системы будут иметь смысл понятия α- и ω-*предельных* множеств A_p и Ω_p :

$$A_p\,(\Omega(p) = \{q \in D|\, \exists\, t_k \to -\infty\,(+\infty) :\, \varphi(t_k, p) \to q \text{ при } k \to +\infty\}.$$

7. **Топологические типы траекторий.** *$\forall\, p \in D$ траектория L_p системы* (1.1) *есть либо* а) *точка* (точка покоя, состояние равновесия), *либо* б) *простая замкнутая кривая* (замкнутая траектория, цикл), *либо* в) *простая параметрическая кривая — гомеоморфный образ прямой* (незамкнутая траектория).

8. **Свойства множеств A_p и Ω_p.** *$\forall\, p \in D$ предельные множества траектории L_p A_p и Ω_p замкнуты в D и инвариантны (т. е. состоят из целых траекторий); если полутраектория $L_p^{+(-)} \in \mathcal{L}^{+(-)}$ (устойчива по Лагранжу), т. е. если $L_p^{+(-)} \subset K$ (компакт) $\subset D$, то $\Omega_p\,(A_p)$ не пусто и связно.*

§ 2. Векторное поле на прямой

Пусть в (1.1) $n = 1$, $p^1 = x$, $V :\, I = (a, b) \to R$, так что (1.1) есть автономное уравнение с фазовыи пространством $I \subset R$

$$\dot{x} = V(x). \tag{2.1}$$

Для его движений справедливы свойства 1) — 8) с точностью до того, что в свойстве 7) возможны лишь случаи а) и в).

Пусть $\quad I_0 = \{x_0 \in I,\, V(x_0) = 0\}, \qquad I \setminus I_0 = \cup_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma,$

где $I_\gamma, \gamma \in \Gamma \subset N$, — интервалы, на которые точки множества I_0 делят I.

Теорема 2.1. *Траекториями уравнения* (2.1) *являются* 1) *точки* $x_0 \in I_0$ (*точки покоя*) *и* 2) *интервалы* I_γ, $\gamma \in \Gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x_0 \in I_0$, то траектория уравнения (2.1) $L_{x_0} = \{x_0\}$. Пусть $x^* \in I_{\gamma_0} = (a_0, b_0)$, $\gamma_0 \in \Gamma$. Тогда $L_{x^*} = I_{\gamma_0}$, ибо интервал I^* оси x, пробегаемый полным движением $\varphi(t, x^*)$ уравнения (2.1), не может быть шире, чем I_{γ_0} (так как любая из точек a_0, b_0 есть либо точка покоя этого уравнения, либо граничная точка интервала I) и не может быть уже, чем I_{γ_0} (иначе в I_{γ_0} существует точка $x_1 \in I_0$). □

Следствие 2.1. *Если $V(x) \equiv 0$ в I, то $\forall\, x_0 \in I\;\; L_{x_0} = \{x_0\}$. Если $V(x) \neq 0\; \forall\, x \in I$, то $\forall\, x_0 \in I\;\; L_{x_0} = I$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость этого утверждения очевидна. □

Теорема 2.2. *Пусть x_0 — изолированное состояние равновесия уравнения* (2.1). *Тогда оно — асимптотически устойчиво по Ляпунову, вполне неустойчиво или полуустойчиво в зависимости от того соответственно, убывает $V(x)$ в точке x_0, возрастает или имеет в ней экстремум.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_0 является правым концом интервала I_{γ_1} и левым концом интервала I_{γ_2}, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Если $V(x) > 0\,(< 0)$ в I_{γ_1}, то $\forall\, x_1 \in I_{\gamma_1}$ движение уравнения (2.1)

$\varphi(t, x_1) \to x_0$ при $t \to +\infty(-\infty)$; если $V(x) < 0\,(> 0)$ в I_{γ_2}, то $\forall\, x_2 \in I_{\gamma_2}$ $\varphi(t, x_2) \to x_0$ при $t \to +\infty\,(-\infty)$. $\square$

Теорема 2.3. *Если в уравнении* (2.1) *функция* $V(x)$ *определена при всех* $x \in R$ *и ограничена, то* $\forall\, x_0 \in R$ *максимальный интервал существования движения* $\varphi(t, x_0)$ *уравнения* (2.1) $I_{x_0} = R$.

Доказательство. При выполнении условий теоремы уравнение (2.1), будучи рассмотрено на плоскости t, x, является почти линейным [12, с. 61]. $\square$

Замечание 2.1. Если в уравнении (2.1) функция $V(x)$ — периодическая с периодом, скажем, 2π, то, заменяя в нем x на θ и отождествляя на R точки $\theta + 2k\pi$, $k \in Z$, можем считать фазовым пространством уравнения (2.1) окружность $S^1 : \rho = 1$, $\theta \in R$, где ρ, θ — полярные координаты на плоскости R^2. В этом случае траекториями уравнения (2.1) являются точки покоя $\theta_0 \in S^1$ и дополнительные к множеству таких точек дуги S^1_γ окружности S^1. При отсутствии точек покоя единственной траекторией будет окружность S^1.

§ 3. Автономные системы на плоскости

3.1. Общие свойства

Пусть в системе (1.1) $n = 2$, $p = (x, y)$, $V = (X, Y)$. Тогда эта система принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \tag{3.1}$$

где функции $X, Y : D \to R$ — непрерывны, область D есть область единственности для траекторий системы. Для системы (3.1) справедливы все свойства 1.1 — 1.8, а также общие свойства движений и траекторий плоских автономных систем (изложенные, например, в книгах [22, гл. II, § 1; 23, § 54; 32, гл. VII, § 4]). В частности, для нее справедливы следующие предложения.

Теорема 3.1 ([22, с. 54; 32, с. 186]). *Пусть* L *— замкнутая траектория системы* (3.1), D_L *— ограниченная ею область плоскости* x, y. *Если* $D_L \subset D$, *то в* D_L *существует хотя бы одна точка покоя этой системы.*

Теорема 3.2 ([22, с. 61; 32, с. 190]). *Пусть система* (3.1) *имеет лишь изолированные точки покоя. Если траектория* L_p *устойчива по Лагранжу при* $t \to +\infty$ *(при* $t \to -\infty$*) (т. е.* $L_p^{+(-)} \subset K$ *(компакт)* $\subset D$*), то для ее предельного множества* $\Omega_p\,(A_p)$ *как инвариантного множества системы* (3.1) *могут представиться лишь следующие возможности:*

1) $\Omega_p\,(A_p) = \{p_0\}$ *— точка покоя системы;*

2) $\Omega_p\,(A_p) = L$ *— замкнутая траектория (цикл) системы;*

3) $\Omega_p\,(A_p) = \Gamma$ *— особый цикл системы, т. е. замкнутая кривая, состоящая из конечного числа точек покоя системы и конечного или счетного числа траекторий, каждая из которых любым своим концом примыкает к одной из упомянутых точек покоя.*

3.2. Постановка локальной задачи

Пусть $p_0 = (x_0,\, y_0)(\in D)$ — изолированная точка покоя системы (3.1). Не ограничивая общности, будем считать, что $p_0 = O = (0, 0)$, т. е. совпадает с началом координат O. Наша цель — изучить поведение траекторий этой системы в некоторой окрестности точки O. В

общем курсе обыкновенных дифференциальных уравнений [10, 12, 23] рассматривалась на этот предмет система
$$\dot{p} = Ap\,, \tag{3.2}$$
где A — постоянная неособая матрица. Было установлено, что для расположения ее траекторий в окрестности точки O (а в силу однородности системы и на всей плоскости R^2) возможны следующие варианты — *типы Пуанкаре:* O — седло, если собственные числа матрицы A λ_1 и λ_2 удовлетворяют неравенству $\lambda_1\lambda_2 < 0$, O — узел (или простой узел), если λ_1, λ_2 — вещественны, различны и $\lambda_1\lambda_2 > 0$; O — вырожденный узел, если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, но матрица A — недиагональна; O — особый (или дикритический) узел, если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ и матрица A диагональна; O — фокус, если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha\beta \neq 0$; O — центр, если $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, $\beta \in R$, $\beta \neq 0$ (см., например, [10, с. 89–93; 22, с. 84–93]).

Пусть система (3.1) приводится к виду
$$\dot{p} = Ap + f(p), \tag{3.3}$$
где A — постоянная матрица, $f \in C(D)$, $O \in D$, $f(O) = O$, $|f(p)| = o(|p|)$ при $|p| \to 0$, точка O — изолированное состояние равновесия. Для точки покоя O системы (3.3) возникают следующие вопросы.

1) При каких условиях на λ_1, λ_2 и на f при переходе от системы (3.2) к системе (3.3) тип Пуанкаре точки O сохраняется?

2) Каким будет расположение траекторий системы (3.3) в окрестности точки O а) в случаях, когда условия, упомянутые в п. 1), не выполняются, б) в случаях, когда A — ненулевая матрица, $\lambda_1\lambda_2 = 0$?

3) Как определить для системы (3.3) тип точки O в случаях, когда эта система имеет в точке O нулевое линейное приближение (в (3.3) A — нулевая матрица)?

Опишем методы, которые позволяют получить весьма полные ответы на эти вопросы (по крайней мере для достаточно гладкой системы вида (3.1)).

3.3. Методы исследования

Точка O называется *элементарной особой точкой* системы (3.1), если в ее окрестности система может быть записана в виде (3.3), где матрица A либо а) невырожденная: ее собственные числа λ_1, λ_2 — ненулевые, либо б) имеет вырождение коразмерности 1: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Для элементарной особой точки топологический тип (но не тип Пуанкаре) в случае а) уже при $f \in C^1(D)$ совпадает с таковым для линейного приближения системы, исключая разве лишь случай, когда $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, $\beta \in R$ (см. § III.5 и IV.4), а в случае б) выясняется достаточно просто (см. теорему V.I.1$'$, а также теоремы из § II.4, III.1, III.2).

Если O — неэлементарная особая точка, то к системе применяются те или иные методы разрешения особенности. К ним относятся: полярное раздутие точки O [22, 34], σ-процесс [11, 33], метод Фроммера [6, 36], локальный метод Брюно [13, 14].

Полярное раздутие изолированной особой точки O достаточно гладкого векторного поля V в классической редакции состоит в переходе на плоскости R^2 от декартовых координат x, y к полярным координатам r, φ с последующей заменой $\rho = 1 + r$. При этом точка O растягивается в окружность $S : \rho = 1$, а ее проколотая δ-окрестность $B_0 : 0 < r < \delta$ диффеоморфно отображается на кольцевую область $H_0 : 1 < \rho < 1 + \delta$. Этими заменами координат на H_0 индуцируется векторное поле V_1 той же гладкости, что и исходное поле V. Поле V_1 после перехода к орбитально эквивалентному полю $\tilde{V}_1$ распространяется (возможно, с потерей нескольких единиц порядка гладкости) на кольцо $H : 1 \leqslant \rho < \delta$.

При этом особая точка O поля V расщепляется на несколько ($\geqslant 0$) особых точек поля $\widetilde{V}_1$, расположенных на S, каждая из которых, вообще говоря, проще исходной точки O.

Если такие точки на S существуют и все они элементарны, то говорят, что особенность O разрешена. Остается выяснить типы полученных элементарных особых точек (которые разбиваются на пары $(\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$, $(\cos(\varphi_i+\pi), \sin(\varphi_i+\pi))$, $i \in \overline{1,n}$, $n \in N$), изобразить расположение траекторий поля V_1 в кольце H и, сжимая кольцо H в круг $B: 0 \leqslant r < \delta$, получить локальный фазовый портрет расположения траекторий исходного поля V в окрестности B точки O. Если среди особых точек поля $\widetilde{V}_1$ на S есть неэлементарные, то каждая их этих точек в свою очередь раздувается в окружность, и т. д.

Если индуцированное поле $\widetilde{V}_1$ не имеет на S особых точек, то для него S — замкнутая траектория (цикл). Она может быть предельным циклом (тогда для поля V точка O — фокус), а может иметь в любой своей окрестности замкнутые траектории поля V_1 (тогда для поля V точка O — центр или центро-фокус).

Модификация этого метода [34] позволяет отобразить круг B на полную окрестность окружности S, которая называется при этом вклеенной окружностью.

Доказывается [34], что если поле V — аналитическое или бесконечно гладкое, но не плоское в точке O ($\exists\exists\, k \in N$, $c > 0$, $\delta > 0 : |V(x,y)| \geqslant r^k$ в B), то конечным числом шагов процесса последовательных полярных раздутий можно либо полностью выяснить топологический тип точки O, либо убедиться в том, что точка O — центр, фокус или центро-фокус.

Эквивалентом полярного раздутия изолированной особой точки O достаточно гладкого поля V является σ-процесс. Он состоит в следующем. С помощью замен $y = ux$ и $x = vy$ точка O растягивается в проективную прямую $L = RP^1$, круг B — в лист Мебиуса $\overline{M}$, проколотый круг B_0 диффеоморфно отображается на $M = \overline{M} \setminus L$.

Метод Фроммера имеет целью выявить все TO-кривые (характеристические орбиты) системы (см. § II.3), выяснить структуру их совокупности и на этой базе определить топологический тип точки O. Для этого сначала выясняются возможные асимптотики TO-кривых в точке O, а затем исследуются вопросы о существовании и структуре множества TO-кривых с каждой из этих асимптотик.

Согласно методу Брюно окрестность B сложной особой точки O поля V разбивается на конечное число криволинейных секторов S_i, в каждом из которых поле V имеет свое определяющее приближение (укорочение) V_i. Последнее в простых ситуациях исследуется путем построения для него нормальной формы и ее интегрирования. В сложных случаях производится степенное преобразование плоскости, раздувающее особенность O в многообразие M, а сектор S_i — в область U_i, $M \subset \overline{U}_i$. При этом поле V_i преобразуется в новое поле $\widetilde{V}_i$ на $\overline{U}_i$, и дело приводится к исследованию особых точек поля $\widetilde{V}_i$, лежащих на M.

Методы Фроммера и Брюно позволяют исследовать неэлементарную особую точку с тем же успехом, что и метод полярного раздутия или σ-процесс, но представляются более предпочтительными для практического применения, ибо более целенаправленны: не допускают “холостых"шагов. Они позволяют также в достаточно гладком случае найти детальные асимптотики TO-кривых. Метод Брюно применим и к системам порядка $n > 2$.

3. 4. О содержании книги

В главе I для системы общего вида (3.1) изучается вопрос о возможных топологических типах изолированной особой точки O. В главе II рассматривается квазиоднородная (алгеброидная) система (II.2.1), производится полярное раздутие ее особой точки O и изучается полученная при этом система (II.2.6). В главе III исследуются проблемы различения, возникаюшие в главе II при изучении особых точек системы (II.2.6). В главе IV излагаются классические подходы к решению проблемы различения центра, фокуса и центро-фокуса. В § 1 главы V методом σ-процесса исследуется особая точка O аналитической системы вида (3.3) с одним нулевым собственным числом матрицы A, а в § 2 методом Фроммера — особая точка O такой же системы с нильпотентной матрицей A.

Г л а в а I
Системы 2-го порядка общего вида

В главе I мы рассматриваем систему общего вида (0.3.1) и выясняем для нее все логически возможные топологические типы расположения траекторий в малой окрестности изолированной точки покоя O, а также указываем рациональные способы их описания. Материал этой главы опирается на главу I статьи И. Бендиксона [33], главу II монографии В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [22], главу VII книги Ф. Хартмана [32] и главу I книги автора [6].

В § 1 — 3 всюду под терминами “система“движение“траектория"понимаются система (0.3.1), ее движения и траектории.

§ 1. Альтернатива Бендиксона относительно особой точки O системы

Определение 1.1. Круг $B : |p| < \delta,\ \delta > 0$, обладающий свойствами: 1) $\overline{B} \subset D$, 2) $V(p) \neq 0$ в $\overline{B}$ при $|p| > 0$, будем называть *малой окрестностью особой точки* O (или *малым O-кругом*) в фазовом пространстве системы. Положим $B_0 = B \setminus \{O\}$, $C = \partial B$.

З а м е ч а н и е 1.1. Далее символ B всегда означает малый O-круг в фазовом пространстве системы. Иногда этот круг будет наделяться дополнительными свойствами.

Определение 1.2. Пусть $p \in D$, $p \neq O$. Если полутраектория $L_p^{+(-)} \to O$ (т. е. движение $\varphi(t,p)$, $t \in I_p = (\alpha_p, \beta_p)$, обладает свойством: $\varphi(t,p) \to O$ при $t \to \beta_p(\alpha_p)$), то она называется $O^{+(-)}$*-кривой* системы (при этом согласно свойству 0.1.3 $\beta_p = +\infty$ $(\alpha_p = -\infty)$). $O^{\pm}$-кривые системы называются ее *O-кривыми* (рис. 1.1).

Лемма 1.1. *Пусть круг B обладает свойством: существуют последовательности $\{p_k, k \in N\} \subset B_0$ и $\{t_k, k \in N\} \subset R_+(R_-)$ такие, что $p_k \to O$ при $k \to +\infty, \forall\, k \geqslant 1$ $q_k = \varphi(t_k, p_k) \in C$, $\varphi([0,t_k), p_k) \subset B$. Если q_0 — точка сгущения последовательности $\{q_k, k \in N\}$, то $L_{q_0}^{-(+)} \subset \overline{B}$.* (Здесь $R_+ = [0, +\infty)$, $R_- = (-\infty, 0]$.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $\{t_k, k \in N\} \subset R_+$. Не ограничивая общности, будем считать, что $q_k \to q_0$ при $k \to +\infty$.

1) Покажем сначала, что $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. По условию $\varphi(t,O) \equiv O$, $t \in R$. Зафиксируем произвольное число $T > 0$ и рассмотрим решение $\varphi(t,O)$ на отрезке $[-T,T]$. Так как $p_k \to O$ при $k \to +\infty$, на основании свойства 0.1.4 по числу T можно указать число $k_0 \in N : \forall\, k > k_0\ |\varphi(t,p_k)| < \delta$ при $|t| \leqslant T$. Но по условию $\forall\, k \geqslant 1$ $|\varphi(t_k,p_k)| = \delta$. Следовательно, $\forall\, k > k_0$ $t_k > T$. А это и означает, что $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

2) Покажем теперь, что $L_{q_0}^- \subset \overline{B}$. Допустим противное: $\exists\, t_0 > 0$ такое, что $p_0 = \varphi(-t_0, q_0) \notin \overline{B}$. Применяя к решению $\varphi(t,q_0)$, $t \in [-t_0, 0]$, свойство 0.1.4, заключаем: $\forall\, \varepsilon \in (0, |p_0| - \delta)$ $\exists\, k_0 \in N$ такое, что $\forall\, k > k_0$ $\varphi(t,q_k)$ определено на $[-t_0, 0]$ и $|\varphi(t,q_k) - \varphi(t,q_0)| < \epsilon$ при $t \in [-t_0, 0]$, а потому $\forall\, k > k_0$ $\varphi(-t_0, q_k) \notin \overline{B}$. Но по условию $\forall\, k \geqslant 1$ $\varphi([-t_k, 0), q_k) = \varphi([0,t_k), p_k) \subset B$. Следовательно, $\forall\, k > k_0$ имеет место неравенство $t_k < t_0$, что противоречит доказанному в пункте 1). $\square$

Следствие 1.1. *В любой окрестности U особой точки O система имеет хотя бы одну целую полутраекторию $L^\sigma \neq \{O\}$, $\sigma \in \{+,-\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U — произвольная окрестность точки O, $U \subset D$. Возьмем круг B такой, что $\overline{B} \subset U$. Покажем, что система имеет в $\overline{B}$ целую полутраекторию $L^\sigma \neq \{O\}$.

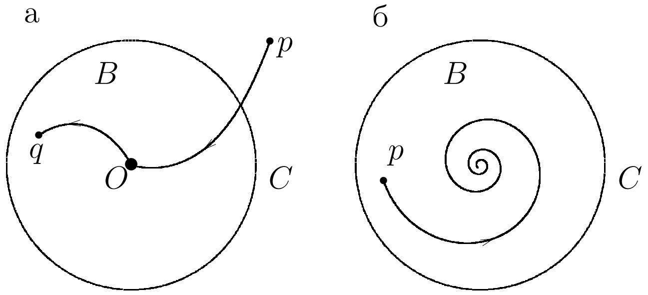

Рис. 1.1. $O^{\pm}$-кривые.
а — O^{+}-кривая L_p^{+} и O^{-}-кривая L_q^{-}; б — O^{+}-кривая L_p^{+}

Если $\exists\, p_0 \in B_0 : L_{p_0}^{+} \subset \overline{B}$, то последнее утверждение справедливо. Пусть $\forall\, p \in B_0$ полутраектория $L_p^{+} \not\subset \overline{B}$. Рассмотрим последовательность $\{p_k, k \in N\} \subset B_0,\ p_k \to O$ при $k \to +\infty$. $\forall\, k \geqslant 1$ по допущению $L_{p_k}^{+} \not\subset B$ и, следовательно, $\exists\, t_k > 0 : \varphi([0, t_k), p_k) \subset B$, $q_k = \varphi(t_k, p_k) \in C$. Пусть q_0 — точка сгущения последовательности $\{q_k, k \geqslant 1\}$. По лемме 1.1 $L_{q_0}^{-} \subset \overline{B} \subset U$. □

Теорема 1.1. *Если O — изолированная особая точка системы, то либо* А) *система имеет O-кривые, либо* Б) *в любой окрестности точки O существует замкнутая траектория системы, окружающая O.*

Доказательство. А) Пусть существует окрестность U точки O, в которой нет замкнутых траекторий системы. Рассмотрим малый O-круг B, обладающий свойством: $\overline{B} \subset U$. Тогда в $\overline{B}$ нет замкнутых траекторий, но, согласно следствию 1.1, в нем есть целая полутраектория системы, отличная от точки O. Пусть это будет полутраектория L_p^{+}, $p \in B_0$. Для ее предельного множества Ω_p согласно теореме 0.3.2 могут представиться лишь следующие возможности: 1) $\Omega_p = \{O\}$, 2) $\Omega_p = \{\Gamma\}$ — особый цикл системы, состоящий из точки O и траекторий $L_q \subset B_0$, $L_q^{\pm} \to O$. В первом случае $L_p^{+} \to O$, т. е. L_p^{+} есть O^{+}-кривая системы. Во втором случае для каждой $L_q \subset \Gamma$, $q \neq O$, $L_q^{\pm}$ суть O-кривые системы.

Б) Пусть в любой окрестности U точки O существует замкнутая траектория системы. Тогда для любой U такая траектория L существует и в малом O-круге B, $\overline{B} \subset U$. По теореме 0.3.1 L окружает точку O, т. е. имеет место утверждение Б) теоремы. □

§ 2. Случай А: система имеет O-кривые

2.1. Минимальное число O-кривых

Определение 2.1. Будем говорить, что малый O-круг B обладает *A-свойством,* если его граница C имеет общую точку хотя бы с одной O-кривой системы. Пусть L_p^{s}, $p \in D$, $s \in \{+, -\}$, такая O-кривая. В этом случае будем называть для системы

1) круг B — *B_A-окрестностью* точки O (или *B_A-кругом*);
2) O-кривую $L_q^{s} (\subset L_p^{s})$, такую, что $q \in C$, $L_q^{s} \setminus \{q\} \subset B$, — *$CO^{s}$-кривой;*
3) $CO^{\pm}$-кривые — *CO-кривыми* (рис. 2.1).

Следствие 2.1. *В B_A-круге не может быть замкнутых траекторий системы.*

Доказательство. Справедливость этого утверждения очевидна. □

Замечание 2.1. Ниже (в § 2) мы всегда будем считать, что круг B обладает A-свойством, т. е. является B_A-кругом системы, $B_0 = B \setminus \{O\}$.

Лемма 2.1. Пусть $p \in B_0$. Если $L_p^{+(-)} \subset \overline{B}$, то $L_p^{+(-)} \to O$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно замечанию 2.1 и определению 2.1 в $\overline{B}$ лежит CO-кривая системы L_q^s, $q \in C$. Пусть $L_p^+ \subset \overline{B}$. Тогда $\Omega_p \subset \overline{B}$. Согласно теореме 0.3.2 и следствию 2.1 для Ω_p могут представиться лишь следующие возможности: $\Omega_p = \{O\}$ или $\Omega_p = \Gamma$ — особый цикл системы, состоящий из точки O и траекторий $L_r \subset \overline{B} \setminus \{O\}$, $L_r^{\pm} \to O$. Покажем, что второе невозможно.

Пусть $\Omega_p = \Gamma$. Полутраектория L_p^+ не может наматываться на Γ снаружи ввиду наличия в $\overline{B}$ CO-кривой L_q^s. Следовательно, $\Gamma = \{O\} \cup L_r$, $r \in B_0$, $L_p \subset D_\Gamma$ (где D_Γ — область, ограниченная Γ). Пусть λ — отрезок нормали к L_r в точке r, бесконтактный для системы, $\lambda \setminus \{r\} \subset D_\Gamma$. Так как полутраектория $L_p^+ \to \Gamma$, она последовательно пересекает λ в точках $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots \to r$. Рассмотрим контур Бендиксона β, состоящий из дуги $p_1p_2 \subset L_p^+$ и отрезка $p_2p_1 \subset \lambda$. Он делит D_Γ на две области: внешнюю D_Γ^+ и внутреннюю D_Γ^-. Пусть $p \in D_\Gamma^-$ (что не ограничивает общности). Тогда $L_p^- \subset D_\Gamma^-$, $A_p \in \overline{D}_\Gamma^-$, а потому в $\overline{D}_\Gamma^-$ существует особая точка системы, что невозможно, ибо $D_\Gamma^- \subset D_\Gamma \subset B_0$. Следовательно, $\Omega_p = \{O\}$, т. е. $L_p^+ \to O$. □

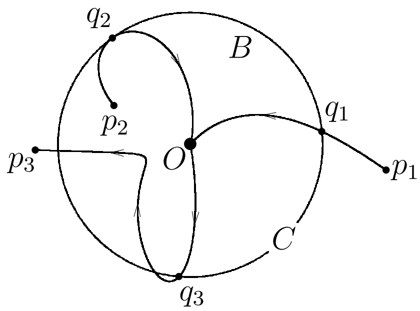

Рис. 2.1. O-круг B, являющийся B_A-кругом, CO^+-кривые $L_{q_1}^+$ и $L_{q_2}^+$, CO^--кривая $L_{q_3}^-$

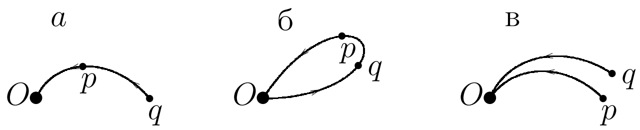

Рис. 2.2. Примеры совпадающих и различных O−кривых

Определение 2.2. Две O-кривые системы L_p^s и L_q^σ *различны* $\iff$ 1) $s \neq \sigma$ или 2) $s = \sigma$, $L_p^s \cap L_q^\sigma = \emptyset$.

На рис. 2.2 изображены: в случае *а* — одна O^+-кривая (ибо $L_p^+ \subset L_q^+$), в случае *б* — одна O^+-кривая и одна O^--кривая, в случае *в* — две различные O^+-кривые.

Теорема 2.1. *Если система имеет O-кривую, то она имеет не менее двух различных O-кривых.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L_q^-(\subset \overline{B})$ — CO-кривая системы. Рассмотрим последовательность $(p_k)_1^{+\infty} \subset B_0 \setminus L_q^-$, $p_k \to O$ при $k \to +\infty$. Для полутраекторий $L_{p_k}^{\pm}$ могут представиться лишь следующие возможности:

1) $\exists k \in N : L_{p_k}^+ \subset B \Longrightarrow$ (по лемме 2.1) $L_{p_k}^+ \to O$, при этом O-кривые $L_{p_k}^+$ и L_q^- различны в силу разноименности;

2) $\exists\, k \in N : L^-_{p_k} \subset B \implies L^-_{p_k} \to O$, причем $L^-_{p_k}$ и L^-_q — различные O^--кривые, ибо $L^-_{p_k} \cap L^-_q = \emptyset$;

3) $\forall\, k \in N\ L^{\pm}_{p_k} \not\subset B$. Пусть $q^{\pm}_k$ — их первые точки выхода на C. Не ограничивая общности, можно считать, что $q^{+(-)}_k \to q^{+(-)}_0\ (\in C)$ при $k \to +\infty$. Тогда согласно леммам 1.1 и 2.1 $L^{-(+)}_{q^{+(-)}_0} \to O$, причем $L^-_{q^+_0}$ и $L^+_{q^-_0}$ — различные O-кривые. □

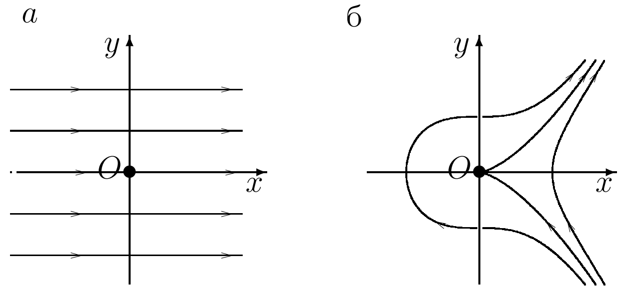

Рис. 2.3. Траектории систем (2.1)

Существуют системы вида (0.3.1) лишь с двумя O-кривыми. Таковы, например, следующие системы:

$$\text{а)}\quad \dot{x} = x^2 + y^2, \quad \dot{y} = 0, \qquad\qquad \text{б)}\quad \dot{x} = 2y, \quad \dot{y} = 3x^2\,. \tag{2.1}$$

Расположения их траекторий в окрестности точки O изображены соответственно на рис. 2.3, *а* и 2.3, *б*.

2. 2. Сектора Бендиксона. Тип Бендиксона точки O

Определение 2.3. Пусть $p \in B_0$, L_p — полная траектория движения $\varphi(t,p)$, $t \in I_p$, $\ell_p\,(\subset L_p)$ — *B-траектория* движения $\varphi(t,p)$, т. е. $\ell_p = \{\varphi(t,p),\, t \in I'_p\}$, где I'_p— максимальный относительно круга B интервал существования решения $\varphi(t,p)$. Если $L_p \subset B\,(\Rightarrow L^{\pm}_p \to O$ согласно лемме 2.1), то ℓ_p совпадает с L_p и называется *эллиптической B-траекторией (B_e-траекторией) системы.* Если $L^{\pm}_p \not\subset B$, то ℓ_p называется *гиперболической B-траекторией (B_h-траекторией) системы.* Если $L^+_p \subset B$ ($\Rightarrow$ $L^+_p \to O$), а $L^-_p \not\subset B$ или наоборот, то ℓ_p называется *параболической B-траекторией* (B_p-траекторией) системы (рис. 2.4).

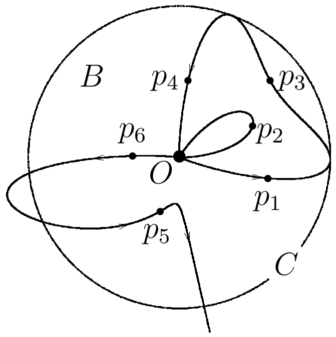

Рис. 2.4. $B-$траектории:

ℓ_{p_2} — B_e-траектория,

ℓ_{p_3} и ℓ_{p_5} — B_h-траектории,

ℓ_{p_1}, ℓ_{p_4}, ℓ_{p_6} — B_p-траектории

Иными словами, B_e-траектория ℓ обладает свойством: $\ell^{\pm} \to O$ (т. е. является O-асимптотической в обе стороны), B_h-траектория ℓ обладает свойством: $\ell^{\pm} \to q^{\pm} \in C$

(т. е. является B-уходящей в обе стороны), B_p-траектория ℓ обладает свойством: $\ell^+ \to O$, $\ell^- \to q \in C$ или наоборот (т. е. является O-асимптотической в одну сторону, B-уходящей в другую).

Замечание 2.2. Параболическая B-траектория ℓ_p, будучи дополнена своей предельной точкой $q \in C$, определяет CO-кривую.

Определение 2.4. Если ℓ есть B_e-траектория, то область U_ℓ, ограниченная петлей $\gamma = \ell \cup \{O\}$, называется *эллиптической B-областью (B_e-областью).* Если ℓ есть B_h-траектория, то область U_ℓ, отсекаемая ею от круга B и удовлетворяющая условию $O \notin U_\ell$, называется *гиперболической B-областью (B_h-областью).*

На рис. 2.4 петля $\ell_{p_2} \cup \{O\}$ ограничивает B_e-область, B_h-траектории ℓ_{p_3}, ℓ_{p_5} отсекают от круга B B_h-области.

Следствие 2.2. *Если U — эллиптическая (гиперболическая) B-область системы, то $\forall\, p \in U \quad \ell_p$ — эллиптическая (гиперболическая) B-траектория системы.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из определений 2.4, 2.3 и леммы 2.1. $\square$

Определение 2.5. Пусть ℓ_1, ℓ_2 — две B_e (B_h)-траектории. Будем говорить, что:

1) ℓ_2 *объемлет* ℓ_1, если определяемые ими B-области обладают свойством: $U_{\ell_1} \subset U_{\ell_2}$;

2) ℓ_1 *и* ℓ_2 *внеположны,* если $U_{\ell_1} \cap U_{\ell_2} = \emptyset$.

На рис. 2.4 B_h-траектории ℓ_{p_3} и ℓ_{p_5} — внеположны.

Лемма 2.2. *Пусть B' — круг с центром O и радиусом δ', $C' = \partial B'$. $\forall\, \delta' \in (0, \delta)$ существует разве лишь конечное число попарно внеположных B_e-траекторий (B_h-траекторий) ℓ, обладающих свойством $\ell \cap C' \neq \emptyset$.*

Доказательство. Докажем утверждение для B_e-траекторий. Для B_h-траекторий доказательство аналогично. Пусть вопреки утверждению леммы $\exists\, \delta' \in (0, \delta)$: система имеет счетное число попарно внеположных B_e-траекторий ℓ, $\ell \cap C' \neq 0$. Пусть это траектории ℓ_k, $k \in N$.

Тогда 1) $\forall\, k \geqslant 1\ \exists\, q_k^\pm \in \ell_k \cap C'$: $L_{q_k^{+(-)}}$ есть $C'O^{+(-)}$-кривая системы, 2) $\exists\, t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$: $p_k^\pm = \varphi(\pm t_k, q_k^\pm) \to O$ при $k \to +\infty$. Пусть $q_0 (\in C')$ — точка сгущения множества $\{q_k^+,\, k \geqslant 1\}$.

Не ограничивая общности, можно считать, что 1) $q_k^+ \to q_0$ при $k \to +\infty$, и притом монотонно на C' (например, по полярному углу $\theta_q \in (-\pi, \pi]$, $\theta_{q_0} = 0$); 2) последовательности $\{q_k^+\}$, $\{q_k^-\}$ — чередующиеся (в широком смысле) так, что и $q_k^- \to q_0$ при $k \to +\infty$.

Тогда согласно леммам 1.1 и 2.1 $L_{q_0}^\pm \subset \overline{B}'$, $L_{q_0}^\pm \to O$ так, что $L_{q_0} \cup \{O\}$ — петля, а согласно свойству 0.1.4 $\forall\, T > 0$ последовательность решений $\varphi(t, q_k^+) \rightrightarrows \varphi(t, q_0)$, $t \in [0, T]$, а последовательность решений $\varphi(t, q_k^-) \rightrightarrows \varphi(t, q_0)$, $t \in [-T, 0]$ (рис. 2.5). Но последовательности $\{\varphi([0, T], q_k^+),\, k \geqslant 1\}$ и $\{\varphi([-T, 0], q_k^-), k \geqslant 1\}$ — чередующиеся, а их предельные дуги $\varphi([0, T], q_0)$ и $\varphi([-T, 0], q_0)$ очевидно различны, что невозможно. $\square$

Определение 2.6. Пусть S — сектор круга B, границу которого образуют: точка O — вершина, CO-кривые системы L_q^s и L_r^σ, $s, \sigma \in \{+, -\}$, — боковые стенки, замкнутая дуга $C_S = [qr]$ $(\subset C)$ — задняя стенка. Тогда сектор S называется

1) *эллиптическим сектором круга B* и обозначается символом E, если а) CO-кривые L_q^s и L_r^σ — разноименны ($s \neq \sigma$) и в $\overline{S}$ отсутствуют другие CO-кривые системы, б) L_q^s и L_r^σ — полутраектории одной и той же траектории L, причем петля $L \cup \{O\}$ ограничивает область $D_L \subset S$;

2) *гиперболическим сектором круга B* и обозначается символом H, если условие а) п. 1) выполняется, а условие б) не выполняется;

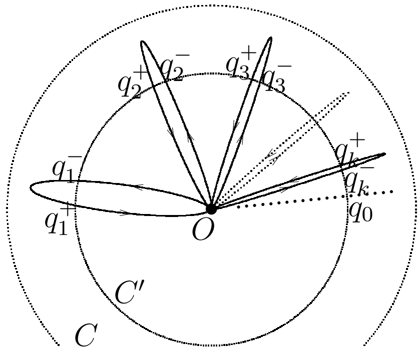

Рис. 2.5. Гипотетическая счетная последовательность эллиптических траекторий, приводящая к противоречию

3) *параболическим сектором круга* B и обозначается символом P, если а) L_q^s и L_r^σ одноименны ($s = \sigma$) и б) в $\overline{S}$ отсутствуют CO-кривые противоположного знака;

4) *квазиэллиптическим сектором круга* B и обозначается символом $\tilde{E}$, если он может быть разбит CO-кривыми системы на два сектора: P и E или на три сектора: P, E и P.

Будем называть любой такой сектор *сектором Бендиксона круга* B.

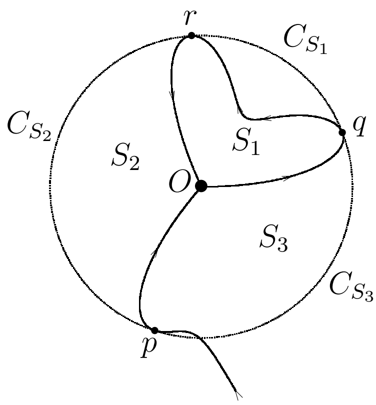

Рис. 2.6. Примеры E-, H- и P-секторов Бендиксона

На рис. 2.6 S_1 есть E-сектор, $\partial S_1 = L_q^- \cup C_{S_1} \cup L_r^+ \cup \{O\}$; S_2 с $\partial S_2 = L_r^+ \cup C_{S_2}\,(= rp) \cup L_p^+ \cup \{O\}$ есть P-сектор, если в $\overline{S}_2$ нет CO^--кривых системы; S_3 с $\partial S_3 = L_p^+ \cup C_{S_3}\,(= pq) \cup L_q^- \cup \{O\}$ есть H-сектор, если в $\overline{S}_3$ нет CO-кривых, отличных от L_p^+ и L_q^-.

Отметим: 1) для сектора Бендиксона S типа E возможно $r = q$; в таком случае $C_S = \{q\}$, $L_q^\pm$ — боковые границы сектора S (рис. 2.7, *а*); 2) для S типа P или типа H также возможно $r = q$; в таком случае $C_S = C$, причем для сектора типа P $L_r^s = L_q^s$ — единственная боковая граничная кривая сектора $S = B \setminus L_q^s$ (рис. 2.7, *б*).

Исследуем поведение траекторий системы в каждом из ее E-, H- и P-секторов Бендиксона круга B.

Теорема 2.2. *Пусть* E *— эллиптический сектор круга* B, L_q^+ *и* L_r^- *— его боковые стенки,* $L = L_q = L_r$, E_L *— часть* E, *ограниченная петлей* $L \cup \{O\}$, $E_h = E \setminus \overline{E}_L$. *Тогда* $\forall\, p \in E_L$ ℓ_p *— эллиптическая* B*-траектория, а для* $\forall\, p \in E_h$ ℓ_p *— гиперболическая* B*-траектория системы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из леммы 2.1 и теоремы 0.3.2. □

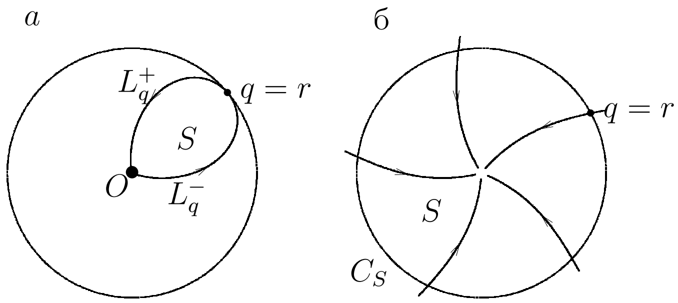

Рис. 2.7. Сектор Бендиксона S с граничной дугой
$C_S = \{q\}$ (а), $\quad C_S = C$ (б)

Теорема 2.3. *Пусть H — гиперболический сектор круга B. L_q^+ и L_r^- — его боковые стенки. Тогда*

1) *в H нет B_p-траекторий* (см. определение 2.3);

2) *в H могут существовать B_e-траектории, но $\exists\,\delta' \in (0,\delta)$: если $\ell(\subset H)$ — B_e-траектория, то $\ell \subset \overline{B}' = \{p,\, |p| \leqslant \delta'\}$;*

3) $\forall\, p_0 \in L_q^+ \cup L_r^-$ $\exists$ *окрестность $U : \forall\, p \in U \cap H$ ℓ_p есть B_h-траектория;*

4) $\exists \delta'' \in (0,\delta)$: *если $p_1, p_2 \in H \cap B''$, B'' : $|p| < \delta''$, а ℓ_{p_1}, ℓ_{p_2} суть B_h-траектории системы, $\ell_{p_2} \neq \ell_{p_1}$, то одна из них объемлет другую.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения 1) и 2) вытекают из определения H-сектора: первое непосредственно, второе — с помощью рассуждения от противного. Утверждение 3) следует из утверждений 1) и 2). Утверждение 4) легко доказывается методом от противного. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть P — параболический сектор круга B, L_q^s и L_r^s — его боковые стенки. Тогда*

1) *в P могут существовать B_e-траектории, но $\exists\,\delta' \in (0,\delta)$: если $\ell(\subset P)$ — B_e-траектория, то $\ell \subset \overline{B}'$: $|p| \leqslant \delta'$;*

2) *в P могут существовать B_h-траектории, но $\exists \delta'' \in (0,\delta)$: если $\ell(\subset P)$ –B_h-траектория, то $\ell \cap B'' = \emptyset$, B'' : $|p| < \delta''$;*

3) $\forall\, p_0 \in L_q^s \cup L_r^s$, $p_0 \notin \{q, r\}$, $\exists$ *окрестность $U : \forall\, p' \in U \cap P$ $\ell_{p'}$ есть B_p-траектория.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все утверждения теоремы легко доказываются методом от противного. $\square$

Определение 2.7. Эллиптический сектор круга B называется *правильным,* если в нем отсутствуют внеположные эллиптические траектории системы (см. определение 2.5). Гиперболический или параболический сектор круга B называется *правильным,* если в нем отсутствуют эллиптические траектории системы.

Теорема 2.5. *Круг B, обладающий $A-$свойством, всегда можно разбить CO-кривыми (и точкой O) на конечное число секторов Бендиксона типов E, H, P.*

Представление о таком разбиении, в котором, кстати, участвуют сектора всех трех типов, дает рис. 2.6, если на нем S_2 — сектор типа P, а S_3 — сектор типа H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2.2 следует, что в B_A-круге существует лишь конечное число $n_e \geqslant 0$ E-секторов и лишь конечное число $n_h \geqslant 0$ H-секторов. Если $n_e = n_h = 0$, то, удалив из B все точки одной CO-кривой (скажем, L_q^s), получим сектор $S_0 = B \setminus L_q^s$ с единственной граничной CO-кривой L_q^s (тип его исследуется ниже).

Пусть $n_e + n_h > 0$; пусть

$$Q = B \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n_e} \overline{E}_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n_h} \overline{H}_k \right),$$

где E_k, $k = \overline{1, n_e}$, и H_k, $k = \overline{1, n_h}$, — E-сектора и H-сектора круга B. Если $Q = \emptyset$, то B разбивается CO-кривыми на $n = n_e + n_h$ секторов типов E и H. Если $Q \neq \emptyset$, то $Q = \bigcup_{k=1}^{m} S_k$, $m \geqslant 1$, где S_k, $k = \overline{1, m}$, — сектора круга B с боковыми стенками в виде CO-кривых.

Пусть S — любой из секторов S_k, $k = \overline{0, m}$. Покажем, что S — параболический сектор круга B.

1) Покажем сначала, что боковые стенки S — одноименные CO-кривые. Для $S = S_0$ это очевидно. Пусть S — один из секторов S_k, $k = \overline{1, m}$. Допустим, что его боковыми стенками являются разноименные CO-кривые L_q^+ и L_r^-. Пусть $C_S = [qr](\subset C)$ — задняя стенка S. Введем на C параметр, например, полярный угол φ_p точки $p \in C$, считая полюсом точку O. Пусть (для определенности) направление на C_S от q к r соответствует возрастанию φ_p так, что $0 < \varphi_r - \varphi_q \leqslant 2\pi$. Пусть

$$C_S^+ = \{ p \in C_S \,| L_p^+ \text{ есть } CO^+\text{-кривая, } L_p^+ \subset \overline{S} \},$$

$\varphi_{q^+} = \sup\{\varphi_p, \, p \in C_S^+\}$. Согласно леммам 1.1 и 2.1 $L_{q^+}^+$ — CO^+-кривая. Отметим: $\varphi_{q^+} \in [\varphi_q, \varphi_r)$, ибо если бы $q^+ = r$, то траектория L_r ограничивала бы сектор $E \subset S$, что противоречит определению S. Следовательно, $L_{q^+}^+ \subset \overline{S} \setminus L_r^-$.

Рассмотрим сектор $S^-(\subset S)$ круга B с боковыми стенками $L_{q^+}^+$ и L_r^- и задней стенкой $C_{S^-} = [q^+ r] \subset C_S$. Очевидно, в $\overline{S^-}$ нет CO^+-кривых, кроме $L_{q^+}^+$. Пусть

$$C_{S^-}^- = \{ p \in C_{S^-} | \, L_p^- \text{ есть } CO^-\text{-кривая}, L_p^- \subset \overline{S^-} \},$$

$\varphi_{q^-} = \inf\left\{\varphi_p, \, p \in C_{S^-}^-\right\}$. Согласно леммам 1.1 и 2.1 $L_{q^-}^-$ — CO^--кривая. Кроме того, $\varphi_{q^-} \in (\varphi_{q^+}, \varphi_r]$, так что $L_{q^-}^- \subset \overline{S^-} \setminus L_{q^+}^+$.

Рассмотрим сектор круга B $S^0(\subset S^-)$ с боковыми стенками $L_{q^+}^+$ и $L_{q^-}^-$. По построению в $\overline{S^0}$ отсутствуют CO-кривые, отличные от боковых стенок. А тогда согласно определению 2.6 S^0 есть E- или H-сектор, лежащий в S, что противоречит построению S. Таким образом, допустив, что боковые стенки S — разноименные CO-кривые, мы пришли к противоречию. Следовательно, они одноименны.

2) Пусть для определенности боковыми стенками S являются CO^+-кривые L_q^+ и L_r^+; пусть $C_S = [qr]$ — задняя стенка S. Покажем, что в $\overline{S}$ нет CO^--кривых. Допустим противное: $\exists \, CO^-$-кривая $L_{r'}^- \subset \overline{S}$. Рассмотрим сектор круга B $S'(\subset S)$ с боковыми стенками L_q^+ и $L_{r'}^-$. Повторяя для сектора S' рассуждения, проведенные в п. 1) для сектора S, приходим к противоречию. Следовательно, согласно определению 2.6 S есть P-сектор круга B. □

Замечание 2.3. Два или несколько смежных параболических секторов круга B всегда можно объединить в один P-сектор.

Определение 2.8. Пусть круг B разбивается CO-кривыми на $n \, (\geqslant 1)$ секторов Бендиксона типов E, H, P, среди которых отсутствуют смежные P-сектора. Тогда слово, составленное из n букв, взятых из множества $\{E, H, P\}$, набор и порядок следования которых соответствуют набору и порядку следования секторов Бендиксона круга B типов

E, H, P при обходе точки O в положительном направлении, начиная с некоторого из них, будем называть *типом Бендиксона точки O относительно данного круга B* и обозначать символом ТБ$_B$. Если слово ТБ$_B$ одно и то же для всех O-кругов B с достаточно малыми радиусами, то будем называть его *типом Бендиксона* (Б-*типом*) *точки O* и обозначать символом ТБ.

Тип Бендиксона точки O (если он существует) определяет топологический тип поведения траекторий системы в малом O-круге этой точки (топологический тип точки O).

2. 3. Структура множества всех O-кривых системы

Выясним условия, при которых точка O имеет определенный тип Бендиксона.

Определение 2.9. Семейство одноименных O-кривых системы $W = \{L_s,\ s \in I\}$, где I — промежуток числовой оси s (может быть, вырожденный), называется *пучком O-кривых системы,* если

1) начальные точки $p(s)$ O-кривых $L_s \in W$ образуют простую непрерывную параметрическую кривую $\Gamma :\ p = p(s),\ s \in I$,

2) $\forall\, s \in I \quad L_s \cap \Gamma = \{p(s)\}$.

Пучок O-кривых системы называется *открытым, замкнутым* или *полуоткрытым* в зависимости от того, открыт, замкнут или полуоткрыт промежуток I. Открытый пучок и вырожденный замкнутый пучок (состоящий из одной кривой) называются *элементарными пучками O-кривых* и обозначаются соответственно символами П (пучок) и К (кривая).

З а м е ч а н и е 2. 4. Невырожденный замкнутый пучок O-кривых всегда можно разбить на три элементарных пучка: К, П и К, а полуоткрытый пучок — на два элементарных пучка: К и П.

Определение 2.10. Произвольно фиксированную O-кривую открытого пучка W типа П будем называть *узловой,* а единственную O-кривую пучка W типа К — *седловой.* В любом случае будем называть эту O-кривую *представителем пучка W*.

Определение 2.11. Пусть множество всех O-кривых системы распадается на конечное число попарно непересекающихся элементарных пучков O-кривых. Пусть это будут пучки $W_k, \quad k = \overline{1,n}, n \in N$, пронумерованные, начиная с некоторого, в порядке их следования при обходе точки O в положительном направлении. Пусть O-кривые $L_k,\ k \in \overline{1,n}$, — представители этих пучков. Пусть B — малый O-круг в фазовом пространстве системы, граница которого C пересекает (в теоретико-множественном смысле) все кривые $L_k,\ k = \overline{1,n}$.

Тогда 1) будем говорить, что *множество всех O-кривых системы имеет простую структуру*;

2) будем описывать эту структуру словом χ из n букв К, П, в котором k-я буква означает тип (К или П) пучка $W_k,\ k = \overline{1,n}$;

3) будем называть слово χ *характеристикой структуры множества всех O-кривых системы,* а вышеупомянутый круг B — *кругом Бендиксона системы.*

Теорема 2.6. *Пусть множество всех O-кривых системы имеет простую структуру, W_k, $k = \overline{1,n}$, — пучки, образующие эту структуру, L_k, $k = \overline{1,n}$, — их представители, B — круг Бендиксона системы. Пусть $L_{q_k}(\subset L_k)$, $k = \overline{1,n}$, — CO-кривые системы относительно круга B. Пусть S_k, $k = \overline{1,n}$, — сектора, на которые кривые L_{q_k} (и точка O) делят круг B.*

Тогда $\forall\, k = \overline{1,n}$ сектор S_k будет для системы правильным сектором Бендиксона типа $E(\widetilde{E}), H$ или P, смотря по тому, будут ли его граничные CO-кривые L_{q_k} и

$L_{q_{k+1}}$ $(q_{n+1} = q_1)$ *соответственно узловыми, седловыми или разноименными* (*в этом смысле*) *O-кривыми.*Докажем утверждение теоремы для сектора S_1, что, очевидно, не ограничивает общности. Пусть его боковыми стенками являются CO-кривые L_{q_1} и L_{q_2}, q_1, $q_2 \in C$, $L_{q_i} \in W_i$, $i = 1, 2$. Пусть дуга $C_1 = [q_1 q_2](\subset C)$ является его задней стенкой. Пусть точкам q_1, q_2 соответствуют значения φ_1, φ_2 полярного угла φ, $0 \leqslant \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$, а произвольной точке $q \in C_1$ — значение $\varphi_q \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Отметим, что согласно определению 2.9 $\forall\, k = 1, 2$ все O-кривые пучка W_k — одноименны (в смысле определения 1.2), т. е. являются либо O^+-кривыми, либо O^--кривыми системы. Пусть для определенности пучок W_1 образован O^--кривыми системы. 1) Пусть CO-кривые $L_{q_1} = L^-_{q_1}$ и $L_{q_2} = L^\sigma_{q_2}$, $\sigma \in \{+, -\}$, — узловые. Покажем сначала, что в этом случае $\forall\, k = 1, 2$ не все O-кривые открытого пучка W_k, примыкающие к точке O из сектора S_1, пересекаются с C_1. Покажем это, например, для пучка W_1.

Допустим противное. Тогда каждая O^--кривая пучка W_1 определяет CO^--кривую $L^-_q(\in W_1)$. Пусть $\varphi_{q'} = \sup\{\varphi_q \,:\, L^-_q \in W_1\}$. Очевидно, $\varphi_{q'} \in (\varphi_1, \varphi_2]$. Согласно леммам 1.1 и 2.1$L^-_{q'} \subset \overline{B}$, $L^-_{q'} \to O$, т. е. является O^--кривой системы. Далее, очевидно, $L^-_{q'} \subset \overline{S}_1$ и $\forall\, k = 1, 2$ $L^-_{q'} \notin W_k$ (иначе пучок W_k не был бы открытым). Следовательно, O^--кривая $L^-_{q'}$ лежит в S_1 между пучками W_1 и W_2, что противоречит условиям леммы. vbox Но поскольку в S_1 нет ни особых точек системы, ни ее O-кривых, не входящих в пучки W_1, W_2, то O-кривые этих пучков, не достигающие дуги C_1, попарно замыкаются друг на друга, образуя эллиптические траектории системы, объемлющие друг друга и заполняющие правильный эллиптический сектор E_1 круга B (см. определения 2.6, 2.7); боковыми стенками E_1 служат CO-кривые $L^-_{q_1^*}$ и $L^+_{q_2^*}$, $\varphi_{q_1^*} = \max\{\varphi_q \,:\, L^-_q \in W_1,\, L^-_q \cap C_1 \neq \emptyset\}$, $\varphi_{q_2^*} = \min\{\varphi_q \,:\, L^+_q \in W_2,\, L^+_q \cap C_1 \neq \emptyset\}$, необходимо являющиеся полутраекториями одной и той же траектории $L \subset \overline{B}$. Из этого следует, что O-кривые, образующие пучок W_2, и в частности L_{q_2}, являются O^+-кривыми системы. Если $q_i^* = q_i$, $i = 1, 2$, то сектор S_1 является эллиптическим сектором круга B. Если же $q_1^* \neq q_1$ $(q_2^* \neq q_2)$, то сектор $S_{11}(S_{12}) \subset S_1$, ограниченный CO-кривыми $L^-_{q_1}$ и $L^-_{q_1^*}$ ($L^+_{q_2^*}$ и $L^+_{q_2}$), является параболическим, а потому сектор S_1 является в этом случае квазиэллиптическим сектором круга B.

2) Пусть CO-кривые $L^-_{q_1}$ и $L^\sigma_{q_2}$, $\sigma \in \{+, -\}$, — седловые. В этом случае в секторе S_1 нет ни особых точек системы, ни ее O-кривых, а потому этот сектор является правильным гиперболическим сектором. В частности, его граничная CO-кривая $L^\sigma_{q_2}$ является CO^+-кривой.

3) Пусть CO-кривые $L^-_{q_1}$ и $L^\sigma_{q_2}$ — разноименны, например, $L^-_{q_1}$ — узловая, а $L^\sigma_{q_2}$ — седловая. Тогда все O^--кривые пучка W_1, примыкающие к точке O из сектора S_1, пересекают C_1 (иначе в S_1 существовали бы целые траектории, положительные полутраектории которых входили бы в состав пучка W_2, что противоречит условиям рассматриваемого случая), и, следовательно, каждая из них порождает CO^--кривую системы L^-_q, $q \in C_1$, $L^-_q \in W_1$. Пусть $\varphi_{q'} = \sup\{\varphi_q \,:\, L^-_q \in W_1\}$. Тогда, как и в случае 1), $L^-_{q'} \to O$, $\quad L^-_{q'} \subset \overline{S}_1$, и, следовательно, $L^-_{q'} \in W_2$, $L^\sigma_{q_2} \subset L^-_{q'}$ (иначе $L^-_{q'}$ лежит между пучками W_1 и W_2, что противоречит условиям леммы), т. е. $L^\sigma_{q_2}$ есть CO^--кривая, порождаемая O^--кривой $L^-_{q'}$. Следовательно, S_1 есть правильный параболический сектор круга B. □

Следствие 2.3. *Пусть множество всех O-кривых системы имеет простую структуру. Тогда характеристика χ этой структуры однозначно определяет разбиение любого круга Бендиксона системы B на правильные сектора типов E, H, P так, что слово* ТБ$_B$*, описывающее это разбиение, не зависит от выбора B и, следовательно, определяет тип Бендиксона точки O.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение следует из определений 2.8 — 2.11, теоремы 2.6 и замечания 2.3.

З а м е ч а н и е 2.5. Если условия теоремы 2.6 не выполняются, то разбиение любого B_A-круга на сектора Бендиксона содержит сектора, не являющиеся правильными, что легко доказать, опираясь на лемму 2.2.

§ 3. Случай Б: в любой окрестности точки O существуют замкнутые траектории системы

Пусть по-прежнему B — малая окрестность точки O. Из определения 1.1 и теоремы 1.1 следует: 1) если $L\,(\subset B)$ — замкнутая траектория, то L окружает точку O, 2) если L_1, L_2 — замкнутые траектории, L_1, $L_2 \subset B$, то одна из них окружает другую.

Теорема 3.1. *В случае* Б *либо*

Б$_1$) $\exists$ *окрестность U точки O такая, что область $U \setminus \{O\}$ заполнена замкнутыми траекториями (циклами) системы, окружающими O, либо*

Б$_2$) *в любой окрестности U точки O существуют как замкнутые, так и незамкнутые траектории.*

В случае Б$_2$) *в любой области U, ограниченной замкнутой траекторией $L \subset B$:*

1) *незамкнутые траектории заполняют открытые кольцевые области, ограниченные замкнутыми траекториями; если $K(\subset U)$ — такое кольцо, то один из его граничных циклов служит для всех траекторий кольца α-предельным множеством, а другой — ω-предельным множеством;*

2) *замкнутые траектории заполняют замкнутые кольцевые области; в частности, они могут быть изолированными (предельными) циклами.*

В случае Б$_1$) особая точка O системы называется *центром* [26]; в случае Б$_2$) она называется *центро-фокусом* [22] (рис. 3.1). Бендиксон [33] в случае Б называл точку O центром.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возможности Б$_1$), Б$_2$) представляют собой логическую альтернативу поведения траекторий системы в малой окрестности точки O в случае Б.

Пусть имеет место случай Б$_2$).

1) Пусть $L(\subset B)$ — цикл системы, U — область, ограниченная циклом L. Пусть точка $q(\in U)$ такова, что L_q — незамкнутая траектория. Тогда согласно теореме 0.3.2 A_q, $\Omega_q(\subset \overline{U})$ — циклы системы. Покажем, что $\Omega_q \neq A_q$.

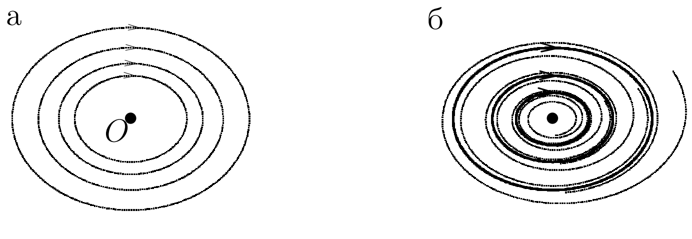

Рис. 3.1. Центр (а) и центро-фокус (б)

Пусть $r \in \Omega_q$, U_r — область, ограниченная циклом $L_r(=\Omega_q)$, n_r — отрезок нормали к L_r в точке r; пусть (для определенности) $q \in U_r$. $L_q^+ \to L_r$ (как спираль), а потому пересекает n_r в любой близости от r. Пусть γ — контур Бендиксона, образованный витком $\ell = \widetilde{q_1 q_2}$ спирали L_q^+ ($q_i = \varphi(t_i, q)$, $i = 1, 2$, $0 < t_1 < t_2$) и отрезком $\lambda = \overline{q_2 q_1}$ нормали n_r (рис. 3.2).

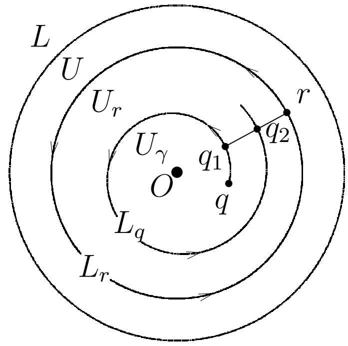

Рис. 3.2. Композиция с контуром Бендиксона γ

Пусть U_γ ($\subset U_r$) — область, ограниченная контуром γ. Очевидно, что $q \in U_\gamma$, а область U_γ отрицательно инвариантна для системы: $\forall\, p \in U_\gamma \quad L_p^- \subset U_\gamma$. В частности, $L_q^- \subset U_\gamma$, а потому $A_q \subset \overline{U}_\gamma$. Следовательно, $A_q \neq \Omega_q$.

Пусть K — кольцо, ограниченное циклами L_1, $L_2 \subset U$, такое, что в нем отсутствуют другие циклы системы. Пусть $q \in K$. Тогда L_q — незамкнутая траектория и, по доказанному, $A_q = L_1$, $\Omega_q = L_2$ или наоборот.

Пусть (для определенности) $A_q = L_1$, $\Omega_q = L_2$ и цикл L_1 находится внутри L_2. Пусть $p \in K$ — произвольная фиксированная точка. Покажем, что $A_p = L_1$, $\Omega_p = L_2$. Для этого возьмем $r \in \Omega_q$ и рассмотрим контур Бендиксона γ, построенный выше. Он делит K на две кольцевые области: внутреннюю K^- и внешнюю K^+, первая из которых $(-)$-инвариантна для системы, а вторая $(+)$-инвариантна. Не ограничивая общности, будем считать, что $p \in K^-$ (этого всегда можно добиться, передвигая контур γ в достаточно малую окрестность цикла Ω_q). Тогда $L_p^- \subset K^-$, $A_p = A_q$ и, следовательно, $\Omega_p = \Omega_q$.

2) Пусть M — объединение всех колец $K(\subset U)$, покрытых незамкнутыми траекториями системы. Тогда $N = \overline{U} \setminus M \setminus \{O\}$ есть объединение замкнутых кольцевых областей, покрытых циклами системы. Любое такое кольцо может быть изолированным (предельным) циклом системы. □

Закончив выяснение возможных топологических типов расположения траекторий системы (0.3.1) в малой окрестности изолированного состояния равновесия O, перейдем к изложению методов, позволяющих выяснить топологический тип точки O для заданной конкретной системы такого вида. В качестве основного изберем метод полярного раздутия точки O.

§ 4. Запись системы в полярных координатах

Введем на плоскости x, y полярные координаты r, φ формулами

$$p = (x, y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi) = ru. \tag{4.1}$$

В них система (0.3.1) принимает вид

$$\frac{dr}{dt} = R(r, \varphi), \qquad r\frac{d\varphi}{dt} = \Phi(r, \varphi), \tag{4.2}$$

где

$$\begin{pmatrix} R(r,\varphi) \\ \Phi(r,\varphi) \end{pmatrix} = E(\varphi) \begin{pmatrix} X(ru) \\ Y(ru) \end{pmatrix}, \ E(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

т. е. $R(r,\varphi), \Phi(r,\varphi)$ — координаты вектора $V(p)$ относительно вращающегося в точке O координатного репера u, v, где $u = u(\varphi) =$
$= (\cos\varphi, \sin\varphi),\ v = v(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ (рис. 4.1), так что

$$V(p) = R(r,\varphi)u + \Phi(r,\varphi)v, \tag{4.4}$$

$$\frac{\Phi(r,\varphi)}{R(r,\varphi)} = \operatorname{tg}\alpha_p, \qquad \alpha_p = (\widehat{V(p), u(\varphi)}), \tag{4.5}$$

причем угол α_p отсчитывается от вектора $u(\varphi)$.

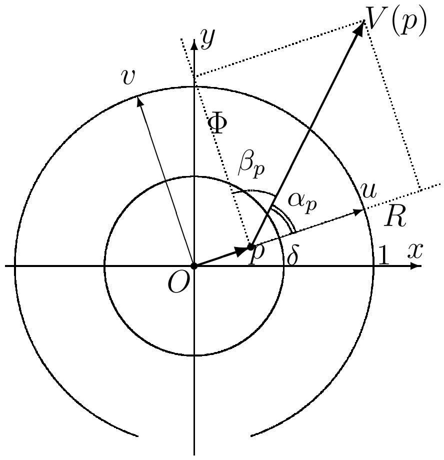

Рис. 4.1. Вектор $V(p)$ в полярных координатах

Как следует из (4.3),

$$R, \Phi \in C(\overline{B}), \quad R(0,\varphi) \equiv \Phi(0,\varphi) \equiv 0\,,$$

$R^2(r,\varphi) + \Phi^2(r,\varphi) \equiv X^2(ru) + Y^2(ru) > 0$ при $0 < r \leqslant \delta$, R, Φ — 2π-периодичны по φ.

Будем считать фазовым пространством системы (4.2) область $B_0 : 0 < r < \delta$ (рис. 4.1). При $r = 0$ система не определена, так как для нее $\Phi(r,\varphi)/r\,|_{r=0} = 0/0$. B_0 — область единственности для траекторий системы (4.2). Это следует из того, что B — область единственности для траекторий системы (0.3.1) (по предположению), а на B_0 замена (4.1) есть диффеоморфизм (поскольку, трактуя r, φ как полярные координаты на плоскости x, y, мы отождествляем точки $(r, \varphi + 2k\pi),\ k \in \mathrm{Z}$).

Если в системе (4.2) переменные r, φ трактовать как декартовы координаты на вспомогательной плоскости $R^2_{r,\varphi}$, то ее фазовым пространством будет полоса $\Pi_0 : 0 < r < \delta$, $|\varphi| < +\infty$ (рис. 4.2, *а*). При этом полоса Π_0 будет и областью единственности для траекторий этой системы, поскольку $\forall \varphi_0 \in R$ на прямоугольнике $0 < r < \delta,\ \varphi_0 \leqslant \varphi < \varphi_0 + 2\pi$ замена (4.1) взаимно однозначна.

При переходе с плоскости $R^2_{x,y}$ на плоскость $R^2_{r,\varphi}$ по закону (4.1) точка $O = (0,0)$ растягивается в ось $R_\varphi : r = 0$, $|\varphi| < +\infty$, а ее малая окрестность B — в полосу Π : $0 \leqslant r < \delta,\ |\varphi| < +\infty$.

Замена (4.1) допускает и иную геометрическую интерпретацию. Она состоит в следующем.

Наряду с декартовой плоскостью R_p^2 $(p = (x,y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi) = = ru)$ рассмотрим декартову плоскость R_q^2 $(q = (x_1, y_1) = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi) = \rho u)$, оси которой x_1, y_1 совмещены соответственно с осями x, y плоскости R_p^2. Далее, рассмотрим отображение $h : R_p^2 \to R_q^2$, $p = ru \mapsto q = (1+r)u = u + p$ (рис. 4.2), так что h определяется формулами

$$\rho = 1 + r, \qquad \varphi = \varphi. \tag{4.6}$$

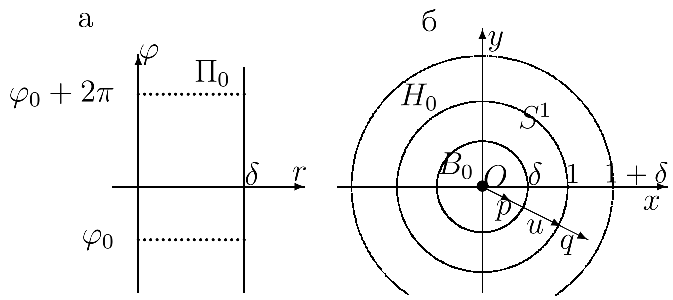

Рис. 4.2. Образы области B_0 : а — при отображении (4.1);
б — при композиции отображений (4.1) и (4.6)

При этом $h(O) = S^1 : \rho = 1$ — единичная окружность на плоскости R_q^2, $h(B_0) = H_0 : 1 < \rho < 1+\delta$ — кольцо на плоскости R_q^2 с границами $\rho = 1$ и $\rho = 1+\delta$, $h(B) = H : 1 \leqslant \rho < 1+\delta$ (рис. 4.2, *б*). Заменяя в системе (4.2) согласно (4.6) r на $\rho - 1$, получаем систему

$$\frac{d\rho}{dt} = R(\rho-1, \varphi), \qquad (\rho-1)\frac{d\varphi}{dt} = \Phi(\rho-1, \varphi), \tag{4.7}$$

заданную в кольце $H_0 = h(B_0)$ плоскости R_q^2. При этом область H_0 будет областью единственности для траекторий системы (4.7), так как h — диффеоморфизм B_0 на H_0. По этой же причине переменные r, φ являются локальными координатами в H_0. В этих координатах траектории системы (4.7) в области H_0 описываются системой (4.2).

На рис. 4.2, *б* плоскости R_p^2 и R_q^2 и координатные оси на них совмещены; h-образом точки $p = ru \in B_0$ является точка $q = (1+r)u = u + p \in H_0$.

Если отождествить точки $\varphi + 2k\pi$, $k \in Z$, оси φ, то полоса Π отобразится по формулам (4.6) в кольцо H.

Недостатком системы (4.2) в общем случае является то, что она не определена при $r = 0$, вследствие чего как при переходе на плоскость $R_{r,\varphi}^2$, так и при переходе на плоскость R_q^2 образ точки O оказывается на границе области задания преобразованной системы, что затрудняет изучение вблизи него траекторий последней. Чтобы избавиться от этого недостатка, мы вынуждены сузить класс рассматриваемых систем.

Г л а в а II

Квазиоднородные системы

В этой главе рассматривается квазиоднородная система (2.1), для которой $O = (0,0)$ — изолированная особая точка. Чтобы выяснить топологический тип точки O, в системе делается переход к полярным координатам r, φ, которые трактуются затем как декартовы на вспомогательной плоскости R_π^2, $\pi = (r, \varphi)$. При этом точка O растягивается в ось

φ, и задача приводится к исследованию особых точек преобразованной системы на оси φ. Отдельно анализируются случаи, когда на промежутке $[0, 2\pi)$ оси φ таких точек 1) конечное число, 2) бесконечное число, 3) нет ни одной. Первоисточниками материала этой главы являются статья М. Фроммера [36], глава II монографии В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [22], глава VIII книги Ф. Хартмана [32].

§ 1. Однородные полиномиальные системы

Рассмотрим сначала однородную систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1.1}$$

где P, Q — формы от x и y степени $m \geqslant 1$, $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \not\equiv 0$. Предположим, что для нее выполняется следующее условие невырожденности.

Условие 1.1. $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$ при $(x, y) \neq (0, 0)$, т. е. формы P, Q не имеют общих вещественных линейных относительно x и y множителей.

При этом условии начало координат $O = (0, 0)$ — единственная особая точка системы (1.1) на плоскости R^2. Пусть $R_0^2 = R^2 \setminus \{O\}$.

В полярных координатах r, φ система (1.1) принимает вид

$$\frac{dr}{dt} = G(\varphi) r^m, \quad \frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi) r^{m-1},$$

где согласно формулам (I.4.1) и (I.4.3)

$$G(\varphi) = P(u) \cos\varphi + Q(u) \sin\varphi, \quad F(\varphi) = Q(u) \cos\varphi - P(u) \sin\varphi$$

суть формы от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ степени $m + 1$.

Эта система определена на всей плоскости R^2. В области R_0^2 ее траектории полезно перепараметризовать, вводя новое время τ по формуле

$$\tau = \int_0^t r^{m-1}(s)\, ds\,.$$

После этого она запишется в виде

$$\frac{dr}{d\tau} = G(\varphi) r, \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = F(\varphi). \tag{1.2}$$

Изучим поведение траекторий системы (1.2) на проколотой плоскости R_0^2.

З а м е ч а н и е 1.1. Система (1.2) 1) не изменяется при замене r на cr, $c > 0$ — постоянная, так что в R_0^2 ее траектории подобны с центром подобия O; 2) при нечетном m не изменяется при замене φ на $\varphi + \pi$, а при четном m — при замене φ на $\varphi + \pi$ и τ на $-\tau$; 3) обладает свойством $F^2(\varphi) + G^2(\varphi) \neq 0 \quad \forall\, \varphi \in R$.

Лемма 1.1. А) *Если $F(\varphi_0) = 0$, $\varphi_0 \in R$, то луч $\varphi = \varphi_0$, $r > 0$, — инвариантный луч системы* (1.2), *а именно он представляет собою одну целую ее траекторию.*

Б) *Для нулей функции F могут представиться следующие возможности:*

1) $F(\varphi) \not\equiv 0$, *но имеет вещественные нули;*

2) $F(\varphi) \equiv 0$, $\varphi \in R$;

3) $F(\varphi) \neq 0\ \forall \varphi \in R$.

В случае 1) $F(\varphi)$ *имеет в* $[0, \pi)$ n *нулей,* $1 \leqslant n \leqslant m+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение А) леммы следует из п. 3) замечания 1.1, утверждение Б) — из того, что F — форма степени $m+1$ от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. □

1.1. Функция F имеет в $[0, 2\pi)$ конечное (>0) число нулей

Пусть нулями функции F в $[0,\pi)$ являются числа

$$\varphi_i,\ i=\overline{1,n},\quad 1 \leqslant n \leqslant m+1,\ 0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < \pi\,.$$

Тогда ее нулями в $[0, 2\pi)$ будут числа

$$\varphi = \varphi_i \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_i + \pi = \varphi_{n+i}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.3}$$

а инвариантными лучами системы (1.2) — лучи

$$\varphi = \varphi_i,\ r > 0,\ i = \overline{1,2n}. \tag{1.4}$$

Определение 1.1. Пусть φ_0 — нуль F кратности k $(k \geqslant 1)$, $a = F^{(k)}(\varphi_0)\cdot (k!G(\varphi_0))^{-1}$. Тогда луч $\varphi = \varphi_0$, $r > 0$, будем называть: *инвариантным лучом* 1-*го типа* системы (1.2), если k — нечетное число, $a > 0$; *инвариантным лучом* 2-*го типа,* если k — нечетное число, $a < 0$; *инвариантным лучом* 3-*го типа,* если k — четное число.

З а м е ч а н и е 1.2. $\forall\, i = \overline{1,n}$ лучи $\varphi = \varphi_i$ и $\varphi = \varphi_{i+\pi}$ являются инвариантными лучами системы (1.2) одного и того же типа. Это следует из п. 2) замечания 1.1.

Лучи (1.4) разбивают плоскость R_0^2 на сектора

$$\Sigma^i:\ \varphi_i < \varphi < \varphi_{i+1}, \quad r > 0, \quad i = \overline{1,2n}, \tag{1.5}$$

где $\varphi_{2n+1} = \varphi_1 + 2\pi$. В каждом из этих секторов траектории системы (1.2) описываются уравнением

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{G(\varphi) r}{F(\varphi)}\,, \tag{1.6}$$

а потому $\forall\, i = \overline{1,2n}$ и $\forall\, p_0 = r_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) \in \Sigma^i$ траектория системы (1.2) L_{p_0} определяется формулой

$$r = r(\varphi, p_0) \equiv r_0 exp \int_{\varphi_0}^{\varphi} F^{-1}(\theta) G(\theta) d\theta, \quad \varphi \in (\varphi_i, \varphi_{i+1})\,. \tag{1.7}$$

Из определения 1.1 и формулы (1.7) вытекают следующие свойства произвольного сектора Σ^i, $i = \overline{1,2n}$.

Лемма 1.2. *Пусть* φ_i — *любой из нулей* (1.3) *функции* F, *пусть для него* $k = k_i$, $a = a_i$ (см. определение 1.1), *пусть* $\varphi = \varphi_i$, $r > 0$, — *инвариантный луч системы* (1.2) *типа* l, $l \in \{1,2,3\}$, *пусть число* $\varepsilon > 0$ *таково, что* $F(\varphi) \neq 0$ *при* $0 < |\varphi - \varphi_i| \leqslant \varepsilon$, $G(\varphi) \neq 0$ *при* $|\varphi - \varphi_i| \leqslant \varepsilon$.

Тогда $\forall\, p_0 = r_0 u(\varphi_0)$, $\quad 0 < |\varphi_0 - \varphi_i| \leqslant \varepsilon$, $\quad r_0 > 0$, *функция* $r(\varphi, p_0)$ *при* $\varphi \to \varphi_i$ *ведет себя следующим образом:*

1) *если* $l = 1$, *то* $r(\varphi, p_o) \to 0$ *при* $\varphi \to \varphi_i$;

2) *если* $l = 2$, *то* $r(\varphi, p_o) \to +\infty$ *при* $\varphi \to \varphi_i$;

3) *если* $l = 3$, *то* $r(\varphi, p_o) \to 0$ *при* $\varphi \to \varphi_i$, *когда* $a_i(\varphi_0 - \varphi_i) > 0, r(\varphi, p_o) \to +\infty$ *при* $\varphi \to \varphi_i$, *когда* $a_i(\varphi_0 - \varphi_i) < 0$.

$\forall\, l = \overline{1,3}$ *функция* $r(\varphi, p_0)$ — *монотонна в том из промежутков* $[\varphi_0, \varphi_i)$, $(\varphi_i, \varphi_0]$, *в котором она определена.*

Доказательство. При $|\varphi - \varphi_i| \leqslant \varepsilon$ функция $\Phi(\varphi) \equiv F(\varphi)/G(\varphi) \equiv a_i(\varphi - \varphi_i)^{k_i}(1 + o(1)), o(1) \to 0$ при $\varphi \to \varphi_i$. Подставляя это выражение в формулу (1.7) и исследуя полученный (несобственный при $\varphi \to \varphi_i$) интеграл, убеждаемся в справедливости утверждений леммы. □

Определение 1.2. Пусть $\varphi = \varphi_0, r > 0$, — инвариантный луч системы (1.2) типа $l \in \{1, 2, 3\}$. При $l = 1$ будем называть его *узловым лучом,* при $l = 2$ — *седловым,* при $l = 3$ — *седло-узловым.* Стороны $\varphi > \varphi_0$ и $\varphi < \varphi_0$ узлового (седлового) луча будем называть *узловыми (седловыми) сторонами.* Для седло-узлового луча сторону $a(\varphi - \varphi_0) > 0$ будем называть *узловой,* а сторону $a(\varphi - \varphi_0) < 0$ — *седловой.*

Из леммы 1.2, определения 1.2 и формулы (1.7) вытекают следующие свойства произвольного сектора Σ^i, $i = \overline{1, 2n}$.

Лемма 1.3. 1) *Если граничные лучи* $\varphi = \varphi_i$ *и* $\varphi = \varphi_{i+1}$ *сектора* Σ^i *обращены к нему узловыми (седловыми) сторонами, то* $\forall\, p_0 \in \Sigma^i$ *траектория* $L_{p_0} : r = r(\varphi, p_0)$, $\varphi \in (\varphi_i, \varphi_{i+1})$, *обладает свойствами:*

$$r(\varphi, p_0) \to 0\,(+\infty) \text{ при } \varphi \to \varphi_i \text{ и при } \varphi \to \varphi_{i+1}\,.$$

2) *Если луч* $\varphi = \varphi_i$ *обращен к сектору* Σ^i *узловой стороной, а луч* $\varphi = \varphi_{i+1}$ — *седловой (или наоборот), то* $\forall\, p_0 \in \Sigma^i$ *траектория* L_{p_0} *обладает свойствами:* $r(\varphi, p_0) \to 0$ *при* $\varphi \to \varphi_i$, $r(\varphi, p_0) \to +\infty$ *при* $\varphi \to \varphi_{i+1}$ *(или наоборот).*

Определение 1.3. В случае 1) леммы 1.3 траектория L_{p_0} называется *эллиптической (гиперболической) траекторией,* а сектор Σ^i — *эллиптическим (гиперболическим) сектором системы.* В случае 2) леммы 1.3 траектория L_{p_0} называется *параболической траекторией,* а сектор Σ^i — *параболическим сектором системы.* Эллиптический, гиперболический и параболический сектора обозначаются соответственно символами E, H и P.

Из сказанного выше вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Если числа* (1.3) *(и только они) являются нулями функции* F *в* $[0, 2\pi)$, *то инвариантные лучи* (1.4) *системы* (1.2) *разбивают проколотую плоскость* R_0^2 *на* $2n$ *инвариантных для этой системы секторов типов* E, H *и* P.

Замечание 1.3. Если среди секторов, о которых идет речь в теореме 1.1, есть смежные сектора типа P, то каждую группу таких секторов (вместе с разделяющими их лучами) естественно объединить в один P-сектор.

Определение 1.4. Круговая последовательность секторов типов E, H, P, доставляемая теоремой 1.1 (с учетом замечания 1.3), определяет *тип Бендиксона точки* O системы (1.2) (и, что то же самое, системы (1.1)) в смысле определения I.2.8, если заменить в нем символ B на R^2 и слово “CO-кривые"на слова “инвариантные лучи".

Замечание 1.4. При ограничении системы (1.2) на конечный круг $B : r < \delta$ с $\partial B = C$ каждый ее сектор типа E, если таковые имеются, порождает в круге B_0 сектор типа $\tilde{E} = E|_{r<\delta}$. Последний разбивается CO-кривыми системы на три сектора: P, E, P, а потому в B_0 каждые два соседних E- и E- сектора или E- и H- сектора (если таковые имеются) непременно будут разделены P-сектором, если даже этого не было на плоскости R_0^2.

Следствие 1.1. *Пусть* $\varphi = \varphi_0$, $r > 0$, *— любой из инвариантных лучей* (1.4), *пусть* $l \in \{1, 2, 3\}$ *— его тип. Тогда совокупность всех* O*-кривых системы* (1.2), *примыкающих к точке* O *по направлению этого луча* (O_{φ_0}*-кривых*) :

1) *при* $l = 1$ *образует открытый пучок* (см. определение I.2.9), *причем одна из них лежит на самом этом луче*;

2) *при* $l = 2$ *состоит из единственной* O*-кривой* (*она лежит на луче*);

3) *при* $l = 3$ *образует полуоткрытый пучок* O*-кривых, граничная кривая которого лежит на луче.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi_0 = 0$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$, такое, что $F(\varphi) \neq 0$ при $0 < |\varphi| \leqslant \varepsilon$, $G(\varphi) \neq 0$ при $|\varphi| \leqslant \varepsilon$, и произвольное число $\Delta > 0$. Рассмотрим сектора $S : |\varphi| \leqslant \varepsilon, r > 0$, $S^{\pm} : 0 < \pm\varphi \leqslant \varepsilon, r > 0$, и $S_\Delta = S \Big|_{r \leqslant \Delta}$. Пусть $\Gamma = \partial S_\Delta \setminus \{O\}$. Введем на Γ параметр s. Пусть, например, s — алгебраическое расстояние по Γ от точки $C = (\Delta, 0)$ до произвольной точки $p \in \Gamma$, возрастающее при движении точки p по Γ в положительном (относительно S_Δ) направлении. Точку p, для которой $Cp = s$, будем обозначать символом $p(s)$, так что $\Gamma = \{p(s), |s| < \Delta(1 + \varepsilon)\}$.

1) $l = 1$. Рассмотрим полутраектории системы (1.2) $L_{p_0} : r = r(\varphi, p_0)$, $\varphi_0 = \varepsilon$, $r_0 > 0$, $0 < \varphi \leqslant \varepsilon$. Согласно (1.7) они подобны с центром подобия O и заполняют сектор S^+. По лемме 1.2 $\forall\, r_0 > 0$ полутраектория L_{p_0} обладает следующими свойствами: а) является O_0-кривой: $r(\varphi, p_0) \to 0$ (монотонно) при $\varphi \to 0$, б) с убыванием r пересекает в единственной точке $p(s), s = s(r_0)$, кривую Γ, входит в сектор S^+_Δ и там примыкает к точке O. Здесь функция $s = s(r_0), r_0 > 0$, непрерывна и монотонна и при изменении r_0 от $+\infty$ до 0 пробегает интервал $I^+ = (0, \Delta(1+\varepsilon))$. Полагая $L_{p(s)} = L_{p_0} \cap S^+_\Delta$, запишем совокупность всех O-кривых системы, примыкающих к точке O из сектора S^+_Δ, в виде семейства $W^+ = \{L_{p(s)},\, 0 < s < \Delta(1 + \varepsilon)\}$. Аналогично совокупность O-кривых системы, примыкающих к точке O из сектора S^-_Δ, запишется в виде семейства $W^- = \{L_{p(s)}, -\Delta(1+\varepsilon) < s < 0\}$. Добавим к этим кривым O-кривую $L_{p(0)} : \varphi = 0,\, 0 < r \leqslant \Delta$. Тогда совокупность всех O_0-кривых системы запишется в виде семейства $W = \{L_{p(s)}, |s| < \Delta(1+\varepsilon)\}$. Все эти O-кривые одноименны в смысле определения I.1.2, так как $dr/d\tau$ сохраняет знак при $|\varphi| \leqslant \varepsilon$. Их начальные точки $p(s)$ при изменении s в $I = (-\Delta(1 + \varepsilon), \Delta(1 + \varepsilon))$ пробегают непрерывную линию Γ. Следовательно, семейство W согласно определению I.2.9 представляет собой открытый пучок O-кривых системы (1.2).

2) $l = 2$. В этом случае согласно лемме 1.2 в секторе S_Δ $\exists!$ O-кривая системы (1.2): $\varphi = 0, 0 < r \leqslant \Delta$.

3) $l = 3$. В этом случае, действуя по той же схеме, что и в случае 1), совокупность всех O_0-кривых системы запишем в виде семейства $W = \{L_{p(s)},\, 0 \leqslant as < |a|\Delta(1 + \varepsilon)\}$. Семейство W согласно определению I.2.9 представляет собою полуоткрытый пучок O-кривых системы (1.2). □

1.2. Функция $F(\varphi) \equiv 0$

В этом случае согласно замечанию 1.1 $G(\varphi) \neq 0 \quad \forall\, \varphi \in R$, а потому для системы (1.2) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Если в системе* (1.2) $F(\varphi) \equiv 0$, *то ее траекториями являются: точка* O *и лучи* $\varphi = \varphi_0$, $r > 0$, *где* $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ *— любое число, т. е. для системы* (1.2) *(и* (1.1)*) точка* O *— особый* (*дикритический*) *узел. Ее тип Бендиксона —* P.

1.3. Функция $F(\varphi) \neq 0 \quad \forall\, \varphi \in R$

В этом случае система (1.2) не имеет инвариантных лучей, и $\forall\, p_0 \neq O$ ее траектория

L_{p_0} представима формулой (1.7) при $\varphi \in R$.

Пусть
$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G(\varphi)}{F(\varphi)}\, d\varphi\,.$$
Тогда представлению (1.7) для L_{p_0} можно придать вид
$$r = r_0\, e^{\alpha(\varphi-\varphi_0)}\, \rho(\varphi), \quad \varphi \in R\,, \tag{1.7$'$}$$
где $\rho(\varphi)$ — 2π-периодическая функция, $\rho(\varphi) > 0 \quad \forall\, \varphi, \quad \rho(\varphi_0) = 1$. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1.3. *Если в системе* (1.2) $F(\varphi) \neq 0 \quad \forall\, \varphi \in R$, *то* $\forall\, p_0 \neq O$ *ее траектория* L_{p_0} *представима в виде* (1.7$'$) *и, следовательно:*

1) *если* $\alpha < 0$, *то* $r(\varphi) \to 0$ *при* $\varphi \to +\infty, \quad r(\varphi) \to +\infty$ *при* $\varphi \to -\infty$, *а если* $\alpha > 0$, *то наоборот, т. е. точка* O *— левый или правый фокус; ее тип Бендиксона —* P;

2) *при* $\alpha = 0 \quad r(\varphi + 2\pi) \equiv r(\varphi),\ \varphi \in R$, *т. е. точка* O *— центр.*

Замечание 1.5. Пусть система (1.1) — вырожденная, т. е. в ней
$$P(x,y) \equiv \Pi_l(x,y) X_{m-l}(x,y), \quad Q(x,y) \equiv \Pi_l(x,y) Y_{m-l}(x,y),$$
где Π_l — форма от x и y степени $l,\ 1 \leqslant l \leqslant m$, имеющая вещественные линейные относительно x и y множители, а
$$X^2_{m-l}(x,y) + Y^2_{m-l}(x,y) \neq 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \neq (0,0)\,.$$
Тогда особыми для системы (1.1) будут точки прямых, определяемых уравнением $\Pi_l(x,y) = 0$ (и только они). Вне этих прямых траектории системы (1.1) будут совпадать с дугами траекторий системы
$$\frac{dx}{dt} = X_{m-l}(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y_{m-l}(x,y). \tag{1.8}$$
Эта система при $l < m$ — однородная невырожденная, а при $l = m$ имеет вид
$$\dot{x} = a, \quad \dot{y} = b, \quad a, b \in R, \quad |a| + |b| \neq 0. \tag{1.9}$$
Построив ее фазовый портрет на плоскости R^2 и наложив на него особые линии системы (1.1), мы и получим фазовый портрет последней.

1.4. Линейная однородная система

При $m = 1$ система (1.1) линейна. Ее можно записать в виде
$$\frac{dp}{dt} = Ap, \tag{1.10}$$
где $p = (x,y)$, A — ненулевая постоянная матрица. Условие невырожденности этой системы $\det A \neq 0$. В полярных координатах она имеет вид
$$\begin{aligned} dr/dt &= r\langle Au(\varphi),\, u(\varphi)\rangle \equiv rG(\varphi), \\ d\varphi/dt &= \langle Au(\varphi),\, v(\varphi)\rangle \ \equiv F(\varphi), \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $u(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\quad v(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, $\quad \langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение векторов. Эта система — π-периодическая по φ.

Из вида функции F следует, что

$$F(\varphi_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Au(\varphi_0) = \lambda u(\varphi_0),$$

где $\lambda(\in R)$ — постоянная, т. е. $F(\varphi_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(\varphi_0)$ — собственный вектор матрицы A.

Пусть λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы A, $\ \lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Для них могут представиться следующие возможности.

1) λ_1, λ_2 — вещественны, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть $u(\varphi_1)$, $u(\varphi_2)$ — соответствующие им собственные векторы матрицы A, где $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, \pi)$ — нули F. Тогда инвариантными для системы (1.11) будут лучи (1.4), где $n = 2$. Чтобы выяснить их типы (в смысле определения 1.1), будем считать, что в системе (1.10) матрица A имеет жорданову форму: $A = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2)$. Тогда в системе (1.11) согласно формулам (I.4.3)

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)\sin 2\varphi, \quad G(\varphi) = \lambda_1\cos^2\varphi + \lambda_2\sin^2\varphi\,.$$

Нули F в $[0, \pi)$: $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2$, их кратности: $k_1 = k_2 = 1$, числа $a_i = F'(\varphi_i)G^{-1}(\varphi_i)$, $\ i = 1, 2$, имеют вид: $a_1 = \lambda_1^{-1}\lambda_2 - 1$, $\ a_2 = \lambda_1\lambda_2^{-1} - 1\,.$

а) $\lambda_1\lambda_2 < 0$. В этом случае $a_i < 0$, $\ i = 1, 2$, а потому для системы (1.11) инвариантные лучи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ (а в силу π-периодичности системы и лучи $\varphi = \pi$ и $\varphi = 3\pi/2$) — седловые.

б) $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $|\lambda_2| > |\lambda_1|$. В этом случае $a_1 > 0$, $\ a_2 < 0$, а потому для системы (1.11) инвариантные лучи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ — узловые, а инвариантные лучи $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$ — седловые.

Из этого (с учетом определения 1.3) следует, что для системы (1.11) в случае а) все инвариантные лучи (1.4) — седловые, все сектора (1.5) — гиперболические, тип Пуанкаре точки O — седло, ее тип Бендиксона — $HHHH = H^4$, а в случае б) лучи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ — узловые, лучи $\varphi = \pm\pi/2$ — седловые (или наоборот), все сектора (1.5) — параболические, тип Пуанкаре точки O — простой узел, ее тип Бендиксона (с учетом замечания 1.3) — P.

2) $\lambda_2 = \lambda_1$. а) Пусть матрица A — недиагональна. Тогда для нее существует единственный собственный вектор $u(\varphi_1)$, $\ 0 \leqslant \varphi_1 < \pi$, причем φ_1 — нуль F кратности $k_1 = 2$. Поэтому система (1.11) имеет два инвариантных луча: $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_1 + \pi$. Эти лучи — седло-узловые, а порождаемые ими сектора (1.5) (в силу π-периодичности системы) — параболические. Следовательно, тип Пуанкаре точки O — вырожденный узел, ее тип Бендиксона — P.

б) Пусть матрица A — диагональна: $A = \lambda_1 E$, E — единичная матрица. Тогда в системе (1.11) $F(\varphi) \equiv 0$, $\quad G(\varphi) \equiv \lambda_1 \neq 0$ и ее траекториями в R_0^2 являются лучи $\varphi = \varphi_0$, $\quad r > 0$, где $\varphi_0\,(\in R)$ — любое. Следовательно, для нее тип Пуанкаре точки O — особый (дикритический) узел, тип Бендиксона — P.

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\quad \alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$. Пусть система (1.10) приведена к вещественной канонической форме, т. е. в ней матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Тогда система (1.11) для нее будет иметь вид

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta,$$

а ее траектории, будучи представлены в форме (1.7′), — вид

$$r = r_0 e^{\alpha\varphi/\beta}\,.$$

Тип Пуанкаре точки O — фокус при $\alpha \neq 0$, центр при $\alpha = 0$; тип Бендиксона — P при $\alpha \neq 0$, центр при $\alpha = 0$.

1.5. Однородная квадратичная система

Пусть в системе (1.1) $m = 2$, т. е. она квадратична. Тогда в ее записи (1.2) F, G — кубические формы от $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, причем в случае невырожденности, как нетрудно видеть, $F(\varphi) \not\equiv 0$. Следовательно, система всегда имеет 1, 2 или 3 пары инвариантных лучей вида (1.4). Выяснив их типы (определения 1.1 и 1.2) и типы секторов (1.5), на которые эти лучи разбивают плоскость R_0^2 (лемма 1.3 и определение 1.3), мы придем к выводу, что особая точка O невырожденной однородной квадратичной системы (1.1) имеет один из следующих типов Бендиксона [30, с.71]:

$$E^2, \quad H^2, \quad (EH)^2, \quad (PE)^2, \quad (PH)^2, \quad H^6.$$

Если квадратичная система (1.1) — вырожденная, то соответствующая ей невырожденная система (1.8) либо линейна, либо имеет вид (1.9). Построив ее фазовый портрет и наложив на него особые линии системы (1.1), получим фазовый портрет последней [30, с.78].

§ 2. Квазиоднородная система: вид, запись в полярных координатах

Добавляя к правым частям системы (1.1) члены более высокого порядка малости при $p \to O$, получаем систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) + \xi(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) + \eta(x,y), \tag{2.1}$$

которую мы и называем *квазиоднородной*. Будем предполагать, что для нее выполняется следующее условие.

Условие 2.1. P, Q — формы от x и y степени $m \geqslant 1$, $P^2(x,y) + Q^2(x,y) \not\equiv 0$, $\xi, \eta \in C(D)$, где $D (\subset R^2)$ — область, $O = (0,0) \in D$, $\xi(0,0) = \eta(0,0) = 0$, $\xi(x,y)$, $\eta(x,y) = o(r^m)$ при $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$, D — область единственности для траекторий системы, O — изолированная точка покоя.

В таком виде всегда может быть записана, в частности, система (0.3.1), если $\exists\, m \geqslant 1$ такое, что в ней функции $X, Y \in C^m(D)$, все их частные производные порядков, меньших m, равны нулю в точке O, а хотя бы одна из производных порядка m отлична от нуля в O.

Однородную систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \ \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{2.1$_0$}$$

будем называть *однородным приближением* или *главной частью системы* (2.1).

Система (2.1) есть частный случай системы (0.3.1). Поэтому согласно § I.4 в полярных координатах r, φ она принимает вид

$$\frac{dr}{dt} = r^m(G(\varphi) + g(r,\varphi)), \quad \frac{d\varphi}{dt} = r^{m-1}(F(\varphi) + f(r,\varphi)), \tag{2.2}$$

где

$$\begin{pmatrix} G(\varphi) \\ F(\varphi) \end{pmatrix} = E(\varphi) \begin{pmatrix} P(u) \\ Q(u) \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} g(r,\varphi) \\ f(r,\varphi) \end{pmatrix} = E(\varphi) \begin{pmatrix} \xi(ru) \\ \eta(ru) \end{pmatrix} r^{-m}. \tag{2.3}$$

Как видно из (2.3), F, G — формы степени $m+1$ от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, причем

$$F^2(\varphi) + G^2(\varphi) \equiv P^2(u) + Q^2(u) \not\equiv 0, \tag{2.4}$$

$f, g \in C(D)$, $f(0,\varphi) \equiv g(0,\varphi) \equiv 0$. Таким образом, система (2.2), в отличие от системы (I.4.2), определена и при $r = 0$, так что мы можем рассматривать ее в любом круге $\overline{B}(\subset D)$ плоскости R^2_p, где $B:\ r < \delta$ — малая окрестность точки O (см. определение I.1.1), а также в соответствующих ему полосе $\overline{\Pi}$ плоскости $R^2_{r,\varphi}$ и кольце $\overline{H}$ плоскости R^2_q (см. § I.4).

Лемма 2.1. *Круг $\overline{B}$ (полоса $\overline{\Pi}$, кольцо $\overline{H}$) есть область единственности для траекторий системы* (2.2).

Доказательство. Докажем это, например, для полосы $\overline{\Pi}:\ 0 \leqslant r \leqslant \delta,\ |\varphi| < +\infty$.

1) Π_0 — область единственности для траекторий системы (2.2), ибо она согласно § I. 4 обладает этим свойством уже для системы (I.4.2).

2) На оси φ система (2.2) принимает вид $r = 0,\ \dot\varphi = F(\varphi)$, если $m = 1$, $r = 0,\ \dot\varphi = 0$, если $m \geqslant 2$, т. е. индуцирует на ней одно уравнение, для которого ось R_φ — область единственности.

3) Если $(r(t), \varphi(t))$, $t \in I = (\alpha, \beta)$, — полное решение (движение) системы (2.2) в области Π_0, обладающее свойством: $r(t) \to 0$ при $t \to \alpha$ ($t \to \beta$), то $\alpha = -\infty$ ($\beta = +\infty$). Это следует как из общих предположений относительно системы (2.1): $B(\subset D)$ — область единственности, O — точка покоя, так и непосредственно из системы (2.2) следующим образом. Пусть, например, $r(t) \to 0$ при $t \to \alpha$. Тогда существуют $M \in (0, +\infty)$ и $\tau \in (\alpha, \beta)$ такие, что $\forall\, t \in (\alpha, \tau]$ $|G(\varphi(t)) + g(r(t), \varphi(t))| \leqslant M$, т. е. $-M \leqslant r^{-m}(t)\dot r(t) \leqslant M$. Интегрируя последние неравенства по произвольному отрезку $[t, \tau] \subset (\alpha, \tau]$ и устремляя затем t к α, получаем $\alpha = -\infty$.

Из 1) — 3) следует, что Π — область единственности для траекторий системы (2.2). Но полосу $\overline{\Pi}$ всегда можно погрузить в полосу Π', которая является образом O-круга B', $\overline{B} \subset B' \subset \overline{B'} \subset D$, и по доказанному является областью единственности для траекторий системы (2.2). □

Следствие 2.1. *Ось R_φ плоскости $R^2_{r,\varphi}$ (окружность S^1 плоскости R^2_q) инвариантна для системы* (2.2) *(т. е. состоит из целых ее траекторий).*

Доказательство. Это следует из пункта 3) доказательства леммы 2.1. □

Однако и система (2.2) имеет один существенный недостаток: для нее при $m > 1$ ось R_φ (окружность S^1) целиком состоит из точек покоя. Это лишает преимуществ рассмотрение системы (2.2) в полосе Π или в кольце H по сравнению с ее рассмотрением в круге B. Чтобы устранить этот недостаток, введем в систему (2.2) при $r > 0$ новое время τ по формуле

$$\tau = \int_0^t r^{m-1}(\theta)\,d\theta. \tag{2.5}$$

При этом она примет вид

$$\frac{dr}{d\tau} = r(G(\varphi) + g(r,\varphi)), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = F(\varphi) + f(r,\varphi). \tag{2.6}$$

Система (2.6) также определена и при $r = 0$, т. е. в круге B (полосе Π, кольце H), и для нее справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2. *Утверждение леммы* 2.1 *справедливо и для системы* (2.6). *Точка O (ось R_φ, окружность S^1) инвариантна для системы* (2.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Область $B_0(\Pi_0, H_0)$ — область единственности для траекторий системы (2.6), ибо она обладает этим свойством для траекторий системы (2.2), а замена (2.5) означает просто перепараметризацию траекторий системы (2.2) в области $r > 0$. Далее, для системы (2.6) справедливы п. 2), 3) доказательства леммы 2.1. Отсюда и следуют утверждения леммы 2.2. □

Движения и траектории системы (2.6) на прямой R_φ (на окружности S^1) определяются равенствами вида

$$r = 0,\ \varphi = \varphi(\tau, \varphi_0),\ \tau \in I_{\varphi_0},$$

где $\varphi(t, \varphi_0),\ \tau \in I_{\varphi_0},\ \varphi(0, \varphi_0) = \varphi_0,$ — решение уравнения

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = F(\varphi), \tag{2.6_0}$$

т. е. совпадают соответственно с движениями и траекториями уравнения (2.6_0). Последние же обладают следующими свойствами.

Лемма 2.3. 1) *Траекториями уравнения* (2.6_0) *на оси* R_φ (*на окружности* S^1) *являются точки, соответствующие нулям функции* F, *и интервалы оси* R_φ (*дуги окружности* S^1), *на которые эти точки разбивают* $R_\varphi(S^1)$.

2) *Пусть* φ_0 — *нуль* F *кратности* $k \geqslant 1$. *Тогда точка покоя* φ_0 *уравнения* (2.6_0) *асимптотически устойчива по Ляпунову* (*вполне неустойчива*), *если* k *нечетное,* $F^{(k)}(\varphi_0) < 0$ (> 0), *полуустойчива, если* k *четное.*

3) $\forall \varphi_0 \in R$ *движение* $\varphi(\tau, \varphi_0)$ *уравнения* (2.6_0) *продолжимо на все* $\tau \in R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения 1) — 3) леммы вытекают соответственно из теорем 0.2.1 — 0.2.3. □

Система (2.6) (если рассматривать ее в круге $B\ :\ r < \delta$ плоскости R^2_p, $p = ru = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$) — это система (2.1), записанная в переменных r, φ, τ. Траектории этих систем в круге B совпадают. Однако система (2.6) допускает рассмотрение и в полосе $\Pi : 0 \leqslant r < \delta$ декартовой плоскости r, φ (или в кольце $H :\ 1 \leqslant \rho = 1 + r < 1 + \delta$ плоскости R^2_q, $q = \rho u$). Переход от круга B к полосе Π (к кольцу H) позволяет сделать первый шаг к разрешению особенности O, ибо при этом особая точка $O(\in R^2_p)$ системы (2.6), как правило, распадается на несколько ее особых точек, лежащих на оси R_φ (на окружности S^1), каждая из которых, естественно, оказывается менее сложной, чем исходная точка O.

З а м е ч а н и е 2.1. Далее в главах II и III мы будем изучать систему (2.6), так что термины “система“движение“траектория"и прочие будут означать (если не оговорено противное) систему (2.6), ее движение, ее траекторию, прочие объекты, связанные с нею. Формулировки всех утверждений будут даваться для круга B. Однако для их доказательства мы нередко будем рассматривать систему в полосе Π или в кольце H.

§ 3. Классификация O-кривых. Исключительные направления системы в точке O

Итак, мы будем изучать поведение траекторий системы (2.6) в малой окрестности B : $r < \delta$ точки O плоскости R^2_p, $p = (x, y)$ (см. определение I.1.1).

Определение 3.1. Пусть $p = r_p u(\varphi_p) = r_p(\cos\varphi_p, \sin\varphi_p) \in B_0$,

$$L_p^{+(-)} = \{r(\tau)u(\varphi(\tau)), \tau \in R_{+(-)}\}, r(\tau) \to 0 \text{ при } \tau \to +\infty(-\infty) \tag{3.1}$$

— $O^{+(-)}$-кривая системы с начальной точкой p. Будем называть ее:

1) $TO^{+(-)}$*-кривой системы,* если $\varphi(\tau) \to \varphi_0 \in R$ при $\tau \to +\infty(-\infty)$;

2) $O^{+(-)}$*-спиралью,* если $\varphi(\tau) \to +\infty$ или $-\infty$ при $\tau \to +\infty(-\infty)$;

3) *колеблющейся в интервале* (φ_1, φ_2) $O^{+(-)}$*-кривой,* если при $\tau \to +\infty(-\infty)$

$$-\infty \leqslant \varphi_1 = \underline{\lim}\,\varphi(\tau) < \overline{\lim}\,\varphi(\tau) = \varphi_2 \leqslant +\infty. \tag{3.2}$$

В случае 1) будем называть направление $\varphi = \varphi_0$ *тангенциальным направлением системы в точке* O.

На рис. 3.1 изображены TO^+-кривая, O^--спираль и колеблющаяся O^+-кривая системы на плоскости x, y (a) и на декартовой плоскости r, φ ($б$).

Теорема 3.1. *Если $F(\varphi) \not\equiv 0$, то система не имеет колеблющихся O-кривых, т. е. любая ее O-кривая является либо TO-кривой, либо O-спиралью.*

Доказательство. Согласно определению O-кривая системы — это ее полутраектория вида (3.1). Пусть для системы существует, например, полутраектория L^+, обладающая свойствами (3.1), (3.2). По условию $\exists\,\varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$: $F(\varphi_0) \neq 0$. Поэтому $\exists\,\delta_0 \in (0, \delta) : F(\varphi_0) + f(r, \varphi_0) \neq 0$ при $0 \leqslant r < \delta_0$. В силу (3.1) для числа δ_0 $\exists\,\tau_0 \geqslant 0 : \forall\tau > \tau_0$ имеет место неравенство $r(\tau) < \delta_0$. Следовательно, при $\tau > \tau_0$ L_p^+ пересекает луч $\varphi = \varphi_0$ разве лишь один раз, т. е. $\exists\,\tau_1 \geqslant \tau_0$: $\forall\tau > \tau_1$ либо 1) $\varphi(\tau) > \varphi_0 > \varphi_1$, либо 2) $\varphi(\tau) < \varphi_0 < \varphi_2$, что противоречит допущению о том, что L_p^+ обладает свойством (3.2). □

Определение 3.2. Если $\varphi_0 (\in R)$ — нуль F, то направление $\varphi = \varphi_0$ называется *исключительным направлением* системы (2.6) (и системы (2.1)) в точке O. Исключительное направление системы в точке O $\varphi = \varphi_0$ называется *обыкновенным,* если $G(\varphi_0) \neq 0$, *особым,* если $G(\varphi_0) = 0$.

Отметим, что если рассматривать систему (2.6) в полосе Π или в кольце H, то при $F(\varphi_0) = 0$ точка $(r, \varphi) = (0, \varphi_0)$ является для нее особой точкой.

Лемма 3.1. *Если $\varphi = \varphi_0$ — тангенциальное направление системы в точке O, то $\varphi = \varphi_0$ есть ее исключительное направление в точке O.*

Доказательство. Рассмотрим систему в полосе Π. По условию $\exists\,p = (r, \varphi) \in \Pi_0$, для которой одна из полутраекторий $L_p^\pm$, например $L_p^+ : r = r(\tau)$, $\varphi = \varphi(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, обладает свойством $r(\tau) \to 0$, $\varphi(\tau) \to \varphi_0 (\in R)$ при $\tau \to +\infty$. Тогда ее предельное множество $\Omega_p = \{(0, \varphi_0)\}$. Тогда по свойству 0.1.8 точка $(0, \varphi_0)$ — состояние равновесия системы, а потому $F(\varphi_0) = 0$. □

Следствие 3.1. *Если в некотором секторе $\Sigma : \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ $(\varphi_1, \varphi_2 \in R)$ система не имеет исключительных направлений, то она не имеет в нем и TO-кривых.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из леммы 3.1. □

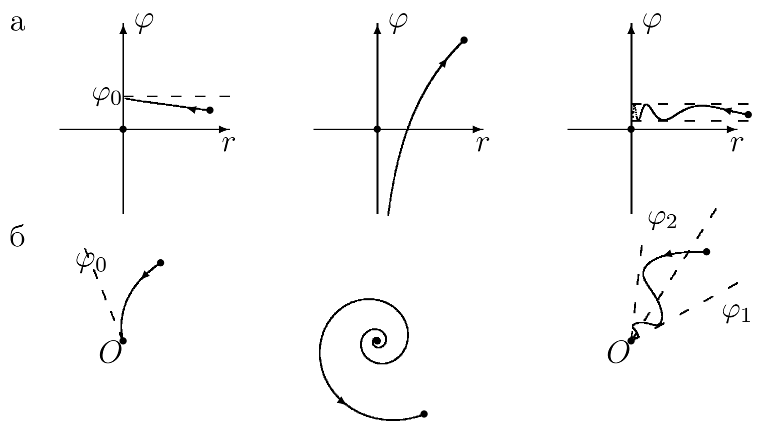

Рис. 3.1. O-кривые на декартовой плоскости r, φ (*а*)
и на плоскости x, y (*б*)

Как же ведут себя траектории системы в таком секторе Σ вблизи точки O? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть система не имеет в секторе* $\Sigma : \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2,\ 0 < \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$, *исключительных направлений. Тогда*

1) *при достаточно малом* $\delta > 0$ *в секторе* $\Sigma_\delta = \Sigma \cap B$ *траектории системы описываются уравнением*

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r(G(\varphi) + g(r, \varphi))}{F(\varphi) + f(r, \varphi)} \equiv H(\varphi, r),\ H \in C(\Sigma_\delta); \tag{3.3}$$

2) $\exists\, \delta_0 \in (0, \delta) : \forall p_0 = r_0 u_0 = r_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) \in \Sigma_{\delta_0} = \Sigma|_{r<\delta_0}$ *решение уравнения* (3.3) $r = r(\varphi, p_0)$, $r(\varphi_0, p_0) = r_0$, *существует на отрезке* $[\varphi_1, \varphi_2]$ *и при* $r_0 > 0$ *обладает свойством*

$$0 < r(\varphi, p_0) < \delta \quad \forall \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2],$$

так что определяемая им дуга ℓ_0 *траектории* L_{p_0}, *не выходя из* Σ_δ, *полностью пересекает сектор* Σ (рис. 3.2);

3) $r(\varphi, p_0) \rightrightarrows 0$ *при* $r_0 \to 0,\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$.

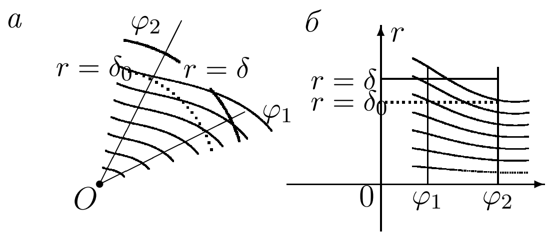

Рис. 3.2. Сектор Σ_δ на плоскости x, y (*а*)
и на декартовой плоскости r, φ (*б*)

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $F(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in I = [\varphi_1, \varphi_2]$. Но $F \in C(R)$. Следовательно, существует постоянная $c > 0 : |F(\varphi)| \geqslant c\ \forall \varphi \in I$. Вместе с тем $f \in C(B)$ и $f(0, \varphi) \equiv 0$, а потому при достаточно малом $\delta > 0$ $F(\varphi) + f(r, \varphi) \neq 0$ в Σ_δ. Отсюда следует утверждение 1) теоремы.

Рассмотрим уравнение (3.3) в прямоугольнике $\Sigma_\delta = [\varphi_1, \varphi_2] \times [0, \delta)$ декартовой плоскости φ, r (рис. 3.2, *б*). Отметим, что Σ_δ — область единственности для уравнения (3.3), ибо $\Sigma_\delta \subset \Pi$, а полоса $\Pi : \ 0 \leqslant r < \delta$ — область единственности для траекторий системы (2.6). Следовательно, уравнение (3.3) обладает в прямоугольнике Σ_δ свойством непрерывной зависимости решений от начальных данных. Применяя его к решению $r \equiv 0$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, этого уравнения, заключаем: $\forall\, \varepsilon \in (0, \delta]\ \exists\, \delta_0 \in (0, \varepsilon)$ такое, что $\forall\, p_0 = (\varphi_0, r_0) \in \Sigma_{\delta_0}$, $r_0 > 0$, решение уравнения (3.3) $r = r(\varphi, p_0)$, $r(\varphi_0, p_0) = r_0$, определено на отрезке $I = [\varphi_1, \varphi_2]$ и удовлетворяет неравенствам $0 < r(\varphi, p_0) < \varepsilon \quad \forall \varphi \in I$. Из этого при $\varepsilon = \delta$ вытекает утверждение 2) теоремы, а при $\varepsilon \to 0$ — утверждение 3). $\square$

Согласно лемме 1.1 для числа нулей функции F на оси φ могут представиться лишь следующие три возможности: 1) $F(\varphi)$ имеет в $[0, 2\pi)$ $2n$ нулей, $1 \leqslant n \leqslant m+1$, 2) $F(\varphi) \equiv 0$, $\varphi \in R$, 3) $F(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi$.

§ 4. Случай 1: $F(\varphi)$ имеет в $[0, 2\pi)$ конечное (> 0) число нулей. Нормальные сектора Фроммера

Пусть функция F имеет в $[0, 2\pi)$ нули φ_i, $i = 1, 2n$, $0 \leqslant \varphi_1 < \cdots < \varphi_n < \pi \leqslant \varphi_{n+1} = \varphi_1 + \pi < \cdots < \varphi_{2n} = \varphi_n + \pi$, $1 \leqslant n \leqslant m+1$. Им соответствуют на плоскости $R^2_{x,y}$ исключительные направления системы в точке O $\varphi = \varphi_i$, $i = \overline{1, 2n}$, а на декартовой плоскости $R^2_{r,\varphi}$ — точки покоя системы $(0, \varphi_i + 2k\pi)$, $i = \overline{1, 2n}$, $k \in Z$. Построим в $B_0 \subset R^2_{x,y}$ непересекающиеся сектора $S_i : |\varphi - \varphi_i| \leqslant \varepsilon$, $\ i = \overline{1, 2n}$, где $\varepsilon > 0$ — как угодно малое число, и сектора $\Sigma_i : \ \varphi_i + \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{i+1} - \varepsilon$, $i = \overline{1, 2n}$, $\varphi_{2n+1} = \varphi_1 + 2\pi$. Тогда $\forall\, i = \overline{1, 2n}$ сектор Σ_i не содержит исключительных направлений системы в точке O, а потому согласно теореме 3.2 траектории системы, начинающиеся в Σ_i в достаточной близости от точки O, полностью пересекают этот сектор (в как угодно малой окрестности O). Таким образом, в случае 1 нам остается лишь изучить поведение траекторий системы в каждом из секторов S_i, $i = \overline{1, 2n}$, в достаточной близости от O. Для этого, следуя М. Фроммеру [22, гл. II; 36], введем понятие нормального сектора.

4.1. Нормальные сектора (нормальные области) Фроммера

Определение 4.1. Круговой сектор с вершиной в особой точке O

$$N \, : \, 0 < r \leqslant \Delta, \ |\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon, \ \varepsilon > 0, \ \Delta \in (0, \delta),$$

(рис. 4.1) называется *нормальным сектором (или нормальной областью) Фроммера* системы, если:

1) $F(\varphi_0) = 0$, $F(\varphi) \neq 0$ при $0 < |\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$;
2) $G(\varphi) + g(r, \varphi) \neq 0$ в N;
3) $F(\varphi) + f(r, \varphi) \neq 0$ при $\varphi = \varphi_0 \pm \varepsilon$, $0 < r \leqslant \Delta$.

Из пунктов этого определения вытекают следующие свойства нормального сектора (N-сектора):

(i) В секторе $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$ имеется единственное исключительное направление системы: $\varphi = \varphi_0$.

(ii) В N-секторе траектории системы описываются дифференциальным уравнением

$$r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{F(\varphi) + f(r, \varphi)}{G(\varphi) + g(r, \varphi)} \equiv \Psi(r, \varphi), \quad \Psi \in C(N), \tag{4.1}$$

и, следовательно, определяются явными уравнениями вида $\varphi = \varphi(r)$.

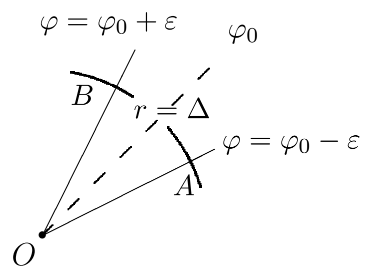

Рис. 4.1. Нормальный сектор

(iii) Боковые стенки $(OA]$ и $(OB]$ сектора N бесконтактны для траекторий системы: на каждой из них производная $d\varphi/dr$ в уравнении (4.1) отлична от нуля и, следовательно, сохраняет знак.

Свойство (iii) нормального сектора позволяет ввести следующую классификацию таких секторов.

Определение 4.2. Нормальный сектор N системы называется:

1) *N-сектором* 1*-го типа (N_1-сектором),* если в нем для уравнения (4.1) $\varphi'(r) < 0$ на $(OA]$, $\varphi'(r) > 0$ на $(OB]$ (рис. 4.2 (N_1));

2) *N-сектором* 2*-го типа (N_2-сектором)*, если в нем для уравнения (4.1) $\varphi'(r) > 0$ на $(OA]$, $\varphi'(r) < 0$ на $(OB]$ (рис. 4.2 (N_2));

3) *N-сектором* 3*-го типа (N_3-сектором)*, если в нем для уравнения (4.1) $\varphi'(r) > 0(< 0)$ на $(OA]$ и $(OB]$ (рис. 4.2 (N_3^+, N_3^-)).

$\forall\, l = \overline{1,3}$ исключительное направление системы $\varphi = \varphi_0$, которое можно заключить в N_l-сектор, будем называть *нормальным направлением* системы в точке O *l-го типа.*

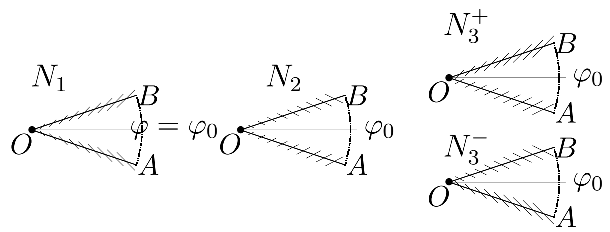

Рис. 4.2. Классификация нормальных секторов

Лемма 4.1. *Пусть φ_0 — нуль $F(\varphi)$ кратности $k \geqslant 1$, а $G(\varphi_0) \neq 0$ (так что $\varphi = \varphi_0$ — обыкновенное исключительное направление системы в точке O). Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ такие, что:*

1) *сектор N будет нормальным сектором системы;*

2) *уравнение* (4.1) *в нем можно записать в виде*

$$r\frac{d\varphi}{dr} = \Phi(\varphi) + \psi(r,\varphi) \equiv \Psi(r,\varphi), \tag{4.1$'$}$$

где функция Φ — периодическая с периодом π,

$$\Phi(\varphi) = a(\varphi - \varphi_0)^k + a_1(\varphi - \varphi_0)^{k+1} + \ldots,$$

$a, a_1, \ldots$ — постоянные, $a = F^{(k)}(\varphi_0)/(k!G(\varphi_0)) \neq 0$, ряд сходится при $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$, $\psi \in C(\overline{N})$, $\psi(0,\varphi) \equiv 0$;

3) сектор N будет N_1-сектором, если k — нечетное число, $a > 0$, N_2-сектором, если k — нечетное число, $a < 0$, N_3-сектором, если k — четное число.

Доказательство. 1) При условиях леммы $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $F(\varphi) \neq 0$ при $0 < |\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$ и $G(\varphi) \neq 0$ при $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$. По нему найдется $\Delta > 0$ такое, что для сектора N будут выполнены условия определения 4.1, т. е. он будет нормальным сектором системы.

2) Введем обозначения

$$\Phi(\varphi) = \frac{F(\varphi)}{G(\varphi)}, \quad \psi(r,\varphi) = \frac{G(\varphi)f(r,\varphi) - F(\varphi)g(r,\varphi)}{G(\varphi)[G(\varphi) + g(r,\varphi)]}. \tag{4.2}$$

Тогда уравнение (4.1), описывающее траектории системы в секторе N, примет вид (4.1′), причем функции Φ и ψ будут обладать указанными в формулировке леммы свойствами. В частности, будем иметь $a = F^{(k)}(\varphi_0)/(k!G(\varphi_0)) \neq 0$.

3) Знаки величины $d\varphi/dr$ из уравнения (4.1′) на боковых стенках $\varphi - \varphi_0 = \pm\varepsilon$, $0 < r \leqslant \Delta$, сектора N будут совпадать со знаками величин $(\pm 1)^k a$ соответственно, что доказывает справедливость утверждения 3) леммы. □

Замечание 4.1. Особое исключительное направление $\varphi = \varphi_0$ можно заключить в нормальный сектор N разве лишь в том случае, когда φ_0 — нуль $G(\varphi)$ четной кратности или $G(\varphi) \equiv 0$. Это следует из определения 4.1.

Определение 4.3. Нормальный сектор $N : 0 < r \leqslant \Delta$, $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$ системы, построенный для ее обыкновенного (особого) исключительного направления $\varphi = \varphi_0$, будем называть *обыкновенным (особым) нормальным сектором* этой системы, а само это направление — *обыкновенным (особым) нормальным направлением* системы в точке O.

Замечание 4.2. Если для системы (2.6), рассматриваемой в круге $B, \varphi = \varphi_0$ — обыкновенное исключительное направление l-го типа, $l \in \{1,2,3\}$, то для нее и $\varphi = \varphi_0 + \pi$ — обыкновенное исключительное направление того же типа. При этом в полосе Π (в кольце H) для нее и для уравнения (4.1′) $(0,\varphi_0)$ и $(0,\varphi_0+\pi)$ — элементарные особые точки: простые, если φ_0 — нуль F кратности $k = 1$, вырожденные в противном случае.

Первое из этих утверждений вытекает из π-периодичности функции Φ, второе — из определения элементарной особой точки (см. § 3 Введения).

4.2. Поведение отдельной траектории в N-секторе

Пусть $\varphi = \varphi_0$ — нормальное направление системы в точке O, $N : 0 < r \leqslant \Delta$, $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$ — окружающий его нормальный сектор. Пусть $(OA]$ и $(OB]$ — нижняя и верхняя боковые стенки сектора N, $[AB]$ — его задняя стенка (рис. 4.1, 4.2), $\Gamma = (OABO)$ — их объединение.

Лемма 4.2. *Существует область U такая, что* 1) $N \subset U \subset B_0$, 2) $G(\varphi) + g(r,\varphi) \neq 0$ *в U и, следовательно, траектории системы в U описываются уравнением* (4.1) (рис. 4.3).

Доказательство. Это вытекает из п. 2) определения 4.1. □

Пусть U — область из леммы 4.2, $p \in U$, $\varphi = \varphi(r,p)$ — решение уравнения (4.1), проходящее через точку p, $I_p = (\alpha_p, \beta_p)$ — максимальный (относительно области U) интервал

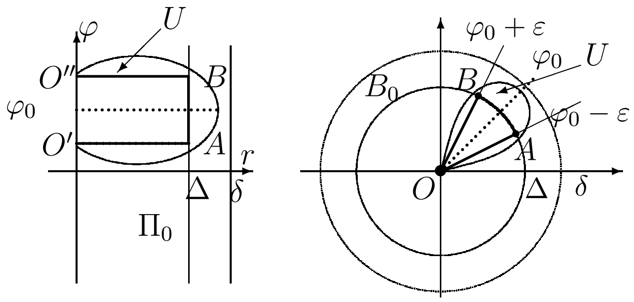

Рис. 4.3. U-окрестность нормального сектора

его существования, $L_p : \varphi = \varphi(r,p)$, $r \in I_p$, — U-траектория системы, проходящая через точку p.

Лемма 4.3. $\forall\, p \in N$ *траектория* L_p

1) *с возрастанием* r *в* $I_p^+ = [r_p, \beta_p)$ *покидает* N *в некоторой точке* $q \in \Gamma$;

2) *с убыванием* r *в* $I_p^- = (\alpha_p, r_p]$ *либо* а) *остается в* N *при всех* $r \in (\alpha_p, r_p]$, *либо* б) *покидает* N *в некоторой точке* $q \in (OA] \cup (OB]$; *в случае* а) $\alpha_p = 0$, $\varphi(r,p) \to \varphi_0$ *при* $r \to 0$, *т. е.* $L_p|_{r \leqslant r_p}$ *есть* TO*-кривая системы, примыкающая к точке* O *по направлению* $\varphi = \varphi_0$.

Доказательство. 1) Рассмотрим компакт $K = N|_{r \geqslant r_p}$. Так как $p \in K \subset U$, то согласно теореме о полном решении [12, с. 60], $\exists\, \beta \in [r_p, \beta_p) : \forall r \in (\beta, \beta_p)\ (r, \varphi(r,p)) \in U \backslash K$, т. е. L_p покидает N в некоторой точке q, $r_q \in [r_p, \beta]$.

2) Пусть для траектории L_p при убывании r в $I_p^- = (\alpha_p, r_p]$ имеет место случай а): $L_p|_{r \in I_p^-} \subset N$. Покажем, что в этом случае $\alpha_p = 0$. Допустим, что $\alpha_p > 0$. Тогда $\forall\, r \in I_p^-$ $(r, \varphi(r,p)) \in K = N|_{\alpha_p \leqslant r \leqslant r_p} \subset U$, что противоречит теореме о полном решении. Следовательно, $\alpha_p = 0$.

Покажем теперь, что $\varphi(r,p) \to \varphi_0$ при $r \to 0$. Действительно, по доказанному решение уравнения (4.1) $\varphi = \varphi(r,p)$ определено на $(0, r_p]$ и, следовательно, определяет O-кривую системы (2.6). По условиям рассматриваемого случая эта кривая лежит в N и согласно теореме 3.1 не колеблется. Следовательно, она представляет собой TO-кривую системы, т. е. $\varphi(r,p) \to \varphi^* \in [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$ при $r \to 0$. Из этого следует, что $\varphi = \varphi^*$ — тангенциальное направление системы в точке O, а потому согласно лемме 3.1 и определению 3.2 $F(\varphi^*) = 0$. Но на отрезке $[\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$ $\exists!$ нуль $F(\varphi) : \varphi = \varphi_0$. Следовательно, $\varphi^* = \varphi_0$, т. е. $\varphi(r,p) \to \varphi_0$ при $r \to 0$. □

4.3. Поведение траекторий в N-секторах различных типов

Пусть $\varphi = \varphi_0$ — нормальное направление системы в точке O так, что его можно заключить в нормальный сектор N. Пусть U — область из леммы 4.2.

Замечание 4.3. Все O-кривые системы, примыкающие к точке O из нормального сектора N любого типа, одноименны: либо все являются O^+-кривыми, либо все — O^--кривыми.

Доказательство. Это следует из определений I.1.2 и 4.1 и из вида второго уравнения системы (2.6).

Теорема 4.1. *Если* N *есть* N_1*-сектор* (рис.4.2), *то* $\forall\, p \in N$ U*-траектория системы* $L_p : \varphi = \varphi(r,p)$, $r \in I_p = (\alpha_p, \beta_p)$,

1) *с возрастанием r в $I_p^+ = [r_p, \beta_p)$ покидает N в некоторой точке $q \in \Gamma$;*

2) *с убыванием r в $I_p^- = (\alpha_p, r_p]$ остается в N при всех $r \in (\alpha_p, r_p] = (0, r_p]$ и обладает свойством: $\varphi(r,p) \to \varphi_0$ при $r \to 0$* (рис. 4.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) следует из утверждения 1) леммы 4.3. Утверждение 2) следует из утверждения 2) леммы 4.3, для которого при $N = N_1$ случай б) невозможен. □

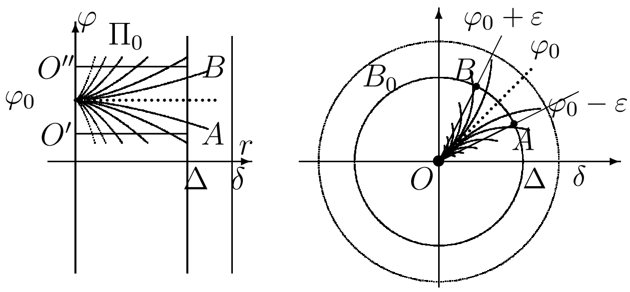

Рис. 4.4. Поведение траекторий в N_1−секторе

Следствие 4.1. *По нормальному направлению $\varphi = \varphi_0$ 1-го типа к точке O примыкает открытый пучок O-кривых системы* (см. определение I.2.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если ввести на Γ параметр s, отсчитываемый от точки $C = \Delta u(\varphi_0) = \Delta(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$, как это было сделано при доказательстве следствия 1.1, то, как следует из теоремы 4.1, совокупность рассматриваемых O-кривых запишется в виде семейства $W = \{L_{p(s)}, |s| < \Delta(1+\varepsilon)\}$, которое представляет собой открытый пучок O-кривых системы. □

Теорема 4.2. *Если N есть N_2-сектор* (рис. 4.2), *то*

1) *$\forall p \in N$ $U-$траектория системы $L_p : \varphi = \varphi(r,p)$, $r \in I_p = (\alpha_p, \beta_p)$, с возрастанием r в $I_p^+ = [r_p, \beta_p)$ покидает N в некоторой точке $q \in [AB]$; в частности, $\forall p \in [AO)$ L_p с возрастанием r выходит из N в точке $q \in [AC) \subset [AB)$, а $\forall p \in [BO)$ — в точке $q \in [BD) \subset [BA)$, $[AC) \cap [BD) = \emptyset$;*

2) *$\forall q \in [CD] \subset (AB)$ U-траектория системы $L_q : \varphi = \varphi(r,q)$, $r \in I_q = (\alpha_q, \beta_q)$, с убыванием r в $I_q^- = (\alpha_q, r_q] = (\alpha_q, \Delta]$ входит в N, остается там при всех $r \in (\alpha_q, \Delta) = (0, \Delta]$ и обладает свойством: $\varphi(r,q) \to \varphi_0$ при $r \to 0$* (рис. 4.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Согласно лемме 4.3 $\forall p \in N$ U-траектория системы L_p с возрастанием r в $I_p^+ = [r_p, \beta_p)$ покидает N в некоторой точке $q \in \Gamma$. Но при $N = N_2$ это возможно лишь при $q \in [AB]$, ибо через (OA) и (OB) траектории системы с возрастанием r входят в N_2-сектор. Если $p \in [AO)$, то L_p выходит из N_2 в точке $q \in [AB)$, ибо в точке $q = B$ из N_2 выходит траектория L_B. Рассмотрим отображение

$$h : [AO) \to [AB), \quad h(p) = q.$$

Оно отображает $[AO)$ на $h([AO)) \subset [AB)$ взаимно однозначно (в силу свойства единственности для (4.1) в U) и взаимно непрерывно (в силу непрерывной зависимости решений уравнения (4.1) от начальных данных, которая является следствием существования и единственности для (4.1) решения задачи Коши с любыми начальными данными из области U). Следовательно, $h : [AO) \to h([AO))$ — гомеоморфизм, причем $h(A) = A$. Из этого следует, что $h([AO)) = [AC) \subset [AB)$.

Аналогично $\forall p \in [BO)$ траектория L_p выходит из N_2 в точке $q \in [BA)$, и если p пробегает $[BO)$, то q пробегает $[BD) \subset [BA)$. При этом $[AC) \cap (DB] = \emptyset$ в силу свойства единственности для решений уравнения (4.1) в области U.

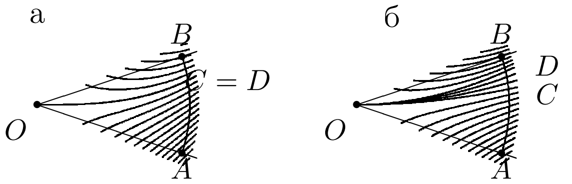

Рис. 4.5. Альтернатива для расположения траекторий в N_2-секторе

2) Пусть $q \in [CD] \subset (AB)$. Тогда U-траектория системы $L_q : \varphi = \varphi(r, q)$, $r \in I_q = (\alpha_q, \beta_q)$, при убывании r от $r_q = \Delta$ входит в N и остается там при всех $r \in (\alpha_q, \Delta] = (0, \Delta]$ (ибо выход траекторий системы из сектора $N = N_2$ при убывании r возможен лишь через $[AO) \cup [BO)$, но любая точка $p \in [AO) \cup [BO)$ является точкой выхода из N_2 с убыванием r траектории L_q, начинающейся в точке $q \in [AC) \cup [BD)$). Согласно лемме 4.3 траектория L_q обладает свойством: $\varphi(r, q) \to \varphi_0$ при $r \to 0$. $\square$

Следствие 4.2. *По нормальному направлению $\varphi = \varphi_0$ 2-го типа к точке O примыкает либо* а) *единственная O-кривая системы, либо* б) *невырожденный замкнутый пучок ее O-кривых.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $C = D$ (см. теорему 4.2), то имеет место случай а). Если $C \neq D$, то, вводя на Γ параметр s, отсчитываемый от точки C, и считая, что для точки D $s = s_0 > 0$, запишем рассматриваемую совокупность O-кривых системы в виде семейства $W = \{L_{q(s)}, s \in [0, s_0]\}$. Оно представляет собой невырожденный замкнутый пучок O-кривых системы. $\square$

Таким образом, для нормального направления второго типа возникает задача различения возможностей а) и б) для конкретных ситуаций. Эта задача составляет первую проблему различения для нормальных областей Фроммера. Мы рассмотрим ее в § 1 главы III.

Теорема 4.3. *Пусть N есть N_3-сектор* (рис. 4.2). *Пусть для* (4.1) $\varphi'(r) > 0$ *на* $(OA]$ *и* $(OB]$ [1], *т. е. в уравнении* (4.1′) $a > 0$. *Тогда:*

1) $\forall p \in N$ *U-траектория системы $L_p : \varphi = \varphi(r, p)$, $r \in I_p = (\alpha_p, \beta_p)$, с возрастанием r в $I_p^+ = [r_p, \beta_p)$ покидает N в некоторой точке $q \in [AB] \cup [BO)$, в частности, $\forall p \in [AO)$ L_p с возрастанием r выходит из N в точке $q \in [AC) \subset [ABO)$;*

2) *если $C \neq O$, то $\forall q \in [CO) \subset (ABO)$ U-траектория системы L_q при убывании r в $I_q^- = (\alpha_q, r_q]$ входит в N, остается там при всех $r \in (\alpha_q, r_q] = (0, r_q]$ и обладает свойством: $\varphi(r, q) \to \varphi_0$ при $r \to 0$* (рис. 4.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) теоремы следует из первого утверждения леммы 4.3 с учетом знака $\varphi'(r)$ на боковых стенках $(OA]$ и $(OB]$ рассматриваемого сектора N. Утверждение 2) следует из второго утверждения леммы 4.3 и первого утверждения данной теоремы. $\square$

[1] Случай, когда для (4.1) $\varphi'(r) < 0$ на $(OA]$ и $(OB]$, сводится к рассматриваемому случаю заменой в (4.1) φ на $-\varphi$.

Следствие 4.3. *По нормальному направлению* $\varphi = \varphi_0$ *3-го типа к точке* O *либо* а) *примыкает полуоткрытый пучок* O*-кривых системы, либо* б) *не примыкает ни одна ее* O*-кривая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $C = O$ (см. теорему 4.3), то имеет место случай б). Пусть $C \neq O$. Тогда, вводя на $\overline{\Gamma}$ параметр s, отсчитываемый от точки C, и считая, что точке O соответствует значение $s = s_0 > 0$, запишем рассматриваемую совокупность O-кривых в виде семейства $W = \{L_{q(s)},\ s \in [0, s_0)\}$. Оно представляет собой полуоткрытый пучок O-кривых системы. □

Задача различения возможностей а) и б) для конкретных систем составляет вторую проблему различения для нормальных областей Фроммера. Мы рассмотрим ее в § 2 главы III.

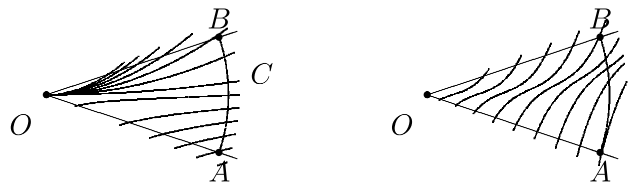

Рис. 4.6. Альтернатива для расположения траекторий в N_3−секторе

Определение 4.4. *Исключительное направление* $\varphi = \varphi_0$ *системы в точке* O *будем называть* 1) *узловым,* 2) *седловым или* 3) *седло-узловым,* если вдоль него к точке O примыкает соответственно 1) открытый пучок O-кривых, 2) единственная O-кривая или 3) полуоткрытый пучок O-кривых системы. Стороны $\varphi > \varphi_0$ и $\varphi < \varphi_0$ узлового (седлового) исключительного направления $\varphi = \varphi_0$ будем называть *узловыми (седловыми);* для седло-узлового направления сторону $a(\varphi - \varphi_0) > 0$ будем называть *узловой,* а сторону $a(\varphi - \varphi_0) < 0$ — *седловой.*

4.4. Тип точки O при отсутствии у системы TO-кривых

Лемма 4.4. *Пусть* $\varphi = \varphi_0$ *— исключительное направление системы в точке* O, $S : |\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0,$ *— сектор, не содержащий в себе других исключительных направлений системы,* $S_\delta = S \cap B_0$, *где* B *— малый* O*-круг* (см. определение I.1.1). *Если в секторе* S_δ *отсутствуют* TO*-кривые системы, то ее траектории, начинающиеся в* S_δ *в достаточной близости от точки* O, *полностью пересекают этот сектор, выходя из него с возрастанием* τ *через одну из его боковых стенок* $\Lambda_i : \varphi = \varphi_0 + (-1)^i\varepsilon,\ 0 < r < \delta,$ $i = 1, 2,$ *а с убыванием* τ *— через другую.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда $\exists \{p_k,\ k \geqslant 1\} : \forall\, k \geqslant 1\, p_k \in S_\delta$, $p_k \to O$ при $k \to +\infty$, и, скажем, $L^+_{p_k} \cap \Lambda_i = \emptyset$, $i = 1, 2$. Но по условию в S_δ нет ни особых точек системы, ни ее TO-кривых. Следовательно, $\forall\, k \geqslant 1$ полутраектория $L^+_{p_k}$ пересекает в некоторой точке q_k заднюю стенку C_S сектора S_δ. Пусть это 1-я (по возрастанию τ) такая точка. Пусть $q_0 (\in C_S)$ — точка сгущения последовательности $\{q_k,\ k \geqslant 1\}$. Тогда полутраектория $L^-_{q_0} \subset S_\delta$ и по лемме I.2.1 $L^-_{q_0} \to O$, а по теореме 3.1 $L^-_{q_0}$ есть TO-кривая системы, что противоречит условию леммы. □

Теорема 4.4. *Если система* (2.6) (*или, что то же самое, система* (2.1)) *имеет в точке* O *конечное число исключительных направлений, но не имеет* TO*-кривых, то для нее точка* O *— центр, фокус или центро-фокус.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вариант 1. Утверждение теоремы следует из леммы 4.4 и теоремы 3.2. Вариант 2. При условиях данной теоремы система (2.6) согласно теореме 3.1 не имеет колеблющихся O-кривых и не имеет TO-кривых. Следовательно, если она имеет O-кривые, то точка O для нее — фокус. В противном случае согласно теоремам I.1.1 и I.3.1 точка O для нее — центр или центро-фокус. $\square$

Проблему различения центра, фокуса и центро-фокуса мы рассмотрим в главе IV.

§ 5. Случай 2: $F(\varphi) \equiv 0$

Пусть в системе $F(\varphi) \equiv 0$. Тогда любое направление $\varphi = \varphi_0$ является для нее исключительным направлением в точке O и ни одно из них нельзя заключить в нормальный сектор. Далее, в этом случае согласно (2.4) $G(\varphi) \not\equiv 0$, а потому $G(\varphi)$ имеет в $[0, 2\pi)$ разве лишь конечное число нулей ($\leqslant 2(m+1)$). Направления, соответствующие нулям $G(\varphi)$, являются особыми исключительными направлениями, все остальные — обыкновенными. Наша задача: для каждого направления $\varphi = \varphi_0$ изучить вопрос о существовании у системы O-кривых, примыкающих к точке O по этому направлению. Изучим сначала этот вопрос для обыкновенных исключительных направлений.

Теорема 5.1. *Пусть в системе* (2.6) $F(\varphi) \equiv 0$, $G(\varphi) \neq 0\ \forall\, \varphi \in R$; *пусть для определенности* $G(\varphi) < 0\ \forall\, \varphi \in R$. *Тогда для нее*

1) $\exists$ *малый O-круг B : в B $G(\varphi) + g(r, \varphi) < 0$ и, следовательно, траектории системы описываются уравнением*

$$r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{f(r, \varphi)}{G(\varphi) + g(r, \varphi)} \equiv \Psi(r, \varphi), \tag{5.1}$$

где $\Psi \in C(\overline{B})$, $\Psi(0, \varphi) \equiv 0$;

2) $\forall\, p \in \overline{B} \setminus \{O\}$ *полутраектория* $L_p^+ \to O$ *(является O^+-кривой), а* L_p^- *покидает* $\overline{B}$ *в некоторой точке* $q \in C = \partial B$, *так что* $L_p^+ \subset L_q^+$, L_q^+ *есть CO^+-кривая системы* (*см. определения* I.1.2 *и* I.2.1);

3) *если* $q_0 \in C$ — *фиксированная точка, то* $B_0 \setminus L_{q_0}^+$ — *правильный параболический сектор круга* B_0 (*см. определения* I.2.6 *и* I.2.7);

4) *тип Бендиксона точки* O — P (*см. определение* I.2.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) очевидно. Утверждение 2) (с учетом определения I.1.1 и леммы I.2.1) следует из того, что в $\overline{B} \setminus \{O\}$ $dr/d\tau < 0$. Утверждение 3) следует из того, что сектор $B_0 \setminus L_{q_0}^+$ удовлетворяет п. 3) определения I.2.6 и определению I.2.7. Четвертое утверждение вытекает из третьего. $\square$

Теорема 5.2. *Пусть в системе* (2.6) $F(\varphi) \equiv 0$, $G(\varphi) \neq 0\ \forall\, \varphi \in R$. *Если при этом в исходной системе* (2.1) $\xi(x, y)$, $\eta(x, y) = O(r^m \alpha(r))$ *при* $r \to 0$, *где* $\alpha \in C[0, \Delta]$, $\Delta \in (0, \delta)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha(r) > 0$ *при* $r > 0$, $\displaystyle\int_0^\Delta r^{-1}\alpha(r)\,dr < +\infty$, *то по любому направлению* $\varphi = \varphi_0$ *к точке O примыкает хотя бы одна O-кривая системы* (2.6) (*и, что то же самое, системы* (2.1)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $G(\varphi) < 0\ \forall\, \varphi \in R$. Тогда мы находимся в условиях теоремы 5.1, из которой следует, что в $\overline{B} \setminus \{O\}$ траектории системы описываются уравнением (5.1), причем $\forall\, p \in \overline{B} \setminus \{O\}$ полутраектория L_p^+ является O^+-кривой.

Покажем, что полутраектория L_p^+ является для системы (2.6) TO-кривой. Для этого достаточно показать, что $\forall\, p \in \overline{B}$, $r_p > 0$, решение уравнения (5.1) $\varphi = \varphi(r)$, $\varphi(r_p) = \varphi_p$,

$0 < r \leqslant r_p$, обладает свойством: $\varphi(r) \to \varphi_0 \in R$ при $r \to 0$. Действительно, подставляя решение $\varphi(r)$ в уравнение (5.1) и интегрируя полученное тождество по произвольному отрезку $[r, r_p] \subset (0, r_p]$, получаем тождество

$$\varphi(r) \equiv \varphi_p - \int\limits_r^{r_p} \rho^{-1}\Psi(\rho, \varphi(\rho))\,d\rho \to \varphi_p - \psi_p = \varphi_0 \in R \text{ при } r \to 0,$$

ибо $|\Psi(r, \varphi(r))| \leqslant c\alpha(r)$ при малых $r > 0$ ($c > 0$ — постоянная), а интеграл $\int_0^\Delta r^{-1}\alpha(r)\,dr$ по условию сходится.

Покажем, теперь, что $\forall\, \varphi_0 \in R$ существует решение уравнения (5.1) $\varphi(r)$, $0 < r \leqslant \Delta$, обладающее свойством: $\varphi(r) \to \varphi_0$ при $r \to 0$. Для этого рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \int\limits_0^r \rho^{-1}\Psi(\rho, \varphi(\rho))\,d\rho,\ 0 \leqslant r \leqslant \Delta. \tag{5.2}$$

При указанных свойствах функции Ψ оно, согласно теореме Каратеодори [19, гл.II] имеет решение в виде абсолютно непрерывной на $[0, r^0] \subset [0, \Delta]$ функции $\varphi(r)$, $\varphi(0) = \varphi_0$. При $r \in (0, r^0]$ $\varphi(r)$ есть решение уравнения (5.1), обладающее заданным свойством. □

Теорема 5.3. *Пусть в системе* (2.6) $F(\varphi) \equiv 0$. *Если при этом в исходной системе* (2.1) *функции* $\xi, \eta \in C^{m+1}(B)$*, то по любому направлению* $\varphi = \varphi_0$*, для которого* $G(\varphi_0) \neq 0$*, к точке* O *примыкает единственная* O*-кривая системы* (2.6) (*и системы* (2.1)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в (2.1) $\xi, \eta \in C^{m+1}(B)$, то функции f, g из (2.6), как следует из формул (2.3), обладают свойствами: $f(r, \varphi) = r(F_1(\varphi) + f_1(r, \varphi))$ (где F_1 — форма степени $m + 2$ от $\cos\varphi, \sin\varphi$, $f_1, f'_{1\varphi} \in C(\Pi)$, $f_1(0, \varphi) \equiv 0$), $g'_\varphi \in C(\Pi)$. Если $G(\varphi_0) \neq 0$, то существуют $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ такие, что $G(\varphi) + g(r, \varphi) \neq 0$ в прямоугольнике $R(\subset \Pi) : 0 \leqslant r \leqslant \Delta,\ |\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, при этих условиях траектории системы в R описываются уравнением

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{F_1(\varphi) + f_1(r, \varphi)}{G(\varphi) + g(r, \varphi)} \equiv \Psi_1(r, \varphi), \tag{5.3}$$

где Ψ_1, $\Psi'_{1\varphi} \in C(R)$. Для (5.3) $\exists!$ решение $\varphi(r)$, $\varphi(0) = \varphi_0$. □

Оставив исследование особых направлений до § 3 главы III, обратимся к случаю 3.

§ 6. Случай 3: $F(\varphi) \neq 0\ \ \forall\, \varphi \in R$

Теорема 6.1. *Если* $F(\varphi) \neq 0\ \forall\, \varphi \in R$*, то точка* O *является для системы центром, фокусом или центро-фокусом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условиях данной теоремы рассматриваемая система не имеет колеблющихся O-кривых (согласно теореме 3.1) и не имеет TO-кривых (согласно следствию 3.1). Поэтому если она имеет O-кривые, то любая из них является O-спиралью и в круге B с достаточно малым $\delta > 0$ представима в виде $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi), \varphi \geqslant 0$ (или $\varphi \leqslant 0$), — решение уравнения (3.3), $r(\varphi) \to 0$ при $\varphi \to +\infty$ (или при $\varphi \to -\infty$). Следовательно, в этом случае точка O является для системы левым (или правым) фокусом. Если же система не имеет O-кривых, то согласно теоремам I.1.1 и I.3.1 для нее точка O — центр или центро-фокус. □

Проблему различения центра, фокуса и центро-фокуса мы рассмотрим в главе IV.

Глава III

Проблемы различения для исключительных направлений

В этой главе исследуются проблемы различения, возникающие в случаях 1 и 2 главы II. Она опирается на те же первоисточники, что и глава II, а также на статьи автора [4, 5, 7].

§ 1. Проблема различения для нормального направления 2-го типа

Пусть $\varphi = \varphi_0$ — нормальное направление 2-го типа рассматриваемой системы (II.2.6) в точке O, т. е. исключительное направление, которое можно заключить в нормальный сектор 2-го типа. Для него согласно теореме II.4.2 возникает проблема единственности O-кривой, примыкающей к точке O по направлению $\varphi = \varphi_0$. Ниже мы сформулируем ряд условий единственности такой O-кривой. Эти условия преимущественно будут налагаться на функции ξ, η, входящие в правые части исходной системы (II.2.1), и будут определять свойства функций f, g из системы (II.2.6), которую мы, как правило, будем рассматривать в полосе $\Pi : 0 \leqslant r < \delta$ декартовой плоскости r, φ. Поэтому сначала выясним свойства функций f, g в полосе Π, получаемые ими в наследство от функций ξ, η, подчиненных тем или иным ограничениям.

1.1. Вспомогательные предложения

Лемма 1.1. 1) *Если в системе* (II.2.1) $\xi, \eta \in C^1(B)$ *и*

$$\xi'_x(x,y), \ldots, \eta'_y(x,y) = O(\alpha(r) r^{m-1}),\ \alpha(r) = o(1) \text{ при } r \to 0,$$

то в системе (II.2.6) $f, g, f'_\varphi, g'_\varphi \in C(\Pi)$ *и имеют порядок малости* $O(\alpha(r))$ *при* $r \to 0$ *равномерно относительно* $\varphi \in \mathrm{R}$.

2) *Если в* (II.2.1) $\xi, \eta \in C^n(B)$, $n \geqslant m$, *то в* (II.2.6)

$$\frac{\partial^n f}{\partial \varphi^n},\ \frac{\partial^n g}{\partial \varphi^n} \in C(\Pi), \quad \frac{\partial^k f}{\partial \varphi^k}(0,\varphi) \equiv \frac{\partial^k g}{\partial \varphi^k}(0,\varphi) \equiv 0\, \forall\, k = \overline{1,n}\,.$$

3) *Если в* (II.2.1) $\xi, \eta \in C^{m+l}(B)$, $l \geqslant 1$, *то в* (II.2.6) $f, g \in C^l(\Pi)$ и $\forall\, k = \overline{1,l}$ *представимы в форме*

$$\begin{aligned} f(r,\varphi) = &\ \textstyle\sum_{i=1}^k r^i F_i(\varphi) + r^k f_k(r,\varphi), \\ g(r,\varphi) = &\ \textstyle\sum_{i=1}^k r^i G_i(\varphi) + r^k g_k(r,\varphi), \end{aligned} \tag{1.1$_k$}$$

где F_i, G_i — *формы степени* $m+i+1$ *от* $\cos\varphi$ *и* $\sin\varphi$, $i = \overline{1,k}$,
$f_k, g_k \in C^{(l-k)}(\Pi)$, $f_k(0,\varphi) \equiv g_k(0,\varphi) \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции f, g определяются формулами (II.2.3), где $ru = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $f(0,\varphi) \equiv g(0,\varphi) \equiv 0$. Утверждения 1) и 2) леммы получаются из этих формул непосредственной проверкой. Далее, если $\xi, \eta \in C^{m+l}(B)$, $l \geqslant 1$, то $\forall\, k = \overline{1,l}$

$$\begin{aligned} \xi(x,y) = &\ P_1(x,y) + \cdots + P_k(x,y) + \xi_k(x,y), \\ \eta(x,y) = &\ Q_1(x,y) + \cdots + Q_k(x,y) + \eta_k(x,y), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где P_i, Q_i — формы степени $m+i$ от x и y, $i = \overline{1,k}$, $\xi_k, \eta_k \in C^{m+l}(B)$, $\xi_k(x,y), \eta_k(x,y) = o(r^{m+k})$ при $r \to 0$. Из (II.2.3) и (1.2) следует, что в области $\Pi_0 : 0 < r < \delta$, $|\varphi| < +\infty$ f, g суть функции класса C^{m+l} и $\forall\, k = \overline{1,l}$ представимы в виде (1.1_k), где $f_k, g_k \in C^{m+l}(\Pi_0)$. При этом f_k, g_k, очевидно, определяются формулами вида формул (II.2.3) для f, g с заменой в них ξ, η на ξ_k, η_k и r^{-m} на $r^{-(m+k)}$. Поэтому при переходе от полосы Π_0 к полосе Π $\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, l\}$ общий порядок гладкости функций f_k, g_k (где $f_0 = f$, $g_0 = g$) снижается на $m+k$ единиц и становится равным $l-k$. $\square$

З а м е ч а н и е 1.1. Исследуя проблемы различения для нормальных секторов системы (II.2.6), мы, как правило, будем предполагать эти сектора обыкновенными (см. определения II.3.2 и II.4.3). В таком секторе согласно лемме II.4.1 траектории системы описываются уравнением (II.4.1′), т. е. уравнением

$$r\frac{d\varphi}{dr} = \Phi(\varphi) + \psi(r,\varphi) \equiv \Psi(r,\varphi), \tag{1.3}$$

где $\Phi(\varphi) = F(\varphi)/G(\varphi) = a(\varphi-\varphi_0)^k + a_1(\varphi-\varphi_0)^{k+1} + \ldots$, $|\varphi-\varphi_0| \leqslant \varepsilon$, $\psi \in C(\overline{N})$, $\psi(0,\varphi) \equiv 0$.

Из свойств функций ξ, η, указанных в условии леммы 1.1, вытекают следующие свойства функции ψ из уравнения (1.3) в обыкновенном нормальном секторе N.

Следствие 1.1. *Если выполняются условия утверждения* 1) *леммы* 1.1, *то функция* ψ *из уравнения* (1.3) *обладает следующими свойствами:*

$$\psi, \psi'_\varphi \in C(\overline{N}),\ \psi(r,\varphi), \psi'_\varphi(r,\varphi) = O(\alpha(r)) \text{ при } r \to 0,\ |\varphi-\varphi_0| \leqslant \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это вытекает из утверждения 1) леммы 1.1 и формулы (II.4.2) для ψ. $\square$

Следствие 1.2.

(i) *Если в системе* (II.2.1) *функции* ξ, $\eta \in C^m(B)$ (*и по-прежнему* $\xi(x,y)$, $\eta(x,y) = o(r^m)$ *при* $r \to 0$), *то в уравнении* (1.3)

$$\psi, \psi'_\varphi \in C(\overline{N}),\ \psi(r,\varphi), \psi'_\varphi(r,\varphi) = o(1) \text{ при } r \to 0,\ |\varphi-\varphi_0| \leqslant \varepsilon.$$

(ii) *Если в системе* (II.2.1) *функции* ξ, $\eta \in C^{m+1}(B)$ (*и* $\xi(x,y)$, $\eta(x,y) = o(r^m)$ *при* $r \to 0$), *то в уравнении* (1.3)

$$\psi, \psi'_\varphi \in C(\overline{N}),\ \psi(r,\varphi), \psi'_\varphi(r,\varphi) = O(r) \text{ при } r \to 0,\ |\varphi-\varphi_0| \leqslant \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эти утверждения также вытекают из формулы (II.4.2) для ψ и утверждения 1) леммы 1.1, ибо условия последнего в каждом из случаев (i) и (ii) выполняются, причем в случае (ii) выполняются при $\alpha(r) = r$. Это, в свою очередь, следует из того, что, если разлагать любую из функций $\xi'_x, \ldots, \eta'_y$ в точке $(0,0)$ по формуле Тейлора, то в случае (i) разложение порядка $m-1$ будет состоять из остаточного члена (порядка $o(r^{m-1})$ при $r \to 0$), а в случае (ii) разложение порядка m будет начинаться формой от x и y степени m. $\square$

1.2. Признаки Пеано и Лонна единственности O-кривой в N_2-секторе

Продолжаем изучение системы (II.2.6) (см. замечание II.2.1).

Теорема 1.1 (**признак Пеано** [29, с. 89; 32, с. 49]). *Пусть N есть N_2-сектор системы. Если для любых $p_i = ru(\varphi_i) \in N$, $i = 1, 2$, $\varphi_2 > \varphi_1$, правая часть Ψ уравнения* (II.4.1) *удовлетворяет неравенству*

$$\Psi(r, \varphi_2) \leqslant \Psi(r, \varphi_1),$$

то в секторе N $\exists!$ O-кривая системы.

Доказательство. Будем рассматривать систему и уравнение (II.4.1) в полосе П. Допустим, что в N существуют две различные O-кривые системы, т. е. уравнение (II.4.1) имеет два различных решения

$$\varphi = \varphi_i(r),\ r \in (0, \Delta], \quad \varphi_i(r) \to \varphi_0 \text{ при } r \to 0,\ i = 1, 2. \tag{1.4}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\varphi_2(r) > \varphi_1(r) \quad \text{при} \quad r \in (0, \Delta]. \tag{1.5}$$

Подставив решения (1.4) в уравнение (II.4.1), получим тождества, из которых почленным вычитанием найдем

$$r(\varphi_2(r) - \varphi_1(r))' \equiv \Psi(r, \varphi_2(r)) - \Psi(r, \varphi_1(r)),\ r \in (0, \Delta]. \tag{1.6}$$

Отсюда в силу условия на $\Psi(r, \varphi)$ следует, что $(\varphi_2(r) - \varphi_1(r))' \leqslant 0$ в $(0, \Delta]$, а потому $\forall\, r \in (0, \Delta]$ $\varphi_2(r) - \varphi_1(r) \geqslant \varphi_2(\Delta) - \varphi_1(\Delta)$. Отсюда при $r \to 0$ с учетом (1.4) получим $0 \geqslant \varphi_2(\Delta) - \varphi_1(\Delta)$, что противоречит неравенству (1.5). $\square$

Следствие 1.3. *Если в системе* (II.2.1) *функции $\xi, \eta \in C^m(B)$, то для нее по любому простому обыкновенному исключительному направлению 2-го типа $\varphi = \varphi_0$ к точке O примыкает единственная O-кривая.*

Доказательство. Любое такое направление $\varphi = \varphi_0$ согласно доказательству леммы II.4.1 и определению II.4.2 может быть заключено в обыкновенный нормальный сектор N 2-го типа. В нем согласно лемме II.4.1 траектории системы описываются уравнением (1.3). Для последнего при наших условиях на направление $\varphi = \varphi_0$ имеем $k = 1$, $a < 0$, а при наших условиях на систему согласно следствию 1.2 (п. (i)) имеем $\psi, \psi'_\varphi \in C(\overline{N})$, $\psi, \psi'_\varphi = o(1)$ при $r \to 0$, $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$. Поэтому при любых $p_i = ru(\varphi_i) \in N$, $i = 1, 2$, $\varphi_2 > \varphi_1$, для правой части $\Psi(r, \varphi)$ уравнения (1.3) получаем

$$\Psi(r, \varphi_2) - \Psi(r, \varphi_1) = \bigl(\Phi'(\varphi^*) + \psi'_\varphi(r, \varphi^*(r))\bigr)\ (\varphi_2 - \varphi_1), \tag{1.7}$$

где $\varphi^*, \varphi^*(r) \in (\varphi_1, \varphi_2)$. Здесь $\Phi'(\varphi^*) = a + o(1)$, $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\psi'_\varphi(r, \varphi^*(r)) = o(1)$ при $r \to 0$. Из этого следует, что в секторе N с достаточно малыми ε и Δ функция Ψ удовлетворяет условию теоремы 1.1, а потому в нем $\exists!$ O-кривая системы. $\square$

Отметим, что при условиях следствия 1.3 а) $(0, \varphi_0)$ — особая точка системы (II.2.6), рассматриваемой в полосе П, причем для нее характеристические корни главной части системы $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$ обладают свойством $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, б) функции f, g из системы (II.2.6) не обязаны обладать свойством $f, g \in C^1(\Pi)$, а потому условия теоремы Гробмана–Хартмана [15, с. 52] для особой точки $(0, \varphi_0)$ системы (II.2.6), вообще говоря, не выполняются.

Теорема 1.2 (**признак Лонна** [22, с. 115]). *Пусть N есть N_2-сектор системы. Если для любых $p_i = ru(\varphi_i) \in N$, $i = 1, 2$, $\varphi_2 > \varphi_1$, правая часть Ψ уравнения* (II.4.1) *удовлетворяет неравенству*

$$\Psi(r, \varphi_2) - \Psi(r, \varphi_1) \leqslant \lambda(r)(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{1.8}$$

где

$$\lambda \in C[0,\Delta],\ \lambda(r) \geqslant 0,\ \int\limits_0^{\Delta} \frac{\lambda(r)}{r}\,dr = M < +\infty, \tag{1.9}$$

то в секторе N $\exists!$ O*-кривая системы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что при условиях теоремы в секторе N существуют две различные O-кривые системы, т. е. уравнение (II.4.1) имеет два различных решения (1.4), (1.5). Поступая с ними, как и при доказательстве теоремы 1.1, приходим к тождеству (1.6), из которого с учетом (1.8) получаем

$$r(\varphi_2(r) - \varphi_1(r))' \leqslant \lambda(r)(\varphi_2(r) - \varphi_1(r)), \quad r \in (0,\Delta].$$

Деля это неравенство почленно на $r(\varphi_2(r) - \varphi_1(r))$ и интегрируя результат по произвольному отрезку $[r,\Delta] \subset (0,\Delta]$, находим

$$\ln \frac{\varphi_2(\Delta) - \varphi_1(\Delta)}{\varphi_2(r) - \varphi_1(r)} \leqslant \int\limits_r^{\Delta} \frac{\lambda(\rho)}{\rho}\,d\rho,\ r \in (0,\Delta].$$

Отсюда при $r \to 0$ получаем $M = +\infty$, что противоречит условию (1.9). □

Отметим, что в условиях (1.8), (1.9) в роли коэффициента $\lambda(r)$ одностороннего условия Липшица для функции $\Psi(r,\varphi)$ может выступать, например, любая из функций $0,\ Lr,\ Lr^{\sigma},\ L|\ln r|^{-1-\sigma}$, где $L > 0$ и $\sigma > 0$ — постоянные. В частности, при $\lambda(r) \equiv 0$ из признака Лонна следует признак Пеано. Не пригодна в качестве коэффициента $\lambda(r)$, например, функция $L|\ln r|^{-1}$, $L > 0$ — постоянная.

Следствие 1.4. *Если в системе* (II.2.1) *функции* $\xi,\ \eta \in C^{m+1}(B)$ (*и* $\xi(x,y),\ \eta(x,y) = o(r^m)$ *при* $r \to 0$), *то для нее по любому обыкновенному исключительному направлению 2-го типа* $\varphi = \varphi_0$ *к точке* O *примыкает единственная* O*-кривая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условиях данного утверждения справедливо все сказанное при доказательстве следствия 1.3 вплоть до формулы (1.7) включительно за двумя исключениями: в данном случае 1) $\Phi'(\varphi^*) = (ka + o(1))(\varphi^*)^{k-1}$, $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $k \geqslant 1$ — нечетное, 2) функция ψ согласно следствию 1.2 (п. (ii)), обладает свойствами: $\psi, \psi'_{\varphi} = O(r)$ при $r \to 0$, $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$. Поэтому теперь для (1.7) имеем $\Phi'(\varphi^*) \leqslant 0$ в N, если ε достаточно мало, $\psi'_{\varphi}(r,\varphi^*(r)) \leqslant Lr$ в N ($L > 0$ — постоянная), если Δ достаточно мало. Из этого следует, что в секторе N с достаточно малыми ε и Δ функция Ψ удовлетворяет неравенству (1.8) при $\lambda(r) = Lr$, а потому в нем согласно признаку Лонна $\exists!$ O-кривая системы. □

При условиях следствия 1.4 согласно лемме 1.1 функции $f, g \in C^1(\Pi)$, точка $(0,\varphi_0)$ — элементарная особая точка системы (II.2.6) с характеристическими корнями $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 \leqslant 0$. При $\lambda_2 \neq 0$ мы оказываемся в условиях теоремы Гробмана — Хартмана и следствия 1.3. При $\lambda_2 = 0$ точка $(0,\varphi_0)$ — негиперболическая, а потому теорема Гробмана — Хартмана на нее не распространяется. Из следствия 1.4 вытекает, что в полосе Π точка $(0,\varphi_0)$ — полуседло.

1.3. Третий признак единственности O-кривой в N_2 секторе

Лемма 1.2. *Пусть функция* $\psi \in C(\overline{N})$, $N:\ 0 < r \leqslant \Delta$, $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$, $\psi(0, \varphi) \equiv 0$. *Тогда существует функция* $\omega \in C[0, \Delta] \cap C^1(0, \Delta]$, $\omega(0) = 0$, $\omega'(r) > 0$ *в* $(0, \Delta]$, *такая, что*

$$\frac{\psi(r, \varphi)}{\omega(r)} \rightrightarrows 0 \qquad \text{при} \quad r \to 0, \quad |\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon. \tag{1.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о (А. В. Осипов). Пусть

$$\chi(r) = \max |\psi(\rho, \varphi)| \text{ при } 0 \leqslant \rho \leqslant r \leqslant \Delta,\ |\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon.$$

Очевидно, что $\chi \in C[0, \Delta]$, $\chi(0) = 0$, $\chi(r)$ не убывает на отрезке $[0, \Delta]$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\chi(r) > 0$ $\forall\, r \in (0, \Delta]$ (иначе утверждение леммы тривиально).

Пусть $\xi(r) = (1 + r)\chi(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \Delta$. Очевидно, что $\xi \in C[0, \Delta]$, $\xi(0) = 0$, $\xi(r)$ строго возрастает на отрезке $(0, \Delta]$, $\xi(r) > \chi(r)$ $\forall\, r \in (0, \Delta]$.

Построим функцию γ класса $C^1(0, \Delta]$, обладающую указанными свойствами функции ξ. Для этого рассмотрим функцию $\zeta(r) = \xi^{-1}(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \gamma_0 = \xi(\Delta)$, обратную к $\xi(r)$, и функцию

$$\eta(r) = \frac{1}{r} \int\limits_0^r \zeta(\rho) d\rho, \quad 0 < r \leqslant \gamma_0, \quad \eta(0) = 0.$$

Последняя обладает следующими свойствами: $\eta \in C[0, \gamma_0] \cap C^1(0, \gamma_0)$, $\eta(0) = 0$, $\forall\, r \in (0, \gamma_0]$ $0 < \eta(r) < \zeta(r)$, $\eta'(r) = r^{-1}(\zeta(r) - \eta(r)) > 0$.

Положим (здесь $\eta^{-1}(r)$ — функция, обратная к $\eta(r)$)

$$\gamma(r) = \begin{cases} \eta^{-1}(r), & 0 \leqslant r \leqslant r_0 = \eta(\gamma_0), \\ \gamma_0 + \gamma'(r_0 - 0)(r - r_0), & r_0 \leqslant r \leqslant \Delta. \end{cases}$$

Очевидно, что $\gamma \in C[0, \gamma_0] \cap C^1(0, \Delta)$, $\gamma(0) = 0$, $\forall\, r \in (0, \Delta]$ $\gamma'(r) > 0$, $\gamma(r) > \xi(r)$.

Тогда функция $\omega(r) = \gamma^\sigma(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \Delta$, $\sigma \in (0, 1)$, удовлетворяет всем требованиям леммы. $\square$

Определение 1.1. Пусть ψ и ω — функции из леммы 1.2. Если для них выполняется соотношение (1.10), то будем называть функцию ω *характеристикой малости* функции ψ в N при $r \to 0$.

Лемма 1.3. *Пусть для нашей системы* (II.2.6) $\varphi = \varphi_0$ — *обыкновенное нормальное направление 2-го типа в точке* O, $k \geqslant 1$ — *его кратность,* $N:\ 0 < r \leqslant \Delta$, $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$ — *окружающий его обыкновенный нормальный сектор 2-го типа,* ω — *характеристика малости в* N *при* $r \to 0$ *функции* ψ *из уравнения* (1.3),

$$\varphi = \varphi(r),\ r \in (0, \Delta],\ \varphi(r) \to \varphi_0 \ \text{при}\ r \to 0, \tag{1.11}$$

— *решение уравнения* (1.3). *Тогда*

$$\varphi(r) - \varphi_0 = o(\omega^{1/k}(r)) \quad \text{при} \quad r \to 0. \tag{1.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha(r) = (\varphi(r) - \varphi_0)\omega^{-1/k}(r)$, $r \in (0, \Delta]$. Покажем: $\forall\, \varepsilon_0 > 0$ $\exists\, \delta_0 > 0$ такое, что $\forall\, r \in (0, \delta_0)$ $|\alpha(r)| < \varepsilon_0$. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — любое число. Рассмотрим части $N^{\pm}: \varepsilon_0\omega^{1/k}(r) \leqslant |\varphi-\varphi_0| \leqslant \varepsilon$ сектора N. В них для правой части Ψ уравнения (1.3) имеем

$$\frac{\Psi(r,\varphi)}{\omega(r)} = a\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{\omega^{1/k}(r)}\right)^k(1+\beta(\varphi)) + \frac{\psi(r,\varphi)}{\omega(r)}.$$

Здесь

$$a<0, \quad \frac{|\varphi-\varphi_0|^k}{\omega(r)} \geqslant \varepsilon_0^k, \qquad |\beta(\varphi)| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \text{если } \varepsilon \text{ достаточно мало,}$$

$$\frac{\psi(r,\varphi)}{\omega(r)} \rightrightarrows 0 \qquad \text{при} \quad r\to 0, \quad |\varphi-\varphi_0|\leqslant\varepsilon.$$

Следовательно, $\exists\,\delta_0>0$ такое, что для уравнения (1.3) в секторах

$$N_0^{\pm}: \varepsilon_0\omega^{1/k}(r) \ \leqslant\ |\varphi-\varphi_0| \ \leqslant\ \varepsilon, \quad 0<r<\delta_0,$$

выполняется неравенство $r(\varphi-\varphi_0)\varphi'(r)<0$, а потому в них не может быть точек $(r,\varphi(r))$ интегральной кривой вида (1.11) уравнения (1.3). Из этого следует, что любое решение вида (1.11) уравнения (1.3) обладает свойством

$$|\varphi(r)-\varphi_0| < \varepsilon_0\omega^{1/k}(r) \qquad \text{при} \quad r\in(0,\delta_0),$$

т. е. для него величина $\alpha(r)\to 0$ при $r\to 0$. □

З а м е ч а н и е 1.2. Оценка (1.12) асимптотики при $r\to 0$ решения (1.11) уравнения (1.3) неулучшаема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства этого утверждения рассмотрим пример

$$r\frac{d\varphi}{dr} = -\varphi^3 + |\ln r|^{-3/2}, \quad r\in(0,\Delta]\subset(0,1). \tag{1.13}$$

Это уравнение вида (1.3). Для него $\varphi_0=0,\ k=3,\ a=-1,\ \psi(r,\varphi)=|\ln r|^{-3/2}$. В качестве характеристики малости при $r\to 0$ для $\psi(r,\varphi)$ годится функция $\omega(r)=|\ln r|^{\sigma-3/2}$, $\sigma\in(0,1)$ — сколь угодно малое число.

Уравнение (1.13) имеет решение вида (1.11) $\varphi_0(r)=\theta_0|\ln r|^{-1/2}$, $r\in(0,\Delta]$, где θ_0 — корень полинома $T(\theta)=-\theta^3-\theta/2+1$. Это решение в согласии с леммой 1.3 $\forall\,\sigma\in(0,1)$ обладает свойством (1.12): $\varphi_0(r)=o(|\ln r|^{-1/2+\sigma/3})$ при $r\to 0$, но не обладает свойством $\varphi_0(r)=o(|\ln r|^{-1/2})$ при $r\to 0$. □

Теорема 1.3 [4,5]. *Пусть для рассматриваемой системы* (II.2.6) $\varphi=\varphi_0$ *— обыкновенное исключительное направление 2-го типа в точке* O, $k\geqslant 1$ *— его кратность,* N *— окружающий его обыкновенный нормальный сектор 2-го типа,* ω *— характеристика малости в* N *при* $r\to 0$ *функции* ψ *из уравнения* (1.3). *Если существует сектор* $N_0: 0<r\leqslant\Delta_0,\ |\varphi-\varphi_0|\leqslant\varepsilon_0\omega^{1/k}(r)\subset N$, *такой, что при любых* $p_i=ru(\varphi_i)\in N_0,\ i=1,2,\ \varphi_2>\varphi_1$, *правая часть* Ψ *уравнения* (1.3) *удовлетворяет неравенству* (1.8), *где* $\lambda\in C(0,\Delta_0]$ *и обладает свойством* $\forall\,r\in(0,\Delta_0]$

$$\int_r^{\Delta_0}\left(\frac{\lambda(\rho)}{\rho}-\frac{\omega'(\rho)}{k\omega(\rho)}\right)d\rho \leqslant M, \qquad M\in\mathrm{R}\ \text{ — постоянная,} \tag{1.14}$$

то по направлению $\varphi=\varphi_0$ *к точке* O *примыкает единственная* O*-кривая системы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что при условиях теоремы в секторе N существуют две различные O-кривые системы, т. е. уравнение (1.3) имеет два различных решения (1.4).

Пусть они удовлетворяют неравенству (1.5). Согласно лемме 1.3 каждое из них обладает свойством (1.12):

$$\varphi_i(r) - \varphi_0 = \alpha_i(r)\omega^{1/k}(r), \qquad \alpha_i(r) \to 0 \text{ при } r \to 0, \ i = 1, 2. \tag{1.15}$$

Подставляя решения (1.4) в уравнение (1.3) и вычитая полученные тождества одно из другого почленно, приходим к тождеству (1.6), где (в силу (1.15))

$$\varphi_2(r) - \varphi_1(r) = (\alpha_2(r) - \alpha_1(r))\omega^{1/k}(r) \equiv \alpha(r)\omega^{1/k}(r),$$

$\alpha(r) > 0$ при $r \in (0, \Delta_0]$, $\alpha(r) \to 0$ при $r \to 0$,

$$(\varphi_2(r) - \varphi_1(r))' = \omega^{1/k}(r)\left(\alpha'(r) + \frac{\alpha(r)\omega'(r)}{k\omega(r)}\right),$$

а потому (при $r \in (0, \Delta]$) это тождество можно переписать в виде

$$r\omega^{1/k}(r)\left(\alpha'(r) + \frac{\alpha(r)\omega'(r)}{k\omega(r)}\right) \equiv \Psi(r, \varphi_2(r)) - \Psi(r, \varphi_1(r)). \tag{1.6$'$}$$

Но для числа ε_0 из условий теоремы в силу (1.15) $\exists\, \Delta_0' \in (0, \Delta_0] : (r, \varphi_i(r)) \in N_0$ при $r \in (0, \Delta_0]$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Delta_0' = \Delta_0$ (этого всегда можно достичь уменьшением Δ_0). А тогда из тождества (1.6$'$) с учетом (1.8) следует, что

$$r\left(\alpha'(r) + \frac{\alpha(r)\omega'(r)}{k\omega(r)}\right) \leqslant \lambda(r)\alpha(r), \qquad r \in (0, \Delta_0],$$

$$\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} \leqslant \frac{\lambda(r)}{r} - \frac{\omega'(r)}{k\omega(r)}, \qquad r \in (0, \Delta_0]. \tag{1.16}$$

Интегрируя неравенство (1.16) по произвольному отрезку $[r, \Delta_0] \subset (0, \Delta_0]$ и устремляя затем r к нулю, получаем

$$\int_r^{\Delta_0}\left(\frac{\lambda(\rho)}{\rho} - \frac{\omega'(\rho)}{k\omega(\rho)}\right) d\rho \to +\infty \quad \text{при } r \to 0,$$

что противоречит неравенству (1.14). □

З а м е ч а н и е 1.3. Условие (1.14) этой теоремы связывает две различные характеристики функции $\psi(r, \varphi)$: характеристику малости $\omega(r)$ и коэффициент Липшица $\lambda(r)$ так, что в нем $\displaystyle\int_r^{\Delta} \lambda(\rho)/\rho\, d\rho$ при $r \to 0$ может расходиться и притом как угодно сильно, если при этом $\omega(r) \to 0$ достаточно быстро.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это вытекает из записи условия (1.14) в следующем виде: $\forall\, r \in (0, \Delta]$

$$\int_r^{\Delta} \frac{\lambda(\rho)}{\rho}\, d\rho \leqslant \frac{1}{k}|\ln\omega(r)| + M, \quad M \in \mathrm{R} \text{ — постоянная. } \square \tag{1.14$'$}$$

З а м е ч а н и е 1.4. Для случая обыкновенного исключительного направления 2-го типа системы (II.2.6) признаки единственности O-кривой Пеано и Лонна вытекают из третьего признака.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Такое направление можно заключить в обыкновенный N_2-сектор. В нем траектории системы описываются уравнением (1.3). Согласно лемме 1.2 для функции ψ из этого уравнения некоторая характеристика малости в N_2 при $r \to 0$ $\omega(r)$ всегда существует. Поэтому в N_2 при условиях признака Пеано или Лонна выполняются и условия третьего признака. □

Следствие 1.5. *Если в системе* (II.2.1) 1) *функции* $\xi, \eta \in C^1(B)$, 2) $\xi'_x(p), \dots, \eta'_y(p) = o(r^{m-1})$ *при* $r \to 0$, 3) $\xi(p), \eta(p) = o(r^{m+\sigma})$ *при* $r \to 0$, $\sigma > 0$, *то для нее* (*и для системы* (II.2.6) *что то же самое*) *по любому обыкновенному исключительному направлению 2-го типа* $\varphi = \varphi_0$ *к точке* O *примыкает единственная* O*-кривая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть N : $0 < r \leqslant \Delta$, $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$ — обыкновенный нормальный сектор 2-го типа, окружающий такое направление $\varphi = \varphi_0$. Согласно лемме II.4.1 траектории системы в нем описываются уравнением (1.3). В этом уравнении в разложении функции $\Phi(\varphi)$ $k \geqslant 1$ — нечетное, $a < 0$, а потому $\Phi'(\varphi) \leqslant 0$ при $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Согласно следствию 1.1 при условиях 1) и 2) доказываемого утверждения функция ψ из уравнения (1.3) обладает свойствами $\psi, \psi'_\varphi \in C(\overline{N})$, $\psi'_\varphi(r, \varphi) = o(1)$ при $r \to 0$, $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$. Из этих свойств функций Φ и ψ следует, что правая часть Ψ уравнения (1.3) для любых $(r, \varphi_i) \in N$, $i = 1, 2$, $\varphi_2 > \varphi_1$, удовлетворяет неравенству (1.8) с коэффициентом $\lambda(r) = o(1)$ при $r \to 0$.

Далее, из формул (II.2.3) и (II.4.2) следует, что при условии 3) данного утверждения функция $\psi(r, \varphi) = o(r^\sigma)$ при $r \to 0$, $\sigma > 0$, а потому для нее характеристикой малости в секторе N при $r \to 0$ может служить функция $\omega(r) = r^\sigma$. При этом для функций λ и ω выполняется неравенство

$$\int_r^\Delta \left(\frac{\lambda(\rho)}{\rho} - \frac{\omega'(\rho)}{k\omega(\rho)} \right) d\rho = \int_r^\Delta \frac{\lambda(\rho) - \sigma/k}{\rho}\, d\rho \ \leqslant \ 0,$$

если $\Delta > 0$ достаточно мало.

Таким образом, при условиях следствия 1.5 в секторе N (с достаточно малыми $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$), окружающем обыкновенное исключительное направление 2-го типа, выполняются условия теоремы 1.3, из которой и вытекает справедливость его утверждения. □

1.4. Пример неединственности O-кривой в обыкновенном нормальном секторе 2-го типа

Условий общего вида неединственности O-кривой, примыкающей к точке O по нормальному направлению 2-го типа, в литературе нет. Пример неединственности для особого нормального направления 2-го типа содержится в книге [22, с. 117]. Приведем пример системы, для которой по обыкновенному нормальному направлению 2-го типа к точке O примыкает бесконечно много O-кривых.

Рассмотрим систему вида (II.2.1)

$$\dot{x} = x^2 + y^2 + \xi(x, y), \ \ \dot{y} = xy + \eta(x, y), \tag{1.17}$$

где

$$\xi(x, y) = -xy\, p(x, y) q(x, y), \qquad \eta(x, y) = x^2 p(x, y) q(x, y),$$
$$p(x, y) = x^2 + 2y^2, \ \ q(x, y) = \frac{1}{r} \left(1 + \sin \frac{\lambda(y - r^2)}{r^2} \right),$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\lambda \geqslant 0$ — постоянная, $\xi(0, 0) = \eta(0, 0) = 0$. Для нее $m = 2$, $\xi, \eta \in C^1(\mathrm{R}^2)$, $\xi(x, y), \eta(x, y) = O(r^3)$ при $r \to 0$, $O = (0, 0)$ — изолированная точка покоя.

В координатах r, φ, τ система (1.17) принимает вид

$$\frac{dr}{d\tau} = rG(\varphi),\ \frac{d\varphi}{d\tau} = F(\varphi) + rG(\varphi)(1 + \sin\beta(r,\varphi)), \tag{1.18}$$

где

$$F(\varphi) = -\sin^3\varphi,\ G(\varphi) = \cos\varphi\,(1 + \sin^2\varphi),$$
$$\beta(r,\varphi) = \lambda r^{-1}(\sin\varphi - r).$$

Это система вида (II.2.6). Для нее $\varphi_0 = 0$ — нуль F кратности $k = 3,\ a = F^{(3)}(0)/(3!G(0)) = -1 < 0$ и, следовательно, $\varphi = 0$ — обыкновенное исключительное направление 2 типа в точке O, а сектор

$$N:\ 0 < r \leqslant \Delta,\ \ |\varphi| \leqslant \varepsilon$$

(при любом $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ и достаточно малом $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$) — обыкновенный нормальный сектор 2-го тапа. В секторе N траектории системы (1.18) описываются уравнением вида (1.3)

$$r\frac{d\varphi}{dr} = \Phi(\varphi) + r\left(1 + \sin\frac{\lambda(\sin\varphi - r)}{r}\right) \equiv \Psi(r,\varphi), \tag{1.19}$$

где $\Phi(\varphi) = F(\varphi)/G(\varphi) = -\varphi^3 + a_1\varphi^4 + \cdots, |\varphi| \leqslant \varepsilon$. Для сектора N возникает 1-я проблема различения Фроммера — проблема единственности для уравнения (1.19) решения вида

$$\varphi = \varphi(r),\ r \in (0, \Delta],\ \varphi(r) \to 0 \ \text{ при } \ r \to 0. \tag{1.20}$$

Достаточные условия единственности решения вида (1.20), доставляемые следствиями 1.3 и 1.4, далеки от выполнения, ибо функции ξ, η в (1.17) — лишь C^1-гладкие в B (вместо C^2- и C^3-гладкости, требуемой соответственно этими следствиями). Условия следствия 1.5 близки к выполнению, но все же не выполняются: они требуют, чтобы для функций ξ, η из (1.17) производные $\xi'_x, \ldots, \eta'_y$ имели при $r \to 0$ порядок малости $o(r)$, а они имеют лишь порядок $O(r)$. Поэтому единственность O-кривой вида (1.20) для системы (1.18) этими следствиями из теорем 1.1 — 1.3 не гарантируется.

Теорема 1.4. *Для уравнения* (1.19) 1) *при* $\lambda \in [0, 1]$ $\exists!$ *решение вида* (1.20), 2) *при* $\lambda > 1$ *существует бесконечно много таких решений.*

Доказательство. Допустим сначала, что в системе (1.17), а значит, и в уравнении (1.19), $\lambda \in [0, 1/3)$. В этом случае утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1.3. Действительно, в нормальном секторе N с достаточно малым ε для функции Ψ из (1.19) $\Psi'_\varphi(r,\varphi) \leqslant \lambda$ так, что в таком секторе N для нее выполняется неравенство (1.8) при $\lambda(r) \equiv \lambda$, а для функции

$$\psi(r,\varphi) = r\left(1 + \sin\frac{\lambda(\sin\varphi - r)}{r}\right)$$

характеристикой малости при $r \to 0$ может служить функция $\omega(r) = r^\sigma,\ \sigma \in (0, 1)$. При этом для функций $\lambda(r) \equiv \lambda$ и $\omega(r) = r^\sigma,\ \sigma \in (3\lambda, 1),\ \forall\, r \in (0, \Delta]$ выполняется неравенство (1.14):

$$\int_r^\Delta \left(\frac{\lambda(\rho)}{\rho} - \frac{\omega'(\rho)}{3\omega(\rho)}\right) d\rho = \int_r^\Delta \frac{\lambda - \sigma/3}{\rho}\, d\rho \leqslant 0.$$

Таким образом, $\forall\, \lambda \in [0, 1/3)$ для уравнения (1.19) выполняются условия теоремы 1.3, а потому для него $\exists!$ решение вида (1.20).

Допустим, теперь, что в уравнении (1.19) $\lambda \in [0,1]$. В этом общем случае утверждение 1) теоремы получается как итог следующей цепочки утверждений.

(i) В нормальном секторе $N:\ 0<r\leqslant\Delta,\ |\varphi|\leqslant\varepsilon$ системы (1.18) с достаточно малыми $\varepsilon>0$ и $\Delta\in(0,1)$ любое решение вида (1.20) уравнения (1.19) обладает свойством: $\varphi(r)>0$ при $0<r\leqslant\Delta$ и потому представимо в виде ($\nu(r)>0$ в $(0,\Delta]$, $\nu\in C^1(0,\Delta]$)

$$\varphi(r)=r^{\nu(r)},\ \ 0<r\leqslant\Delta. \tag{1.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В подсекторе $N^-:\ 0<r\leqslant\Delta,\ -\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant 0$ сектора N правая часть уравнения (1.19) $\Psi(r,\varphi)\geqslant 0$, если ε (а, значит, и $\Delta=\Delta(\varepsilon)$) достаточно мало, а потому уравнение (1.19) не может иметь в N^- решений вида (1.20). $\square$

(ii) Для любого решения вида (1.20) уравнения (1.19) функция $\nu(r)$ из его представления (1.21) обладает свойством: $\nu(r)\to 1$ при $r\to 0$ и, следовательно, это решение представимо в виде

$$\varphi(r)=\theta(r)r,\qquad r\in(0,\Delta], \tag{1.22}$$

где $\forall\,\sigma>0\ \ r^\sigma<\theta(r)<r^{-\sigma}$ при малых $r>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть N — сектор из утверждения (i). Рассматривая уравнение (1.19) в его подсекторе $N^+:\ 0<r\leqslant\Delta,\ \ 0<\varphi\leqslant\varepsilon$, производим в нем замену искомой функции φ по формуле

$$\varphi=r^\nu. \tag{1.23}$$

При этом уравнение (1.19) переходит в уравнение

$$\frac{d\nu}{dr}=\frac{-\nu r^\nu-r^{3\nu}(1+o(1))+r\left(1+\sin\left(\lambda r^{-1}(\sin r^\nu-r)\right)\right)}{r^{\nu+1}\ln r} \tag{1.24}$$

(где $o(1)\to 0$ при $r\to 0$), сектор N^+ — в полуполосу

$$D^+:\ 0<r\leqslant\Delta,\qquad \frac{\ln\varepsilon}{\ln r}\leqslant\nu<+\infty,$$

любое решение (1.21) уравнения (1.19) — в решение уравнения (1.24)

$$\nu=\nu(r),\ \ r\in(0,\Delta]. \tag{1.25}$$

Сравнивая члены числителя правой части уравнения (1.24) по их порядку малости относительно r при $r\to 0$, находим, что среди них в интервале $I_1=(0,1)$ оси ν главным членом (имеющим наинизший порядок малости) является первый член $-\nu r^\nu$, а в интервале $I_2=(1,+\infty)$ — третий (последний) член. Поэтому, сокращая правую часть уравнения (1.24) при $\nu\in I_1$ на r^ν, а при $\nu\in I_2$ — на r, получаем, что $\forall\,\alpha\in(0,1/2)\ \exists\,\beta\in(0,\Delta]$: в уравнении (1.24) $d\nu/dr>0$ в $D_1=(0,\beta]\times[\alpha,1-\alpha]$, $d\nu/dr<0$ в $D_2=(0,\beta)\times[1+\alpha,1/\alpha]$. Из этого следует, что любое решение (1.25) уравнения (1.24) обладает следующим свойством: $\nu(r)\to\nu_0\in[0,+\infty]$ при $r\to 0$.

Но уравнение, обратное (1.24), т. е. полученное из него разрешением относительно $dr/d\nu$, имеет решение $r\equiv 0,\ \ 0<\nu<+\infty$, для которого на интервале I_1 оси ν выполняется условие единственности Осгуда [23, с. 48], а на интервале I_2 — условие единственности Липшица. Поэтому для любого решения (1.25) уравнения (1.24) $\nu_0=\lim\limits_{r\to 0}\nu(r)\in\{0,1,+\infty\}$.

Далее, в уравнении (1.19) функция

$$\psi(r,\varphi)=r\left(1+\sin(\lambda r^{-1}(\sin\varphi-r))\right)$$

имеет своей характеристикой малости при $r \to 0$ функцию $\omega(r) = r^\sigma$, $\sigma \in (0,1)$ — любое. Поэтому согласно лемме 1.3 любое его решение вида (1.20) обладает свойством $\varphi(r) = o(r^{\sigma/3})$ при $r \to 0$, $\sigma \in (0,1)$ — любое, а потому при его записи в форме (1.21) будем иметь $\nu_0 = \lim\limits_{r\to 0} \nu(r) \geqslant 1/3$.

Покажем, наконец, что решение вида (1.20) уравнения (1.19), будучи записано в виде (1.21), не может обладать свойством $\nu(r) \to +\infty$ при $r \to 0$. Допустим, что уравнение (1.19) имеет решение

$$\varphi(r) = r^{\nu(r)}, \quad 0 < r \leqslant \Delta, \qquad \nu(r) \to +\infty \quad \text{при} \quad r \to 0. \tag{1.26}$$

Тогда, как следует из (1.19), для этого решения

$$r\varphi'(r) \equiv \Psi(r, \varphi(r)) \equiv r(1 - \sin\lambda + o(1)), \qquad o(1) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0,$$

так что при малых $r > 0$ $\varphi'(r) \geqslant 1 - c$, $c \in (0,1)$ — постоянная,

$$\varphi(r) \geqslant (1-c)r, \qquad \ln\varphi(r) \geqslant \ln(1-c) + \ln r,$$

$$\nu(r) = \frac{\ln\varphi(r)}{\ln r} \leqslant 1 + \frac{\ln(1-c)}{\ln r}, \qquad \lim_{r\to 0} \nu(r) \leqslant 1,$$

что противоречит (1.26).

Итак, $\nu_0 \in \{0, 1, +\infty\} \cap [1/3, +\infty)$, т. е. $\nu_0 = 1$. □

(iii) Любое решение вида (1.20) уравнения (1.19) допускает представление

$$\varphi(r) = \theta(r)r, \quad 0 < r \leqslant \Delta, \qquad \theta(r) \to 1 \quad \text{при} \quad r \to 0. \tag{1.27}$$

Доказательство. Согласно (i) и (ii) любое решение вида (1.20) уравнения (1.19) в секторе $N: \; 0 < r \leqslant \Delta$, $|\varphi| \leqslant \varepsilon$ с достаточно малыми $\varepsilon > 0$ и $\Delta \in (0,1)$ представимо в виде (1.22). Рассматривая уравнение (1.19) в таком секторе N, производим в нем замену искомой функции φ по формуле

$$\varphi = r\theta. \tag{1.28}$$

Вследствие этой замены 1) сектор N переходит в множество $\mathcal{E}: \; 0 < r \leqslant \Delta$, $r|\theta| \leqslant \varepsilon$ плоскости r, θ; 2) уравнение (1.19) переходит в уравнение вида (1.3)

$$r\frac{d\theta}{dr} = \Phi_1(\theta) + \psi_1(r,\theta) \equiv \Psi_1(r,\theta), \tag{1.29}$$

где

$$\Phi_1(\theta) = \sin(\lambda(\theta - 1)) - (\theta - 1), \; \psi_1 \in C(\mathcal{E}), \; \psi_1(0,\theta) \equiv 0;$$

3) решение (1.20) уравнения (1.19) переходит в решение $\theta(r)$, $0 < r \leqslant \Delta$, уравнения (1.29), обладающее (согласно (ii)) свойством

$$\forall\, \sigma > 0 \quad r^\sigma < |\theta(r)| < r^{-\sigma} \text{ при малых } r > 0. \tag{1.30}$$

Зафиксируем $\sigma \in (0, 1/2)$ и будем рассматривать уравнение (1.29) в области

$$\mathcal{E}_\sigma: \; 0 < r < \Delta, \; r^\sigma < |\theta| < r^{-\sigma}.$$

В ней (в чем нетрудно убедиться) $|\psi_1(r,\theta)| = o(r^{2-3\sigma})$ при $r \to 0$, $|\theta| < +\infty$.

Функция Φ_1 из уравнения (1.29) при $\lambda \in [0,1]$ имеет на оси θ единственный нуль $\theta = 1$, а $\psi_1(0,\theta) \equiv 0$. Поэтому $\forall\, \alpha \in (0,1)\ \exists\, \beta \in (0,\Delta):$ для уравнения (1.29)

$$\begin{array}{lll} d\theta/dr > 0 & \text{в} & (0,\beta] \times [-1/\alpha, 1-\alpha], \\ d\theta/dr < 0 & \text{в} & (0,\beta] \times [1+\alpha, 1/\alpha,]. \end{array}$$

Из этого следует, что любое решение $\theta(r)$, $\quad 0 < r \leqslant \Delta$, уравнения (1.29) обладает свойством $\theta(r) \to \theta_0 \in [-\infty, +\infty]$ при $r \to 0$.

Но уравнение (1.29), будучи разрешено относительно $dr/d\theta$, имеет решение $r \equiv 0$, $-\infty < \theta < +\infty$, для которого на интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$ оси θ выполняется условие единственности Липшица. Поэтому для любого решения $\theta(r)$, $0 < r \leqslant \Delta$, этого уравнения $\theta_0 = \lim\limits_{r\to 0} \theta(r) \in \{-\infty, 1, +\infty\}$.

Покажем, что для решений $\theta(r)$ уравнения (1.29), обладающих свойством (1.30), случаи $\theta_0 = \pm\infty$ невозможны. Действительно, уравнение (1.29) в области $\mathcal{E}_\sigma$ при больших $|\theta|$ и малых $r > 0$ может быть представлено в виде

$$r\theta' = -\theta(1 + o(1))$$

(где $o(1) \to 0$ при $r \to 0$ и $|\theta| \to +\infty$) и, следовательно, при $\sigma \in (0, 1/2)$ не имеет там решений $\theta(r)$, $|\theta(r)| \to +\infty$ при $r \to 0$.

Таким образом, для любого решения уравнения (1.29) $\theta(r)$, $0 < r \leqslant \Delta$, обладающего свойством (1.30), $\theta(r) \to 1$ при $r \to 0$. $\square$

(iv) Для уравнения (1.19) $\exists\,!$ решение вида (1.27).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из доказательства утверждения (iii), достаточно доказать, что уравнение (1.29) имеет единственное решение $\theta(r)$, обладающее свойством $\theta(r) \to 1$ при $r \to 0$. Но для уравнения (1.29), если считать в нем r радиальной, а θ — угловой координатой, направление $\theta = 1$ есть обыкновенное исключительное направление в точке $r = 0$. При $\lambda \in [0,1)$ его кратность $k = 1$, $\Phi_1'(1) = \lambda - 1 < 0$, а при $\lambda = 1$ его кратность $k = 3$, $\Phi_1'''(1)/3! = -1 < 0$. Поэтому сектор $N' : 0 < r \leqslant \Delta'$, $|\theta - 1| \leqslant \varepsilon'$ при достаточно малых $\varepsilon' > 0$ и $\Delta' > 0$ является для уравнения (1.29) обыкновенным нормальным сектором 2-го типа. В нем $\partial\psi_1(r,\theta)/\partial\theta = O(r^2)$ при $r \to 0$ (в чем нетрудно убедиться), а потому для него при $\lambda \in [0,1)$ выполняется условие Пеано единственности O-кривой в N_2-секторе (теорема 1.1), а при $\lambda = 1$ — условие единственности Лонна (теорема 1.2). $\square$

Из утверждений (i) — (iv) вытекает утверждение 1) теоремы.

2) Пусть в уравнении (1.19) $\lambda > 1$. Выделим в секторе N подсектор

$$N' : 0 < r \leqslant \Delta',\ |\varphi - r| \leqslant r^\sigma,\ 1 < \sigma < \lambda.$$

Его боковые границы $\varphi = r \pm r^\sigma$, $0 < r \leqslant \Delta'$, бесконтактны для уравнения (1.19), если Δ' достаточно мало, причем интегральные кривые уравнения (1.19) с убыванием r входят через них внутрь N', ибо

$$\Psi(r, r \pm r^\sigma) - r(r \pm r^\sigma)' = \pm(\lambda - \sigma) r^\sigma (1 + o(1)),$$

$o(1) \to 0$ при $r \to 0$. Из этого следует, что любое решение уравнения (1.19) $\varphi(r)$, начинающееся в N', есть решение вида (1.20). Очевидно, что таких решений бесконечно много. $\square$

§ 2. Проблема различения для нормального направления 3-го типа

Пусть $\varphi = \varphi_0$ — нормальное направление 3-го типа рассматриваемой системы (II.2.6) в точке O, т. е. исключительное направление, которое можно заключить в нормальный сектор 3-го типа. Согласно теореме II.4.3 для него возникает проблема существования O-кривых системы, примыкающих к точке O по этому направлению. Для обыкновенного нормального направления 3-го типа весьма широкие достаточные условия как существования, так и отсутствия таких кривых дает приводимая далее теорема Лонна.

2.1. Исследование вспомогательного уравнения

На декартовой плоскости r, φ рассмотрим уравнение

$$r\frac{d\varphi}{dr} = A\varphi^k + B\omega(r) \equiv \Psi_0(r,\varphi), \tag{2.1}$$

где $k \geqslant 2$ — четное число, $A > 0$ и $B \in \mathrm{R}$ — постоянные, $\omega \in C[0,1),\ \omega(0) = 0$. Уравнение (2.1) задано в полосе $\Pi_0 :\ 0 < r < 1,\ |\varphi| < +\infty$, которая является для него и областью единственности решения любой задачи Коши. Для него при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно малом $\Delta > 0$ прямоугольник $N :\ 0 < r \leqslant \Delta,\ |\varphi| \leqslant \varepsilon$ есть обыкновенный нормальный “сектор"(нормальная область) 3-го типа, а потому возникает проблема существования решений вида

$$\varphi = \varphi(r),\ \ \varphi(r) \to 0 \ \text{ при } \ r \to 0. \tag{2.2}$$

1) $B = 0$. В этом случае уравнение (2.1) принимает вид

$$r\frac{d\varphi}{dr} = A\varphi^k.$$

Оно имеет решение $\varphi \equiv 0,\ r > 0$. Кроме того, любое его решение, начинающееся в области $r > 0,\ \varphi > 0$, обладает свойством: $\varphi(r) \to 0$, при $r \to 0$, ибо эти решения определяются формулой

$$\varphi(r) = -\Big(A(k-1)\ln\frac{r}{C}\Big)^{-1/(k-1)}, \quad r < C,$$

$C > 0$ — произвольная постоянная.

2) $B \neq 0$. Произведем в (2.1) замену искомой функции по формуле

$$\varphi = \theta|\ln r|^{-1/(k-1)}. \tag{2.3}$$

Получим уравнение

$$r|\ln r|\theta' = A\theta^k - \frac{1}{k-1}\theta + B\omega(r)(\ln r)^{k/(k-1)},$$

которое при $\omega(r) = (\ln r)^{-k/(k-1)}$ принимает вид

$$r|\ln r|\theta' = A\theta^k - \frac{1}{k-1}\theta + B \equiv T(\theta). \tag{2.4}$$

Это уравнение задано в полосе $\widetilde{\Pi}_0 :\ 0 < r < 1,\ |\theta| < +\infty$, и переменные в нем разделяются. Прежде чем их разделить, исследуем полином T на наличие нулей. Для этого построим график $T(\theta)$. $T'(\theta) = Ak\theta^{k-1} - (k-1)^{-1} = 0$ в единственной точке $\theta_0 = [Ak(k-1)]^{-1/(k-1)} >$

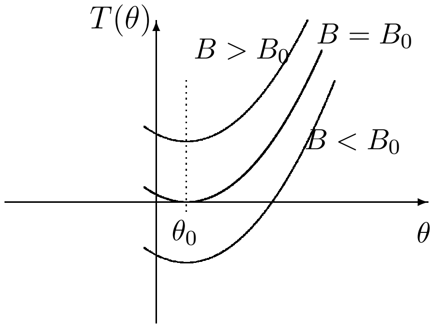

Рис. 2.1. Графики функции $T(\theta)$ при различных B

$0,\ T''(\theta_0) > 0$. Следовательно, $T(\theta)$ имеет в точке $\theta = \theta_0$ минимум. Кроме того, $T(\theta) \to +\infty$ при $|\theta| \to +\infty$, так что его график имеет вид, изображенный на рис. 2.1.

При изменении B график T сдвигается вверх или вниз. В частности, существует $B_0 > 0$ такое, что при $B = B_0$ $T(\theta_0) = 0$, т. е. $A\theta_0^k - (k-1)^{-1}\theta_0 + B_0 = 0$. Отсюда

$$B_0 = k^{-1}(Ak(k-1))^{-1/(k-1)} > 0.$$

2_1) $B < B_0$. В этом случае полином $T(\theta)$ имеет нули $\theta_1, \theta_2,\ \theta_1 < \theta_0 < \theta_2$, уравнение (2.4) имеет решения $\theta \equiv \theta_i,\ i = 1, 2$, уравнение (2.1) имеет решения $\varphi_i(r) = \theta_i |\ln r|^{-1/(k-1)} \to 0$ при $r \to 0,\ i = 1, 2$. Более того, любое решение $\theta(r)$ уравнения (2.4), начинающееся в области $\theta > \theta_1$, обладает свойством: $\theta(r) \to \theta_2$ при $r \to 0$, а потому любое решение $\varphi(r)$ уравнения (2.1), расположенное в области $\varphi > \varphi_1(r)$, обладает свойством (2.2).

2_2) $B = B_0$. При $B \to B_0 - 0$ нули θ_1, θ_2 полинома $T(\theta)$ сближаются и в пределе сливаются в один нуль θ_0. При этом решения уравнения (2.4) $\theta \equiv \theta_i,\ i = 1, 2$, сливаются в одно решение $\theta \equiv \theta_0$, которому соответствует решение уравнения (2.1) $\varphi_0(r) = \theta_0 |\ln r|^{-1/(k-1)} \to 0$ при $r \to 0$. Этим свойством обладает и любое решение $\varphi(r)$ уравнения (2.1), начинающееся в области $\varphi > \varphi_0(r)$.

2_3) $B > B_0$. В этом случае $T(\theta) > 0\ \forall\, \theta \in \mathrm{R}$. Следовательно, в уравнении (2.4) $\theta'(r) > 0$ в полосе $\widetilde{\Pi}_0$. Зафиксируем произвольную точку $(r_0, \theta^0) \in \widetilde{\Pi}_0$ и рассмотрим решение уравнения (2.4)

$$\theta = \theta(r),\ \theta(r_0) = \theta^0,\ r \in I^-_{\max} = (r_1, r_0] \subset (0, r_0], \tag{2.5}$$

где $I^-_{\max}$ — левый максимальный (относительно области $\widetilde{\Pi}_0$) интервал существования решения $\theta(r)$. Решение (2.5) убывает с убыванием r. Покажем, что для него

а) $r_1 > 0$, б) $\theta(r) \to -\infty$ при $r \to r_1$.

Действительно, подставляя (2.5) в (2.4), получаем тождество

$$\frac{d\theta}{T(\theta(r))} \equiv \frac{dr}{r|\ln r|},\ r \in (r_1, r_0].$$

Интегрируя его по произвольному отрезку $[r, r_0] \subset (r_1, r_0]$, приходим к тождеству

$$\int_{\theta(r)}^{\theta^0} \frac{d\theta}{T(\theta)} \equiv \ln \frac{\ln r}{\ln r_0},\ r \in (r_1, r_0].$$

Интеграл, стоящий в левой части этого тождества, сходится при $r \to r_1$ и, следовательно, ограничен. Поэтому и правая часть этого тождества ограничена на $(r_1, r_0]$. Следовательно, $r_1 > 0$.

Пусть $M > 0$ — произвольное число. Рассмотрим компакт $K: r_1 \leqslant r \leqslant r_0, \ -M \leqslant \theta \leqslant \theta^0, \ K \subset \widetilde{\Pi}_0$. Так как $(r_1, r_0] = I^-_{\max}$ для решения (2.5) уравнения (2.4), по теореме о полном решении при $r \to r_1$ его произвольная точка $(r, \theta(r))$ покидает прямоугольник K через его нижнюю сторону $\theta = -M$. Таким образом, $\forall\, M > 0 \ \exists\, \delta_1 : \forall\, r \in (r_1, r_1 + \delta_1) \ \theta(r) < -M$, т. е. $\theta(r) \to -\infty$ при $r \to r_1$.

Возвратимся к уравнению (2.1). Возьмем произвольную точку $(r_0, \varphi^0) \in N \subset \Pi_0$ и рассмотрим решение уравнения (2.1) $\varphi(r)$, $\varphi(r_0) = \varphi^0$. Точке (r_0, φ^0) соответствует по формуле (2.3) точка $(r_0, \theta^0) \in \widetilde{\Pi}_0$, ей соответствует решение (2.5) уравнения (2.4), которое и порождает по формуле (2.3) решение уравнения (2.1) $\varphi(r)$, $\varphi(r_0) = \varphi^0$:

$$\varphi(r) = \theta(r) |\ln r|^{-1/(k-1)}, \ r \in (r_1, r_0], \quad r_1 > 0.$$

Для него $(r_1, r_0] = I^-_{\max}$ относительно области Π_0, и оно обладает свойством: $\varphi(r) \to -\infty$ при $r \to r_1$. Следовательно, его произвольная точка $(r, \varphi(r))$ с убыванием r в $(r_1, r_0]$ покидает нормальный сектор N через его нижнюю стенку.

Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть в уравнении* (2.1) $k \geqslant 2$ — *четное,* $A > 0, B \in \mathrm{R}$, $\omega(r) = (\ln r)^{-k/(k-1)}$. *Пусть* $B_0 = k^{-1}(Ak(k-1))^{-1/(k-1)}$. *Тогда это уравнение* 1) *имеет бесконечно много O-решений, т. е. решений вида* (2.2), *если* $B \leqslant B_0$, 2) *не имеет таких решений, если* $B > B_0$.

2.2. Теорема сравнения

Напомним читателю известную из общего курса обыкновенных дифференциальных уравнений теорему сравнения [29, c. 84; 32, c. 41].

Теорема 2.1. *Пусть уравнения*

$$y' = f_i(x, y), \ i = 1, 2, \tag{2.6}$$

таковы, что $f_i \in C(G)$, $i = 1, 2$, $G(\subset \mathrm{R}^2)$ — *область,*

$$f_1(x, y) < f_2(x, y) \ \forall\, (x, y) \in G.$$

Пусть точка $(x_0, y_0) \in G$, $\varphi_i(x)$ — *решение* i*-го из уравнений* (2.6), $\varphi_i(x_0) = y_0$, $i = 1, 2$, $I = (\alpha, \beta)$ — *общий интервал существования этих решений. Тогда* $\varphi_2(x) > \varphi_1(x)$ *при* $x \in (x_0, \beta)$, $\varphi_2(x) < \varphi_1(x)$ *при* $x \in (\alpha, x_0)$.

2.3. Теорема Лонна

Продолжим исследование системы (II.2.6) (см. замечание II.2.1). Пусть $N: \ 0 < r \leqslant \Delta, \ |\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$ — обыкновенный нормальный сектор системы. В нем согласно лемме II.4.1 траектории системы в нем описываются уравнением (1.3).

Теорема 2.2. [22, c. 120]. *Пусть* N — *обыкновенный нормальный сектор* 3*-го типа системы, т. е. в уравнении* (1.3) $k \geqslant 2$ — *четное число. Пусть в нем* $a > 0$. *Пусть*

$$b_0 = k^{-1}(ak(k-1))^{-1/(k-1)}, \qquad \omega(r) = (\ln r)^{-k/(k-1)}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) *Если для* (1.3) *в секторе* N *выполняется неравенство*

$$\psi(r, \varphi) \leqslant b\omega(r), \qquad 0 < b < b_0, \tag{2.7}$$

то это уравнение имеет бесконечно много решений вида

$$\varphi=\varphi(r),\ \varphi(r)\to\varphi_0\ \text{при}\ r\to 0, \tag{2.8}$$

и, следовательно, система имеет в секторе N бесконечно много O-кривых.

2) *Если для уравнения* (1.3) *в секторе N выполняется неравенство*

$$\psi(r,\varphi)\geqslant b\omega(r),\qquad b>b_0, \tag{2.9}$$

то оно не имеет решений вида (2.8) *и, следовательно, система не имеет в N O-кривых.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi_0=0$ и, следовательно, рассматриваемый нормальный сектор N описывается неравенствами

$$N:\ 0<r\leqslant\Delta,\ |\varphi|\leqslant\varepsilon.$$

Уравнение (1.3) в нем можно записать в виде

$$r\frac{d\varphi}{dr}=a\varphi^k(1+\alpha(\varphi))+\psi(r,\varphi)\equiv\Psi(r,\varphi), \tag{2.10}$$

где $\alpha(\varphi)=o(1)$ при $\varphi\to 0$. Возьмем произвольное число $\gamma\in(0,1)$. По нему можно указать число $\varepsilon_\gamma\in(0,\varepsilon]$, такое, что $|\alpha(\varphi)|<\gamma$ при $|\varphi|\leqslant\varepsilon_\gamma$. По ε_γ можно указать $\Delta_\gamma\in(0,\Delta]$, такое, что сектор $N^\gamma:\ 0<r\leqslant\Delta_\gamma,\ |\varphi|\leqslant\varepsilon_\gamma$ будет для системы нормальным сектором (очевидно, 3-го типа, ибо $N^\gamma\subset N$ и его тип определяется теми же параметрами k и a, что и тип сектора N).

1) Пусть для уравнения (2.10) в секторе N выполняется условие (2.7). Тогда оно выполняется для него и в секторе N^γ, а потому в N^γ его правая часть Ψ удовлетворяет неравенству

$$\Psi(r,\varphi)\leqslant a(1+\gamma)\varphi^k+b(\ln r)^{-k/(k-1)}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим в N^γ уравнение

$$r\frac{d\varphi}{dr}=a(1+\gamma)\varphi^k+b(1+\gamma)(\ln r)^{-k/(k-1)}\equiv\Psi_1(r,\varphi). \tag{2.12}$$

Это уравнение вида (2.1). Для него N^γ также есть нормальный сектор 3-го типа, если Δ_γ достаточно мало. Далее, в нем $A=a(1+\gamma),\ B=b(1+\gamma),\ \omega(r)=(\ln r)^{-k/(k-1)}$ и для него $B_0=k^{-1}(a(1+\gamma)k(k-1))^{-1/(k-1)}$. При $\gamma\to 0$ имеем $A\to a,\ B\to b,\ B_0\to b_0$. Следовательно, для него при достаточно малом γ справедливо неравенство $B<B_0$, а потому согласно лемме 2.1 при достаточно малом γ оно будет иметь в N^γ бесконечно много O-кривых, т. е. решений вида (2.2). Но в N^γ для уравнений (2.10) и (2.12) выполняются условия теоремы сравнения, ибо согласно неравенству (2.11) в N^γ $\Psi(r,\varphi)<\Psi_1(r,\varphi)$. Поэтому если уравнение (2.12) имеет в N^γ O-кривые и если точка $(r_0,\varphi_0)\in N^\gamma$ такова, что решение уравнения (2.12) $\varphi=\varphi_1(r),\ 0<r\leqslant r_0,\ \varphi_1(r_0)=\varphi_0$, определяет такую O-кривую, т. е. обладает свойством (2.2), то решение уравнения (2.10) $\varphi=\varphi(r),\ \varphi(r_0)=\varphi_0$, при всех $r\in(0,r_0)$, при которых оно лежит в N^γ, удовлетворяет неравенству: $\varphi(r)>\varphi_1(r)$. Следовательно, $(r,\varphi(r))\in N^\gamma\ \forall r\in(0,r_0]$ и согласно лемме II.4.3 обладает свойством (2.2).

2) Пусть для уравнения (2.10) в секторе N выполняется условие (2.9). Тогда оно выполняется для него и в секторе N^γ, а потому в N^γ для его правой части справедливо неравенство

$$\Psi(r,\varphi)\geqslant a(1-\gamma)\varphi^k+b(\ln r)^{-k/(k-1)}. \tag{2.13}$$

Рассмотрим в N^γ уравнение

$$r\frac{d\varphi}{dr} = a(1-\gamma)\varphi^k + b(1-\gamma)(\ln r)^{-k(k-1)} \equiv \Psi_2(r,\varphi). \qquad (2.14)$$

Это также уравнение вида (2.1). Для него N^γ — нормальный сектор 3-го типа, если Δ_γ достаточно мало,

$$A = a(1-\gamma), \quad B = b(1-\gamma), \quad \omega(r) = (\ln r)^{-k/(k-1)},$$
$$B_0 = k^{-1}(a(1-\gamma)k(k-1))^{-1/(k-1)}.$$

При $\gamma \to 0$ $A \to a$, $B \to b$, $B_0 \to b_0$, а потому для него при достаточно малом γ будет выполняться неравенство: $B > B_0$. При этом согласно лемме 2.1 оно не будет иметь решений вида (2.2). Но тогда и уравнение (2.1) не будет иметь таких решений, ибо допуская противное и применяя к уравнениям (2.10) и (2.14) в N^γ теорему сравнения, мы приходим к противоречию, а именно к выводу о том, что тогда и уравнение (2.14) имеет решения вида (2.2). □

Примечание 2.1. Условие теоремы Лонна "пусть в уравнении (1.3) $a > 0$"не ограничивает общности. Случай $a < 0$ приводится к случаю $a > 0$ заменой в этом уравнении φ на $-\varphi$.

Следствие 2.1. *Если в системе* (II.2.1) $\xi(x,y), \eta(x,y) = = o(r^m \ln^{-2} r)$ *при* $r \to 0$, *то для нее (и для системы* (II.2.6), *что то же самое) по любому обыкновенному исключительному направлению* 3*-го типа к точке* O *примыкает бесконечно много (полуоткрытый пучок)* O*-кривых.*

Доказательство. При этом условии, как следует из (II.2.3) и (II.4.2), в уравнении (1.3), описывающем траектории системы в произвольном обыкновенном нормальном секторе N 3-го типа, при любом $k \geqslant 2$ $\psi(r,\varphi) = o\left((\ln r)^{-k/(k-1)}\right)$ при $r \to 0$, $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon$, а потому $\forall\, b > 0$ $|\psi(r,\varphi)| \leqslant b(\ln r)^{-k/(k-1)}$ в N, если Δ достаточно мало, т. е. для этого уравнения в N выполняется условие (2.7) первого утверждения теоремы Лонна или его очевидного аналога для случая $a < 0$, из которых и вытекает данное утверждение. □

Следствие 2.2. *Если в системе* (II.2.1) *функции* ξ, $\eta \in C^{m+1}(B)$, *то для нее (и для системы* (II.2.6)) *по любому обыкновенному исключительному направлению 3-го типа к точке* O *примыкает бесконечно много (полуоткрытый пучок)* O*-кривых.*

Доказательство. При этом условии, как следует из формул (1.2), взятых при $k = l = 1$, $\xi(x,y), \eta(x,y) = O(r^{m+1})$ при $r \to 0$, т. е. выполняются условия следствия 2.1. □

Отметим, что при условиях следствия 2.2 система (II.2.6) — система класса $C^1(\Pi)$, а $(0,\varphi_0)$ — ее особая точка с характеристическими корнями $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Из следствия 2.2 вытекает, что в Π точка $(0,\varphi_0)$ есть точка типа HP (полуседлоузел).

Пример 2.1. Рассмотрим систему вида (II.2.1)

$$\frac{dx}{dt} = x - y + \xi(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = y + \eta(x,y), \qquad (2.15)$$

где при $0 < r < 1$ $\xi(x,y) = -cy\ln^{-2} r$, $\eta(x,y) = cx\ln^{-2} r$, $c \in R$ — параметр, $\xi(0,0) = \eta(0,0) = 0$. Для этой системы $m = 1$, $\xi,\eta \in C^1(B_1)$, $B_1 : 0 \leqslant r < 1$, $\xi(x,y), \eta(x,y) = o(r)$ при

$r \to 0$, $O = (0,0)$ — особая точка, единственная в B_1. При переходе к полярным координатам r, φ система (2.15) переходит в систему вида (II.2.6)

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \sin^2\varphi + c\ln^{-2} r. \tag{2.16}$$

Для нее (2.16) $F(\varphi) = \sin^2\varphi$, $G(\varphi) = 1-(\sin 2\varphi)/2$ так, что она π-периодическая по φ. Для $F(\varphi)$ в промежутке $[-\pi/2, \pi/2)$ оси φ существует единственный нуль $\varphi_0 = 0$, его кратность $k = 2$; $G(0) = 1 \neq 0$. Следовательно, для нее $\varphi = 0$ — обыкновенное исключительное направление в точке O, которое можно заключить в обыкновенный нормальный сектор 3-го типа $N:\ 0 < r \leqslant \Delta < 1, \quad |\varphi| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ и $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ достаточно малы. При этом возникает проблема существования у системы (2.16) O-кривых, примыкающих к точке O из сектора N. Условия следствий 2.1, 2.2 для исходной системы (2.15) не выполняются. Поэтому для решения упомянутой проблемы применим непосредственно теорему Лонна.

В секторе N траектории системы (2.16) описываются уравнением вида (1.3)

$$r\frac{d\varphi}{dr} = (\sin^2\varphi + \ln^{-2} r)(1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)^{-1}, \tag{2.17}$$

в котором функция $\Phi(\varphi) = \sin^2\varphi(1 - 2^{-1}\sin 2\varphi)^{-1} = \varphi^2 + a_1\varphi^3 + \ldots$, $|\varphi| < \varepsilon$, а функция $\psi(r,\varphi) = c(1 - 2^{-1}\sin 2\varphi)^{-1}\ln^{-2} r$ непрерывна в $\overline{N}$, если положить $\psi(0,\varphi) \equiv 0$, $|\varphi| \leqslant \varepsilon$. Для уравнения (2.17) $\varphi_0 = 0, \quad k = 2, \quad a = 1, \quad b_0 = 1/4, \quad \omega(r) = \ln^{-2} r$. Поэтому дл него при $c \leqslant 0$ в исходном секторе N $\psi(r,\varphi) \leqslant 0 < b\,\omega(r) \quad \forall\, b > 0$, а при $c > 0$ в секторе N с достаточно малыми ε и Δ

$$\begin{aligned}
\psi(r,\varphi) &\leqslant \frac{c}{1-\varepsilon}\,\omega(r), \text{ где } \frac{c}{1-\varepsilon} < \frac{1}{4}, \quad \text{если } c \in \left(0, \frac{1}{4}\right), \\
\psi(r,\varphi) &\geqslant \frac{c}{1+\varepsilon}\,\omega(r), \text{ где } \frac{c}{1+\varepsilon} > \frac{1}{4}, \quad \text{если } c > \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

т.е. для уравнения (2.17) при $c \in (-\infty, 0]$ в произвольном секторе N, а при $c \in (0, 1/4)$ в секторе N с достаточно малыми ε и Δ выполняется условие (2.7) теоремы Лонна; при $c > 1/4$ для него в секторе N с достаточно малыми ε и Δ выполняется условие (2.9) этой теоремы. Поэтому $\forall\, c \in (-\infty, 1/4)$ уравнение (2.17) имеет бесконечно много решений вида (2.2), и, следовательно, система (2.16) имеет в секторе N бесконечно много O-кривых, а $\forall\, c > 1/4$ уравнение (2.17) не имеет решений вида (2.2), и, следовательно, система (2.16) не имеет в секторе N O-кривых.

Для случая, когда в системе (2.15) и уравнении (2.17) $c = 1/4$, рассматриваемая проблема осталась пока открытой. Для того, чтобы ее исследовать, произведем в уравнении (2.17) замену переменных по формулам

$$r = e^{-1/\rho}, \quad \varphi = \rho\theta. \tag{2.18}$$

При этом оно перейдет в уравнение

$$\rho\frac{d\theta}{d\rho} = \theta^2 - \theta + c + \rho\theta U(\rho,\theta), \tag{2.19}$$

где U — аналитическая функция от ρ и θ в области $|\rho\theta| \leqslant \varepsilon$, а сектор N перейдет в множество $N':\ 0 < \rho \leqslant \Delta' = -1/\ln\Delta, \quad \rho|\theta| \leqslant \varepsilon$. Уравнение (2.19) снова есть уравнение вида (1.3). Для него

$$\Phi(\theta) = \theta^2 - \theta + c, \ \psi(\rho,\theta) = \rho\theta U(\rho,\theta).$$

При $c = 1/4$ полином $\Phi(\theta) = \theta^2 - \theta + 1/4 = (\theta - 1/2)^2$ имеет единственный корень $\theta_0 = 1/2$, его кратность $k = 2$. Следовательно, для уравнения (2.19) множество $N^0 : \ 0 < \rho \leqslant \Delta_0, \ |\theta - 1/2| \leqslant \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ — любое число, $\Delta_0 = \Delta_0(\varepsilon_0) > 0$ — достаточно малое число, есть нормальная область 3-го типа, и для нее возникает проблема существования у уравнения (2.19) решений вида

$$\theta = \theta(\rho), \ \theta(\rho) \to \frac{1}{2} \text{ при } \rho \to 0. \tag{2.20}$$

Применяя для ее решения теорему Лонна, находим: при $c = 1/4$ для уравнения (2.19) как уравнения вида (2.10) кратность k изучаемого направления $\theta = \theta_0 = 1/2$ равна 2, число $a = \Phi''(1/2)/2 = 1 > 0$, $b_0 = 1/4$, $\omega(\rho) = \ln^{-2} \rho$, $\psi(\rho, \theta) = O(\rho) = o(\omega(\rho))$ при $\rho \to 0, \ |\theta - 1/2| \leqslant \varepsilon_0$. Из этого следует, что для него в секторе N^0 выполняется условие (2.7) теоремы Лонна, а потому оно имеет бесконечно много решений вида (2.20). Из этого, в свою очередь, следует, что при $c = 1/4$ уравнение (2.17) имеет бесконечно много решений вида

$$\varphi(r) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) |\ln r|^{-1}, \ o(1) \to 0 \text{ при } r \to 0,$$

т. е. решений вида (2.2), а система (2.16) имеет в N бесконечно много (полуоткрытый пучок) O-кривых.

Отметим, что система (2.16) кроме направления $\varphi = 0$ имеет еще лишь одно исключительное направление в точке $O : \ \varphi = \pi$. В силу π-периодичности системы (2.16) по φ для направления $\varphi = \pi$ справедливо все сказанное относительно направления $\varphi = 0$. Из этого (с учетом теорем 2.1 и 2.2 главы II) следует, что для системы (2.16) при любом $c \in (-\infty, 1/4]$ точка O — вырожденный узел, а при любом $c \in (1/4, +\infty)$ — фокус (ибо в последнем случае система (2.17) не имеет ни TO-кривых, ни колеблющихся O-кривых, а точка O для нее, как следует из ее первого уравнения, вполне неустойчива по Ляпунову).

§ 3. Исследование особых неизолированных исключительных направлений

Пусть в системе (II.2.6) $F(\varphi) \equiv 0$ и пусть для нее существует $\varphi_0 \in \mathrm{R}$ такое, что $G(\varphi_0) = 0$. Исследуем в этом случае вопрос о существовании у нее O-кривых, примыкающих к точке O по направлению $\varphi = \varphi_0$.

Теорема 3.1. *Пусть система* (II.2.1) *и число* φ_0 *таковы, что* 1) *в* (II.2.6) $F(\varphi) \equiv 0$, $G(\varphi_0) = 0$, 2) $\xi, \eta \in C^{m+l}(\underline{B}), \ l \geqslant 2$, 3) $\exists k \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$: *в представлении* (1.1_k) *функции* f $F_i(\varphi) \equiv 0$, $i = \overline{1, k-1}$, $F_k(\varphi_0) \neq 0$, 4) $\xi(x, y), \eta(x, y) = O(r^{m+k})$ *при* $r \to 0$. *Пусть* $\alpha \geqslant 1$ — *кратность нуля* φ_0 *функции* G, $a = \dfrac{G^{(\alpha)}(\varphi_0)}{(\alpha! F_k(\varphi_0))}$. *Тогда для системы* (II.2.1) (*или, что то же самое, для системы* (II.2.6)) *к точке* O *по направлению* $\varphi = \varphi_0$ 1) *примыкает единственная* O*-кривая, если* α — *четное число,* 2) *примыкают две* O*-кривые, если* α — *нечетное число,* $a > 0$, 3) *не примыкает ни одна* O*-кривая, если* α — *нечетное число,* $a < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi_0 = 0$. При условиях теоремы функции ξ, η представимы формулами (1.2), в которых $P_i(x, y) \equiv Q_i(x, y) \equiv 0$, $i = \overline{1, k-1}$, функции f, g — формулами (1.1_k), в которых $F_i(\varphi) \equiv G_i(\varphi) \equiv$

$0,\ i=\overline{1,k-1}$, а потому система (II.2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= r(G(\varphi)+r^k(G_k(\varphi)+g_k(r,\varphi))), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= r^k(F_k(\varphi)+f_k(r,\varphi)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $G(\varphi)$ имеет нуль $\varphi_0=0$ кратности $\alpha\geqslant 1$, F_k, G_k — формы от $\cos\varphi, \sin\varphi$ степени $m+k+1$, $F_k(0)\neq 0$ и согласно лемме 1.1 $f_k, g_k \in C^{l-k}(\Pi)$, $l-k\geqslant 1$, $f_k(0,\varphi)\equiv g_k(0,\varphi)\equiv 0$. Поэтому существуют $\varepsilon>0$ и $\Delta>0$ такие, что в прямоугольнике $R_+(\subset \Pi) : |\varphi|\leqslant\varepsilon$, $0<r\leqslant\Delta$

$$F_k(\varphi)+f_k(r,\varphi)\neq 0$$

и, следовательно, в нем траектории системы (3.1) описываются уравнением

$$r^{k-1}\frac{dr}{d\varphi}=\frac{G(\varphi)+r^k(G_k(\varphi)+g_k(r,\varphi))}{F_k(\varphi)+f_k(r,\varphi)}\equiv H_k(\varphi,r), \tag{3.2_k}$$

где $H_k\in C^{l-k}(\overline{R}_+)$. В частности, любая O-кривая этой системы, примыкающая к точке O по направлению $\varphi=0$, определяется решением уравнения (3.2_k) вида

$$r=r(\varphi),\ \ r(\varphi)\to +0 \text{ при } \varphi\to+0 \text{ или } \varphi\to -0. \tag{3.3}$$

Таким образом, утверждение теоремы достаточно доказать для O-кривых уравнения (3.2_k), определяемых его решениями вида (3.3).

1. $k=1$. Пусть в условии 3) теоремы $k=1$. Рассмотрим уравнение (3.2_1). При условии 2) теоремы функции f, g согласно лемме 1.1 представимы формулами (1.1_1) и (1.1_2). Поэтому в уравнении (3.2_1) функции f_1 и H_1 представимы в виде

$$f_1(r,\varphi)=r(F_2(\varphi)+f_2(r,\varphi)),$$

где F_2 — форма степени $m+3$ от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, $f_2\in C^{l-2}(\Pi)$, $f_2(0,\varphi)\equiv 0$,

$$H_1(r,\varphi)=\Phi_1(\varphi)+\psi_1(r,\varphi), \tag{3.4}$$

$\Phi_1(\varphi)=G(\varphi)/F_1(\varphi)=a\varphi^\alpha+a_1\varphi^{\alpha+1}+\ldots, |\varphi|\leqslant\varepsilon$, $\psi_1\in C^{l-1}(\overline{R}_+)$, $\psi_1(r,\varphi)\equiv r\widetilde{\psi}_1(r,\varphi)$, $\widetilde{\psi}_1\in C(\overline{R}_+)$. Продолжим функцию ψ_1 с сохранением класса гладкости на прямоугольник $R_1 : |\varphi|\leqslant\varepsilon$, $|r|\leqslant\Delta$. Тогда будем иметь $H_1\in C^{l-1}(R_1)$, а потому для уравнения (3.2_1), рассматриваемого в R_1, существует единственное решение $r=r(\varphi)$, $|\varphi|\leqslant h$, $0<h\leqslant\varepsilon$, $r(0)=0$.

Из (3.2_1) и (3.4) следует, что это решение представимо в виде

$$r(\varphi)=\frac{a}{\alpha+1}\varphi^{\alpha+1}(1+o(1)),\ \ o(1)\to 0 \text{ при } \varphi\to 0,$$

и, следовательно, определяет в R_+ единственное решение уравнения (3.2_1) вида (3.3), если α — четное, два таких решения, если α — нечетное, $a>0$, не определяет ни одного, если α — нечетное, $a<0$.

2. $k\geqslant 2$. Утверждение теоремы для этого случая вытекает из следующей последовательности утверждений.

(i) Замена в уравнении (3.2_k)

$$r^k = \rho \tag{3.5}$$

преобразует его в уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{k(G(\varphi) + \rho(G_k(\varphi) + g_k(r,\varphi)))}{F_k(\varphi) + f_k(r,\varphi)} \equiv \widetilde{H}_k(\varphi,\rho), \tag{3.6}$$

где $r = \rho^{1/k}$, $\widetilde{H}_k \in C(\overline{P}^+)$, $\widetilde{H}_k \in C^{l-k}(P^+)$, $\quad P^+ : |\varphi| \leqslant \varepsilon,\ 0 < \rho \leqslant \Delta^k$, а его решение $r(\varphi)$ вида (3.3) — в решение уравнения (3.6) $\rho(\varphi) = r^k(\varphi)$, обладающее свойством

$$\rho(\varphi) \to +0 \quad \text{при} \quad \varphi \to +0 \quad \text{или} \quad \varphi \to -0. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость этого утверждения очевидна. □

(ii) Решение уравнения (3.6) вида (3.7) при малых φ монотонно и представимо в виде

$$\rho(\varphi) = \frac{ka}{\alpha+1}\varphi^{\alpha+1}(1 + o(1)),\ o(1) \to 0 \text{ при } \varphi \to 0, \tag{3.8}$$

а потому 1) при четном α возможно лишь в области $a\varphi > 0$, 2) при нечетном α и $a > 0$ возможно как в области $\varphi > 0$, так и в области $\varphi < 0$, 3) при нечетном α и $a < 0$ невозможно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение следует из того, что решение уравнения (3.6) вида (3.7) обладает свойствами $\rho'(\varphi) \to 0$, $\rho(\varphi) = O(\varphi\rho'(\varphi))$ при $\varphi \to 0$, а потому $\rho'(\varphi) = ka\varphi^{\alpha}(1 + o(1))$, $o(1) \to 0$ при $\varphi \to 0$. □

(iii) Замена в уравнении (3.6)

$$\rho = \varphi^{\alpha+1}u \tag{3.9}$$

преобразует прямоугольник P^+ в множество $D^+ : |\varphi| \leqslant \varepsilon$, $0 < \varphi^{\alpha+1}u \leqslant \Delta^k$, а уравнение (3.6) — в уравнение

$$\varphi\frac{du}{d\varphi} = \frac{U(\varphi,u) + h(\varphi,u)}{F_k(\varphi) + f_k(r,\varphi)} \equiv H(\varphi,u), \tag{3.10}$$

где

$$U(\varphi,u) = k[G(\varphi)\varphi^{-\alpha} + u\varphi G_k(\varphi)] - (\alpha+1)uF_k(\varphi) = \sum_{i=0}^{+\infty}(c_i - b_i u)\varphi^i,$$

$$c_0 = kG^{(\alpha)}(0)/\alpha!, \qquad b_0 = (\alpha+1)F_k(0),$$

$\forall\, i \in N\ c_i, b_i \in \mathrm{R}$, ряд сходится при всех φ и u,

$$h(\varphi,u) = u(k\varphi g_k(r,\varphi) - (\alpha+1)f_k(r,\varphi)),\ r = (\varphi^{\alpha+1}u)^{1/k},$$

$$h, H \in C(\overline{D}^+) \cap C^{l-k}(D^+), \quad h(0,u) \equiv 0\,.$$

При этом решение $\rho(\varphi)$ уравнения (3.6), обладающее свойством (3.7), преобразуется в решение $u(\varphi)$ уравнения (3.10), обладающее свойством

$$u(\varphi) \to u_0 = \frac{ka}{\alpha+1} \qquad \text{при} \quad \varphi \to +0 \quad \text{или}\ \varphi \to -0. \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В справедливости этого утверждения легко убедиться непосредственной проверкой. □

(iv) Уравнение (3.10) имеет в каждой координатной четверти $\varphi^{\alpha+1}u > 0$ плоскости φ, u единственное решение $u(\varphi)$ вида (3.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$\Phi(u) \equiv H(0,u) = ka - (\alpha+1)u, \;\; \psi(\varphi,u) = H(\varphi,u) - \Phi(u).$$

Тогда уравнение (3.10) примет вид

$$\varphi\frac{du}{d\varphi} = \Phi(u) + \psi(\varphi,u) \equiv H(\varphi,u), \tag{3.10$'$}$$

где $\psi \in C(\overline{D}^+) \cap C^{l-k}(D^+)$, $\psi(0,u) \equiv 0$. Рассмотрим уравнение (3.10$'$), например, в области $D_1^+ : 0 < \varphi \leqslant \varepsilon$, $0 < \varphi^{\alpha+1}u \leqslant \Delta^k$ (см. (iii)). Это уравнение вида (1.3). Для него $u_0 = ka/(\alpha+1)$ — простой нуль $\Phi(u)$, причем $\Phi'(u_o) = -(\alpha+1) < 0$. Следовательно, существуют числа $\varepsilon' > 0$ и $\Delta' > 0$, такие, что прямоугольник $N'(\subset D_1^+) : 0 < \varphi \leqslant \Delta'$, $|u-u_0| \leqslant \varepsilon'$ для (3.10$'$) будет нормальной областью Фроммера 2-го типа, а потому согласно теореме II.4.2 уравнение (3.10$'$) имеет в N' хотя бы одно решение вида (3.11). Но при условиях нашей теоремы согласно лемме 1.1 $f_k(r,\varphi), g_k(r,\varphi) = O(r)$ при $r \to 0$, $|\varphi| < +\infty$ (ибо представимы формулами $f_k(r,\varphi) = r(F_{k+1}(\varphi)+f_{k+1}(r,\varphi))$, $g_k(r,\varphi) = r(G_{k+1}(\varphi)+g_{k+1}(r,\varphi))$, $f_{k+1}, g_{k+1} \in C^{(l-k-1}(\Pi))$ и $f_k, g_k \in C^{(l-k)}(\Pi)$. Поэтому функция ψ из (3.10$'$) обладает свойствами: $\psi'_u(\varphi,u) = O(\varphi^\sigma)$ при $\varphi \to 0$, $|u-u_0| \leqslant \varepsilon'$, $\sigma = \min\{1,(\alpha+1)/k\}$. Следовательно, $H'_u(\varphi,u) < 0$ в N', если Δ' достаточно мало. Из этого следует, что для уравнения (3.10$'$) в области N' выполняются условия теоремы 1.1, а потому оно имеет в N' единственное решение вида (3.11).

Точно так же уравнение (3.10$'$) рассматривается в области $D_2^+ : -\varepsilon \leqslant \varphi < 0$, $0 < \varphi^{\alpha+1}u \leqslant \Delta^k$. $\square$

Из справедливости утверждений (i) — (iv) вытекает справедливость утверждения теоремы в случае, когда $k \geqslant 2$. $\square$

§ 4. Квазиоднородная система с невырожденным однородным приближением. Случаи наличия исключительных направлений в точке O

В этом параграфе будем рассматривать систему (II.2.1), т. е. систему

$$\dot{x} = P(x,y) + \xi(x,y), \qquad \dot{y} = Q(x,y) + \eta(x,y), \tag{4.1}$$

в предположении, что для нее выполняется следующее условие.

Условие 4.1. 1) Выполняются условия II.2.1 и II.1.1.

2) Функция F из (II.2.2) имеет вещественные нули.

При этом условии главная часть системы (4.1)

$$\dot{x} = P(x,y), \qquad \dot{y} = Q(x,y) \tag{4.1$_0$}$$

есть невырожденная однородная система (см. § II.1).

Теорема 4.1. *Если для системы* (4.1)

1) *выполняется условие* 4.1,

2) *функции* $\xi, \eta \in C^{m+1}(D)$,
то для нее особая точка O имеет тот же тип Бендиксона, что и для ее однородного приближения (4.1_0)*, а именно для системы* (4.1) *к точке O по каждому исключительному направлению примыкает такой же пучок O-кривых (открытый, состоящий из единственной O-кривой или полуоткрытый), что и для системы* (4.1_0) *вдоль соответствующего инвариантного луча.*

Доказательство. **А.** Допустим сначала, что функция $F(\varphi) \not\equiv 0$. Из условия 1) теоремы следует, что в этом случае система (4.1) имеет в точке O конечное (> 0) число исключительных направлений, каждое из которых является обыкновенным и потому может быть заключено в нормальный сектор 1-го, 2-го или 3-го типа (см. леммы II.1.1 и II.4.1). Расположение траекторий системы (4.1) в N_1-секторе всегда определяется однозначно (см. теорему II.4.1 и следствие II.4.1). При условии 2) данной теоремы определенность имеет место и для расположения траекторий в каждом из N-секторов 2-го и 3-го типов (см. следствия 1.4 и 2.2). Из этого (с учетом теоремы II.3.2) следует, что при условиях данной теоремы в случае **А** топологический тип точки O системы (4.1) полностью определяется а) числом и типами нормальных секторов с вершинами в O, б) круговым порядком следования этих секторов друг за другом при обходе точки O в положительном направлении, начиная с некоторого из них, и в) наклоном поля на боковых стенках каждого из N_3-секторов (см. случаи $N_3^{\pm}$ на рис. II.4.2). Но все эти характеристики совокупности N-секторов системы (4.1) определяются ее главными членами $P(x,y)$, $Q(x,y)$ (посредством функций $F(\varphi)$, $G(\varphi)$ из (II.2.6) и формул II.2.3), а в системе (4.1_0) $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — те же, что и в (4.1). Поэтому каждый N-сектор системы (4.1) будет N-сектором системы (4.1_0) (и наоборот) того же типа, с тем же наклоном поля на боковых стенках и (при условии 2) теоремы) с тем же поведением траекторий в нем. Отсюда (с учетом определения II.1.1 и следствия II.1.1) и вытекает утверждение теоремы в случае **А**.

Б. Допустим теперь, что $F(\varphi) \equiv 0$. В этом случае утверждение данной теоремы вытекает из теорем II.1.2 и II.5.1. □

Отметим, что при условиях теоремы 4.1 система (II.2.6), как следует из леммы 1.1, есть система класса C^1 на Π (на H). При $F(\varphi) \not\equiv 0$ она имеет на R_φ (на S) лишь элементарные особые точки, а при $F(\varphi) \equiv 0$ (после замены $d\tau = r d\theta$) не имеет там и таковых.

Теорема 4.1′. *Если для системы* (4.1)

1) *выполняется условие* 4.1, *причем система не имеет в точке O исключительных направлений* 3-*го типа и кратных исключительных направлений* 2-*го типа,*

2) *функции* $\xi, \eta \in C^m(B)$,
то для нее особая точка O имеет тот же тип Бендиксона, что и для ее однородного приближения (4.1_0), *а именно каждое исключительное направление* 1-*го типа является для системы* (4.1) *узловым, а каждое исключительное направление* 2-*го типа — седловым, как и соответствующий инвариантный луч системы* (4.1_0).

Доказательство. Сохраняет силу доказательство теоремы 4.1 с учетом того, что при условии 1) данной теоремы единственность O-кривой системы (4.1) в любом ее N-секторе 2-го типа согласно следствию 1.3 обеспечивается более слабым, чем в теореме 4.1, условием 2), а также с учетом определений II.1.2 и II.4.4. □

§ 5. Квазилинейная система с невырожденной матрицей A коэффициентов линейного

приближения. Случаи вещественных собственных чисел матрицы A

Пусть в системе (4.1) $m=1$. Тогда ее можно записать в виде

$$\dot{p} = Ap + \zeta(p), \tag{5.1}$$

где $p=(x,y)$, A — постоянная матрица, $\zeta=(\xi,\eta)$. Ее однородным приближением является система

$$\dot{p} = Ap. \tag{5.1$_0$}$$

Для случая системы (5.1) условие 4.1 (с учетом II.1.4) принимает следующий вид.

Условие 5.1. 1) Выполняется условие II.2.1 (при $m=1$), $\det A \neq 0$,

2) собственные числа матрицы A λ_1, λ_2 — вещественны.

Теорема 5.1. *Пусть для системы* (5.1) *выполняется условие* 5.1. *Если при этом*

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\quad \xi, \eta \in C^1(D)$ *или*

2) $\lambda_1 = \lambda_2$, $\quad \xi, \eta \in C^2(D)$,

то особая точка O *системы* (5.1) *имеет тот же тип Пуанкаре, что и для системы* (5.1_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условиях теоремы система (5.1) есть частный случай системы (4.1), удовлетворяющей условию 4.1. Для нее исключительными направлениями в точке O являются направления $\varphi=\varphi_0$, $F(\varphi_0)=0$, т.е. (см. п. II.1.4) собственные направления матрицы A.

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то при $0 \leqslant \varphi < \pi$ существуют два таких направления: $\varphi=\varphi_i$, $i=1,2$. При $\varphi \in [0,2\pi)$ добавляются еще два: $\varphi=\varphi_{i+2}=\varphi_i+\pi$, $i=1,2$. Все указанные направления — простые.

Следовательно, в этом случае утверждение данной теоремы вытекает из теоремы $4.1'$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2\,(\neq 0)$, но матрица A — недиагональна, то (см. п. II.1.4) система (5.1) имеет в $[0,2\pi)$ исключительные направления $\varphi=\varphi_1 \in [0,\pi)$ и $\varphi=\varphi_1+\pi$. Оба они — двукратные. В этом случае утверждение данной теоремы вытекает из теоремы 4.1.

Если $A=\lambda E$ (E — единичная матрица), то для нее все направления в точке O — собственные. В этом случае утверждение данной теоремы также следует из теоремы 4.1 (с учетом пункта Б ее доказательства). □

З а м е ч а н и е 5.1. В случае 2) теоремы 5.1 условие на ξ,η может быть ослаблено. Его можно заменить, например, условиями

$$\xi, \eta \in C^1(D), \ \xi(x,y), \eta(x,y) = o(r\ln^{-2} r) \qquad r \to 0. \tag{5.2}$$

Это вытекает из следствия 2.1 и теоремы 5.2.

З а м е ч а н и е 5.2. Если для системы (5.1) $\lambda_1=\lambda_2$, а $\xi,\eta \in C^1(D)$, но не удовлетворяют второму из условий (5.2), то для нее тип Пуанкаре особой точки O системы (5.1_0) может не сохраниться (хотя ее топологический тип согласно теореме Гробмана — Хартмана, сохраняется).

Об этом свидетельствуют следующие примеры [22, с. 95,96]:

1) $\dot{x} = x + y\ln^{-1} r, \quad \dot{y} = y - x\ln^{-1} r;$

2) $\dot{x} = x + y\ln^{-1} r, \quad \dot{y} = x + y - x\ln^{-1} r;$

3) $\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = y + x(\cos\ln|x|)\ln^{-1} x.$

В первом примере линейный особый узел перешел в фокус, во втором — линейный вырожденный узел перешел в фокус, в третьем — линейный особый узел перешел в узел с колеблющимися O-кривыми.

З а м е ч а н и е 5.3. Достаточное условие (5.2) сохранения типа Пуанкаре точки O при возмущении линейной системы почти необходимо.

Это показывает пример 2.1, где $\xi,\ \eta \in C^1(B)$, $B : r < 1$, $\xi(x,y)$, $\eta(x,y) = O(r\ln^{-2} r)$ при $r \to 0$, а точка O в зависимости от значений параметра c может быть как узлом, так и фокусом.

Г л а в а IV

Проблема различения центра, фокуса и центро-фокуса

Материал этой главы опирается на монографии А. Пуанкаре [26], А. М. Ляпунова [21], В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [22, гл. II], А. А. Андронова, Е. А. Леонтович, И. И. Гордона, А. Г. Майера [9, § 8, 12].

В § 1 ,2 этой главы мы будем рассматривать систему общего вида (0.3.1), т. е. систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x,y), \tag{0.1}$$

где $X, Y \in C(D)$, $D(\subset \mathrm{R}^2)$ — область единственности для траекторий системы, $O = (0,0) \in D$, $X(0,0) = Y(0,0) = 0$, и будем предполагать, что для нее выполняется следующее условие.

Условие 0.1. Особая точка O является для системы (0.1) центром, фокусом или центро-фокусом.

§ 1. Достаточные признаки фокуса

Теорема 1.1. *Если для системы* (0.1)

1) *выполняется условие* 0.1,

2) *точка O — асимптотически устойчива по Ляпунову или неустойчива, то для нее точка O — фокус.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость этого утверждения очевидна, ибо центр и центро–фокус устойчивы по Ляпунову, но неасимптотически. □

Пример 1.1. Рассмотрим квазилинейную систему

$$\dot{x} = -y + x^3, \qquad \dot{y} = x + y^3. \tag{1.1}$$

Для нее $O(0,0)$ — особая точка, для которой $F(\varphi) \equiv 1 \neq 0\ \forall \varphi \in \mathrm{R}$ (см. п. II.2.3), и, следовательно (согласно теореме II.6.2), O — центр, фокус или центро-фокус. Но для этой системы

$$\frac{dr}{dt} = r^3(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) > 0 \text{ при } r > 0.$$

Следовательно, для нее точка O — неустойчива по Ляпунову, а потому является фокусом.

Теорема 1.2 [33]. *Пусть для системы* (0.1)

1) *выполняется условие* 0.1,

2) $V = (X, Y) \in C^1(D)$,

3) $\exists\, \delta > 0:$ a) div $V(x, y) \geqslant 0\,(\leqslant 0)$ *в* $B : |p| < \delta$,

b) $\forall\, \delta' \in (0, \delta)$ div $V(x, y) \not\equiv 0$ *в* $B' : |p| < \delta'$.

Тогда для системы (0.1) *точка* O *— фокус.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное: система (0.1) удовлетворяет условиям теоремы, а точка O для нее — центр или центро-фокус. Тогда $\forall\, \delta' \in (0, \delta)$ для системы (0.1) существует замкнутая траектория $L \subset B'$ и окружающая O. Пусть U — область, ограниченная L, $p = p(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathrm{R}$, — движение системы по L, ω — его период. Рассмотрим поток поля $V(p)$ через контур L в направлении внешней нормали к нему

$$I = \int\limits_L X(x, y)\, dy - Y(x, y)\, dx.$$

Непосредственное вычисление дает

$$I = \pm \int\limits_0^\omega [X(p(t))\dot{y}(t) - Y(p(t))\dot{x}(t)]\, dt = 0.$$

Вычисляя этот же интеграл по формуле Грина из теории поля, получаем $I = \iint\limits_U \mathrm{div}\ V(x, y)\, dxdy > 0$ (< 0). Это противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. $\square$

Пример 1.2.

$$\dot{x} = -y + y^3 + xy^6 = X(x, y), \quad \dot{y} = x - x^3 + y^7 = Y(x, y). \tag{1.2}$$

Для этой системы точка O — центр, фокус или центро-фокус (по той же причине, что и для системы (1.1)), $V = (X, Y) \in C^a(\mathrm{R}^2)$, div $V(x, y) = 8y^6 \geqslant 0$ в R^2, div $V(x, y) \not\equiv 0$ в любой области $U \subset \mathrm{R}^2$. Таким образом, для системы (1.2) выполняются условия теоремы 1.2, а потому для нее точка O — фокус.

Теорема 1.3. [33]. *Пусть система* (0.1)

1) *квазиоднородна,*

2) *для нее* $F(\varphi) \neq 0 \ \forall\, \varphi \in \mathrm{R}$, $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} F^{-1}(\varphi)G(\varphi)d\varphi \neq 0$. *Тогда ее особая точка* O — *фокус.*

Доказательство. Допустим противное: система (0.1) удовлетворяет условиям теоремы, а ее особая точка O — центр или центро-фокус. Тогда для уравнения (II.6.1) существует последовательность $r_k \to +0$ при $k \to +\infty$, такая, что $\forall\, k \geqslant 1$ оно имеет 2π-периодическое решение $r = r(\varphi, r_k)$, $r(0, r_k) = r_k$, причем согласно следствию II.6.1

$$r(\varphi, r_k) \rightrightarrows 0 \ \text{ при } \ k \to +\infty, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{1.3}$$

Подставляя функции $r(\varphi, r_k)$, $k \in N$, в уравнение II.6.1, получаем тождества

$$\frac{r'(\varphi, r_k)}{r(\varphi, r_k} \equiv \frac{G(\varphi) + g_k(\varphi)}{F(\varphi) + f_k(\varphi)}, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ k \in N,$$

где

$$f_k(\varphi) = f(r(\varphi, r_k), \varphi), \ g_k(\varphi) = g(r(\varphi, r_k), \varphi).$$

Интегрирование этих тождеств по отрезку $[0, 2\pi]$ дает

$$\ln \frac{r(2\pi, r_k)}{r(0, r_k)} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{G(\varphi) + g_k(\varphi)}{F(\varphi) + f_k(\varphi)} d\varphi, \ k \in N. \tag{1.4}$$

Но $r(2\pi, r_k) = r(0, r_k) = r_k$, $k \in N$, а функции $f_k(\varphi), g_k(\varphi)$ в силу (1.3) и (II.2.3) обладают свойством

$$f_k(\varphi), g_k(\varphi) \rightrightarrows 0 \ \text{ при } \ k \to +\infty, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Поэтому из равенств (1.4) при $k \to +\infty$ получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} F^{-1}(\varphi)\, G(\varphi) d\varphi = 0,$$

что противоречит условиям теоремы. □

§ 2. Достаточные признаки центра

Теорема 2.1 [26]. *Пусть*

1) *для системы* (0.1) *выполняется условие* 0.1,

2) $\exists\, \delta > 0$: *система* (0.1) *имеет в круге* $B(|p| < \delta)$ *интеграл* $u(x, y)$, *обладающий свойствами*: а) $u \in C(B)$, б) $u(x, y) \not\equiv \mathrm{const}$ *в любой области* $U \subset B$.

Тогда для системы (0.1) *точка* O — *центр.*

Доказательство. Допустим противное: система (0.1) удовлетворяет условиям данной теоремы, но точка O не является для нее центром. Тогда она является для нее α) фокусом или β) центро-фокусом.

В случае α) $\exists\, \delta' \in (0, \delta)$: $\forall\, p_0 \in B'$ движение системы $p(t, p_0) \to O$, скажем, при $t \to +\infty$. Тогда по непрерывности $u(p(t, p_0)) \to u(O)$ при $t \to +\infty$ и по основному свойству интеграла $u(p_0) = u(O)$, т. е. $u(p) \equiv u(O)$ в B', что противоречит условию 2б) теоремы.

В случае β) согласно теореме I.3.1 существует кольцевая область $U \subset B$, такая, что $\forall p_0 \in U$ траектория L_{p_0} системы (0.1) является спиралью, для которой, скажем, ω-предельным множеством является замкнутая траектория этой же системы $L_0 \subset B$. Тогда $u(p_0) = u\,|_{L_0}$, т. е. $u(p) \equiv \text{const}$ в U, что также противоречит условию 2б) теоремы. □

Следствие 2.1. *Пусть для системы* (0.1) 1) *выполняется условие* 0.1, 2) $V = (X, Y) \in C^1(D)$. *Если при этом* $\exists\, \delta > 0$: $\operatorname{div}\ V(x, y) \equiv 0$ *в* B, *то для системы* (0.1) *точка* O *— центр.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При этих условиях явное уравнение траекторий системы (0.1) в B

$$Y(x, y)dx - X(x, y)dy = 0$$

есть уравнение в полных дифференциалах. Следовательно, в B существует функция $u(x, y)$, такая, что

$$du(x, y) \equiv Y(x, y)dx - X(x, y)dy.$$

Функция $u(x, y)$ есть интеграл системы (0.1) в B, причем а) $u \in C^2(B)$, б) $\exists\, \delta > 0$: $u(x, y) \not\equiv 0$ в любой области $U \subset B$ (иначе O — неизолированная особая точка системы (0.1)).

Таким образом, при условиях следствия для системы (0.1) выполняются условия теоремы 2.1, а потому для нее точка O — центр. □

Пример 2.1.

$$\dot{x} = -y + 2xy - x^3, \quad \dot{y} = x - y^2 + 3x^2 y.$$

Для этой системы O — центр, фокус или центро-фокус, ибо для нее $F(\varphi) \equiv 1 \neq 0\ \ \forall\, \varphi$. Но для нее $\operatorname{div}\ V(x, y) \equiv 0$. Поэтому согласно следствию 2.1 ее особая точка O — центр.

Теорема 2.2 [26]. *Пусть система* (0.1)

1) *удовлетворяет условию* 0.1,

2) *не изменяется при замене* x *на* $-x$ *и* t *на* $-t$ *или при замене* y *на* $-y$ *и* t *на* $-t$. *Тогда для нее особая точка* O *— центр.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности система (0.1) не изменяется при замене y на $-y$ и t на $-t$. Пусть $p_0 = (x_0, 0) \in D$, $p(t, p_0) = (\varphi(t), \psi(t))$, $p(0, p_0) = p_0$, — движение системы, L_{p_0} — его траектория. Если x_0 достаточно мало, то в силу условия 0.1 точка $(\varphi(t), \psi(t))$ как при возрастании, так и при убывании t пересечет полуось $y = 0$, $x < 0$. Пусть $\ell_0 = \{(\varphi(t), \psi(t)),\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$, $t_1 < 0 < t_2$, — начальный виток L_{p_0} вокруг точки O, так что $(\varphi(t_i), \psi(t_i)) = (x_i, 0)$, $x_i < 0$, $i = 1, 2$.

Произведем в системе (0.1) замену y на $-y$ и t на $-t$. При этом сама система не изменится, а ее решение $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ перейдет в ее же решение $x = \varphi(-t), y = -\psi(-t)$, удовлетворяющее тем же начальным данным: $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$.

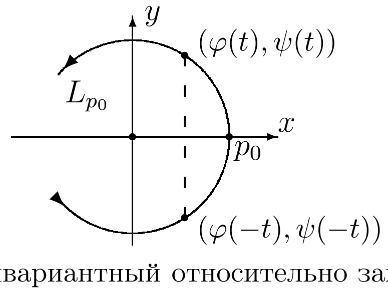

Рис. 2.1. Центр, инвариантный относительно замены y на $-y$ и t на $-t$

По свойству единственности эти решения совпадают: $\varphi(-t) \equiv \varphi(t)$, $\psi(-t) \equiv -\psi(t)$. (рис. 2.1).

Следовательно, виток ℓ_0 симметричен относительно оси $y = 0$, а L_{p_0} есть замкнутая траектория системы. Из этого следует, что при условиях теоремы все траектории системы (0.1), начинающиеся в достаточной близости от точки O, суть замкнутые кривые, окружающие O, т. е. что для нее точка O — центр. □

Пример 2.2.

$$\dot{x} = -y + xy^3 - x^2y, \quad \dot{y} = x + y^2 - xy^2.$$

Это система вида (II.2.1). Для нее $F(\varphi) \equiv 1 \neq 0 \ \forall\, \varphi$, и она не изменяется при замене y на $-y$ и t на $-t$. По теореме 2.2 для нее точка O — центр.

§ 3. Проблема центра и фокуса для особой точки O аналитической системы с $F(\varphi) \neq 0 \ \forall\, \varphi \in R$

Пусть система (0.1) вещественно-аналитична, т. е. имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=m}^{+\infty} P_k(x, y), \ \frac{dy}{dt} = \sum_{k=m}^{+\infty} Q_k(x, y), \tag{3.1}$$

где $\forall\, k \geqslant m \geqslant 1$ P_k, Q_k — формы от x и y степени k с постоянными вещественными коэффициентами, $P_m^2(x, y) + Q_m^2(x, y) \not\equiv 0$, ряды, стоящие в правых частях уравнений системы, сходятся при $|x| < \delta$, $|y| < \delta$, $\delta > 0$. Такую систему кратко называют A_m-системой (термин А. Н. Берлинского). В координатах r, φ, τ система (3.1) принимает следующий вид:

$$\frac{dr}{d\tau} = \sum_{k=0}^{+\infty} G_k(\varphi) r^{k+1}, \ \frac{d\varphi}{d\tau} = \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\varphi) r^k, \tag{3.2}$$

где $\forall\, k \geqslant 0$

$$\begin{pmatrix} G_k(\varphi) \\ F_k(\varphi) \end{pmatrix} = E(\varphi) \begin{pmatrix} P_{m+k}(u) \\ Q_{m+k}(u) \end{pmatrix}, \ E(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$u = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, F_k, G_k — формы от $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ степени $m + k + 1$, $F_0^2(\varphi) + G_0^2(\varphi) \not\equiv 0$; ряды, стоящие в правых частях уравнений (3.2), сходятся в круге $B : r < \delta$ равномерно относительно $\varphi \in \mathrm{R}$.

Пусть для системы (3.1) выполняется следующее условие.

Условие 3.1. Функция F_0 из системы (3.2) обладает свойством: $F_0(\varphi) \neq 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathrm{R}$.

При этом условии согласно теореме II.6.2 для системы (3.1) особая точка O — центр, фокус или центро-фокус, и возникает проблема их различения. Для ее исследования применим метод А. М. Ляпунова, разработанный им для случая $m = 1$.

Разделим почленно первое уравнение системы (3.2) на второе. Получим уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(\varphi) r^{k+1} \equiv H(\varphi, r), \tag{3.4}$$

где, как нетрудно убедиться,

$$h_0(\varphi) = G_0(\varphi) F_0^{-1}(\varphi),$$
$$h_1(\varphi) = (F_0(\varphi) G_1(\varphi) - G_0(\varphi) F_1(\varphi)) F_0^{-2}(\varphi),$$

$$h_2(\varphi) = (F_0^2G_2 - F_0F_1G_1 + G_0F_1^2 - F_0G_0F_2)F_0^{-3}$$

и вообще $\forall\, k \geqslant 0$

$$h_k(\varphi) = \Phi_k(F_0, G_0, \ldots, F_k, G_k)F_0^{-(k+1)}, \tag{3.5}$$

Φ_k — форма степени $k+1$ от своих аргументов и одновременно форма степени $(k+1)(m+1)+k$ от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$; ряд для $H(\varphi, r)$ сходится при $r < \delta$ ($\delta > 0$ — достаточно мало) равномерно относительно $\varphi \in \mathrm{R}$.

Уравнение (3.4) описывает траектории системы (3.2) в круге $B\, :\, r < \delta$ плоскости x, y (в полосе $\Pi\, :\, 0 \leqslant r < \delta,\ |\varphi| < +\infty$ декартовой плоскости r, φ). Оно имеет решение $r(\varphi) \equiv 0,\ \varphi \in \mathrm{R}$. Применяя к уравнению (3.4) (и к его решению $r(\varphi) \equiv 0,\ \varphi \in [0, 2\pi]$) теорему Пуанкаре о разложении [12, теорема 6.2.1′], заключаем, что для него имеет место свойство аналитичности решений по начальным данным: $\exists\, \delta_0 > 0$ такое, что $\forall\, r_0 \in [0, \delta_0)$ решение уравнения (3.4) $r(\varphi, r_0), r(0, r_0) = r_0$, определено на отрезке $[0, 2\pi]$ и представимо рядом по степеням r_0

$$r(\varphi, r_0) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(\varphi) r_0^k, \tag{3.6}$$

где $u_k \in C[0, 2\pi]$ и ряд сходится равномерно относительно $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Из (3.6) при $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ получаем

$$r_0 = r(0, r_0) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0) r_0^k,$$

$$r_1 = r(2\pi, r_0) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(2\pi) r_0^k.$$

Первое из этих равенств дает

$$u_1(0) = 1,\ \ u_k(0) = 0\ \ \forall\, k \geqslant 2. \tag{3.7}$$

Определение 3.1. Для особой точки O системы (3.2) (и (3.1)) и уравнения (3.4)

1) функция $r_1 = r(2\pi, r_0),\ 0 \leqslant r_0 < \delta_0$, называется *функцией последования* на луче $\varphi = 0$;

2) функцию $d(r_0) = r(2\pi, r_0) - r_0 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k r_0^k$, где $\alpha_1 = u_1(2\pi) - 1$, $\forall\, k \geqslant 2\ \alpha_k = u_k(2\pi)$ будем называть *смещением* на луче $\varphi = 0$;

3) числа α_k, $k \in N$, называются *фокусными величинами.*

Теорема 3.1. *Для особой точки* O *системы* (3.1), *удовлетворяющей условию* 3.1, *справедливы следующие утверждения.*

1. *Если все ее фокусные величины* $\alpha_k = 0$, *то* O *— центр.*

2. *Если* $\exists\, k \geqslant 1$*: фокусные величины точки* O $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$, *а* $\alpha_k \neq 0$, *то* O *— фокус. Если при этом* $F_0(\varphi) > 0\ \forall\, \varphi \in \mathrm{R}$, *то фокус* O *устойчив при* $\alpha_k < 0$, *неустойчив при* $\alpha_k > 0$, *а в противном случае — наоборот.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. В этом случае $\exists\, \delta_0 > 0$, такое, что $\forall\, r_0 \in (0, \delta_0)$ решение (3.6) уравнения (3.4) обладает свойством $r(2\pi, r_0) = r_0$, т. е. определяет замкнутую траекторию L_{p_0} системы (3.1), окружающую O (здесь $p_0 = (r_0, 0)$). Следовательно, ее особая точка O — центр.

2. В этом случае для особой точки O системы (3.1) смещение на луче $\varphi = 0$ $d(r_0) = \sum\limits_{i=k}^{+\infty} \alpha_i r_0^i = r_0^k(\alpha_k + o(1))$, $o(1) \to 0$ при $r_0 \to 0$. Поэтому при достаточно малом $\delta_0 > 0$ $\forall\, r_0 \in (0, \delta_0)$ $d(r_0) \neq 0$ и, следовательно, L_{p_0} — незамкнутая траектория системы (3.1). Из доказательства теоремы II.6.2 следует, что в этом случае для системы (3.1) точка O — фокус.

Далее, при $\alpha_k < 0 (> 0)$ $d(r_0) < 0 (> 0)$ в $(0, \delta_0)$. Поэтому если $F_0(\varphi) > 0$ $\forall\, \varphi \in \mathrm{R}$, то согласно теореме II.6.1 $\forall\, r_0 \in (0, \delta_0)$ $L_{p_0}^{+(-)} \to O$ и, следовательно, фокус O устойчив (неустойчив). Если $F_0(\varphi) < 0$ $\forall\, \varphi \in \mathrm{R}$, то будем иметь противоположный результат. □

Следствие 3.1. Для аналитической системы (3.1), удовлетворяющей условию 3.1, точка O — центр или фокус (центро-фокус невозможен).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следует из аналитичности для такой системы функции $d(r_0)$ в точке $r_0 = 0$. □

Коэффициенты $u_k(\varphi)$, $k \geqslant 1$, ряда (3.6), определяющие фокусные величины точки O, могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. Подставляя в уравнение (3.4) его решение (3.6) и приравнивая в левой и правой частях полученного тождества коэффициенты при одинаковых степенях r_0, приходим к следующим линейным дифференциальным уравнениям для функций u_k, $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
u_1' &= h_0(\varphi)u_1, \\
u_2' &= h_0(\varphi)u_2 + h_1(\varphi)u_1^2(\varphi) = h_0(\varphi)u_2 + \Pi_2(h_1, u_1), \\
u_3' &= h_0(\varphi)u_3 + 2h_1(\varphi)u_1u_2 + h_2(\varphi)u_1^3 = \\
&= h_0(\varphi)u_3 + \Pi_3(h_1, u_1, h_2, u_2), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_k' &= h_0(\varphi)u_k + \Pi_k(h_1, u_1, \dots, h_{k-1}, u_{k-1}), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\forall\, k \geqslant 2$ Π_k — полином от своих аргументов с целыми положительными коэффициентами. Последовательно интегрируя эти уравнения при начальных данных (3.7), находим функции $u_k(\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $k \geqslant 1$, а через них и фокусные величины точки O.

В частности, первое уравнение (3.8) дает

$$u_1(\varphi) = \exp \int\limits_0^{\varphi} G_0(\theta)F_0^{-1}(\theta)d\theta,\ \alpha_1 = \exp \int\limits_0^{2\pi} G_0(\varphi)F_0^{-1}(\varphi)d\varphi - 1.$$

Из этого следует: если $\int\limits_0^{2\pi} G_0(\varphi)F_0^{-1}(\varphi)d\varphi \neq 0$, то $\alpha_1 \neq 0$, т. е. точка O — фокус для системы (3.1), что составляет содержание теоремы 1.3.

Теорема 3.2. *Для системы* (3.1) *при условии* 3.1 *и условии п.* 2 *теоремы* 3.1 *точка O остается фокусом при любом изменении в этой системе коэффициентов форм P_i, Q_i, $i \geqslant m + k$, не нарушающих сходимости соответствующих рядов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следует из того, что для системы (3.1), удовлетворяющей условию 3.1, $\forall\, k \geqslant 1$ фокусная величина α_k точки O определяется формами P_i, Q_i, $i < m+k$. Это, в свою очередь, следует из формул (3.3), (3.5), (3.8). □

З а м е ч а н и е 3.1. Можно доказать, что при условиях теоремы 3.2 точка O остается фокусом и для квазиоднородной системы, полученной из системы (3.1) заменой в ней рядов

$$\sum_{i=m+k}^{+\infty} P_i(x,y), \ \sum_{i=m+k}^{+\infty} Q_i(x,y)$$

функциями $\xi,\eta \in C(B)$, $\xi(x,y)\eta(x,y) = o(r^{m+k-1})$ при $r \to 0$, сохраняющими свойство единственности для траектории системы в круге B.

§ 4. Квазилинейная система. Случаи комплексных собственных чисел матрицы A

Рассмотрим снова систему

$$\frac{dp}{dt} = Ap + \zeta(p).$$

Будем предполагать, что в ней A — постоянная матрица с собственными числами $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, а вектор-функция ζ удовлетворяет условию II.2.1 при $m = 1$. Не ограничивая общности, будем считать, что эта система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y + \xi(x,y), \ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y + \eta(x,y), \tag{4.1}$$

где ξ,η удовлетворяют условию II.2.1 при $m = 1$, ибо к этому виду она всегда может быть приведена линейным неособым преобразованием координат. В полярных координатах r,φ система (4.1) выглядит следующим образом:

$$\frac{dr}{dt} = r(\alpha + g(r,\varphi)), \ \frac{d\varphi}{dt} = \beta + f(r,\varphi), \tag{4.2}$$

где функции f,g определяются формулами (II.2.3) и (I.4.3). Сравнивая ее с системой (II.2.2), заключаем, что в ней функция $F(\varphi) \equiv \beta > 0 \,\forall\,\varphi$, а потому для нее согласно теореме II.6.1 точка O — центр, фокус или центро-фокус.

Чтобы уточнить тип точки O, можно применить к системе 4.1 теоремы из § 1, 2. В частности, для нее при $\alpha \neq 0$ согласно любой из теорем 1.1, 1.3 точка O — фокус. Если же $\alpha = 0$ и достаточные признаки фокуса или центра из § 1, 2 к ней не применимы, но в ней функции ξ,η — аналитические в точке O, то к ней для этой цели можно применить метод Ляпунова (§ 3). Благодаря тому, что для системы (4.1) особая точка O — простая, алгоритм Ляпунова для нее значительно упрощается. Проследим его ход в этом случае.

Итак, пусть в системе (4.1) $\alpha = 0$, а $\xi(x,y),\eta(x,y)$ — степенные ряды от x и y, сходящиеся в некотором круге B. Тогда в полярных координатах она примет вид (3.2) при $F_0(\varphi) \equiv \beta$, $G_0(\varphi) \equiv 0$ и $\tau = t$, а в уравнении (3.4) для нее $h_0(\varphi) \equiv 0$ и, как следует из формул (3.5), $\forall\, k \geqslant 1$ $h_k(\varphi)$ — форма степени $3k$ от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Поэтому последовательное интегрирование уравнений (3.8) при начальных данных (3.7) даст следующее: $u_1(\varphi) \equiv 1$, $u_2(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} h_1(\theta)d\theta$ — форма 3-й степени от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, т. е. 2π-периодическая функция,

$$u_3'(\varphi) = 2h_1(\varphi)u_2(\varphi) + h_2(\varphi) \equiv U_3(\varphi) -$$

форма 6-й степени от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$,

$$u_3(\varphi) = \alpha_3 + v_3(\varphi),\ \alpha_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U_3(\varphi)d\varphi,$$

$v_3(\varphi)$ — форма 6-й степени от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Если $\alpha_3 < 0$ (>0), то для системы (4.1) согласно теореме 3.1 O — устойчивый (неустойчивый) фокус. Если же $\alpha_3 = 0$, то, продолжая процесс, получаем

$$u_4'(\varphi) = h_1(u_2^2 + 2u_3) + 3h_2u_2 + h_3 \equiv U_4(\varphi)$$

и $u_4(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} U_4(\theta)d\theta$ — формы 9-й степени от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$,

$$u_5' = U_5(\varphi),\ u_5(\varphi) = \alpha_5 + v_5(\varphi),$$

где $U_5(\varphi)$ и $v_5(\varphi)$ — формы 12-й степени от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$,

$$\alpha_5 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U_5(\varphi)d\varphi,$$

и т. д.

Определение 4.1. Величины $L_k = \alpha_{2k+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, называются *постоянными Ляпунова* особой точки O аналитической системы (4.1) с $\alpha = 0$.

Применительно к системе (4.1) теорема 3.1 детализируется следующим образом.

Теорема 4.1 [21]. *Если в системе* (4.1) $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$), $\beta > 0$, *то для нее особая точка* O *— устойчивый (неустойчивый) фокус. Если же в ней* $\alpha = 0$, $\beta > 0$, ξ, η *— аналитические в точке* O, *то для нее* 1) O *— устойчивый (неустойчивый) фокус, если* $\exists\, k \geqslant 1$*: постоянные Ляпунова точки* O $L_1 = L_2 = \cdots = L_{k-1} = 0$, *а* $L_k < 0 (> 0)$, 2) O *— центр, если* $\forall\, k \geqslant 1$ $L_k = 0$.

Доказательство. Эта теорема вытекает из теоремы 3.1, которая является элементарным обобщением теоремы 4.1. □

Примечание 4.1. Подход к проблеме различения центра и фокуса для аналитической системы (4.1) с $\alpha = 0$, основанный на построении для нее так называемой нормальной формы, излагается в работах [1, с. 19-23; 12, с. 260–262].

Необходимые и достаточные условия того, чтобы точка O была центром для системы

$$\frac{dx}{dt} = -y + P_k(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = x + Q_k(x, y), \quad k \in \{2, 3\},$$

где P_k, Q_k — формы от x и y степени k с произвольными постоянными коэффициентами, приводятся в [1, с. 19]; для случая $k = 2$ они приводятся также в [30, с. 133].

Проблема различения центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний $\dfrac{dx}{dt} = y$, $\dfrac{dy}{dt} = -x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y)$ после более чем 50-летних исследований многих авторов получила свое окончательное решение в работе [28]. Там же описана история вопроса.

П р и м е ч а н и е 4.2. С проблемой центра и фокуса для полиномиальных систем тесно связаны: задача описания центров в терминах элементарных первых интегралов системы, проблема цикличности центра или негрубого фокуса (т. е. верхней оценки числа предельных циклов, которые могут родиться из такой точки при возмущении поля системы в классе векторных полей фиксированной степени), 16-я проблема Гильберта (об оценке сверху максимального числа предельных циклов полиномиального векторного поля степени n).

Представление о методах и результатах исследования этих и смежных проблем можно получить, например, из работ [17, 18, 35, 38–42].

§ 5. Проблема центра и фокуса для A_3-системы

В этом параграфе будем рассматривать систему вида (3.1) при $m = 3$ (A_3-систему), удовлетворяющую условию 3.1. Для нее согласно следствию 3.1 особая точка O — центр или фокус. Исследуем проблему их различения.

Сначала исследуем однородную кубическую систему (т. е. систему вида (II.1.1) при $m = 3$)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{k+l=3} A_{kl} x^k y^l \equiv P_3(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{k+l=3} B_{kl} x^k y^l \equiv Q_3(x,y), \end{aligned} \tag{5.1}$$

A_{kl}, $B_{kl} \in R$, $k,l = \overline{0,3}$, в предположении, что функция $F(\varphi) \equiv Q_3(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - P_3(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi \neq 0 \ \forall\varphi \in R$. Для нее также O — центр или фокус, причем критерий центра указан в § II.1. В силу π-периодичности функций $F(\varphi)$ и $G(\varphi) \equiv P_3(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + Q_3(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi$ он может быть записан в виде

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} F^{-1}(\varphi) G(\varphi) d\varphi = 0. \tag{5.2}$$

Найдем для системы (5.1) коэффициентные условия центра. Этот вопрос трактуется, например, в [1, § 20]. Ниже при его изложении автор следует рукописи, любезно предоставленной ему А. П. Садовским. Сначала найдем коэффициентные условия знакоопределенности функции $F(\varphi)$. Очевидно, что необходимым для этого является условие $A_{03}\,B_{30} < 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что в системе (5.1) $A_{03} = -1$, $B_{30} > 0$. Тогда для нее функция $F(\varphi)$ в случае знакоопределенности обладает свойством $F(\varphi) > 0 \ \forall\varphi \in R$. Но $F(\varphi) \equiv \cos^4\varphi\, N(\mathrm{tg}\,\varphi)$, $N(z) = z^4 + nz^3 + pz^2 + qz + r$, где $n = B_{03} - A_{12}$, $p = B_{12} - A_{21}$, $q = B_{21} - A_{30}$, $r = B_{30} > 0$, а потому $F(\varphi) > 0 \ \forall\varphi \in R \Longleftrightarrow N(z) > 0 \ \forall z \in R$.

Так как дискриминант полинома $N(z)$

$$\begin{aligned} D = {} & 16r(p^2 - 4r)^2 - q^2(4p^3 + 27q^2 - 144pr) + \\ & + 2nq[r(9n^2p - 40p^2 - 96r) - q^2(2n^2 - 9p)] + \\ & + n^2[q^2(p^2 - 6r) - r(4p^3 + 27n^2r - 144pr)], \end{aligned}$$

то из теории уравнений четвертой степени вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.1. $N(z) > 0 \ \forall z \in R \Longleftrightarrow$

1) $D>0$, $8p-3n^2\geqslant 0$ *или*

2) $D>0$, $8p-3n^2<0$, $n^2(3n^2-16p)+16(p^2-4r)\leqslant 0$ *или*

3) $D=0$, $8p-3n^2>0$, $n(n^2-4p)+8q=0$, $n^2(n^2-8p)+$
$+16(p^2-4r)=0$.

Далее будем предполагать, что $N(z)>0\;\forall\, z\in R$ и, следовательно, для системы (5.1) точка O — центр или фокус. Преобразуем для нее критерий центра (5.2).

Из [1, с. 154] следует, что для системы (5.1) $4G(\varphi)+F'(\varphi)=\alpha\cos^2\varphi+2\beta\cos\varphi\sin\varphi+\gamma\sin^2\varphi\equiv G_1(\varphi)$, где $\alpha=3A_{30}+B_{21}$, $\beta=A_{21}+B_{12}$, $\gamma=A_{12}+3B_{03}$. Далее, $G_1(\varphi)\equiv\cos^2\varphi\, M(\operatorname{tg}\varphi)$, $M(z)=\gamma z^2+2\beta z+\alpha$. С учетом этих равенств критерий центра (5.2) для системы (5.1) принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{M(z)}{N(z)}dz=0. \tag{5.3}$$

Найдем для системы (5.1) коэффициентные условия выполнения этого критерия.

Сначала рассмотрим случаи, когда $D>0$.

1) $\alpha=\beta=\gamma=0$. В этом случае равенство (5.3) выполняется.

2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$. Тогда, как следует из теории вычетов,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{M(z)}{N(z)}dz=2\pi i\left(\frac{M(z_1)}{N'(z_1)}+\frac{M(z_2)}{N'(z_2)}\right), \tag{5.4}$$

где z_1, z_2 — корни полинома $N(z)$ с мнимыми частями $\operatorname{Im} z_k>0$, $k=1,2$.

а) Если $M(z_1)=0$, то $M(z_2)\neq 0$ (и наоборот), а потому критерий центра (5.3) в данном случае не выполняется.

б) Пусть результант полиномов $M(z)$ и $N(z)$ $c_0\neq 0$. Пусть $R(\lambda)$ — результант полиномов $N(z)$ и $N'(z)-\lambda M(z)$. Вычисления дают $R(\lambda)=c_0\lambda^4+c_1\lambda^3+c_2\lambda^2+D$, где

$$\begin{aligned}
c_0={}&\alpha^3(\alpha-2\beta n+\gamma n^2-2\gamma p)+\alpha\gamma[-2\alpha\beta(np-3q)+\\
&+\alpha\gamma(p^2-2nq+2r)]+2\alpha\beta\gamma[2\beta(nq-4r)-\gamma(pq-3nr)]+\\
&+4\alpha\beta^2(\alpha p-2\beta q)+\gamma^3[\alpha(q^2-2pr)-2\beta qr+\gamma r^2]+\\
&+4\beta^2r(4\beta^2-2\beta\gamma n+\gamma^2p),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1={}&(4\beta^2+\alpha\gamma)[\alpha(n^2q-4pq+8nr)+\gamma(4npr-8qr-nq^2)]+\\
&+\alpha^2[\alpha(n^3-4np+8q)+2\beta(-n^2p+4p^2-2nq-16r)]+\\
&+\gamma^2[2\beta(pq^2-4p^2r+2nq+16r^2)+\gamma(-q^3+4pqr-8nr^2)]-\\
&-4\beta(2\beta^2+3\alpha\gamma)(n^2r-q^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2={}&\alpha^2[n^2(-p^2+3nq+6r)+2q(9q-7np)+4p(p^2-4r)]-\\
&-2\alpha\beta[n^2(9nr-pq)+4p(pq-8nr)+q(48r-3nq)]-\\
&-2(2\beta^2+\alpha\gamma)[n^2(q^2-3pr)+p(8pr-3q^2)+4r(nq-8r)]+\\
&+2\beta\gamma[np(q^2-4pr)+q(3n^2r-9q^2)+16r(2pq-3nr)]+\\
&+\gamma^2[q^2(6r-p^2)+nq(3q^2-14pr)+2r(2p^3+9n^2r-8pr)].
\end{aligned}$$

Пусть λ_1, λ_2 — корни полинома $R(\lambda)$, при которых корни z_1, z_2 полинома $N(z)$ с $\operatorname{Im} z_k>0$ удовлетворяют соответственно равенствам $N'(z_k)=\lambda_k M(z_k)$, $k=1,2$. Если критерий центра (5.3) выполняется, то согласно (5.4) $1/\lambda_1+1/\lambda_2=0$, т. е. $\lambda_1+\lambda_2=0$, т. е. $c_1=$

0. Следовательно, в случае 2) для выполнения равенства (5.3) необходимо выполнение условий $c_0 \neq 0$, $c_1 = 0$.

Предполагая эти условия выполненными, находим остаток от деления полинома $N(z)$ на полином $N'(z) - \lambda M(z)$. С точностью до числового множителя этот остаток имеет вид

$$\begin{aligned} S(z,\lambda) = z^2[\gamma^2\lambda^2 + 2(4\beta - n\gamma)\lambda + 8p - 3n^2] + \\ + 2z[\beta\gamma\lambda^2 + (2\alpha + \beta n - \gamma p)\lambda - np + 6q] + \alpha\gamma\lambda^2 + \\ + (\alpha n - \gamma q)\lambda - nq + 16r. \end{aligned}$$

Пусть λ_1, $\lambda_2 = -\lambda_1$ — корни биквадратного уравнения $R(\lambda) = 0$; пусть $\forall\, k = 1, 2$ z_k — общий корень полиномов $N(z)$ и $S(z, \lambda_k)$. Тогда равенство (5.3) выполняется, если $\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 > 0$.

Таким образом, при $D > 0$ критерий центра (5.3) для системы (5.1) выполняется лишь при одном из двух следующих условий:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \tag{5.5}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0,\ c_0 \neq 0,\ c_1 = 0,\ \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 > 0, \tag{5.6}$$

где z_1, z_2 — корни полинома $N(z)$, описанные в конце предыдущего абзаца.

Пусть теперь $D = 0$. В этом случае, как показывают вычисления,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{M(z)}{N(z)} dz = 4\pi(8p - 3n^2)^{-3/2}(8\alpha + 4\gamma p - 4\beta n - \gamma n^2),$$

а потому равенство (5.3) выполняется лишь при условии

$$4(2\alpha + \gamma p) - n(4\beta + \gamma n) = 0. \tag{5.7}$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Для системы* (5.1) *с* $A_{03} = -1$, $B_{30} > 0$

1) *точка* $O = (0, 0)$ *— центр или фокус лишь при выполнении какого-либо из условий* 1) – 3) *теоремы* 5.1;

2) *точка* O *— центр* а) *при* $D > 0$ *— лишь тогда, когда выполняется какое-либо из условий* (5.5), (5.6), б) *при* $D = 0$ *— лишь тогда, когда выполняется условие* (5.7).

Теорема 5.3 [15]. *Если для системы* (5.1) *точка* O *— центр или фокус, то эта система линейной неособой заменой фазовых координат может быть приведена к системе вида*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 - y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 + Ax^2y + Mxy^2 + Cy^3, \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $-2 < M - B \leqslant 2$.

Доказательство этой теоремы здесь не приводится.

Следствие 5.1. *Для системы* (5.8) *точка* O *— центр* $\Longleftrightarrow A + C = 0$.

Доказательство. Это следует из теоремы 5.2. □

Рассмотрим теперь систему (3.1) при $m = 3$, удовлетворяющую условию 3.1. Для нее согласно теоремам 3.2, 5.3 и следствию 5.1 O может быть центром лишь в тех случаях, когда она линейной неособой заменой координат может быть преобразована в систему с кубическим приближением вида (5.8) при $C = -A$.

Теорема 5.4. *A_3-система*

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=3}^{+\infty} P_k(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{k=3}^{+\infty} Q_k(x,y), \tag{5.9}$$

кубическое приближение которой имеет вид (5.8) *при* $C = -A$, *заменой координат*

$$\begin{aligned} &x = u + U_2(u,v) + U_3(u,v),\\ &y = v + V_2(u,v) + V_3(u,v),\\ &t = \int\limits_0^\tau (1 + T_1(u,v) + T_2(u,v))\, d\tau, \end{aligned} \tag{5.10}$$

где T_k, U_k, V_k — формы от u, v степени k, $k = \overline{1,3}$, как правило, может быть преобразована в систему вида

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = P_3(x,y) + \sum_{k=6}^{+\infty} X_k(x,y),\\ &\frac{dy}{dt} = Q_3(x,y) + \sum_{k=4}^{+\infty} Y_k(x,y), \end{aligned} \tag{5.11}$$

где P_3, Q_3 те же, что и в (5.9),

$$Y_4(x,y) = Cx^2y^2 + Dxy^3, \quad Y_5(x,y) = Kx^2y^3 + Ny^5,$$

$\forall\, k \geqslant 6$ *X_k, Y_k — формы от x и y степени k.*

Доказательство. Применяем метод неопределенных коэффициентов, а именно подставляем (5.10) в (5.9) и требуем, чтобы в переменных u, v, τ получилась система вида (5.11). Для неизвестных коэффициентов форм T_1, U_2, V_2 и Y_4 получаем алгебраическую линейную неоднородную систему с основным определителем $\Delta_1(A,B,M)$, где Δ_1 — полином 9-й степени. Если $\Delta_1 \neq 0$, то указанные коэффициенты однозначно определяются. После этого для коэффициентов форм T_2, U_3, V_3 (кроме $V_3(1,0)$) и Y_5 получаем аналогичную систему с определителем $\Delta_2(A,B,M)$, где Δ_2 — полином 9-й степени. Если $\Delta_2 \neq 0$, то все эти коэффициенты также однозначно определяются. □

К системе (5.11) для исследования проблемы различения центра и фокуса применяем метод А. М. Ляпунова (§ 3). Коэффициенты соответствующего ей уравнения (3.4) имеют вид

$$\begin{aligned} h_0(\varphi) &= \bigl[A(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + (B+1)\cos^3\varphi\sin\varphi +\\ &\quad +(M-1)\cos\varphi\sin^3\varphi\bigr]\ F^{-1}(\varphi),\\ h_1(\varphi) &= (C\cos\varphi - D\sin\varphi)H(\varphi)\,F^{-2}(\varphi)\cos\varphi\sin^2\varphi,\\ h_2(\varphi) &= (C\cos\varphi - D\sin\varphi)^2 H(\varphi)\,F^{-3}(\varphi)\cos^3\varphi\sin^4\varphi -\\ &\quad -(K\cos^2\varphi + N\sin^2\varphi)H(\varphi)\,F^{-2}(\varphi)\sin\varphi, \end{aligned}$$

где

$F(\varphi) = \cos^4\varphi + (M - B)\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi,$
$H(\varphi) = A\cos^3\varphi + (A\sin\varphi - B\cos\varphi)\cos\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$

Для определения коэффициентов ряда (3.6) имеем уравнения (3.8). Из них последовательно находим функции u_1, u_2, u_3 :

$u_1(\varphi) = \exp\int\limits_0^{\varphi} h_0(t)dt$ — 2π-периодическая функция, ибо равенство $\int\limits_0^{2\pi} h_0(\varphi)d\varphi = 0$ есть необходимое и достаточное условие центра для кубического приближения системы (5.11) и, следовательно, оно выполняется;

$u_2(\varphi) = u_1(\varphi)\int\limits_0^{\varphi} h_1(t)u_1(t)dt$ — 2π-периодическая функция, ибо $u_1(\varphi+\pi) \equiv u_1(\varphi)$, а $h_1(\varphi+\pi) \equiv -h_1(\varphi)$;

$$u_3(\varphi) = u_1(\varphi)\left[\int\limits_0^{\varphi} h_2(t)u_1^2(t)dt + 2\int\limits_0^{\varphi} h_1(t)u_2(t)dt\right] =$$
$$= u_1(\varphi)\int\limits_0^{\varphi} h_2(t)u_1^2(t)dt + u_1^{-1}(\varphi)u_2^2(\varphi).$$

Таким образом, для особой точки O системы (5.11) первые три фокусные величины имеют вид

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \int\limits_0^{2\pi} h_2(\varphi)u_1^2(\varphi)d\varphi,$$

и, следовательно, первое необходимое условие центра $\alpha_3 = 0$. Из вида функций $h_k(\varphi)$, $k = \overline{0,2}$, следует, что α_3 — полином 2-й степени от C, D, K, N (квадратичный по C, D, линейный по K, N,) коэффициенты которого зависят от A, B, M. При значениях параметров системы, для которых $\alpha_3 \neq 0$, точка O — фокус, а при значениях параметров, для которых $\alpha_3 = 0$, вопрос о типе точки O остается открытым. Для его решения требуется либо а) доказать, что при $\alpha_3 = 0$ для точки O системы (5.11) выполняются условия одного из достаточных признаков центра, либо б) найти следующую непериодическую в общем случае функцию $u_k(\varphi)$, вычислить фокусную величину $\alpha_k = u_k(2\pi)$ и рассматривать для нее ту же альтернативу, что и для α_3.

Примечание 5.1. С проблемой центра и фокуса для особой точки O аналитической системы, имеющей в точке O исключительные направления, мы встретимся в § V. 2.

Глава V

Квазилинейные системы с вырожденной линейной частью

В § 1 этой главы рассматривается C^n-гладкая ($n \geqslant 2$) система (1.1), изученная в аналитическом случае еще И. Бендиксоном [33] (см. также монографии [9, 20]). Она исследуется путем k-кратного применения метода растяжения особой точки O в ось $x = 0$ с помощью замен вида $y \to y/x$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. В § 2 рассматривается система (2.1), впервые изученная одновременно и независимо автором [3] и Н. Б. Хаимовым [31]. Для ее исследования применяется общий метод Фроммера, схема которого была предложена в работе [36, § 8], а его детальная разработка произведена автором [6]. Этот метод позволяет полностью выяснить тип Бендиксона изолированной особой точки O достаточно гладкой динамической системы вида (0.3.1) в любом случае, когда последняя имеет хотя бы одну TO-кривую (т. е. с точностью до различения центра и фокуса).

§ 1. Система с одним нулевым собственным числом матрицы A

Рассмотрим систему вида (III.5.1), в которой матрица A имеет собственные числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Линейным неособым преобразованием фазовых координат и заменой времени такая система всегда может быть приведена к системе вида

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x, y),\ \frac{dy}{dt} = y + \eta(x, y), \tag{1.1}$$

где ξ, $\eta \in C(D)$, $D(\subset \mathrm{R}^2)$ — область, $O = (0, 0) \in D$, $\xi(0, 0) = \eta(0, 0) = 0$, $\xi(x, y)$, $\eta(x, y) = o(r)$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$.

Изучим поведение траекторий системы (1.1) в малой окрестности точки O. При этом сначала будем предполагать, что для нее кроме вышеуказанных выполняется следующее условие.

Условие 1.1. Функции $\xi, \eta \in C^n(D),\ n \geqslant 1$.

Линейной частью системы (1.1) в точке O является система

$$\dot{x} = 0,\ \dot{y} = y. \tag{1.1$_0$}$$

Для нее через любую точку $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{R}^2$ проходит движение $x = x_0$, $y = y_0 e^t$, $t \in \mathrm{R}$. Траектории этих движений изображены на рис. 1.1. В частности, все точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathrm{R}$, суть точки покоя системы (1.1$_0$). Стрелки указывают направления движений с возрастанием t.

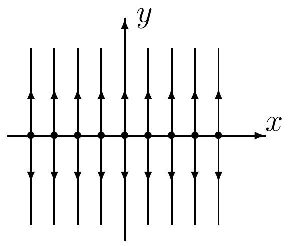

Рис. 1.1. Траектории системы (1.1$_0$)

1.1. Условие изолированности особой точки O

Особые точки системы (1.1) определяются системой конечных уравнений

$$\xi(x, y) = 0,\ y + \eta(x, y) = 0. \tag{1.2}$$

Второе из них согласно теореме существования неявной функции однозначно разрешимо в квадрате $Q = I \times I$, $I = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$ достаточно мало, относительно y, т. е. определяет единственную неявную функцию $y = \psi(x)$, $\psi(0) = 0$. Причем можно считать, что эта функция определена на I и обладает свойством

$$|\psi(x)| < |x| \text{ при } 0 < |x| < \delta \tag{1.3}$$

(этого всегда можно добиться уменьшением δ). Поэтому в Q система (1.2) может быть записана в виде

$$\xi(x,y) = 0, \;\; y = \psi(x), \tag{1.2$'$}$$

где $\psi \in C^n(I)$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Из этого следует, что в Q особые точки системы (1.1) образуют множество

$$\Omega = \{(x,\psi(x))|\, x \in I, \; \xi(x,\psi(x)) = 0\}.$$

Пусть для $\delta_0 \in (0,\delta)$ $I_0 = [-\delta_0,\delta_0]$, $Q_0 = I_0 \times I_0$. Тогда для множества $\Omega_0 = \Omega \cap Q_0$ особых точек системы (1.1) в окрестности Q_0 точки O могут представиться лишь следующие возможности:

1) $\exists\, \delta_0 \in (0,\delta) : \xi(x,\psi(x)) \equiv 0$ в $I_0 \Rightarrow \Omega_0 = \{(x,\psi(x)), x \in I_0\} = \ell_0$ — гладкая кривая (особая линия);

2) $\exists\, \delta_0 \in (0,\delta) : \xi(x,\psi(x)) \neq 0$ при $0 < |x| \leqslant \delta_0 \Rightarrow \Omega_0 = \{O\}$ — точка O;

3) $\forall\, \delta_0 \in (0,\delta) : \xi(x,\psi(x)) \not\equiv 0$ в I_0, но множество $\{x|\, 0 < |x| \leqslant \delta_0, \; \xi(x,\psi(x) = 0\} \neq \emptyset \Rightarrow \Omega_0 \neq \; \ell_0, \; \Omega_0 \neq \{O\}$, т. е. на линии $y = \psi(x)$, $|x| \leqslant \delta_0$, в любой близости от точки O есть как особые точки системы (1.1) $(x_0,\psi(x_0)) \neq (0,0)$, так и обыкновенные точки.

1.2. Приведение системы к виду, удобному для исследования

Пусть $\delta_0 \in (0,\delta/2)$. В силу неравенства (1.3) замкнутая область $U_0 = \{(x,y)|\, |x| \leqslant \delta_0, |y - \psi(x)| \leqslant \delta_0\} \subset Q$. Рассматривая систему (1.1) в области U_0, производим в ней замену координат

$$h \,:\, x = x, \;\; y = \psi(x) + z.$$

Отображение h^{-1} есть C^n-диффеоморфизм области U_0 на квадрат Q_0 плоскости x,z, переводящий $(0,0)$ в $(0,0)$. Чтобы компактно записать систему (1.1) в новых координатах, вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha(x) \;&\equiv\; \xi(x,\psi(x)), \;\; \beta(x) \equiv \alpha(x)\psi'(x), \\ \widetilde{\xi}(x,z) \;&\equiv\; \xi(x,\psi(x)+z) - \xi(x,\psi(x)), \\ \widetilde{\eta}(x,z) \;&\equiv\; \eta(x,\psi(x)+z) - \eta(x,\psi(x)), \\ \widetilde{\zeta}(x,z) \;&\equiv\; \widetilde{\eta}(x,z) - \psi'(x)\widetilde{\xi}(x,z). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Преобразуя функции $\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}$ с помощью леммы Адамара [9, с. 533], записываем их и функцию $\widetilde{\zeta}$ в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi}(x,z) \equiv\;\; & z\xi_0(x,z), \;\; \widetilde{\eta}(x,z) \equiv z\eta_0(x,z), \\ \widetilde{\zeta}(x,z) \equiv\;\; & z(\eta_0(x,z) - \psi'(x)\xi_0(x,z)) \equiv z\zeta_0(x,z), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\xi_0, \; \eta_0, \; \zeta_0 \in C^{n-1}(Q_0)$, $\xi_0(0,0) = \eta_0(0,0) = \zeta_0(0,0) = 0$. С учетом формул (1.4), (1.5) система (1.1) в координатах x,z принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x) + z\xi_0(x,z), \qquad \frac{dz}{dt} = z - \beta(x) + z\zeta_0(x,z), \tag{1.6}$$

причем здесь

$$\begin{gathered} \alpha \in C^n(I_0),\ \alpha(0) = \alpha'(0) = 0, \\ \beta \in C^{n-1}(I_0),\ \beta(0) = 0,\ \beta(x) = o(x) \ \text{при} \ x \to 0, \\ \xi_0, \zeta_0 \in C^{n-1}(Q_0),\ \xi_0(0,0) = \zeta_0(0,0) = 0. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Так как замена h есть диффеоморфизм U_0 на Q_0, квадрат Q_0 есть область единственности для траекторий системы (1.6), а расположение траекторий системы (1.1) в U_0 диффеоморфно таковому для системы (1.6) в Q_0. Особые точки системы (1.6) лежат на линии $z = 0$, $x \in I_0$, и соответствуют значениям x, для которых $\alpha(x) = 0$. В частности, $O = (0,0)$ — особая точка системы (1.6).

Обратимся к изучению поведения траекторий системы (1.6) в малой окрестности ее особой точки O.

1.3. Случай особой линии

Пусть в системе (1.6) $\alpha(x) \equiv 0$. Тогда в ней и $\beta(x) \equiv 0$, а потому для нее $\lambda_0 \equiv \{(x,0), x \in I_0\}$ — особая линия. При этом вне λ_0, т. е. в $Q_0 \setminus \lambda_0$, траектории системы описываются уравнением

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\xi_0(x,z)}{1 + \zeta_0(x,z)} \equiv X(x,z). \tag{1.8}$$

Но согласно (1.7) правая часть этого уравнения $X \in C^{n-1}(Q_0)$, если δ_0 — достаточно мало. Поэтому для него и любая точка $(x_0, 0) \in \lambda_0$ есть точка существования решения $x = x(z)$, $x(0) = x_0$, а при $n \geqslant 2$ и точка единственности.

Из этого следует, что при $n \geqslant 2$ расположение траекторий системы (1.6) в достаточно малой окрестности Q_0 точки O диффеоморфно таковому для системы (1.1_0) (рис. 1.1). Этот диффеоморфизм определяется формулами $x = \chi(y, x_0)$, $z = y$, где $\forall\, x_0 \in I_0$ $\chi(z, x_0)$, $\chi(0, x_0) = x_0$, — решение уравнения (1.8).

При $n = 1$ каждая из точек $(x_0, 0) \in \lambda_0$ может оказаться для уравнения (1.8) точкой неединственности. В таком случае упомянутого диффеоморфизма уже не будет.

1.4. Случай изолированной особой точки O

Пусть $\exists\, \delta_0 \in (0, \delta/2) :\ \alpha(x) \neq 0$ при $0 < |x| \leqslant \delta_0$. Тогда согласно п. 1.1 O — единственная особая точка системы (1.6) в Q_0. Изучим поведение траекторий системы в некоторой малой ее окрестности.

Переходя в системе (1.6) к полярным координатам r, φ, получаем систему $(1.6')$ вида (II.2.2) (мы ее не записываем) с $F(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi$, $G(\varphi) = \sin^2\varphi$. Из этого согласно § II.3 следует, что система (1.6) имеет в точке O лишь следующие исключительные направления: $\varphi = \pm\pi/2$ (обыкновенные), $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (особые). Все они — простые. Для каждого из направлений $\varphi = \varphi_0 = \pm\pi/2$ число $a = F'(\varphi_0)G^{-1}(\varphi_0) = -1$. Следовательно согласно § II.4 оно является для (1.6) простым нормальным направлением 2-го типа. Этим свойством каждое из направлений $\varphi = \pm\pi/2$ обладает и по отношению к системе (1.1), ибо главные (линейные) части этих двух систем (которыми и определяются функции F и G) одинаковы. Но система (1.1) имеет в U_0 класс C^n, $n \geqslant 1$. Поэтому для нее согласно следствию III.1.3 по каждому из направлений $\varphi = \pm\pi/2$ к точке O примыкает единственная O-кривая. Поскольку замена h есть диффеоморфизм U_0 на Q_0, сохраняющий направления $\varphi = \pm\pi/2$, то же самое имеет место и для системы (1.6).

Рассмотрим теперь направления $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Согласно определению II.3.2 эти направления — особые. Их можно заключить разве лишь в особые N-сектора (см. определение II.4.3), проблемы различения для которых находятся еще в стадии исследования. Поэтому вопрос о существовании у системы (1.6) O-кривых, примыкающих к точке O по этим направлениям, будем изучать способом Бендиксона, привлекая и результаты глав II, III.

Пусть $\delta_1 = \min\{1, \delta_0\}$. Рассматривая систему (1.6) в секторах $S^\pm : 0 < \pm x \leqslant \delta_1,\ |z| \leqslant \delta_1|x|$, производим в ней замену переменных

$$h_1 \,:\, x = x,\ \ z = xz_1.$$

Отображение h_1^{-1} есть диффеоморфизм класса C^a (аналитического) секторов $S^\pm$ плоскости x, z соответственно на полуквадраты $Q_1^\pm \,:\, 0 < \pm x \leqslant \delta_1,\ |z_1| \leqslant \delta_1$ плоскости x, z_1. Система (1.6) при замене h_1 переходит в систему

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x) + z_1\xi_1(x, z_1), \quad \frac{dz_1}{dt} = z_1 - \beta_1(x) + z_1\zeta_1(x, z_1), \tag{1.6$_1$}$$

где

$$\xi_1(x, z_1) \equiv x\xi_0(x, xz_1),$$
$$\zeta_1(x, z_1) \equiv \zeta_0(x, xz_1) - z_1\xi_0(x, xz_1) - \alpha_1(x),$$
$$\alpha_1(x) \equiv \alpha(x)/x,\ \beta_1(x) \equiv \beta(x)/x \equiv \alpha(x)\psi'(x)/x$$

и, следовательно, в силу соотношений (1.7) при $I_1 = [-\delta_1, \delta_1]$, $Q_1 = I_1 \times I_1$ имеем

$$\begin{aligned} &\alpha \in C^n(I_1),\ \alpha(0) = \alpha'(0) = 0, \\ &\alpha_1, \beta_1 \in C^{n-1}(I_1),\ \alpha_1(0) = \beta_1(0) = 0, \\ &\xi_1, \zeta_1 \in C^{n-1}(Q_1),\ \xi_1(0, z_1) \equiv \zeta_1(0, z_1) \equiv 0. \end{aligned} \tag{1.7$_1$}$$

Для системы (1.6$_1$) мы должны выяснить вопрос о наличии у нее O-кривых в полуквадратах $Q_1^\pm$. Но эта система определена в полном квадрате Q_1 (подобно тому, как система (1.6) определена в квадрате Q_0), имеет тот же вид, что и система (1.6), и, как видно из (1.7), (1.7$_1$), удовлетворяет тем же условиям, что и система (1.6), исключая, разве лишь, одно: функция $\beta_1(x)$ в ней может не обладать свойством $\beta_1(x) = o(x)$ при $x \to O$. Поэтому система (1.6$_1$) может не иметь того же линейного приближения, что и система (1.6). Чтобы обеспечить для нее это свойство, сузим исходный класс рассматриваемых систем.

Условие 1.2. В системе (1.1) функции $\xi, \eta \in C^n(D)$, $n \geqslant 2$.

При этом условии имеем: в (1.2$'$) $\psi(x) = O(x^2)$, $\psi'(x) = O(x)$ при $x \to 0$; в (1.4) $\alpha(x) = O(x^2)$, $\beta(x) = O(x\alpha(x))$ при $x \to 0$; в (1.6$_1$) $\alpha_1(x) = O(x)$, $\beta_1(x) = O(x^2)$ при $x \to 0$, а потому система (1.6$_1$) есть система вида (1.6) того же класса $C^{n-1}(Q_1)$, члены правых частей которой удовлетворяют тем же условиям, что и соответствующие члены правых частей системы (1.6). Следовательно, при условии 1.2 система (1.6$_1$) обладает всеми отмеченными выше свойствами системы (1.6). В частности, для нее исключительными направлениями в точке O являются лишь направления $\varphi = \pm\pi/2$ (обыкновенные), $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (особые); по каждому из направлений $\varphi = \pm\pi/2$ к точке O примыкает единственная O-кривая (этими кривыми являются для нее полуоси $x = 0,\ z_1 > 0$ и $x = 0,\ z_1 < 0$). Поэтому все остальные O-кривые системы (1.6$_1$), если таковые имеются, должны примыкать к точке O по направлениям $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, т. е. из секторов

$$S_1^\pm \,:\, 0 < \pm x \leqslant \delta_1,\ |z_1| < \delta_1|x|.$$

Далее, при условии 1.2, разлагая функцию $\alpha(x)$ в точке $x = 0$ по формуле Тейлора порядка k, $k \in \{2, \dots, n\}$, и преобразуя остаточный член последней и функции ξ_0, ζ_0 из (1.6) с помощью леммы Адамара, можем записать эти функции в виде

$$\begin{aligned} &\alpha(x) = a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \alpha_k(x)x^k, \\ &\xi_0(x,z) = \xi_{01}(x,z)x + \xi_{02}(x,z)z, \\ &\zeta_0(x,z) = \zeta_{01}(x,z)x + \zeta_{02}(x,z)z, \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $a_2, \dots, a_k \in \mathrm{R}$ — постоянные, $\alpha_k \in C^{n-k}(I_0)$, $\alpha_k(x) = o(x^{n-k})$ при $x \to 0$, $\xi_{01}, \xi_{02}, \zeta_{01}, \zeta_{02} \in C^{n-2}(Q_0)$. Используя эти формулы, получаем следующие представления для функций ξ_1, ζ_1 из (1.6_1):

$$\xi_1(x,z_1) \equiv x^2\widetilde{\xi}_1(x,z_1), \ \zeta_1(x,z_1) \equiv x\widetilde{\zeta}_1(x,z_1), \tag{1.10_1}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{\xi}_1(x,z_1) \equiv \xi_{01}(x,xz_1) + \xi_{02}(x,xz_1)z_1, \\ \widetilde{\zeta}_1(x,z_1) \equiv \zeta_{01}(x,xz_1) + \zeta_{02}(x,xz_1)z_1, \\ \widetilde{\xi}_1, \widetilde{\zeta}_1 \in C^{n-2}(Q_1). \end{gathered}$$

Из (1.10_1) с учетом (1.7_1) следует, что

$$\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\zeta}_1 \in C^{n-1}(Q_1^{\pm}), \ \left|\frac{\partial\widetilde{\xi}_1}{\partial z_1}(x,z_1)\right|, \ \left|\frac{\partial\widetilde{\zeta}_1}{\partial z_1}(x,z_1)\right| \leqslant M \ \text{ в } \ Q_1^{\pm}, \tag{1.11_1}$$

$M > 0$ — постоянная.

Из (1.9) и (1.10_1) вытекает, что при условии 1.2 система (1.6_1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \quad x^2(a_2 + \alpha_2(x) + z_1\widetilde{\xi}_1(x,z_1)), \\ \frac{dz_1}{dt} &= \quad z_1 - \beta_1(x) + xz_1\widetilde{\zeta}_1(x,z_1). \end{aligned} \tag{$1.6_1'$}$$

Пусть $a_2 = \alpha''(0)/2 \neq 0$. Тогда для системы $(1.6_1')$ при достаточно малом $\Delta_1 \in (0, \delta_1]$ прямоугольники $R_1^{\pm}$: $0 < \pm x \leqslant \Delta_1$, $|z_1| \leqslant \delta_1$ будут нормальными областями Фроммера, окружающими направления $z_1 = 0$, $x > 0$ и $z_1 = 0$, $x < 0$ (т. е. аналогами нормальных секторов, записанных в декартовых координатах r, φ, см. § II.4). Ее траектории в областях $R_1^{\pm}$ описываются уравнением

$$x^2\frac{dz_1}{dx} = \frac{z_1 - \beta_1(x) + xz_1\widetilde{\zeta}_1(x,z_1)}{a_2 + \alpha_2(x) + z_1\widetilde{\xi}_1(x,z_1)} \equiv Z_1(x,z_1), \tag{1.12_1}$$

где (при $R_1 = [-\Delta_1, \Delta_1] \times [-\delta_1, \delta_1]$) в силу свойств функций $\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\zeta}_1$, указанных в (1.10_1) и (1.11_1),

$$Z_1 \in C^{n-2}(R_1), \ Z_1 \in C^{n-1}(R_1^{\pm}), \quad a_2\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}(x,z_1) > 0 \ \text{ в } R_1^{\pm}. \tag{1.13_1}$$

Рассмотрим уравнение (1.12_1) сначала в N-области R_1^+. Для этого уравнения (и для системы $(1.6_1')$) она является N_1-областью, если $a_2 > 0$, N_2-областью, если $a_2 < 0$ (см. лемму II.4.1), причем в ней в 1-м случае выполняются условия следствия II.4.1, а во 2-м — условия теоремы III.1.1. Поэтому при $a_2 > 0$ O-кривые системы (1.6_1), примыкающие к точке

O по направлению $z_1 = 0$, $x > 0$, образуют открытый пучок (одноименных в смысле определения I.1.2) O-кривых, а при $a_2 < 0$ $\exists!$ такая кривая. Согласно изложенному эти кривые (и только они) порождают (по закону h_1) O-кривые системы (1.6), примыкающие к точке O из сектора S^+, т. е. по направлению $\varphi = 0$. Таким образом, при $a_2 > 0$ это направление — узловое, а при $a_2 < 0$ — седловое.

Примечание 1.1. Мы применили к уравнению (1.12_1) теорию, развитую в главах II, III для уравнения (II.4.1), левая часть которого $rd\varphi/dr$ отличается от таковой для (1.12_1). Легко убедиться в том, что леммы и теоремы главы II и теорема 1.1 главы III остаются справедливыми и при замене в уравнении (II.4.1) левой части $r\,d\varphi/dr$ на $r^k\,d\varphi/dr$, $k \geqslant 1$.

Рассмотрим теперь уравнение (1.12_1) в N-области R_1^-. Для этого заменим в нем x на $-x$. Эта замена переведет R_1^- в R_1^+, а уравнение (1.12_1) — в уравнение того же вида, в котором роль числа a_2 будет играть число $-a_2$. Следовательно, при $a_2 > 0$ в R_1^- $\exists!$ O-кривая системы (1.6_1), а при $a_2 < 0$ — бесконечно много (открытый пучок) таких кривых. Для системы (1.6) то же самое имеет место в секторе S^-, т. е. для нее направление $\varphi = \pi$ при $a_2 > 0$ — седловое, при $a_2 < 0$ — узловое.

Таким образом, для системы (1.6) при $a_2 > 0$ направление $\varphi = 0$ — узловое, направления $\varphi = \pm\pi/2$ и $\varphi = \pi$ — седловые, т. е. согласно определению I.2.11 структура множества всех ее O-кривых проста и описывается словом П К К К. Поэтому согласно теореме I.2.6 и следствию I.2.3 достаточно малый O-круг B разбивается четырьмя CO-кривыми системы (1.6) — одной узловой и тремя седловыми — на сектора Бендиксона типов P, H, H, P. Объединяя соседние P-сектора в один, заключаем, что в этом случае точка O имеет тип Бендиксона ТБ $= PH^2$, т. е. O — седло-узел с одним параболическим и двумя гиперболическими секторами.

При $a_2 < 0$ имеет место аналогичная ситуация с той лишь разницей, что узловым является направление $\varphi = \pi$, а седловыми — направления $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi/2$.

Пусть $a_2 = 0$. Тогда предыдущие рассуждения относительно уравнения (1.12_1) теряют силу. Чтобы они обрели ее вновь, наложим на систему (1.1) дополнительные ограничения.

Условие 1.3. В системе (1.1) функции ξ, $\eta \in C^n(D)$, $n \geqslant 3$.

Согласно изложенному система (1.6_1) может иметь O-кривые, отличные от полуосей оси Oz_1, лишь в секторах $S_1^\pm\,:\,0 < \pm x \leqslant \delta_1,\ |z_1| \leqslant \delta_1|x|$. Рассматривая ее в этих секторах, производим в ней замену переменных

$$h_2\,:\,x = x,\ z_1 = xz_2.$$

При этом сектора $S_1^\pm$ плоскости x, z_1 переходят соответственно в полуквадраты

$$Q_2^\pm\,:\,0 < \pm x \leqslant \delta_1,\ |z_2| \leqslant \delta_1$$

плоскости x, z_2, а система (1.6_1) — в систему

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x) + z_2\xi_2(x, z_2), \qquad \frac{dz_2}{dt} = z_2 - \beta_2(x) + z_2\zeta_2(x, z_2), \tag{1.6_2}$$

где

$$\beta_2(x) = \beta_1(x)/x = \alpha(x)\psi'(x)/x^2,\ \xi_2(x, z_2) = x\xi_1(x, xz_2),$$
$$\zeta_2(x, z_2) = \zeta_1(x, xz_2) - z_2\xi_1(x, xz_2) - \alpha_1(x),$$

и, следовательно, в силу (1.7_1) при $I_1 = [-\delta_1, \delta_1]$, $Q_2 = I_1 \times I_1 \subset \mathrm{R}^2_{x,z_2}$ и при условиях 1.3 и $a_2 = 0$

$$\begin{gathered} \alpha \in C^n(I_1),\ \alpha(0) = \alpha'(0) = \alpha''(0) = 0, \\ \alpha_1 \in C^{n-1}(I_1),\ \alpha_1(0) = \alpha_1'(0) = 0, \\ \beta_2(x) \in C^{n-2}(I_1),\ \beta_2(0) = \beta_2'(0) = 0, \\ \xi_2, \zeta_2 \in C^{n-1}(Q_2),\ \xi_2(0, z_2) \equiv \zeta_2(0, z_2) \equiv 0. \end{gathered} \tag{1.7$_2$}$$

Так как функции ξ_2, ζ_2 обладают всеми свойствами функций ξ_1, ζ_1, указанными в (1.7_1), то для них справедливы формулы (1.10_2), (1.11_2) (мы их не записываем), получающиеся соответственно из формул (1.10_1), (1.11_1) при увеличении в них на 1 всех нижних индексов у символов $z, \xi, \zeta, \widetilde{\xi}, \widetilde{\zeta}, Q$. Поэтому при $a_2 = 0$ и условии 1.3 систему (1.6_2) (с учетом (1.9)) можно записать в виде

$$\begin{aligned} dx/dt \ &= x^3(a_3 + \alpha_3(x) + z_2\widetilde{\xi}_2(x, z_2)), \\ dz_2/dt \ &= z_2 - \beta_2(x) + xz_2\widetilde{\zeta}_2(x, z_2). \end{aligned} \tag{1.6$_2'$}$$

Пусть $a_3 = \alpha'''(0)/3! \neq 0$. Тогда для системы $(1.6_2')$ при достаточно малом $\Delta_2 \in (0, \delta_1]$ прямоугольники $R_2^\pm : 0 < \pm x \leqslant \Delta_2$, $|z_2| \leqslant \delta_1$ являются нормальными областями Фроммера, окружающими направления $z_2 = 0$, $x > 0$ и $z_2 = 0$, $x < 0$. Ее траектории в $R_2^\pm$ описываются уравнением

$$x^3 \frac{dz_2}{dx} = \frac{z_2 - \beta_2(x) + xz_2\widetilde{\zeta}_2(x, z_2)}{a_3 + \alpha_3(x) + z_2\widetilde{\xi}_2(x, z_2)} \equiv Z_2(x, z_2), \tag{1.12$_2$}$$

правая часть которого согласно (1.10_2) и (1.11_2) обладает свойствами (1.13_2), которые получаются из (1.13_1) при увеличении нижних индексов всех символов (кроме x) на 1. Далее, уравнение (1.12_2) при замене в нем x на $-x$ не изменяется в своих главных членах, определяющих тип N-области (каковыми являются первые слагаемые числителя и знаменателя правой части). Поэтому при $a_3 > 0$ области $R_2^\pm$ являются для него N-областями 1-го типа, а при $a_3 < 0$ — N-областями 2-го типа, причем в первом случае в них выполняются условия следствия II.4.1, а во втором — условия теоремы III.1.1. Следовательно, для системы (1.6_2) направления $z_2 = 0$, $x > 0$ и $z_2 = 0$, $x < 0$ при $a_3 > 0$ являются узловыми, а при $a_3 < 0$ — седловыми. В силу замен h_2 и h_1 для системы (1.6) такими же являются направления $z = 0$, $x > 0$ и $z = 0$, $x < 0$.

Таким образом, согласно определению I.2.11 для системы (1.6) при условии 1.3 и условиях $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$ структура множества всех O-кривых проста и при $a_3 > 0$ характеризуется словом ПКПК, а при $a_3 < 0$ — словом КККК. По теореме I.2.6 круг Бендиксона B разбивается четырьмя ее CO-кривыми на сектора Бендиксона типов P, P, P, P при $a_3 > 0$, типов H, H, H, H при $a_3 < 0$. В первом случае, объединяя все P-сектора в один, получаем для точки O тип Бендиксона ТБ $= P$ (O — узел, рис. 1.2), во втором случае — тип Бендиксона ТБ $= H^4$ (O — седло, рис. 1.3).

Если в (1.9) $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, а в условии 1.1 $n \geqslant 4$, то мы можем продолжить этот процесс. Оформив его как индукцию по $k = 2, 3, \ldots, n$, можем утверждать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть в системе* (1.1) ξ, $\eta \in C^n(D)$, $n \geqslant 2$*; пусть* $y = \psi(x)$, $|x| < \delta$, $\psi(0) = 0$, *— решение уравнения* $y + \eta(x, y) = 0$, $\alpha(x) \equiv \xi(x, \psi(x)) \neq 0$ *при* $0 < x < \delta$. *Пусть* $\exists\, k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, *такое, что*

$$\alpha'(0) = \cdots = \alpha^{(k-1)}(0) = 0,\ \alpha^{(k)}(0) \neq 0.$$

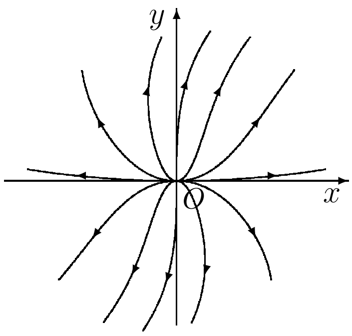

Рис. 1.2. Узел. Б-тип — P

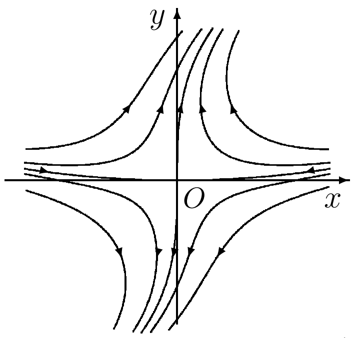

Рис. 1.3. Седло. Б-тип H^4

Тогда для системы (1.1)

1) *точка* O *— узел* (*ее тип Бендиксона* P), *если* k *— нечетное число,* $\alpha^{(k)}(0) > 0$ (рис. 1.2);

2) *точка* O *— седло* (*ее тип Бендиксона* H^4), *если* k *— нечетное число,* $\alpha^{(k)}(0) < 0$ (рис. 1.3);

3) *точка* O *— седло-узел* (*ее тип Бендиксона* PH^2), *если* k *— четное число* (рис. 1.4).

В случае 3) *при* $\alpha^{(k)}(0) > 0$ *луч* $\varphi = 0$ *— узловой, луч* $\varphi = \pi$ *— седловой, а при* $\alpha^{(k)}(0) < 0$ *наоборот.*

Замечание 1.1. Если в системе (1.1) $\xi, \eta \in C^a(D)$ — аналитические и O — ее изолированная особая точка, то для нее число $k(\in N)$, указанное в теореме 1.1, всегда существует.

Доказательство. Действительно, в этом случае $\alpha \in C^a(I)$, и если $\alpha^{(k)}(0) = 0$ $\forall\, k \geqslant 1$, то $a(x) \equiv 0$, т. е. O — неизолированная особая точка. □

Теорема 1.1 распространяется и на случай $n = 1$ в следующей форме.

Теорема 1.1′. *Пусть в системе* (1.1) ξ, $\eta \in C^1(D)$. *Тогда для нее точка* O

1) *узел, если* $x\alpha(x) > 0$ *при* $0 < |x| < \delta'$;

2) *седло, если* $x\alpha(x) < 0$ *при* $0 < |x| < \delta'$;

3) *седло-узел, если* $\alpha(x) > 0$ (< 0) *при* $0 < |x| < \delta'$, *где* $\delta' \in (0, \delta)$ *— фиксированное число.*

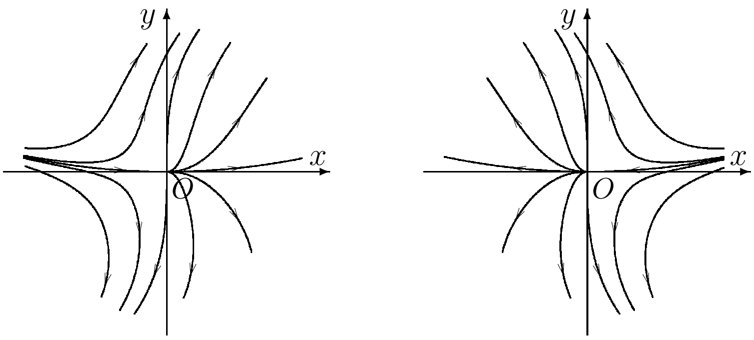

Рис. 1.4. Точка O — седло-узел. Ее тип Бендиксона — PH^2

Доказательство дается в статьях [8, 37]. Оно легко получается также на основании принципа сведения [15, с. 61–63; 25, с. 52–58] с использованием теоремы 3 из [24].

§ 2. Система с двумя нулевыми собственными числами матрицы A

Допустим, что в системе (III.5.1) A — ненулевая матрица, собственные числа которой $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ζ — аналитическая в точке O вектор-функция, исчезающая в точке O вместе со своими частными производными первого порядка. Тогда линейным неособым преобразованием фазовых координат эта система всегда может быть приведена к виду

$$\frac{dx}{dt} = y + \xi(x,y) \equiv X(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta(x,y), \tag{2.1}$$

где функции ξ, η — аналитические в точке $O = (0,0)$, причем их разложения по степеням x и y начинаются членами не ниже второй степени. Будем предполагать, что для нее выполняется также следующее условие.

Условие 2.1. O — изолированная особая точка системы (2.1).

Изучим поведение траекторий системы (2.1) в окрестности точки O.

Лемма 2.1. *С помощью обратимого аналитического в точке* $(0,0)$ *преобразования координат* x, y *и замены времени систему* (2.1) *всегда можно привести к системе вида*

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x,y), \tag{2.2}$$

где функция Y *— аналитическая в точке* $(0,0)$, $Y(0,0) = Y'_x(0,0) = Y'_y(0,0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$y + \xi(x,y) = 0.$$

Оно имеет аналитическое в точке $x = 0$ решение $y = \psi(x)$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Преобразуя систему (2.1) с помощью замены $y = \psi(x) + y_1$, получаем (опуская индекс 1 у новой переменной y_1) систему

$$\frac{dx}{dt} = y + \xi_0(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = \eta_0(x,y), \tag{2.1_0}$$

где

$$\xi_0(x,y) \equiv \psi(x) + \xi(x, \psi(x) + y),$$

$$\eta_0(x,y) \equiv \eta(x, \psi(x) + y) - \psi'(x)(y + \xi_0(x,y))$$

представляются в некоторой окрестности точки $(0,0)$ степенными рядами от x и y без свободных и линейных членов, причем $\xi_0(x,0) \equiv \psi(x) + \xi(x,\psi(x)) \equiv 0$ и, следовательно, $\xi_0(x,y) \equiv y\zeta(x,y)$, где ζ — аналитическая в точке $(0,0)$ функция, $\zeta(0,0) = 0$. Сделав в (2.1_0) замену времени $(1 + \zeta(x,y))dt = dt_1$, приведем ее к виду (2.2) с функцией $Y(x,y) = \eta_0(x,y)(1 + \zeta(x,y))^{-1}$, которая обладает свойствами, указанными в формулировке леммы. □

Далее будем предполагать, что рассматриваемая нами система имеет вид (2.2).

Разлагая $Y(x,y)$ по степеням y, получаем

$$Y(x,y) = f(x) + g(x)y + h(x,y)y^2,$$

$$f(x) = ax^\alpha + a_1x^{\alpha+1} + \cdots, \ \alpha \geqslant 2, \quad a \neq 0,$$

$$g(x) = bx^\beta + b_1x^{\beta+1} + \cdots, \ \beta \geqslant 1, \quad b \neq 0, \ \text{или} \ g(x) \equiv 0,$$

$h(x, y)$ — аналитическая в $(0, 0)$ функция. Наряду с системой (2.2) будем рассматривать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) + g(x)y + h(x, y)y^2}{y} \equiv \frac{Y(x, y)}{y}. \tag{2.3}$$

Оно описывает траектории системы (2.2) в окрестности $(0, 0)$ вне оси $y = 0$.

Замечание 2.1. Будем рассматривать систему (2.2) и уравнение (2.3) в прямоугольнике $R : |x| < \delta$, $|y| < \delta$, $\delta > 0$, предполагая, что в нем ряд для $Y(x, y)$ сходится, а точка $O = (0, 0)$ является единственной особой точкой для (2.2) и (2.3). Не ограничивая общности, будем считать, что в уравнении (2.3) 1) при четном α $a > 0$ (этого всегда можно достичь заменой в (2.3) x на $-x$), 2) при $g(x) \not\equiv 0$ $b > 0$ (этого всегда можно достичь заменой в (2.3) y на $-y$).

Поставим задачу: выявить для системы (2.2) все ее TO-кривые (см. определение II.3.1). Это позволит нам в случае существования таких кривых выяснить для нее тип Бендиксона точки O (см. определение I.2.8), а в случае их отсутствия убедиться в том, что для ее особой точки O возникает проблема различения центра, фокуса и центро-фокуса (см. теорему II.4.4).

Лемма 2.2. *TO-кривые системы* (2.2) *могут примыкать к точке O лишь по направлениям $y = 0$, $x > 0$ и $y = 0$, $x < 0$.*

Доказательство. Если в системе (2.2) перейти к полярным координатам r, φ, то мы получим систему вида (II.2.6) с $F(\varphi) = -\sin^2\varphi$ и $G(\varphi) = 2^{-1}\sin 2\varphi$. Следовательно, исключительными направлениями для нее в точке O (см. определение II.3.2) являются лишь направления $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Только они по лемме II.3.2 могут быть тангенциальными направлениями системы (2.2) в точке O. □

Исключительные направления $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ — особые. В общем случае их нельзя заключить в нормальные сектора (см. определение II.4.2) и, таким образом, нельзя, опираясь на результаты глав II, III, выяснить вопрос о существовании у системы (2.2) O-кривых, примыкающих к точке O по этим направлениям, и, в случае существования таких кривых, вопрос о структуре их множества. В связи с этим для решения поставленной задачи мы применим к системе (2.2) и уравнению (2.3) общий метод Фроммера исследования сложных особых точек автономных систем дифференциальных уравнений, детально изложенный в книге [6].

Лемма 2.3. 1) *Любая TO-кривая системы* (2.2), *будучи достаточно сужена, лежит внутри одной из координатных четвертей плоскости x, y (является O_i-кривой, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$).*

2) *Любая O_i-кривая, $i = 1, 3$, системы* (2.2) *является ее O^--кривой* (*отрицательной полутраекторией*), *а любая O_i-кривая, $i = 2, 4$, — O^+-кривой* (*положительной полутраекторией*).

Доказательство. Из леммы 2.2 следует, что $\forall \varepsilon > 0$ любая TO-кривая системы (2.2), будучи достаточно сужена, лежит в одном из секторов $|y| < \varepsilon|x|$. Из вида функции $f(x)$ следует, что $Y(x, 0) \equiv f(x) \neq 0$ при $0 < |x| < \delta$, $\delta > 0$ достаточно мало, а потому участки $y = 0$, $0 < |x| < \delta$ оси Ox бесконтактны для системы (2.2). Из этих фактов следует утверждение 1) леммы. Утверждение 2) леммы вытекает из вида первого уравнения системы (2.2). □

Следствие 2.1. 1) *Любая O_i-кривая системы* (2.2), $i = \overline{1, 4}$, *представима в виде*

$$y = y(x), \ y(x) \to 0 \ \text{ при } \ x \to 0, \tag{2.4}$$

где $y(x)$ — *решение уравнения* (2.3). Будем называть ее также O_i*-кривой уравнения* (2.3).

2) *Любая* O_i*-кривая уравнения* (2.3), $i = \overline{2,4}$, *переходит в его* O_1*-кривую при замене в нем* а) $x \to -x$, б) $y \to -y$ *или* в) $x \to -x,\ y \to -y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть, например, $L = \{(x(t), y(t)),\, t \in I = (-\infty, 0]\}$, $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ при $t \to -\infty$, — O_1-кривая системы (2.2). Тогда $\dot{x}(t) \equiv y(t) > 0$ $\forall\, t \in I \Rightarrow$ функция $x = x(t)$, $t \in I$, имеет обратную $t = t(x)$, $x \in (0, x_0] \Rightarrow$ функция $\widetilde{y}(x) \equiv y(t(x))$, $x \in (0, x_0]$, — решение уравнения (2.3), $\widetilde{y}(x) > 0\ \forall\, x \in (0, x_0]$, $\widetilde{y}(x) \to 0$ при $x \to 0$. 2) Утверждение 2) очевидно. □

Определение 2.1. O_1- и O_4-кривые уравнения (2.3) будем называть его O_+*-кривыми,* а O_2- и O_3-кривые — O_-*-кривыми.*

Пусть $L\ :\ y = y(x),\ x \in (0, x_0]$, — произвольная O_1-кривая уравнения (2.3). Ее, очевидно, можно представить также в виде

$$y = x^{\nu(x)},\ x \in (0, x_0], \tag{2.5}$$

где $\nu(x) \geqslant 1$, если x_0 достаточно мало. При этом согласно теореме 2.4.1 из [6] существует $\lim\limits_{x\to 0} \nu(x) = \nu_0 \in [1, +\infty]$. (Это нетрудно доказать и непосредственно, сделав в (2.3) замену (2.5) и применив идею доказательства леммы I.4.2 из [6].) Число ν_0 называется *порядком кривизны* O_1*-кривой* L *в точке* O (оно представляет собой порядок малости относительно x решения $y(x)$ уравнения (2.3) при $x \to 0$). O_1-кривая L с порядком кривизны ν_0 обозначается символом $O_1^{(\nu_0)}$*-кривая.* Если $\nu_0 \in [1, +\infty)$, то представление (2.5) $O_1^{(\nu_0)}$-кривой L можно переписать в виде

$$y = u(x)x^{\nu_0},\ u(x) = x^{\alpha(x)}, \quad \alpha(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{2.6}$$

При этом существует $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = u_0 \in [0, +\infty]$ [6, теорема 2.7.1]. (Это нетрудно доказать, сделав в (2.3) замену (2.6).) Число u_0 называется *мерой кривизны* $O_1^{(\nu_0)}$*-кривой* L *в точке* O. Если мера u_0 конечна ($u_0 \in (0, +\infty)$), то представление (2.6) $O_1^{(\nu_0)}$-кривой L можно переписать в виде

$$y = (u_0 + o(1))x^{\nu_0},\ o(1) \to 0 \text{ при } x \to 0. \tag{2.6$'$}$$

O_1-кривая L с порядком кривизны ν_0 и мерой кривизны u_0 обозначается символом $O_1^{(\nu_0, u_0)}$*-кривая*, а парабола $y = u_0 x^{\nu_0}$ называется *соприкасающейся параболой* O_1-кривой L в точке O. При этом пара (ν_0, u_0) называется *характеристической парой уравнения* (2.3).

Таким образом, чтобы выявить все O_1-кривые уравнения (2.3), следует:

1) найти для них все возможные порядки кривизны в точке O;

2) для каждого возможного порядка кривизны $\nu_0 \in [1, +\infty)$ найти все возможные меры кривизны O_1-кривых;

3) изучить вопросы о существовании и о структуре множества O_1-кривых а) с порядком кривизны $\nu_0 = +\infty$, б) с каждым возможным конечным порядком кривизны $\nu_0 \in [1, +\infty)$ и мерами кривизны 0 и $+\infty$, в) со всеми возможными конечными парами порядок–мера (ν_0, u_0), $\nu_0 \in [1, +\infty)$, $u_0 \in (0, +\infty)$.

Чтобы для $i \in \{2, 3, 4\}$ выявить все O_i-кривые уравнения (2.3), достаточно преобразовать i-ю координатную четверть в первую и реализовать для последней описанную программу.

Для отыскания возможных порядков кривизны O_1-кривых уравнения (2.3) будем рассматривать его в прямоугольнике $R_1 : 0 < x < \delta,\ 0 < y < \delta$ и сделаем в нем подстановку

$$y = ux^{\nu}, \tag{2.7}$$

где u — новая неизвестная функция, а $\nu \geqslant 1$ — параметр. Получим уравнение

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(x) + g(x)ux^\nu - [\nu u^2 x^{2\nu-1} - h(x, ux^\nu)u^2 x^{2\nu}]}{x^{2\nu}u},$$

заданное в области $U_1 : 0 < x < \delta, 0 < u < \delta x^{-\nu}$. Отделяя в каждом из трех слагаемых числителя правой части этого уравнения члены с младшей степенью x, запишем его в виде

$$\frac{du}{dx} = \frac{ax^\alpha + \overline{g}(x)x^\nu u - \nu x^{2\nu-1}u^2 + \eta^*(x, u, \nu)}{x^{2\nu}u}, \tag{2.8}$$

где $\overline{g}(x) = bx^\beta$, если $g(x) \not\equiv 0$, $\overline{g}(x) \equiv 0$, если $g(x) \equiv 0$, $\eta^*(x, u, \nu)$ — совокупность членов, в каждом из которых степень x старше хотя бы одной из степеней x в первых трех членах числителя.

При анализе уравнения (2.8) рассмотрим отдельно несколько случаев.

2.1. Случай 1: $g(x) \not\equiv 0$, $\alpha > 2\beta + 1$

2.1.0. Сравним показатели степеней x членов числителя правой части уравнения (2.8) по их величине. Для этого построим на вспомогательной плоскости ν, μ прямые (рис. 2.1)

$$\mu = \alpha, \; \mu = \nu + \beta, \; \mu = 2\nu - 1.$$

Рассмотрим ломаную

$$\mu = \psi(\nu) = \min\{\alpha, \nu + \beta, 2\nu - 1\}, \; 1 \leqslant \nu < +\infty. \tag{2.9}$$

Она называется *ломаной Фроммера* уравнения (2.3). В рассматриваемом случае она состоит из трех простых звеньев (каждое звено образовано одной прямой). Поэтому согласно теореме 2.5.1 из [6] порядками кривизны O_1-кривых уравнения (2.3) могут быть лишь числа $\nu_1 = \beta + 1$ и $\nu_2 = \alpha - \beta$, т. е. абсциссы вершин ломаной Фроммера. Это получится непосредственно, если провести для O_1-кривых уравнения (2.3) упомянутое доказательство существования предела при $x \to 0$ функции $\nu(x)$ из (2.5).

Замечание 2.2. 1) Порядок кривизны $\nu = +\infty$ для O_i-кривых уравнения (2.3), $i = \overline{1, 4}$, невозможен.

2) Возможные конечные порядки кривизны O_i-кривых уравнения (2.3), $i = \overline{2, 4}$, совпадают с таковыми для его O_1-кривых.

3) Если $\nu_0 \in N$ или $\nu_0 = p/q$, $p, q \in N$, q — нечетное, то замена в (2.3) $y = ux^{\nu_0}$ имеет смысл для всех координатных четвертей.

Доказательство. 1) Если $L : y = y(x)$, $x \in I = (0, x_0]$ или $[-x_0, 0)$, — O-кривая уравнения (2.3) с $\nu = +\infty$, то $\forall n \in N$ $y(x)/x^n \to 0$ при $x \to 0$, что для уравнения (2.3) очевидно невозможно.

2) Возможные конечные порядки кривизны O_1-кривых уравнения (2.3) определяются через показатели степеней x и y членов разложения функции $Y(x, y)$. Последние при заменах вида $x \to -x$, $y \to -y$ не изменяются.

3) Справедливость утверждения 3) очевидна. □

Найдем теперь для каждого из возможных порядков кривизны ν_1, ν_2 O-кривых уравнения (2.3) возможные меры кривизны.

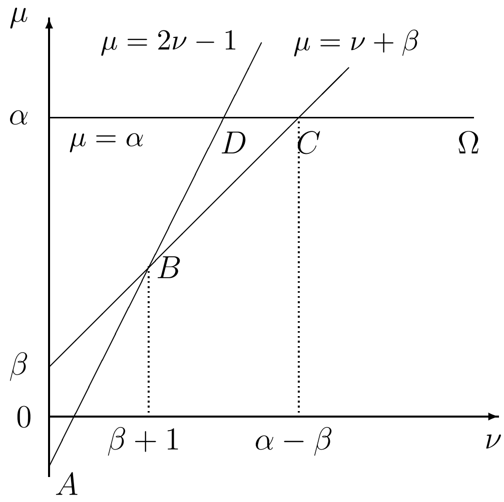

Рис. 2.1. Ломаная Фроммера для уравнения (2.3) в случае 1: $ABC\Omega$.

2.1.1. Рассмотрим порядок $\nu_1 = \beta + 1$. Сделаем в уравнении (2.3) подстановку $y = ux^{\beta+1}$. Получим уравнение (2.8) с $\nu = \beta + 1$. Сократив в нем правую часть на $x^{2\beta+1}$, приведем его к виду

$$x\frac{du}{dx} = \frac{bu - (\beta+1)u^2 + p(x,u)}{u}, \tag{2.10}$$

где функция p аналитична в окрестности оси u, $p(0,u) \equiv 0$. Будучи разрешено относительно dx/du, это уравнение имеет решения $x = 0$, $u < 0$, $u \in (0, u_1)$, $u > u_1$, $u_1 = b(\beta+1)^{-1}$, для всех точек которых имеет место единственность решения задачи Коши. Поэтому предельными при $x \to 0$ точками оси Ou для решений $u(x)$ уравнения (2.10) могут быть лишь точки $u = u_0 = 0$ и $u = u_1$. Число u_1 и будет в рассматриваемом случае единственно возможной конечной мерой кривизны для O-кривых уравнения (2.3) с порядком кривизны $\nu_1 = \beta + 1$. (Здесь термин O-кривая означает: любая O_i-кривая, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.)

Выясним вопрос о существовании у уравнения (2.10) решений вида $u(x) \to 0$ и $u(x) \to \infty$ при $x \to 0$.

При малых x и u уравнение (2.10) принимает вид

$$x\frac{du}{dx} = b + o(1),\ \ o(1) \to 0 \text{ при } x, u \to 0$$

и, следовательно, не имеет решений, обладающих свойством: $u(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Для исследования вопроса о существовании у уравнения (2.10) решений $u(x)$, обладающих свойством $u(x) \to \infty$ при $x \to 0$ и свойством (2.6), запишем его в виде

$$x\frac{du}{dx} = (-(\beta+1) + o(1))u,\ \ o(1) \to 0 \ \text{ при } \ x \to 0,\ \ u \to \infty.$$

Легко видеть, что это уравнение не имеет решений, обладающих указанными свойствами.

Чтобы выяснить вопрос о существовании у уравнения (2.10) решений вида $u(x) \to u_1$ при $x \to 0$, сделаем в нем замену $u = u_1 + v$. Получим уравнение

$$x\frac{dv}{dx} = -(\beta+1)v + q(x,v), \tag{2.11}$$

где функция q — голоморфна в $(0,0)$, $q(0,v)\equiv 0$. Для этого уравнения согласно теореме III.5.1 точка $O=(0,0)$ — седло с сепаратрисными многообразиями $x=0$ и $v=v(x)$, $v(x)=o(x)$ при $x\to 0$. Следовательно, для уравнения (2.10) в каждой из полуплоскостей $x>0$ и $x<0$ $\exists!$ решение вида $u=\left(\frac{b}{\beta+1}+o(1)\right)$, $o(1)\to 0$ при $x\to 0$. Из этого следует, что для уравнения (2.3) в каждой из полуплоскостей $x>0$ и $x<0$ $\exists!$ O-кривая с порядком кривизны $\nu_1=\beta+1$ и мерой кривизны $u_1=b(\beta+1)^{-1}$, т. е. O-кривая вида

$$y=\left(\frac{b}{\beta+1}+o(1)\right)x^{\beta+1},\ o(1)\to 0 \text{ при } x\to 0. \tag{2.12}$$

2.1.2. Рассмотрим теперь возможный порядок кривизны O-кривых уравнения (2.3) $\nu_2=\alpha-\beta$. Чтобы найти соответствующие ему меры кривизны O-кривых, сделаем в (2.3) замену $y=ux^{\alpha-\beta}$. Получим уравнение (2.8) с $\nu=\alpha-\beta$. Сократив его правую часть на x^α, запишем это уравнение в виде

$$x^{\alpha-\beta}\frac{du}{dx}=\frac{a+bu+p(x,u)}{u}, \tag{2.13}$$

где функция p такая же, что и в (2.10). Как и (2.10), оно не имеет решений $u(x)\to 0$ или ∞, которые обладают свойством (2.6), а единственной его особой точкой на оси Ou является точка $u_0=-a/b$. После замены $u=v-a/b$ уравнение (2.13) принимает вид

$$x^{\alpha-2\beta}\frac{dv}{dx}=-\frac{b^2}{a}v(1+\varphi(v))+f(x,v), \tag{2.13$'$}$$

где φ, f — голоморфны в начале координат, $\varphi(0)=0$, $f(0,v)\equiv 0$.

Для уравнения (2.13$'$) мы должны выяснить вопрос о существовании у него решений $v(x)$, обладающих свойством: $v(x)\to 0$ при $x\to 0$. Но для него $O=(0,0)$ — изолированная особая точка с характеристическими корнями $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=-b^2/a\neq 0$. Для ее исследования будем интерпретировать уравнение (2.13$'$) как явное уравнение фазовых траекторий системы

$$\frac{dx}{dt}=-a\,b^{-2}x^{\alpha-2\beta},\quad \frac{dv}{dt}=v(1+\varphi(v))+f(x,v) \tag{2.14}$$

и применим метод, изложенный в § 1.

Не ограничивая общности, будем считать, что для функции f из (2.14) величина $c=f'_x(0,0)=0$ (этого всегда можно достичь заменой в (2.14) $v=v_1-cx$). Тогда (2.14) есть система вида (1.1) с изолированной особой точкой $O=(0,0)$, причем для нее функция $\alpha(x)$ (см. (1.4)) имеет вид $\alpha(x)=-a\,b^{-2}x^{\alpha-2\beta}$. Далее (см. п. 1.4) тангенциальными направлениями в точке O для системы (2.14) являются лишь направления координатных полуосей. Направления полуосей $x=0$, $v>0$ и $x=0$, $v<0$ — седловые (причем для системы (2.14) соответствующие им O-кривые лежат на этих полуосях). Для направлений $v=0$, $x>0$ и $v=0$, $x<0$ согласно теореме 1.1 имеем следующее:

1) при нечетном α и $a<0$ оба они — узловые;

2) при нечетном α и $a>0$ оба они — седловые;

3) если же α — четное число, то при $\alpha<0$ направление $v=0$, $x>0$ — узловое, а направление $v=0$, $x<0$ — седловое, а при $a>0$ — наоборот.

Из этого следует, что для системы (2.14) и уравнения 2.13$'$ в случае 1) точка O — узел, в случае 2) точка O — седло, а в случае 3) точка O — седло-узел с узловой областью $ax<0$. То же самое имеет место для особой точки $(0,-a/b)$ уравнения (2.13).

Таким образом, для уравнения (2.3) O-кривые с порядком кривизны $\nu_0 = \alpha - \beta$ и мерой кривизны $u_0 = -a/b$, т. е. O-кривые вида

$$y = \Big(-\frac{a}{b} + o(1)\Big)\, x^{\alpha-\beta},\ o(1) \to 0 \text{ при } x \to 0,$$

существуют, а именно:

1) если α — нечетное, $a < 0$, то существуют один открытый пучок O_+-кривых и один открытый пучок O_--кривых;

2) если α — нечетное, $a > 0$, то существуют одна O_+-кривая и одна O_--кривая;

3) если α — четное, $a > 0$, то существуют одна O_+-кривая и один открытый пучок O_--кривых.

Случай, когда α — четное, $a < 0$ сводится заменой в (2.3) x на $-x$ к случаю 3).

2.1.3. Из п. 2.1.0 — 2.1.2 следует, что в случае 1 множество всех O-кривых уравнения (2.3) распадается на четыре элементарных пучка (см. определение I.2.9): каждой из характеристических пар $(\beta+1, b(\beta+1)^{-1})$, $(\alpha-\beta, -a/b)$ соответствует один пучок O_+-кривых и один пучок O_--кривых. Пучки, соответствующие первой паре, представляют собой одиночные кривые, а соответствующие второй паре могут быть как одиночными кривыми, так и открытыми пучками O-кривых. При этом для каждого пучка все образующие его O-кривые примыкают к точке O из одной и той же координатной четверти, т.е. являются O_{i_0}-кривыми, $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Пусть это будут пучки W_k, $k = \overline{1,4}$, пронумерованные в порядке следования при обходе точки O в положительном направлении, начиная с пучка O_1-кривых с наибольшим порядком кривизны.

Из результатов п. 2.1.1, 2.1.2 вытекает, что в зависимости от четности−нечетности чисел α и β и (при нечетном α) знака числа a (см. замечание 2.1) эти пучки имеют соответственно следующие типы (см. I.2.3):

1) α — нечетное, $a > 0$: К, К, К, К;

2) α — нечетное $a < 0$, β — четное: П, К, П, К;

3) α — нечетное, $a < 0$, β — нечетное: П, К, К, П;

4) α — четное, β — четное: К, П, К, К;

5) α — четное, β —нечетное: К, К, П, К.

Поэтому согласно теореме I.2.6 сектора S_k, $k = \overline{1,4}$, на которые представители этих пучков разбивают круг Бендиксона B, имеют в этих случаях соответственно следующие типы: 1) H, H, H, H; 2) P, P, P, P; 3) P, H, P, E или $\widetilde{E}$; 4) P, P, H, H; 5) H, P, P, H. Объединяя в каждом случае все смежные сектора типа P (вместе с разделяющими их кривыми) в один P-сектор, получаем согласно следствию I.2.3 тип Бендиксона точки O для этого случая.

Итог исследований случая 1 дает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть для системы* (2.2) $g(x) \not\equiv 0$, $\alpha > 2\beta + 1$. *Тогда расположение ее траекторий в малой окрестности B особой точки O (тип Бендиксона точки O) полностью определяется параметрами α, β, a и b. При этом для локального (в окрестности B точки O) фазового портрета системы имеют место следующие случаи:*

1) *α — нечетное, $a > 0 \Rightarrow$ точка O — седло, ее тип Бендиксона —* H^4 (рис. 2.2);

2) *α — нечетное, $a < 0$, β — четное $\Rightarrow$ точка O — вырожденный узел, ее тип Бендиксона —* P (рис. 2.3);

3) α — *нечетное,* $a < 0$, β — *нечетное* $\Rightarrow$ *точка* O *имеет тип Бендиксона* ТБ $= PHPE$ (рис. 2.4);

4) α — *четное,* β — *четное* $\Rightarrow$ O — *седло-узел, ее тип Бендиксона* — PH^2*;*

5) α — *четное,* β — *нечетное* $\Rightarrow$ O — *седло-узел, ее тип Бендиксона* — H^2P (рис. 2.5).

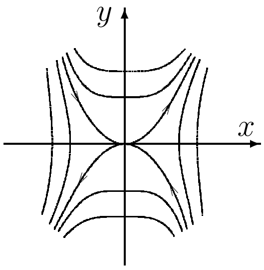

Рис. 2.2. O — седло (H^4)

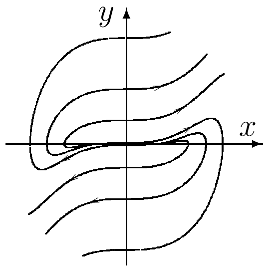

Рис. 2.3. O — вырожденный узел (P)

Локальный фазовый портрет системы для случая 4) получается из рис. 2.5 отражением относительно оси Oy.

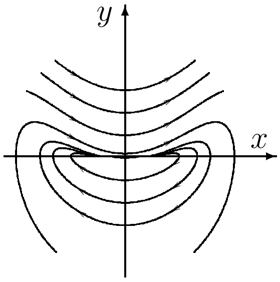

Рис. 2.4. O — точка типа $PHPE$

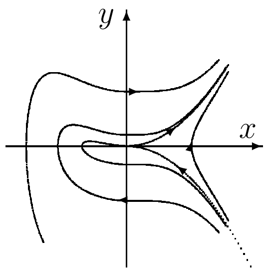

Рис. 2.5. O — седло-узел.
Ее Б-тип — $HPH = H^2P$

2.2. Случай 2: $g(x) \not\equiv 0,\ \alpha = 2\beta + 1$

2.2.0. В этом случае прямая $\nu = \alpha$ (см. рис. 2.1) проходит через точку $B = (\beta + 1, 2\beta + 1)$. Ломаная Фроммера уравнения (2.3) (линия $AB\Omega$) имеет одну вершину B, а потому единственно возможным порядком кривизны его O-кривых является число $\nu_1 = \beta + 1$. Замена координат $y = ux^{\beta+1}$ преобразует уравнение (2.3) в уравнение

$$x\frac{du}{dx} = \frac{a + bu - (\beta + 1)u^2 + p(x, u)}{u}, \tag{2.15}$$

где функция $p(x, u)$ такова же, что и в (2.10). Здесь трехчлен $F(u) \equiv a + bu - (\beta + 1)u^2$:

1) при $d = b^2 + 4a(\beta + 1) > 0$ имеет два простых корня: $u = u_i$, $i = 1, 2$, $u_1 < b(2(\beta + 1))^{-1} < u_2$, $au_1 < 0$, $u_2 > 0$;

2) при $d = 0$ имеет один корень $u = u_0 = b(2(\beta + 1))^{-1} > 0$ кратности $k = 2$;

3) при $d < 0$ не имеет вещественных корней.

Поэтому единственно возможными конечными мерами кривизны O-кривых уравнения (2.3) с порядком кривизны $\nu_1 = \beta + 1$ при $d > 0$ являются числа u_i, $i = 1, 2$, при $d = 0$ — число u_0, при $d < 0$ такие меры отсутствуют. Что касается мер 0 и $\pm\infty$, то они невозможны (это доказывается так же, как и в случае 1). $\forall\, i = \overline{0, 2}$ выясним вопрос о существовании у уравнения (2.15) решений $u(x)$, обладающих свойством: $u(x) \to u_i$ при $x \to 0$.

2.2.1. В подслучае 1), т. е. при $d > 0$, рассмотрим отдельно подподслучаи $a > 0$ и $a < 0$, опираясь на § III.5.

При $a > 0$ $\forall\, i = 1, 2$ особая точка $(0, u_i)$ уравнения (2.15) — седло с сепаратрисными многообразиями $x = 0$ и $u = u_i(x)$, $u_i(0) = u_i$. В силу предшествующих замен инвариантным многообразиям уравнения (2.15) $u = u_i(x)$, $i = 1, 2$, и только им соответствуют $O_\pm$-кривые уравнения (2.3), а именно $O_\pm$-кривые вида

$$y = (u_i + o(1))x^{\beta+1},\ o(1) \to 0 \text{ при } x \to 0, \quad i = 1, 2; \tag{2.16}$$

$\forall\, i = 1, 2$ существует одна O_+-кривая и одна O_--кривая. Напомним, что при $a > 0$ $u_1 < 0 < u_2$.

При $a < 0$ для уравнения (2.15) особая точка $(0, u_1)$ — узел с седловыми направлениями $x = 0$, $u < u_1$ и $u > u_1$ и узловыми направлениями $u = k_1 x + u_1$, $x < 0$ и $x > 0$, $k_1 \in \mathrm{R}$. Решения уравнения (2.15), обладающие свойством $u(x) \to u_1$ при $x \to 0$, порождают $O_\pm$-кривые уравнения (2.3) вида (2.16) с $i = 1$: открытый пучок O_+-кривых и открытый пучок O_--кривых. Особая точка $(0, u_2)$ и при $a < 0$ остается для (2.15) седлом, и для нее справедливы выводы, сделанные при рассмотрении случая $a > 0$.

Таким образом, и при $a < 0$ уравнение (2.3) имеет лишь $O_\pm$-кривые вида (2.16): при $i = 1$ — открытый пучок O_+-кривых и открытый пучок O_--кривых, при $i = 2$ — одну O_+-кривую и одну O_--кривую. Напомним, что при $a < 0$ имеют место неравенства $0 < u_1 < u_2$.

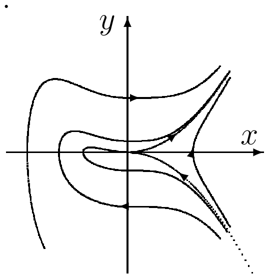

Рис. 2.5. O — седло-узел.
Ее Б-тип — $HPH = H^2P$

Итак, в случае 2 при $d > 0$ множество всех $O_\pm$-кривых уравнения (2.3) распадается на четыре элементарных пучка. Пусть это будут пучки W_k, $k = \overline{1, 4}$, пронумерованные в том же порядке, как и в случае 1; пусть O-кривые L_k, $k = \overline{1, 4}$, — их представители. Для типов этих пучков (К,П) в зависимости от знака a и четности–нечетности β представляются соответственно следующие возможности:

1) $a > 0$: К, К, К, К;

2) $a < 0$, β — четное: П, К, П, К;

3) $a < 0$, β — нечетное: П, К, К, П.

По теореме I.2.6 в этих случаях сектора S_k, $k = \overline{1, 4}$, на которые CO-кривые, порождаемые L_k, $k = \overline{1, 4}$, разбивают круг Бендиксона B, имеют соответственно следующие типы: 1) H, H, H, H, 2) P, P, P, P, 3) P, H, P, E или $\widetilde{E}$, а точка O согласно следствию I.2.3 — следующие типы Бендиксона: 1) H^4, 2) P, 3) $PHPE$.

2.2.2. В подслучае 2), т. е. при $d = 0$, уравнение (2.15) в окрестности особой точки $(0, u_0)$ может быть записано в виде

$$x\frac{du}{dx} = \frac{-(\beta+1)(u-u_0)^2 + p(x,u)}{u}, \tag{2.15$'$}$$

где $p(x, u)$ — та же, что и в (2.15). Это уравнение вида (II.4.1). Для него согласно § II.4 направление $u = u_0$, $x > 0$ есть обыкновенное нормальное направление 3-го типа (типа N_3^-, см. рис. II.4.2, отнесенный к декартовым координатам r, φ). Согласно следствию III.2.2 уравнение (2.15′) имеет полуоткрытый пучок решений $u = u(x)$, обладающих свойством $u(x) \to u_0$ при $x \to +0$. Этот пучок открыт снизу, т. е. со стороны $u < u_0$. То же самое имеет место для направления $u = u_0$, $x < 0$, ибо при замене x на $-x$ уравнение (2.15′) в своих определяющих членах не изменяется.

Уравнение (2.3) в этом случае имеет лишь $O_\pm$-кривые вида

$$y = (u_0 + o(1))x^{\beta+1}, \tag{2.17}$$

полуоткрытый пучок O_+-кривых и полуоткрытый пучок O_--кривых; каждый из них согласно п. I.2.3 разбивается на два пучка: пучок типа К и пучок типа П.

Таким образом, в случае 2 при $d = 0$ множество всех $O_\pm$-кривых уравнения (2.3) распадается на четыре элементарных пучка: W_k, $k = \overline{1,4}$, с представителями L_k, $k = \overline{1,4}$ (нумерация от полуоси $y = 0, x \geq 0$ в направлении возрастания полярного угла φ). Последние порождают в круге Бендиксона B CO-кривые L_{q_k}, $k = \overline{1,4}$, которые (вместе с точкой O) согласно теореме I.2.6 разбивают круг B на сектора Бендиксона S_k, $k = \overline{1,4}$, типы которых определяются типами их боковых стенок.

Из описания пучков W_k, $k = \overline{1,4}$, следует, что они имеют соответственно следующие типы:

1) П, К, П, К, если β — четное,

2) П, К, К, П, если β — нечетное.

Отсюда на основании теоремы I.2.6 заключаем, что сектора S_k, $k = \overline{1,4}$, имеют соответственно следующие типы:

1) P, P, P, P, если β — четное,

2) P, H, P, E или $\widetilde{E}$, если β — нечетное.

Из этого согласно следствию I.2.3 вытекает, что тип Бендиксона точки O — P (она является вырожденным узлом), если β — четное, и $PHPE$, если β — нечетное.

2.2.3. В подслучае 3), т. е. при $d < 0$, уравнение (2.15) не имеет на оси Ou особых точек. Следовательно, для единственно возможного для $O_\pm$-кривых уравнения (2.3) порядка кривизны $\nu_1 = \beta + 1$ нет соответствующих ему конечных мер кривизны; нулевая и бесконечная мера кривизны для него, как и в случаях 1), 2), также невозможны. Отсюда согласно [6, теоремы 2.4.1 и 2.7.1] следует, что в этом случае система (2.2) не имеет TO-кривых. Из этого на основании теоремы II.4.4 и результатов А. М. Ляпунова [21, с. 391–438] вытекает, что для системы (2.2) точка O — центр или фокус.

2.2.4. Суммируя сказанное в п. 2.2.0 — 2.2.3 заключаем, что в случае 2 для системы (2.2) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть в системе* (2.2) $g(x) \not\equiv 0$, $\alpha = 2\beta + 1$. *Тогда расположение ее траекторий в малой окрестности B особой точки O* (*тип Бендиксона точки O*) *определяется* (*с точностью до различения расположений типов центр и фокус*) *параметрами β, a и b. При этом для фазового портрета системы в круге B имеют место следующие случаи:*

1) $a > 0 \Rightarrow$ *точка O — седло, ее тип Бендиксона —* H^4 (рис. 2.2),

2) $-b^2 \leqslant 4a(\beta+1) < 0, \beta$ — *четное* $\Rightarrow$ *точка O — вырожденный узел, ее тип Бендиксона —* P (рис. 2.3),

3) $-b^2 \leqslant 4a(\beta+1) < 0$, β — *нечетное* $\Rightarrow O$ — *точка с эллиптическим сектором, ее тип Бендиксона* — $PHPE$ (рис. 2.4),

4) $4a(\beta+1) < -b^2 \Rightarrow$ *точка* O — *центр* (рис. 2.6) *или фокус* (рис. 2.7 или 2.8); *в последнем случае ее тип Бендиксона* — P.

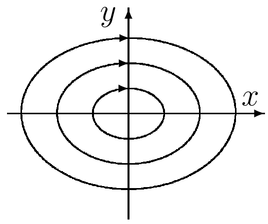

Рис. 2.6. Точка O — центр

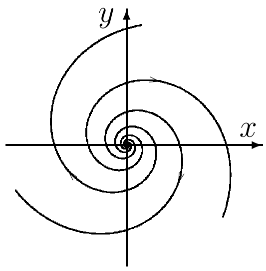

Рис. 2.7. Неустойчивый фокус

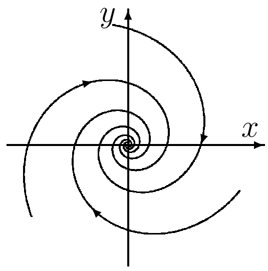

Рис. 2.8. Устойчивый фокус

2.3. Случай 3: $g(x) \not\equiv 0,\ \alpha < 2\beta + 1$ или $g(x) \equiv 0$

2.3.0. В этом случае взаимное расположение трех прямых, изображенных на рис. 2.1, таково: прямая $\mu = \alpha$ проходит ниже точки B. Ломаной Фроммера для уравнения (2.3) является линия $AD\Omega$. Ее единственная вершина — точка $D = ((\alpha+1)/2, \alpha)$. Следовательно, единственно возможным порядком кривизны O-кривых уравнения (2.3) является число $\nu_1 = (\alpha+1)/2$.

2.3.1. Пусть α — нечетное число. Тогда ν_1 — целое число. Чтобы найти соответствующие ему возможные меры кривизны $O_\pm$-кривых уравнения (2.3), преобразуем это уравнение подстановкой $y = ux^{\nu_1}$. Для этого положим в (2.8) $\nu = \nu_1 = (\alpha+1)/2$. Получим уравнение

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2a - (\alpha+1)u^2 + p(x,u)}{2u}, \tag{2.18}$$

где функция $p(x,u)$ такая же, что и в (2.10). Проанализировав его по той же схеме, что и уравнение (2.10), убедимся в том, что для его решений $u(x)$, обладающих свойством (2.6), возможными предельными при $x \to 0$ значениями, т. е. возможными мерами $O_\pm$-кривых уравнения (2.3) с порядком кривизны ν_1, могут быть лишь вещественные нули двучлена

$F(u) = 2a - (\alpha+1)u^2$, т. е. числа

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2a}{\alpha+1}}, \ \ a > 0. \tag{2.19}$$

Им соответствуют простые особые точки уравнения (2.18) $(0, u_i)$, $i = 1, 2$. Согласно § III.5 $\forall\, i = 1, 2$ точка $(0, u_i)$ — седло с сепаратрисными многообразиями $x = 0$ и $u = u_i + o(1)$, $o(1) \to 0$ при $x \to 0$. Следовательно, в случае 2.3.1 уравнение (2.3) при $a > 0$ имеет лишь $O_\pm$-кривые вида

$$y = \pm\sqrt{\frac{2ax^{\alpha+1}}{\alpha+1}} + o\left(|x|^{(\alpha+1)/2}\right) \tag{2.20}$$

по одной в каждой координатной четверти, а при $a < 0$ не имеет $O_\pm$-кривых. В первом случае для него (и для системы (2.2)) точка O — седло, ее тип Бендиксона — H^4, во втором точка O — центр или фокус (в случае фокуса ее тип Бендиксона — P).

2.3.2. Пусть α — четное число, $a > 0$. Тогда ν_1 — дробь с четным знаменателем и замена в уравнении (2.3) $y = ux^{\nu_1}$ имеет смысл лишь при $x \geqslant 0$. Она приводит к уравнению (2.18), в котором $p(x, u)$ — аналитична относительно $\sqrt{x}$ и u в правой полуокрестности оси Ou, $p(0, u) \equiv 0$. Полагая в нем $x = x_1^2$, получаем уравнение

$$x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{2a - (\alpha+1)u^2 + p_1(x_1, u)}{u}, \tag{2.18_1}$$

где $p_1(x_1, u)$ — аналитична в окрестности оси Ou, $p_1(0, u) \equiv 0$. Для этого уравнения в области $x_1 \geqslant 0$ справедливо все сказанное в п. 2.3.1 относительно уравнения (2.18). Следовательно, оно имеет в области $x_1 > 0$ лишь два решения $u(x_1)$, обладающих свойством (2.6), а именно решения $u_i(x_1) \to u_i$ при $x_1 \to +0$, $i = 1, 2$ (см. (2.19)). То же самое (с заменой x_1 на x), очевидно, имеет место для уравнения (2.18). Следовательно, уравнение (2.3) в области $x > 0$ имеет лишь O-кривые (2.20), одну O_1-кривую и одну O_4-кривую.

Чтобы выяснить вопрос о наличии у уравнения (2.3) O_--кривых с порядком кривизны ν_1, сделаем в нем замену $x = -\widetilde{x}$. Получим уравнение $(\widetilde{2.3})$ (мы его не записываем) вида (2.3) с коэффициентом $\widetilde{a} = -a$ в роли a. В уравнении $(\widetilde{2.3})$ сделаем замену $y = u\widetilde{x}^{\nu_1}$. Получим уравнение вида (2.18)

$$\widetilde{x}\frac{du}{d\widetilde{x}} = \frac{2\widetilde{a} - (\alpha+1)u^2 + \widetilde{p}(\widetilde{x}, u)}{2u}, \tag{$\widetilde{2.18}$}$$

где $\widetilde{a} = -a < 0$, а $\widetilde{p}(\widetilde{x}, u)$ аналитична относительно $\sqrt{\widetilde{x}}$ и u в правой полуокрестности оси Ou, $\widetilde{p}(0, u) \equiv 0$. Для него двучлен $\widetilde{F}(u) = 2\widetilde{a} - (\alpha+1)u^2$ не имеет вещественных корней, а потому уравнение $(\widetilde{2.3})$ не имеет O_+-кривых с порядком кривизны ν_1, а уравнение (2.3) не имеет O_--кривых с порядком кривизны ν_1, а, значит, и вообще не имеет O_--кривых.

Таким образом, в случае 2.3.2 для уравнения (2.3) точка O — двухсепаратрисное седло, ее тип Бендиксона — H^2.

Напомним, что при четном α случай $a < 0$ сводится к случаю $a > 0$ заменой в (2.3) x на $-x$.

2.3.3. Из сказанного в п. 2.3.1 и 2.3.2 следует, что в случае 3 уравнение (2.3) имеет лишь $O_\pm$-кривые вида (2.20). В каждой полуплоскости, где $ax^{\alpha+1} > 0$, их две, в каждой полуплоскости, где $ax^{\alpha+1} < 0$, — ни одной. Иными словами, в случае 3 справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть в системе* (2.2) $g(x) \not\equiv 0$, $\alpha < 2\beta + 1$ *или* $g(x) \equiv 0$. *Тогда расположение ее траекторий в достаточно малом O-круге B (тип Бендиксона точки O) определяется (с точностью до различения расположений типов центр и фокус) параметрами α и a. При этом имеют место следующие случаи:*

1) α *— нечетное,* $a > 0 \Rightarrow$ *точка O — седло, ее тип Бендиксона —* H^4 (рис. 2.2);

2) α *— нечетное,* $a < 0 \Rightarrow$ *точка O — центр* (рис. 2.6) *или фокус* (рис. 2.7 или 2.8);

3) α *— четное* $\Rightarrow$ *точка O — двухсепаратрисное седло, ее Б-тип —* H^2 (*для* $a > 0$ рис. 2.9).

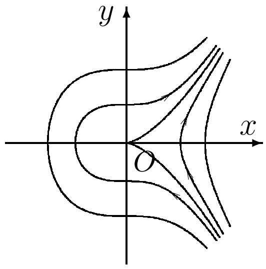

Рис. 2.9. O — двухсепаратрисное седло. Ее Б-тип: H^2

2.4. Проблема различения центра и фокуса

Из теорем 2.1 — 2.3 вытекает, что для системы (2.2) при выполнении одного из двух следующих условий:

1) $\alpha = 2\beta + 1$, $4(\beta + 1)a + b^2 < 0$,

2) α — нечетное, $a < 0$, $\alpha < 2\beta + 1$ или $g(x) \equiv 0$

(и только в этих случаях) особая точка O является центром или фокусом. Следовательно, и для системы (2.1) при соответствующих условиях O — центр или фокус. Но в разложении функции $Y(x, y)$ из (2.2) по степеням y (см. доказательство леммы 2.1)

$$f(x) \equiv \eta(x, \psi(x)), \quad \varphi(x) \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, \psi(x)) + \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, \psi(x)).$$

С учетом этого легко получить следующий критерий А.М. Ляпунова монодромности особой точки O системы (2.1).

Теорема 2.4 [1. с. 116; 21, с. 440]. *Для системы* (2.1) *точка O является центром или фокусом лишь при выполнении следующих условий:*

$$\eta(x, \psi(x)) \equiv ax^{2n+1} + a_1 x^{2n+2} + \ldots\,,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, \psi(x)) + \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, \psi(x)) \equiv bx^n + b_1 x^{n+1} + \ldots\,,$$

$$n \in N,\ a, b, a_1, b_1, \ldots \ \text{— постоянные,}\ 4(n+1)a + b^2 < 0,$$

где $y = \psi(x)$ — решение уравнения $y + \xi(x, y) = 0$, $\psi(0) = 0$.

Для системы (2.1), удовлетворяющей условиям теоремы 2.4, А. М. Ляпунов [21, с. 391–438] разработал способ построения функции последования на луче $y = 0$, $x \geqslant 0$, ввел в употребление фокусные величины точки O, сформулировал критерий центра: *точка O — центр, если все ее фокусные величины равны нулю, фокус — в противном случае.* А. П. Садовский (см., например, [1, с. 121–133]) разработал для нее аппарат формальных интегралов, позволяющий привлечь для вычисления фокусных величин точки O мощные методы компьютерной алгебры.

Рассмотрим полиномиальную систему вида (2.1)

$$\frac{dx}{dt} = y + P_{2n+1}(x, y),\ \frac{dy}{dt} = Q_{2n+1}(x, y), \tag{2.21}$$

где $n \in N$, P_{2n+1}, Q_{2n+1} — формы от x и y степени $2n+1$. Согласно теореме 2.4 для этой системы при $Q_{2n+1}(1, 0) < 0$ (и только при этом условии) точка 0 — центр или фокус. Проблема их различения к настоящему времени решена для $n = 1$, 2 и 3. Для случая $n = 1$ ее решил автор [2], для случая $n = 2$ — А. П. Садовский [27], для случая $n = 3$ — А. П. Садовский и В. А. Цикалюк, преодолев колоссальные вычислительные трудности. Последний результат с разрешения его авторов впервые публикуется ниже.

Чтобы сформулировать для особой точки O системы (2.21) при $n = 1, 2, 3$ критерии центра в простейшей форме, будем предполагать, что для этой системы выполняется следующее условие.

Условие 2.2. В системе (2.21)

$$P_{2n+1}(x, 0) \equiv 0, \quad Q_{2n+1}(1, 0) = -1.$$

Это условие не ограничивает общности, ибо его выполнение всегда может быть обеспечено применением к системе (2.21) линейного неособого преобразования (см., например, [1, с. 117 и 125]).

Теорема 2.5. 1. *Для системы*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + Ax^2y + Bxy^2 + Cy^3, \\ \frac{dy}{dt} &= -x^3 + Ix^2y + Kxy^2 + Ly^3 \end{aligned} \tag{2.21_1}$$

точка O — центр $\Longleftrightarrow I = B + 3L = L(A + K) = 0.$

2. *Для системы*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + Ax^4y + Bx^3y^2 + Cx^2y^3 + Dxy^4 + Ey^5, \\ \frac{dy}{dt} &= -x^5 + Ix^4y + Kx^3y^2 + Lx^2y^3 + Mxy^4 + Ny^5 \end{aligned} \tag{2.21_2}$$

точка O — центр лишь при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} &I = B + L = 2L(2A + K) + 3(D + 5N) = 0, \\ &L[K(2A + K) + C + 2M] + 3N(2A + K) = 0, \\ &LM(2A + K) + 3N(C + 2M) = L^3(2A + K) = 0. \end{aligned}$$

3. *Для системы*

$$\frac{dx}{dt} = y + Ax^6y + Bx^5y^2 + Cx^4y^3 + Dx^3y^4 + Fx^2y^5 + Gxy^6 + Hy^7,$$

$$\frac{dy}{dt}=-x^7+Ix^6y+Kx^5y^2+Lx^4y^3+Mx^3y^4+Nx^2y^5+Pxy^6+Qy^7 \tag{2.21$_3$}$$

точка O — центр лишь при выполнении следующих условий:

1) $I=0$,
2) $5B+3L=0$,
3) $6L(3A+K)+5(3D+5N)=0$,
4) $6L[K(3A+K)+2(C+M)]+10N(3A+K)+15(G+7Q)=0$,
5) $3L[K^2(3A+K)+2K(C+M)+M(3A+K)+(F+3P)]+$ $+5N[K(3A+K)+2(C+M)]+15Q(3A+K)=0$,
6) $2L^3(3A+K)+15L[KM(3A+K)+2K(C+M)+(2M+P)(3A+K)]+$ $+25N[M(3A+K)+(F+3P)]+150Q(C+M)=0$,
7) $75LP[K(3A+K)+2(C+M)]+30L^2N(3A+K)+$ $+6L^3[3K(3A+K)+4(C+M)]+$ $+125NP(3A+K)+375Q(F+3P)=0$,
8) $10LN(C+M)+4L(C+M)(3KL+5N)+$ $+3ML^2(3A+K)+(3A+K)(3KL+5N)^2=0$,
9) $[54L^5+675PL^3-25(3KL+5N)^3](3A+K)+$ $+675L^2(2KL+5N)(F+3P)=0$,
10) $36L^4(3KL+5N)(3A+K)+[54L^3(4L^2+25P)-50(3KL+5N)^3]\times$ $\times(C+M)-225L[3L^2M+(3KL+5N)^2](F+3P)=0$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказано в статье [2], второе — в статье [27]. Докажем третье утверждение.

Согласно [1, с. 125–129] точка O — центр для системы (2.21$_3$) лишь при условии, что эта система допускает формальный интеграл вида $U(x,y) = 4y^2 + U_8(x,y) + U_{14}(x,y) + \dots$, где $\forall k \in N$ U_{6k+2} — форма от x и y степени $6k+2$. Вычисляя этот интеграл, находим для системы (2.21$_3$) первые десять указанных в формулировке теоремы необходимых условий центра. Докажем их достаточность.

Пусть для системы (2.21$_3$) условия 1) — 10) выполняются. Докажем сначала, что тогда для нее справедливы следующие утверждения А) и Б).

А) $(3A+K)(2KL+5N)L=0$. Допустим противное. Тогда из условий 8), 9), 10), 5) и 6) последовательно находим

$$C+M=\frac{(3A+K)[(3KL+5N)^2+3L^2M]}{6L(2KL+5N)},$$

$$F+3P=-\frac{(3A+K)[54L^5-(3KL+5N)^3+675L^3P]}{675L^2(2KL+5N)},$$

$$M=\frac{KL(3KL+5N)+25N^2}{3L^2},$$

$$Q=\frac{27L^3(2L^2+25P)-(3KL+5N)(3KL+10N)^2}{3375L(2KL+5N)},$$

$$(3A+K)L^3=0,$$

что противоречит допущению.

Б) $(3A+K)L=0$. Допустим противное. Тогда из утверждения А) и условий 8), 9), 10) и 5) последовательно находим

$$2KL+5N=0,\ K^2+3M=0,\ 675P=25K^3-54L^2,\ AK+C=0,$$
$$225FL=25(6A+K)K^2L-1125(3A+K)Q+54L^3.$$

Исключая с помощью этих равенств из условия 6) параметры N, M, P, C и F, получаем $(3A+K)L^3=0$, что противоречит допущению.

Таким образом, при выполнении условий 1) — 10) для системы (2.21_3) могут представиться лишь следующие случаи — а), б), в):

а) $3A+K\neq 0$, $L=0$. Тогда из условий 1), 2), 9), 3), 5) и 4) последовательно находим $I=0$, $B=0$, $N=0$, $D=0$, $Q=0$, $G=0$. При этих условиях система (2.21_3) не изменяется при замене x на $-x$ и t на $-t$. По теореме IV.2.2 для нее точка O — центр;

б) $3A+K=0$, $L=0$. Из условий 1) — 7) последовательно находим $I=0$, $B=0$, $3D+5N=0$, $G+7Q=0$, $(C+M)N=0$, $(F+3P)N+6(C+M)Q=0$, $(F+3P)Q=0$,

$б_1$) $C+M=0$, $F+3P=0$. В этом подслучае для системы (2.21_3) $\partial P_7(x,y)/\partial x+\partial Q_7(x,y)/\partial y\equiv 0$. По следствию IV.2.1 для нее точка O — центр,

$б_2$) $|C+M|+|F+3P|\neq 0$. В этом подслучае $I=B=N=D=Q=G=0$, т. е. имеет место то же, что и в случае а);

в) $3A+K=0$, $L\neq 0$,

$в_1$) $C+M\neq 0$. Из условий 8), 5), 6), 4) и 7) последовательно находим $5N=6AL$, $F+3P=2A(C+M)$, $5Q=-(2A^2+M)L$, $5G=(14A^2-4C+3M)L$, $25P=50A^3-4L^2+25AM$. Но тогда система (2.21_3) равносильна системе

$$\frac{dx}{dt}=y+gg'_y+2(C+M)gy^3+Ry^7,\quad \frac{dy}{dt}=-gg'_x, \tag{2.22}$$

где $g(x,y)=(5x^4+10Ax^2y^2-4Lxy^3-10A^2y^4-5My^4)/10$,
$R=-4A^4-2A^2M+2A^2C+CM+H$.

Переходя в системе (2.22) к координатам y и $u=g(x,y)$ и исключая время t, приходим к уравнению

$$\frac{du}{dy}=-\frac{y+2(C+M)y^3u+Ry^7}{u}.$$

Оно допускает интеграл $U_1(u,y)\equiv u^2+y^2+F_1(u,y^4)$, где функция F_1 голоморфна в точке $(0,0)$. Следовательно, система (2.21_3) в рассматриваемом подслучае допускает голоморфный в $(0,0)$ интеграл $U(x,y)\equiv 4y^2+F(x,y)\not\equiv \mathrm{const}$, а потому для нее по теореме IV.2.1 точка O — центр.

$в_2$) $C+M=0$. В этом подслучае для системы (2.21_3) при условиях 1) — 10) имеют место равенства $5B+3L=0$, $3D+5N=0$, $G+7Q=0$, $F+3P=0$, т. е. $\dfrac{\partial P_7(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_7(x,y)}{\partial y}\equiv 0$, а потому для нее согласно следствию IV.2.1 точка O — центр. □

Отметим, что в каждом из трех утверждений теоремы 2.5 левые части условий центра суть последовательные фокусные величины особой точки O соответствующей системы. Каждая из них вычислена с учетом равенства нулю всех предыдущих. В первом утверждении они откорректированы в сравнении с их видом в [2] с учетом условия 2.2.

Анализ доказательства третьего утверждения теоремы 2.5 позволил его авторам сформулировать также следующую теорему.

Теорема 2.6. *Для системы* (2.21_3) *особая точка* O *является центром тогда и только тогда, когда выполняется одна из следующих трех серий условий*:

1) $I = 3A + K = 5B + 3L = C + M = 3D + 5N = F + 3P = G + 7Q = 0,$
2) $I = B = D = G = L = N = Q = 0,$
3) $I = 3A + K = 5B + 3L = 3D + 5N = D + 2AL =$
$= F + 3P - 2A(C + M) = 25P - 25A(2A^2 + M) + 4L^2 =$
$= 5(G + 7Q) + 4L(C + M) = 5Q + L(2A^2 + M) = 0.$

Примечание 2.1. Система (2.1) класса C^2 рассматривается в статье [37]. Из ее результатов можно вывести заключение о возможных топологических типах расположения траекторий этой системы в малой окрестности особой точки O, но нельзя получить критерии их реализации. Для получения последних, как видно из теорем 2.1 — 2.3, требуется гораздо более детальная информация о правых частях системы.

Заключительное замечание. В данной книге автор ставил своей целью ознакомить читателя с проблемой и основными практическими методами исследования поведения траекторий автономной системы дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности ее изолированной особой точки. Поэтому в ней не излагаются такие важные теоретические вопросы, как линеаризация, метод нормальных форм, принцип сведения. Представление о всем богатстве проблем, методов и результатов локальной качественной теории дифференциальных уравнений можно получить, например, из детального обзора В. И. Арнольда и Ю. С. Ильяшенко “Обыкновенные дифференциальные уравнения"(Динамические системы — 1. Сер. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (Фундаментальные направления). Т. 1. М., ВИНИТИ, 1985. 244 с.).

Указатель литературы

1. *Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск, Изд-во Белорус. ун-та, 1982, 208 с.

2. *Андреев А.Ф.* Решение проблемы центра и фокуса в одном случае // Прикл. мат. и мех. 1953. Т. 17, № 3. С. 333–338.

3. *Андреев А.Ф.* Исследование поведения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки // Вестн. Ленингр. ун-та. 1955, № 8. С. 43–55.

4. *Андреев А.Ф.* Теорема единственности для нормальной области Фроммера второго типа // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 754–757.

5. *Андреев А.Ф.* Усиление теоремы единственности O-кривой в N_2 // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 1. С. 9–10.

6. *Андреев А.Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. Минск, Вышэйшая школа. 1979. 136 с.

7. *Андреев А.Ф.* О проблемах различения для исключительных направлений R^2-системы в особой точке // Нелинейные динамические системы. Вып. 1. СПб., 1997. С. 13–31.

8. *Андреев А.Ф., Пехенько И.В.* О системе с одним нулевым корнем характеристического уравнения. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 5. С. 944–946.

9. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М., Наука, 1966. 568 с.

10. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1984. 272 с.

11. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978. 304 с.

12. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Высшая школа, 1991. 304 с.

13. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М., Наука, 1979. 256 с.

14. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М., Наука, 1998. 288 с.

15. *Вулпе Н.И., Сибирский К.С.* Центроаффинноинвариантные условия наличия центра дифференциальной системы с кубическими нелинейностями // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 6. С. 1297–1301.

16. *Дюлак А.* О предельных циклах. М., Наука, 1980. 160 с.

17. *Ильяшенко Ю.С.* Мемуар Дюлака “О предельных циклах"и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. Вып. 6. С. 41–78.

18. *Ильяшенко Ю.С.* Теоремы конечности для предельных циклов // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. Вып. 2. С. 143–200.

19. *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИЛ., 1958. 476 с.

20. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1961. 388 с.

21. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л. ГИТТЛ, 1950. 472 с.

22. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л. ГИТТЛ, 1949. 550 с.

23. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1970. 280 с.

24. *Пилюгина В.Б.* Поведение траекторий на центральном многообразии системы с одним нулевым корнем // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1907–1908.

25. *Плисс В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М., Наука, 1977. 304 с.

26. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л, ГИТТЛ, 1947. 392 с.

27. *Садовский А.П.* О проблеме центра и фокуса // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 11. С. 2002–2009.

28. *Садовский А.П.* Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 236–244.

29. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2, М., ИЛ, 1954. 416 с.

30. *Сибирский К.С.* Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений. Кишинев, Штиинца, 1982. 168 с.

31. *Хаимов Н.Б.* Исследование уравнения. правая часть которого содержит линейные члены // Ученые записки физ.-мат. ф-та Сталинабад. пед. и уч. ин-та. 1952. Т. 2. № 3.

32. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1970. 720 с.

33. *Bendixson I.* Sur les courbes definies par des equations differetielles // Acta Math., 1901. Bd. 24. S. 1–88. (Перевод главы 1: Успехи мат. наук. 1941. Вып. 9. С. 191–211.)

34. *Dumortier F.* Singularities of vector fields on the plane // J. Differential Equations. 1977. Vol. 23, N 1. P. 53–106.

35. *Dumortier F., Roussarie R., Rousseau C.* Hilbert's 16-th Problem for Quadratic Vector Fields // J. Differential Equations. 1994. Vol. 110, N 1. P. 86–133.

36. *Frommer M.* Die Integralkurven einer gewönlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen // Math Annalen. 1928. Bd. 99. S. 222–272. (Перевод: Успехи мат. наук. 1941. Вып. 9. С. 212–253.)

37. *Keil K.A.* Das qualitative Verhalten der Integralcurven einer gewönlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes // Jahresbericht DMV. 1955. Bd. 57, N 3. S. 111–132.

38. *Lloyd N.G., Pearson J.M.* Computing centre conditions for certain cubic systems // J. Comput. and Appl. Math. 1992. Vol. 40, N 2. P. 323–336.

39. *Mazzi L., Sabatini M.* A characterization of centres via first integrals // J. Different. Equat. 1988. Vol. 76, N 2. P. 222–237.

40. *Romanovskii V.G.* Gröbner Basis Theory for Monoidal Rings and 16-th Hilbert Problem. Mat.-Report N 1996–08. Depart. of Math., Technical Univ. of Denmark.

41. *Zoladek H.* The classification of reversible cubic systems with center // Topological Methods in Nonlinear Analysis. // J. of the Juliusz Schauder Center. 1994, N 1. P. 79–136.

42. *Zoladek H.* Eleven small limit cycles in a cubic vector field // Nonlinearity. 1995. Vol. 8, N 4. P. 843–860.

Основные обозначения

N — натуральный ряд чисел; нормальный сектор

R — действительная числовая ось

$R_+ = [0, +\infty)$, $\quad R_- = (-\infty, 0]$

$R^2 = R \times R$

O — начало декартовой системы координат на плоскости R^2

$p = (x, y)$ — точка плоскости R^2; вектор Op

$|p|$ — евклидова норма вектора p

$B = \{p : |p| < \delta\},\ \delta > 0, \quad C = \partial B, \quad B_0 = B \setminus \{O\}$

Π — полоса $0 \leq r < \delta$ декартовой плоскости r, φ; открытый пучок O-кривых системы

$\varphi(t)$, $t \in I = (\alpha, \beta)$, — решение (движение) системы

$\varphi(t, \tau, p)$, $\varphi(t, p)$ — движения, удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(\tau) = p, \varphi(0) = p$

$I_p = (\alpha_p, \beta_p)$ — максимальный интервал существования движения $\varphi(t, p)$ относительно рассматриваемой области фазового пространства

$\varphi(I, p) = \{\varphi(t, p), t \in I\}$

$L_p = \{\, \varphi(t, p), t \in I_p \,\}$ — траектория движения $\varphi(t, p)$

$L_p^+ = L_p\,|_{t \geq 0}$ ($L_p^- = L_p\,|_{t \leq 0}$) — положительная (отрицательная) полутраектория траектории L_p

A_p, Ω_p — α- и ω-предельные множества траектории L_p

$E, H, P, \widetilde{E}$ — эллиптический, гиперболический, параболический и квазиэллиптический сектора Бендиксона

W — пучок O-кривых системы

K — пучок O-кривых, состоящий из одной кривой; компакт; инвариантное кольцо

$\square$ — конец доказательства

Предметный указатель

Учебное издание

Алексей Федорович Андреев

ВВЕДЕНИЕ В ЛОКАЛЬНУЮ КАЧЕСТВЕННУЮ ТЕОРИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор *Т. Ф. Шпагина*
Оформление обложки *Е. И. Егоровой*

Лицензия ЛР N 040050 от 15. 08. 96 г.
Подписано в печать 15. 02. 01 г. Формат $60 \times 84\ _{1/16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 7,81. Тираж 250 экз. Заказ 85.

Издательство С.-Петербургского университета
199034, Санкт-Петербург. Университетская набережная, 7 / 9.

ЦОП типографии Издательства СПбГУ
199034, Санкт-Петербург, наб. Макарова, 6.