

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2019

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Теория нелинейных колебаний

Аналитические и численные оценки фрактальной размерности вынужденных квазипериодических колебаний в системах управления

Михаил Аникушин*, Фолькер Райтманн†, Андрей Романов‡

Кафедра прикладной кибернетики, Математико-механический факультет,

Санкт-Петербургский государственный университет.

Аннотация

В работе показывается, что в рамках одного результата М. А. Красносельского, И. М. Буркина и В. А. Якубовича о существовании ровно двух почти периодических решений у одного класса возмущенных систем управления с двумя состояниями равновесия можно аналитически получить верхние оценки фрактальной размерности замыкания траектории экспоненциально устойчивого почти периодического решения. Используемый для оценки размерностей подход базируется на предыдущих работах одного из авторов. Далее аналогичный подход используется для изучения вынужденных почти периодических колебаний в системе Чуа в случае, когда невозмущенная система имеет три состояния равновесия. Приводятся численные эксперименты, подтверждающие, что аналитически полученные верхние оценки фрактальной размерности могут достигаться.

*demolishka@gmail.com.

†vreitmann@aol.com.

‡romanov.andrey.twai@gmail.com.

Ключевые слова: почти периодическая функция, система управления, теория размерностей, фрактальная размерность.

Abstract

We consider a class of nonlinear feedback control systems with monotone nonlinearities and several stationary states. If the system is under an almost periodic perturbation, one can obtain conditions for existence of almost periodic oscillations. Our purpose is to estimate the fractal dimension of the trajectory closure of forced almost periodic oscillations obtained by the mentioned way. We show that within the result of I. M. Burkin and V. A. Yakubovich, which extends the result of M. A. Krasnoselskii et al. on the existence of exactly two almost periodic solutions (the stable one and the unstable one) in the case of two stationary states, it is possible to obtain some estimates of the fractal dimension. This estimate depends on some properties of Diophantine approximations for the frequencies of the almost periodic perturbation. We also apply a similar approach to study almost periodic oscillations in the perturbed Chua circuit, where the unperturbed system has three stationary states. We provide some analytical upper estimates of the fractal dimension and some numerical simulations confirming that upper estimates provided can be exact.

Keywords: forced almost periodic oscillation, control system, dimension theory, fractal dimension.

1 Введение

В работе рассматривается класс систем управления в \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + b\varphi(\sigma) + f(t), \\ \sigma = c^*u, \end{cases} \quad (1)$$

где A — гурвицева матрица; b, c — векторы; $\varphi(\cdot)$ — скалярная нелинейность и $f(\cdot)$ — почти периодическое возмущение. Основной вопрос заключается в оценке фрактальной размерности замыкания траектории почти периодических решений системы (1).

С точки зрения динамики, наиболее простой класс почти периодических уравнений (в частности, систем (1)) выделяется с использованием различно-

го рода проявлений метода сильно монотонных операторов (см. [13]). Грубо говоря, правая часть таких систем при подходящем выборе скалярного произведения представляет собой сильно монотонный оператор. В таких условиях уравнение имеет единственное почти периодическое решение, которое, как правило, асимптотически (или экспоненциально) устойчиво в целом. Подобные классы систем, включая эволюционные уравнения в банаховом пространстве, широко изучались многими авторами (см. например [13]). Применительно к системам управления (1) существенный прогресс (с применением частотной теоремы) был проделан В. А. Якубовичем (см. [5]). В рамках метода сильно монотонных операторов К. Наито заметил (см. [14]), что априорные оценки, используемые для доказательства существования почти периодических решений, могут быть также использованы для оценки фрактальной размерности таких колебаний. В дальнейшем один из авторов развил этот подход в [1].

Методы сильной монотонности не позволяют доказывать существование почти периодических решений, если невозмущенная (т. е. с $f(t) \equiv 0$) система (1) имеет более одного состояния равновесия. Для таких систем в монографии [11] М. А. Красносельским и др. был предложен нелокальный, т. е. не основывающийся на идее малого параметра, метод, который опирается на существование инвариантного конуса для операторов сдвига невозмущенной системы. Позже И. М. Буркин и В. А. Якубович развили этот подход в [2]. В настоящей работе мы покажем, что в рамках этого метода наряду с существованием почти периодических решений можно также заполнить оценки фрактальной размерности (см. теоремы 2 и 5).

Для оценки фрактальной размерности вынужденных почти периодических колебаний оказалось полезным понятие диофантовой размерности (см. [1] и раздел 2). В рамках задачи оценки размерностей таких колебаний это понятие позволило выявить теоретико-числовые явления, уже встречавшиеся ранее в динамике. Преимущества такого подхода, по сравнению, например, с оценкой Дуади-Оэстерле (см. [12]), заключается в более точных оценках (ввиду учета специфики почти периодичности) и возможности применения теории для не гладких векторных полей, естественно возникающих в ситуации, когда воздействие $f(\cdot)$ рассматривается как шум.

Структура работы устроена следующим образом. В разделе 2 мы рассмотрим основные понятия, такие как почти периодическая функция, фрактальная и диофантова размерность, спектр Фурье и частотный \mathbb{Z} -модуль почти периодической функции. Далее в разделе 3 мы покажем, что в рамках выше-

упомянутой теоремы Красносельского-Буркина-Якубовича возможно получить оценку диофантовой размерности экспоненциально устойчивого почти периодического решения (теорема 2). В разделе 4 мы докажем подобный результат для возмущенной системы Чуа (теорема 4) и рассмотрим, как с помощью таких оценок можно получить оценки фрактальной размерности для замыкания траектории почти периодического решения (теоремы 4 и 5). В разделе 5 мы приводим результаты численных экспериментов, подтверждающие тот факт, что аналитически полученные оценки фрактальной размерности могут достигаться.

2 Основные понятия

Пусть \mathcal{X} — полное метрическое пространство и $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ — относительно компактное подмножество. Через $N_\varepsilon(\mathcal{Z})$ обозначим наименьшее число открытых шаров радиуса ε , необходимое для покрытия \mathcal{Z} . Величина

$$\overline{\dim}_B \mathcal{Z} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon(\mathcal{Z})}{\ln 1/\varepsilon} \quad (2)$$

называется *фрактальной размерностью* множества \mathcal{Z} (см. [12]).

Рассмотрим теперь непрерывную функцию $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$. Для заданного $\varepsilon > 0$ определим $\mathcal{T}_\varepsilon(u)$ как множество всех ε -почти периодов функции $u(\cdot)$, т. е. таких $\tau \in \mathbb{R}$, что

$$\rho_\infty(u(\cdot + \tau), u(\cdot)) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \rho_{\mathcal{X}}(u(t + \tau), u(t)) \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Подмножество $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если найдется число $L > 0$ такое, что пересечение $\mathcal{T} \cap [a, a + L]$ не пусто при всех $a \in \mathbb{R}$. Функция $u(\cdot)$ называется *\mathcal{X} -почти периодической* (или просто, почти периодической), если множество $\mathcal{T}_\varepsilon(u)$ относительно плотно с некоторым числом $L = L(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon > 0$ (см. [13]). Рассмотрим $l_u(\varepsilon)$ — минимум среди всех таких чисел $L(\varepsilon)$. Величина

$$\mathfrak{Di}(u) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln l_u(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} \quad (4)$$

называется *диофантовой размерностью* $u(\cdot)$ (см. [1]). В дальнейшем нас будет интересовать оценка фрактальной размерности замыкания почти периодической траектории, т. е. множества $\mathcal{M}_u = \text{Cl } u(\mathbb{R})$. Понятие диофантовой размерности оказалось полезным для этой задачи. В частности, благодаря следующей теореме (см. теорему 1 в [1]).

Теорема 1. Пусть \mathcal{X} -почти периодическая функция $u(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Гёльдера* с показателем $\alpha \in (0, 1]$. Тогда

$$\overline{\dim}_B \mathcal{M}_u \leq \mathfrak{D}i(u) + \frac{1}{\alpha}. \quad (5)$$

Пусть теперь $\mathcal{X} = \mathbb{E}$ — банахово пространство (над полем \mathbb{R} или \mathbb{C}) и $u(\cdot)$ есть \mathbb{E} -почти периодическая функция. Тогда ей можно сопоставить (см. [13]) формальный ряд Фурье:

$$u(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} U_k e^{i\lambda_k t}, \quad (6)$$

где $U_k \in \mathbb{E}^{\mathbb{C}}$ и $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Аддитивная подгруппа в \mathbb{R} , порожденная всеми экспонентами Фурье $\{\lambda_k\}$, называется \mathbb{Z} -модулем и обозначается как $\text{mod}_{\mathbb{Z}}(u)$.

Если найдутся числа $\omega_1, \dots, \omega_m \in \mathbb{R}$ такие, что для всех λ_k из (6) имеет место единственное разложение

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^m a_j^{(k)} \omega_j \quad (7)$$

с целочисленными коэффициентами $a_j^{(k)}$, то функция $u(\cdot)$ называется \mathbb{E} -квазипериодической. Можно показать, что это свойство равносильно тому, что найдется непрерывная функция $\Phi_u: \mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{E}$ и рационально независимые числа $\omega'_1, \dots, \omega'_m \in \mathbb{R}$ такие, что выполнено $u(t) = \Phi_u(\omega'_1 t, \dots, \omega'_m t)$. Заметим, что $\omega_j = 2\pi\omega'_j$, $j = 1, 2, \dots$. Будем называть числа $\omega_1, \dots, \omega_m$ *интегральной базой* (или *2 π -частотами*) для экспонент Фурье функции $u(\cdot)$, а числа $\omega'_1, \dots, \omega'_m$ будем называть *1-частотами*.

3 Частотные условия для оценки диофантовой размерности

Рассмотрим систему управления (1), где $\varphi(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$0 \leq \varphi(\sigma)\sigma \leq \mu_0 \sigma^2 \quad (\mu_0 \leq +\infty). \quad (8)$$

В [2] И. М. Буркин и В. А. Якубович, используя метод, предложенный М. А. Красносельским (см. теорему 12.2 В [11]), получили частотные условия

*Т. е. найдутся константы $C > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $\rho(u(t), u(s)) < C|t - s|^\alpha$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$ таких, что $|t - s| < \varepsilon_0$.

(см. ниже) существования ровно двух почти периодических решений у системы (1), причем одно из этих решений экспоненциально устойчиво, а другое — неустойчиво. Мы дополним этот результат следующей теоремой.

Теорема 2. *В рамках предположений (C1)-(C7) ниже для экспоненциально устойчивого почти периодического решения $u(\cdot)$ системы (1) имеет место*

$$\text{mod}_{\mathbb{Z}}(u) = \text{mod}_{\mathbb{Z}}(f). \quad (9)$$

Более того,

$$\mathfrak{Di}(u) \leq \mathfrak{Di}(f). \quad (10)$$

Совпадение частотных \mathbb{Z} -модулей — равенство (9) — можно трактовать как синхронизацию решения $u(\cdot)$ и внешнего возмущения $f(\cdot)$. В частности, оно гарантирует, что экспоненциально устойчивое почти периодическое решение будет квазипериодическим (периодическим), если таким свойством обладает возмущение, причем с теми же (что и возмущение) частотами.

В силу экспоненциальной устойчивости (притяжения) $u(\cdot)$ замыкание (в естественном фазовом пространстве \mathbb{R}^n) его траектории, т. е. множество $\mathcal{M}_u = \text{Cl}u(\mathbb{R})$, можно рассматривать как множество предельных режимов системы[†]. Поэтому интересно изучить свойства этого множества. В нашем случае наличие неравенства (10) позволяет дать оценку фрактальной размерности множества \mathcal{M}_u при дополнительных предположениях на свойства $f(\cdot)$ (см. 5 далее).

Рассмотрим $W(z) = c^*(A - zI)^{-1}b$, т. е. *передаточную функцию* линейной части системы (1). В дальнейшем мы предполагаем, что пара (A, b) вполне управляема[‡]. Сделаем следующие предположения.

- (C1) Матрица A гурвицева, т. е. все ее собственные значения имеют отрицательную вещественную часть.
- (C2) У матрицы A есть ведущее собственное число, т. е. простое вещественное собственное число λ_0 такое, что $\lambda_0 > \text{Re } \lambda_i$, где λ_i — все остальные собственные числа.
- (C3) Найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $\text{Re } \lambda_i < -\varepsilon < \lambda_0$ и выполнено

$$\text{Re } W(i\omega - \varepsilon) > 0 \text{ для } \omega \geq 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega^2 \text{Re } W(i\omega - \varepsilon) > 0.$$

[†]Заметим, что множество моментов возвращения почти периодической траектории в окрестность любой точки из \mathcal{M}_u — относительно плотно.

[‡]Т. е. матрица $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ имеет максимальный ранг.

(C4) Выполнено неравенство $\lim_{z \rightarrow \infty} [-zW(z)] = c^*b \geq 0$.

(C5) Функция $\varphi(\cdot)$ монотонно возрастающая и выпуклая, т. е.

$$\varphi'(\sigma) > 0, \varphi''(\sigma) > 0 \text{ для всех } \sigma \in \mathbb{R},$$

и, кроме того,

$$\varphi'(0) < -W(0)^{-1}.$$

(C6) Следующие пределы существуют:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} = \mu_1, \text{ where } \begin{cases} -W(0)^{-1} < \mu_1 < \mu_0 \ (\mu_0 < +\infty), \\ -W(0)^{-1} < \mu_1 \leq \mu_0 \ (\mu_0 = +\infty); \end{cases}$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} = \mu_2 < -W(0)^{-1}.$$

Из (C1)-(C4) вытекает, что $W(0) < 0$ (см. лемму 1.1. в [2]), что говорит о корректности формулировок условий (C5) и (C6). Положим $\alpha_0 := -W(0) = -(A^{-1}b, c) > 0$. Так как $-A^{-1} = \int_0^\infty e^{As} ds$, то мы получаем $\alpha_0 = \int_0^\infty (e^{As}b, c) ds > 0$. Пусть $\psi(\sigma) := \sigma - \alpha_0\varphi(\sigma)$. В рамках предположений (C5)-(C6) имеется единственная точка максимума функции $\psi(\cdot)$ в σ^+ . Положим $\beta^+ := \psi(\sigma^+)$ и рассмотрим функцию

$$g(t) := \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)} f(s), c \right) ds. \tag{11}$$

Сделаем последнее предположение.

(C7) $\sup_{t \in \mathbb{R}} g(t) < \beta^+$.

Замечание 1. В доказательстве существования экспоненциально устойчивого почти периодического решения метод Красносельского основывается на существовании конуса $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ такого, что семейство операторов e^{As} , $s > 0$, является *сильно положительным* относительно \mathcal{K} (т. е. эти операторы отображают точки \mathcal{K} в его внутренность). Причем условия (C1)-(C4) обеспечивают существование квадратичного одномерного конуса[§] \mathcal{K} , внутренность которого не пересекается с плоскостью $\{(c, x) = 0\}$ (см. лемму 2.2 в [2]). Обозначим через \mathcal{K}^+ ту из двух частей конуса \mathcal{K} , которая лежит в полуплоскости $\{(c, x) \geq 0\}$. Из (C1)-(C4) также имеем $b \in \mathcal{K}^+$. Таким образом, в силу того, что $e^{As}b \in \text{Int } \mathcal{K}$, мы получаем также, что $(e^{As}b, c) \geq 0$.

[§]Квадратичным j -мерным конусом в \mathbb{R}^n называется множество $\{(Pu, u) \leq 0\}$, где симметричная $n \times n$ -матрица P имеет j отрицательных и $n - j$ положительных собственных значений.

Перед тем как приступить к доказательству теоремы 2, нам потребуются несколько вспомогательных утверждений.

Следующая характеристика почти периодических функций известна как теорема Бохнера (см. [13]).

Теорема 3. *Непрерывная ограниченная функция $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ почти периодическая тогда и только тогда, когда множество ее сдвигов $\{u(\cdot + s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $C_b(\mathbb{R}; \mathcal{X})$.*

Пусть $v(\cdot)$ есть \mathbb{E} -почти периодическая функция. Последовательность $\{t_k\} \subset \mathbb{R}$ называется v -возвращающей, если соответствующая последовательность сдвигов $\{v(\cdot + t_k)\}$ сходится равномерно к $v(\cdot)$. Доказательство следующей леммы можно найти в [10].

Лемма 1. *Для двух почти периодических функций $u(\cdot)$ и $f(\cdot)$ следующие условия равносильны:*

1. $\text{mod}_{\mathbb{Z}}(u) \subset \text{mod}_{\mathbb{Z}}(f)$;
2. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\mathcal{T}_{\delta}(f) \subset \mathcal{T}_{\varepsilon}(u)$.
3. Всякая f -возвращающая последовательность содержит u -возвращающую подпоследовательность.

Теперь начнем

Доказательство. [Доказательство теоремы 2] Из доказательства теоремы 12.2 в [11] следует, что экспоненциально устойчивое решение $u(\cdot)$ системы (1) задается формулой[¶]

$$u(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} (b\varphi(\sigma^*(s)) + f(s)) ds, \quad (12)$$

где скалярная почти периодическая функция $\sigma^*(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma^*(t) = \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)} b, c \right) \varphi(\sigma^*(s)) ds + \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)} f(s), c \right) ds, \quad (13)$$

причем $\sigma^*(\cdot)$ — единственное почти периодическое решение (13), которое удовлетворяет условию $\sup_{t \in \mathbb{R}} \sigma^*(t) < \sigma^+$.

[¶]Ниже мы проделаем аналогичное рассуждение при доказательстве теоремы 4.

Перейдем к доказательству включения $\text{mod}_{\mathbb{Z}}(u) \subset \text{mod}_{\mathbb{Z}}(f)$. Пусть $\{t_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, есть некоторая f -возвращающая последовательность, т. е. сдвиги $f(\cdot + t_k)$ сходятся к $f(\cdot)$ равномерно. По теореме Бохнера, найдется подпоследовательность $\{t'_k\} \subset \{t_k\}$ такая, что последовательность $\{\sigma^*(\cdot + t'_k)\}$ сходится к некоторой почти периодической функции $\hat{\sigma}(\cdot)$. Легко видеть, что

$$\sigma^*(t + t'_k) = \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)} b, c \right) \varphi(\sigma^*(s + t'_k)) ds + \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)} f(s + t'_k), c \right) ds. \quad (14)$$

В силу того, что $\varphi(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и $\sigma^*(\cdot)$ ограничена, последовательность $\{\sigma^*(\cdot + t'_k)\}$ сходится к решению уравнения (13), причем $\sup_{t \in \mathbb{R}} \hat{\sigma}(t) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sigma^*(t) < \sigma^+$. Таким образом, из вышеупомянутой единственности следует $\hat{\sigma} = \sigma^*$ и, как следствие, последовательность $\{t'_k\}$ является σ^* -возвращающей. Таким образом, $\text{mod}_{\mathbb{Z}}(\sigma^*) \subset \text{mod}_{\mathbb{Z}}(f)$. Правая часть формулы (12) при t замененном на $t + t'_k$, что есть $u(t + t'_k)$, сходится равномерно (по аналогичной причине) к $u(\cdot)$ и, как следствие, последовательность $\{t'_k\}$ является u -возвращающей. По лемме 1 мы получаем включение $\text{mod}_{\mathbb{Z}}(u) \subset \text{mod}_{\mathbb{Z}}(f)$.

Чтобы показать обратное включение $\text{mod}_{\mathbb{Z}}(u) \supset \text{mod}_{\mathbb{Z}}(f)$, заметим, что функция $\dot{u}(\cdot)$ также \mathbb{R}^n -почти периодическая и имеет тот же набор экспонент Фурье (за исключением, может быть, нуля), что и $u(\cdot)$. В частности, $\text{mod}_{\mathbb{Z}}(u) = \text{mod}_{\mathbb{Z}}(\dot{u})$. Выразив $f(\cdot)$ из уравнения (1), легко видеть, что, в силу вышесказанного, требуемое включение очевидно.

Теперь докажем неравенство (10). Для удобства, будем писать σ вместо σ^* . Пусть $\varepsilon > 0$ и $\tau \in \mathcal{T}_\varepsilon(f)$. Положим $\sigma_{\max} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \sigma(t) < \sigma^+$, $M_\sigma(\tau; t) := |\sigma(t + \tau) - \sigma(t)|$ и $M_\sigma(\tau) := \sup_{t \in \mathbb{R}} M_\sigma(\tau; t)$. Тогда для некоторого t_0 мы имеем $|M_\sigma(\tau; t_0) - M_\sigma(\tau)| \leq \varepsilon$. Из равенства (13) получаем

$$\begin{aligned} \sigma(t_0 + \tau) - \sigma(t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} \left(e^{A(t_0-s)} b, c \right) [\varphi(\sigma^*(s + \tau)) - \varphi(\sigma^*(s))] ds \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} \left(e^{A(t_0-s)} [f(s + \tau) - f(s)], c \right) ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Положим

$$I(\tau) := \left| \int_{-\infty}^{t_0} \left(e^{A(t_0-s)} b, c \right) [\varphi(\sigma^*(s + \tau)) - \varphi(\sigma^*(s))] ds \right|. \quad (16)$$

Тогда из (15) имеем

$$|M_\sigma(\tau) - I(\tau)| \leq C\varepsilon + \varepsilon. \quad (17)$$

Также заметим, что (см. замечание 1)

$$I(\tau) \leq -W(0)\varphi'(\sigma_{\max}) \cdot M_\sigma(\tau), \quad (18)$$

где $-W(0) = \int_0^\infty (e^{As}b, c)ds > 0$. Из (C5)-(C6) мы получаем $-W(0)\varphi'(\sigma_{\max}) < -W(0)\varphi'(\sigma^+) = 1$. Отсюда и из (17)-(18) мы получаем существование константы $\tilde{C} > 0$ такой, что $M_\sigma(\tau) \leq \tilde{C}\varepsilon$, т. е. τ является $\tilde{C}\varepsilon$ -почти периодом для $\sigma(\cdot)$. Наконец из равенства (12) легко видеть, что τ также и $\hat{C}\varepsilon$ -почти период для $u(\cdot)$ при некоторой константе $\hat{C} > 0$ (не зависящей от ε). В частности, $l_u(\hat{C}\varepsilon) \leq l_f(\varepsilon)$ и, как следствие, выполняется неравенство (10). \square

Замечание 2. Включения типа $\text{mod}_{\mathbb{Z}}(u) \subset \text{mod}_{\mathbb{Z}}(f)$ тесно связаны с единственностью в том или ином смысле почти периодического решения^{||}. Условия типа (C1-C3), гарантирующие существование одномерного (или, в более общем случае, j -мерного) квадратичного конуса, уже сами по себе накладывают ограничения на частотный модуль почти периодических решений, что есть следствие возможности редукции размерности (см. [6, 7, 12]. Подобные свойства также оказываются полезными при изучении вопросов устойчивости и существования периодических или почти периодических решений (см., например, [8, 6, 12, 15]).

Также заметим, что доказательство неравенства (10) по существу доказывает (в силу леммы 1) и включение $\text{mod}_{\mathbb{Z}}(u) \subset \text{mod}_{\mathbb{Z}}(f)$, но более явно отражает специфику наложенных условий.

Заметим, что для получения необходимых нам оценок (как в теореме 2) частотное условие (C3) в некотором смысле излишне, т. к. оно гарантирует существование инвариантного конуса \mathcal{K} , общего для операторов сдвига всех систем вида $\dot{u} = Au + b\varphi(t, c^*u)$, где $\varphi(t, \sigma)\sigma \geq 0$ (см. лемму 2.2 в [2]), в то время как нам необходима лишь инвариантность относительно полугруппы операторов e^{As} , $s \geq 0$ (см. замечание 1). В условиях (C1) и (C2) такой конус обязательно существует, но не обязательно является *допустимым* относительно данного вектора c , т. е. удовлетворяет условию $\{c^*x = 0\} \cap \text{Int } \mathcal{K} = \emptyset$, что также существенно. Таким образом, возможное ослабление условия (C3) для получения подобных оценок представляет интерес. То обстоятельство, что

^{||}Почти периодичность ограниченных решений в условиях их единственности была замечена еще Ж. Фаваром (см. [13]).

условие **(С3)** действительно в указанном выше смысле избыточно, можно видеть на примере полугруппы e^{As} , соответствующей матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Легко видеть, что полугруппа сильно положительна относительно конуса $\mathcal{K} := \{-x^2 + y^2 \leq 0\}$ и этот конус является допустимым относительно вектора $c = (1, 1)$. Если положить $b = c = (1, 1)$, то простые вычисления показывают, что условие **(С3)** в этом случае не выполняется.

4 Оценка фрактальной размерности вынужденных почти периодических колебаний в цепи Чуа

Рассмотрим возмущенную систему Чуа [16]

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x + h(x)) + f_1(t), \\ \dot{y} = x - y + z + f_2(t), \\ \dot{z} = -(\beta y + \gamma z) + f_3(t), \end{cases} \quad (19)$$

где $h(x) = m_1x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$ и $\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1$ суть вещественные параметры. При различных параметрах невозмущенная система (19) демонстрирует как регулярное, так и хаотическое поведение; возможно наличие скрытых хаотических и периодических аттракторов (см. работу [16] и ссылки в ней). В возмущенной (почти периодическим образом) системе можно наблюдать странные нехаотические аттракторы [17]. Здесь мы воспользуемся вышеизложенным подходом для получения условий существования экспоненциально устойчивого почти периодического колебания у возмущенной системы.

Запишем систему (19) в виде (1), где

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и $\varphi(\sigma) = m_1\sigma + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|\sigma + 1| - |\sigma - 1|)$. Возмущение $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ будем предполагать почти периодическим.

Для элементов u, v замкнутого подпространства $\mathbb{E} \subset C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ пространства скалярных ограниченных функций мы будем писать $u \prec v$, если $v - u \geq 0$. *Конусным отрезком* $\langle u, v \rangle$ в \mathbb{E} будем называть множество всех $w \in \mathbb{E}$ таких, что $u \prec w \prec v$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия $(C1)$ - $(C4)$, а также условия

$$(CH1) \quad 0 < m_0 < -W(0)^{-1} < m_1$$

$(CH2)$ Для $\sigma_0 \in (0, 1]$ рассмотрим $M := W(0)\varphi(\sigma_0) + \sigma_0 = (1 + W(0)m_0)\sigma_0 > 0$ и потребуем, чтобы $g(t)$ из (11) удовлетворяла неравенствам

$$-M < \sup_{t \in \mathbb{R}} g(t) < M. \quad (20)$$

Тогда (19) имеет экспоненциально устойчивое почти периодическое решение $u^*(\cdot)$, лежащее в $\{-\sigma_0 < c^*u < \sigma_0\}$ и для него выполнено

$$\text{mod}_{\mathbb{Z}}(u^*) = \text{mod}_{\mathbb{Z}}(f) \text{ и } \mathfrak{Di}(u^*) \leq \mathfrak{Di}(f). \quad (21)$$

Доказательство. Рассмотрим интегральный оператор

$$[\Pi\sigma](t) := \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)}b, c \right) \varphi(\sigma(s))ds + \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)}f(s), c \right) ds \quad (22)$$

в пространстве $\mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ скалярных почти периодических функций с равномерной нормой. Из условий $(C1)$ - $(C4)$ имеем $(e^{As}b, c) \geq 0$ при всех $s \geq 0$ (см. замечание 1). Поскольку неравенство в (20) строгое, то, не умаляя общности, можно считать, что $\sigma_0 \in (0, 1)$. Рассмотрим две постоянные функции $\sigma_1(t) \equiv -\sigma_0$ и $\sigma_2(t) \equiv \sigma_0$. Имеем

$$\begin{aligned} [\Pi\sigma_1](t) + \sigma_0 &= -W(0)\varphi(-\sigma_0) + \sigma_0 + g(t) = M + g(t) > 0, \\ \sigma_0 - [\Pi\sigma_2](t) &= \sigma_0 + W(0)\varphi(\sigma_0) - g(t) = M - g(t) > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Из монотонности φ и (23) следует, что оператор Π монотонен на конусном отрезке $\langle -\sigma_0, \sigma_0 \rangle$ и переводит его в себя. Пусть теперь $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ и $-\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \sigma_0$. Имеем

$$0 \prec [\Pi\sigma_1] - [\Pi\sigma_2](t) = m_0 \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)}b, c \right) (\sigma_1(s) - \sigma_2(s))ds \prec S(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (24)$$

где линейный оператор S задан на всем пространстве $\mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ как

$$[S\sigma](t) = m_0 \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)}b, c \right) \sigma(s)ds. \quad (25)$$

Очевидно, $\|S\| = -W(0)m_0 < 1$. В силу теоремы 10.2 из [11] оператор Π имеет на $\langle -\sigma_0, \sigma_0 \rangle$ единственную неподвижную точку σ^* . Легко видеть, что формула

$$u^*(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}b\varphi(\sigma^*(s))ds + \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}f(s)ds \quad (26)$$

задает почти периодическое решение уравнения (19) и $(u^*(t), c) = \sigma^*(t) \in (-\sigma_0, \sigma_0)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Экспоненциальная устойчивость u^* очевидна (т. к. u^* в этом случае есть решение линейной системы с гурвицевой матрицей), а доказательство включения \mathbb{Z} -модулей и оценка диофантовой размерности проводится также, как и в теореме 2. \square

Наличия неравенств типа $\mathfrak{Di}(u^*) \leq \mathfrak{Di}(f)$ позволяет дать оценку фрактальной размерности множества $\mathcal{M}_{u^*} = \text{Cl}(u^*(\mathbb{R}))$ при дополнительных предположениях на возмущение f . Для простоты ограничимся случаем, когда $f(t) = \Phi_f(\omega_1 t, \omega_2 t)$, где $\Phi_f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть некоторая функция, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$, а $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ есть иррациональное число. Предположим, что подходящие дроби $q_k, k = 1, 2, \dots$, для ω при некотором $\nu \geq 0$ обладают свойством $q_{k+1} = O(q_k^{1+\nu})$ для всех k . Из основных свойств цепных дробей (см., например, [4]) следует, что это равносильно тому, что для некоторого $C > 0$ при всех целых p и натуральных q выполняется

$$|\omega q - p| \geq \frac{C}{q^{1+\nu}}, \quad (27)$$

т. е. ω удовлетворяет диофантовому условию порядка $\nu \geq 0$ (см. [1]).

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4 и предположения выше относительно f и ω . Тогда для экспоненциально устойчивого почти периодического решения u^* выполняется

$$\overline{\dim}_B \mathcal{M}_{u^*} \leq \frac{1+\nu}{\alpha} + 1. \quad (28)$$

Доказательство. Из теоремы 6 работы [1] следует, что $\mathfrak{Di}(f) \leq \frac{1+\nu}{\alpha}$ и, как следствие, $\mathfrak{Di}(u^*) \leq \mathfrak{Di}(f) \leq \frac{1+\nu}{\alpha}$. Отсюда по теореме 1 получаем (28). \square

Хорошо известно, что числа, удовлетворяющие диофантовому условию порядка 0 (они же *плохо аппроксимируемые* числа), характеризуются тем, что они имеют ограниченные элементы разложения в цепную дробь. В частности, таковыми являются все квадратичные иррациональности (см. [4]): $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ и т. д. или, например, золотое сечение $\varphi_0 := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Нетрудно показать, что почти все (в смысле меры Лебега) $\omega \in \mathbb{R}$ удовлетворяют диофантовому условию любого порядка $\nu > 0$ и, как следствие, для почти всех ω в оценке (28) можно положить $\nu = 0$ (подробней см. в [1]). Легко видеть, что в условиях теоремы 5 экспоненциально устойчивое почти периодическое решение u^* будет квазипериодическим с теми же частотами, что и f , и потому $u^*(t) = \Phi_{u^*}(\omega_1 t, \omega_2 t)$ для некоторой непрерывной функции

$\Phi_{u^*} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Нетривиальная зависимость от ν в (28) появляется по причине возможного падения регулярности функции Φ_{u^*} . Эффект падения порядка гладкости в зависимости от аппроксимационных свойств ω хорошо известен в теории многочастотных колебаний для линейных систем (см. [3]). Заметим, что в нелинейных задачах получить какие-либо результаты регулярности для Φ_{u^*} , по всей видимости, невозможно. С другой стороны, наличие оценок типа (28), позволяющих контролировать фрактальную размерность множества $\mathcal{M}_{u^*} = \Phi_{u^*}(\mathbb{T}^2)$, все же является в некотором смысле мерой регулярности Φ_{u^*} .

5 Численные результаты

На рис. 1 схематично изображена некоторая область в пространстве параметров $\beta \in [0, 5]$, $\gamma \in [0, 5]$ и $\alpha = 1.4$, для которой система (19) удовлетворяет условиям (C1)-(C4). Рисунок получен с помощью численного эксперимента. Далее мы проведем более формальную проверку условий теоремы 4 для конкретного набора параметров.

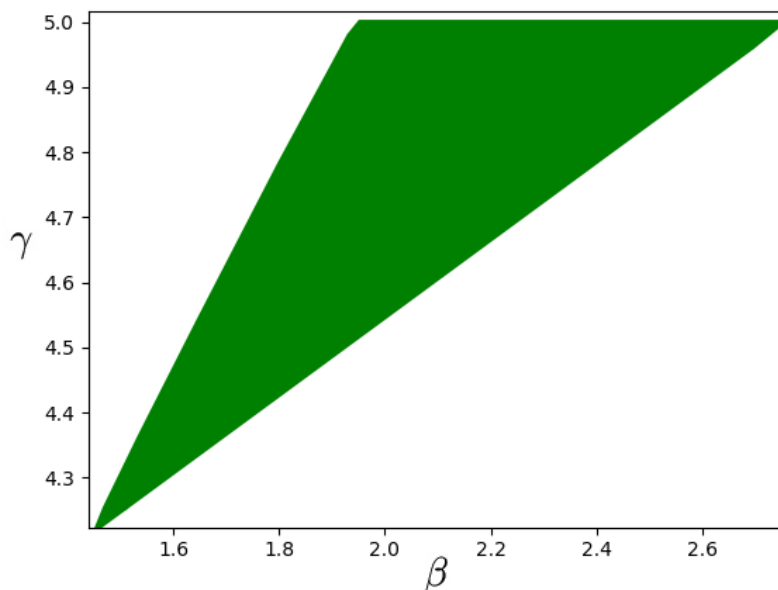


Рис. 1: Множество параметров в плоскости β (по горизонтали) и γ (по вертикали) с $\alpha = 1.4$, при которых линейная часть системы (19) удовлетворяет условиям (C1)-(C4).

Рассмотрим систему Чуа (19) при параметрах линейной части $\alpha = 1.4$, $\beta = 2.2$ и $\gamma = 4.8$. При этих значениях параметров характеристический многочлен матрицы A имеет 3 вещественных корня: $\lambda_0 \approx -0.258$, $\lambda_1 \approx -3.125$

и $\lambda_2 \approx -3.817$. Положим $\varepsilon := 1.5$. С помощью прямых вычислений можно показать, что

$$W(z) = -\alpha \cdot \frac{z^2 + (\gamma + 1)z + \beta + \gamma}{z^3 + (1 + \alpha + \gamma)z^2 + (\beta + \gamma + \alpha\gamma)z + \alpha\beta} \quad (29)$$

и, как следствие,

$$\operatorname{Re} W(i\omega - \varepsilon) = 1.4 \cdot \frac{(2.7\omega^2 + 4.675) \cdot (-\omega^2 + 0.55) + 2.8\omega \cdot (\omega^3 + 1.13\omega)}{(2.7\omega^2 + 4.675)^2 + (\omega^3 + 1.13\omega)^2}. \quad (30)$$

Простой анализ числителя в (30) показывает, что $W(i\omega - \varepsilon) > 0$ при всех ω . Далее, легко видеть, что $\operatorname{Re} W(i\omega - \varepsilon) \sim \frac{0.14}{\omega^2}$ при $\omega \rightarrow \infty$. Таким образом, условия **(C1)**-**(C4)** линейной части выполнены. Из (29) следует, что

$$W(0) = -1 - \frac{\gamma}{\beta} = -\frac{35}{11}.$$

Поэтому для удовлетворения условию **(CH1)** можно взять $m_0 < \frac{11}{35} < m_1$. Положим $m_0 := \frac{1}{5}$ и $m_1 := 1$. Тогда для $\sigma_0 = 1$ имеем

$$M = (1 + W(0)m_0)\sigma_0 = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}.$$

Таким образом, если при выбранных параметрах возмущение $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ в (19) удовлетворяет условию

$$-\frac{4}{11} < \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)} f(s), c \right) ds < \frac{4}{11}, \quad (31)$$

то по теореме 4 система (19) имеет экспоненциально устойчивое почти периодическое решение, лежащее в $\{-1 < c^*u < 1\}$, которое к тому же является единственным ограниченным решением, целиком лежащим в этой области. В силу того, что матрица A диагонализируема, то для операторной нормы $\|\cdot\|$ согласованной с евклидовой нормой $|\cdot|$ в \mathbb{R}^3 имеем $\|e^{At}\| = \|e^{Jt}\| = e^{\lambda_0 t}$, где J — жорданова форма матрицы A . Пусть $\sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)| =: \kappa$. Тогда

$$\left| \int_{-\infty}^t \left(e^{A(t-s)} f(s), c \right) ds \right| \leq \kappa \int_0^{+\infty} e^{\lambda_0 s} ds = \frac{\kappa}{|\lambda_0|}.$$

В частности, условие (31) будет выполнено, если $\kappa < \frac{1}{11}$.

Рассмотрим функцию Вейерштрасса

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k t), \quad (32)$$

где $b \in \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{R}$ суть параметры. Мы положим $a = b^{-\alpha}$, где $\alpha \in (0, 1]$. Известно (см. [18] стр. 47), что функция (32) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $-\frac{\ln a}{\ln b} = \alpha$. Далее мы используем эту функцию для численных экспериментов.

Пусть функция $\Phi_f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$ и $f(t) := \Phi_f(\omega_1 t, \omega_2 t)$, где $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \varphi_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Предположим, что $\kappa = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)| < \frac{1}{11}$. Тогда для фрактальной размерности множества \mathcal{M}_{u^*} , где u^* есть экспоненциально устойчивое почти периодическое решение (19), теорема 5 дает оценку фрактальной размерности

$$\overline{\dim}_B \mathcal{M}_{u^*} \leq \frac{1}{\alpha} + 1. \quad (33)$$

Ниже мы проведем сравнение этой оценки и оценок, полученных с помощью численных экспериментов.

Численная оценка фрактальной размерности проводилась с помощью стандартного алгоритма "box-counting". Координаты x, y, z в системе (19) масштабировались в 25 раз, чтобы избавиться от возможных проблем при подсчете кубов большого диаметра. Множество \mathcal{M}_{u^*} приближалось куском траектории решения $u(\cdot)$ с начальными данными $u(0) = 0$, которое притягивается к u^* , рассматриваемом на временном отрезке $[0, T]$. Для вычисления значения решения в 10^8 точках (равномерно распределенных на отрезке $[0, T]$) использовалась процедура численного интегрирования методом Рунге-Кутты 4-5-го порядка**. Подсчет ε -кубов (обозначим их $N(\varepsilon, T)$) проводился при $\varepsilon = \varepsilon_k = 2^{-k/2}$ для всех $k = 10, \dots, 14$. Далее по наблюдениям $N(\varepsilon, T)$ необходимо оценить величину $N(\varepsilon)$. Заметим, что оценка диофантовой размерности в (21) вместе с результатами работы [1] позволяет оценить T при котором множество \mathcal{M}_{u^*} будет лежать в δ -окрестности множества $u^*([0, T])$. Для таких T можно проводить подсчет ε -кубов при $\varepsilon \ll \delta$. В нашем случае†† $T \leq C \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/\alpha}$. Поэтому для $\alpha = \frac{3}{2}$ и $\delta = 2^{-9}$ оценка для T будет порядка 10^4 . На практике подобный эффект проявляется в том, что величины $N(\varepsilon, T)$ перестают существенно меняться и поэтому их можно принять за оценку $N(\varepsilon)$.

Для набора наблюдений $(-\ln \varepsilon, \ln N(\varepsilon))$, где $N(\varepsilon)$ есть оцененное число шаров, применялись два метода моделирования зависимости $\ln N(\varepsilon)$ от $-\ln \varepsilon$. Первый из них — это метод наименьших квадратов, используемый для построения линейной регрессионной модели $y = dx + v$. Коэффициент d линей-

**Использовалась готовая реализация этого метода в рамках процедуры solve_ivp пакета scipy.integrate языка программирования Python 3.7.1. Параметр max_step выбирался равным 2^{-9} .

††Заметим, что константа $C > 0$ в оценке T может быть вычислена явно.

ной регрессии принимался за оценку фрактальной размерности множества \mathcal{M}_{u^*} . Второй метод заключался в подборе параметров нелинейной модели $y = dx + \beta e^{-x} + v$ все также с помощью метода наименьших квадратов, и коэффициент d принимался за оценку фрактальной размерности. Далее мы рассмотрим несколько примеров, сравнивающих эти два метода и их оценку величины $\overline{\dim}_B \mathcal{M}_{u^*}$ с аналитической оценкой, получающейся по теореме 5.

5.1 Пример 1.

Рассмотрим $\Phi_f(\theta_1, \theta_2) := (0, C_2 \cdot w(2\pi\theta_1) + C_1 \cdot \cos(2\pi\theta_2), C_2 \cdot w(2\pi\theta_2))$ при $C_2 = \frac{1}{7}$, $C_1 = \frac{1}{25}$ и положим $f(t) := \Phi_f(\omega_1 t, \omega_2 t)$, где $\omega_1 = \frac{1}{2\pi}$ и $\omega_2 = \frac{\varphi_0}{2\pi}$ (напомним, что $\varphi_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Рассмотрим функцию Вейерштрасса (32) при параметрах $b = 10$ и $\alpha = \frac{2}{3}$. Можно проверить, что $\kappa = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)| < \frac{1}{11}$ и поэтому выполнены все условия теоремы 4. Множество \mathcal{M}_{u^*} изображено на рис. 2. Величины $N(\varepsilon, T)$ не сильно отличались для T от 1000 до 20000. Обе регрессионные модели дали оценку для $\overline{\dim}_B \mathcal{M}_{u^*}$ приблизительно 2.15 ± 0.05 (рис. 3), что отличается от верхней оценки 2.5, полученной по теореме 5.

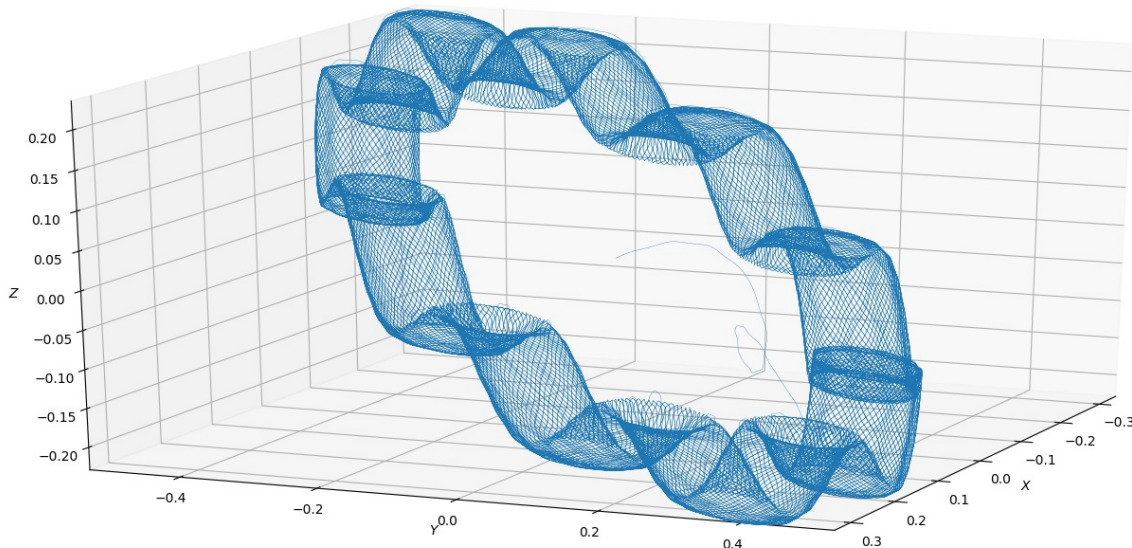


Рис. 2: Множество \mathcal{M}_{u^*} из примера 1.

5.2 Пример 2.

Рассмотрим $\Phi_f(\theta_1, \theta_2) := (0, C_1 \cdot \sin(2\pi t), C_2 \cdot (\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)))$ при $C_1 = C_2 = \frac{1}{20}$ и положим $f(t) := \Phi_f(\omega_1 t, \omega_2 t)$, где $\omega_1 = \frac{1}{2\pi}$ и $\omega_2 = \frac{\varphi_0}{2\pi}$. Можно проверить, что $\kappa = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)| < \frac{1}{11}$ и поэтому выполнены все условия

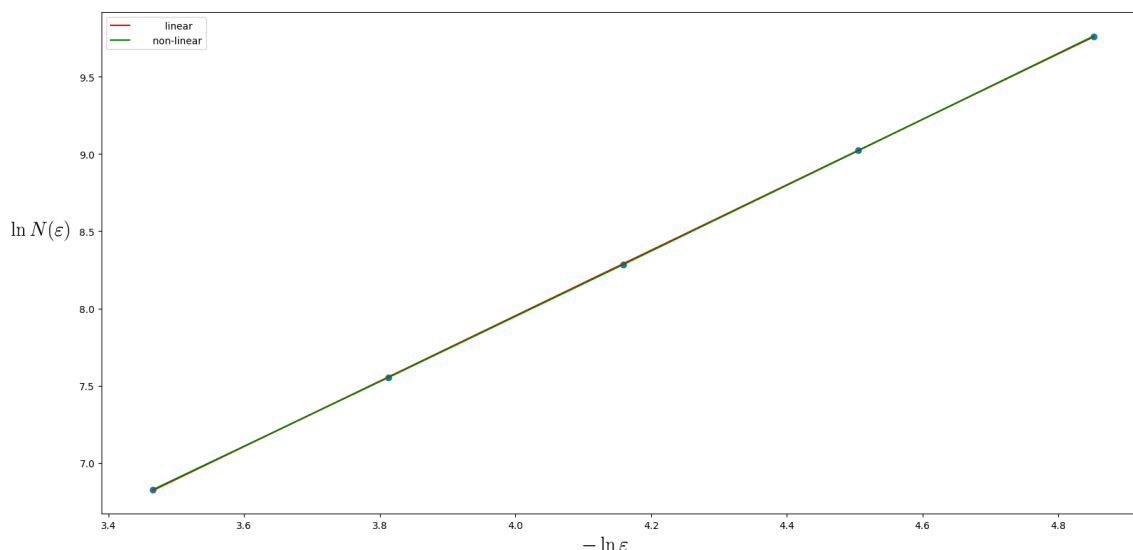


Рис. 3: Графики линейной (красный) и нелинейной (зеленый) регрессий, выражающих зависимость $\ln N(\varepsilon)$ (по вертикали) от $-\ln \varepsilon$ (по горизонтали), полученные в примере 1. Оценки $\overline{\dim}_B \mathcal{M}_{u^*}$ равны 2.11 и 2.16 для линейной и нелинейной модели соответственно.

теоремы 4. Множество \mathcal{M}_{u^*} изображено на рис. 4. В качестве приближения для $N(\varepsilon)$ выбиралась величина $N(\varepsilon, T)$ при $T = 20000$. Обе регрессионные модели дали оценку для $\overline{\dim}_B \mathcal{M}_{u^*}$ близкую к 2 (рис. 5), что совпадает с верхней оценкой, полученной по теореме 5.

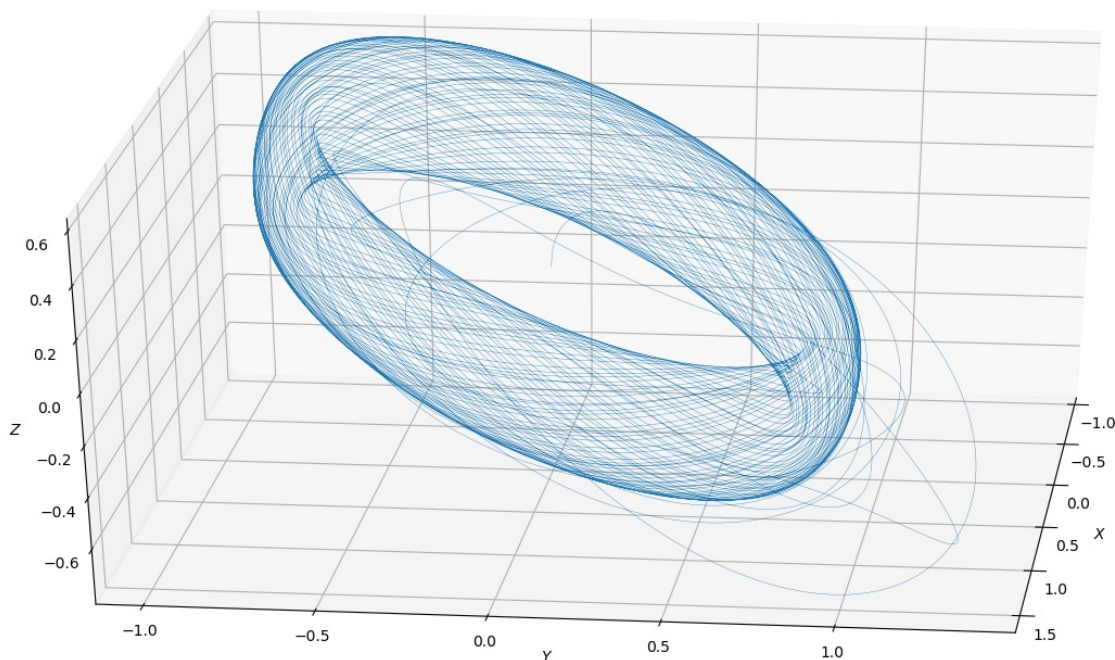


Рис. 4: Множество \mathcal{M}_{u^*} из примера 2.

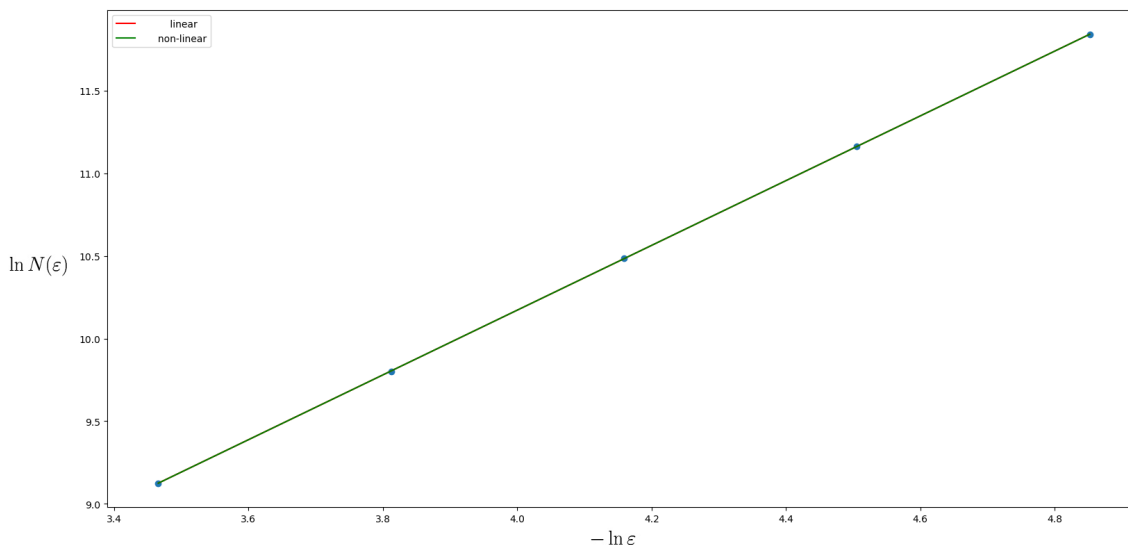


Рис. 5: Графики линейной (красный) и нелинейной (зеленый) регрессий, выражающих зависимость $\ln N(\varepsilon)$ (по вертикали) от $-\ln \varepsilon$ (по горизонтали), полученные в примере 2. Оценки $\overline{\dim}_B \mathcal{M}_{u^*}$ равны 1.96 и 1.96 для линейной и нелинейной модели соответственно.

5.3 Пример 3.

Рассмотрим $\Phi_f(\theta_1, \theta_2) := (0, C_2 \cdot w(2\pi\theta_1) + C_1 \cdot \cos(2\pi\theta_2), C_2 \cdot w(2\pi\theta_2) \cdot \sin(2\pi\theta_1))$ при $C_2 = \frac{1}{7}$, $C_1 = \frac{1}{25}$ и положим $f(t) := \Phi_f(\omega_1 t, \omega_2 t)$, где $\omega_1 = \frac{1}{2\pi}$ и $\omega_2 = \frac{\varphi_0}{2\pi}$. Рассмотрим функцию Вейерштрасса (32) при параметрах $b = 10$ и $\alpha = \frac{2}{3}$. Можно проверить, что $\kappa = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)| < \frac{1}{11}$ и поэтому выполнены все условия теоремы 4. Множество \mathcal{M}_{u^*} изображено на рис. 6. Величины $N(\varepsilon, T)$ не сильно отличались для T от 1000 до 20000. Линейная регрессионная модель дала оценку для $\overline{\dim}_B \mathcal{M}_{u^*}$ приблизительно 2.51 (см. рис. 7), что совпадает с верхней оценкой, полученной по теореме 5. Нелинейная модель дала оценку 2.76, что сильно превышает аналитическую верхнюю оценку и вместе с оцененными параметрами модели ($\beta = 14.72$ и $v = -2.86$) наводит на мысль о ее непригодности в данной ситуации.

Благодарности

Данная работа выполнена при поддержке Немецко-Российского Междисциплинарного Научного Центра (G-RISC), финансируемого через Немецкую службу академических обменов (DAAD) (проекты M-2017a-5 и M-2017b-5) и при поддержке гранта №2858.2018.1 программы Ведущие школы Российской Федерации.

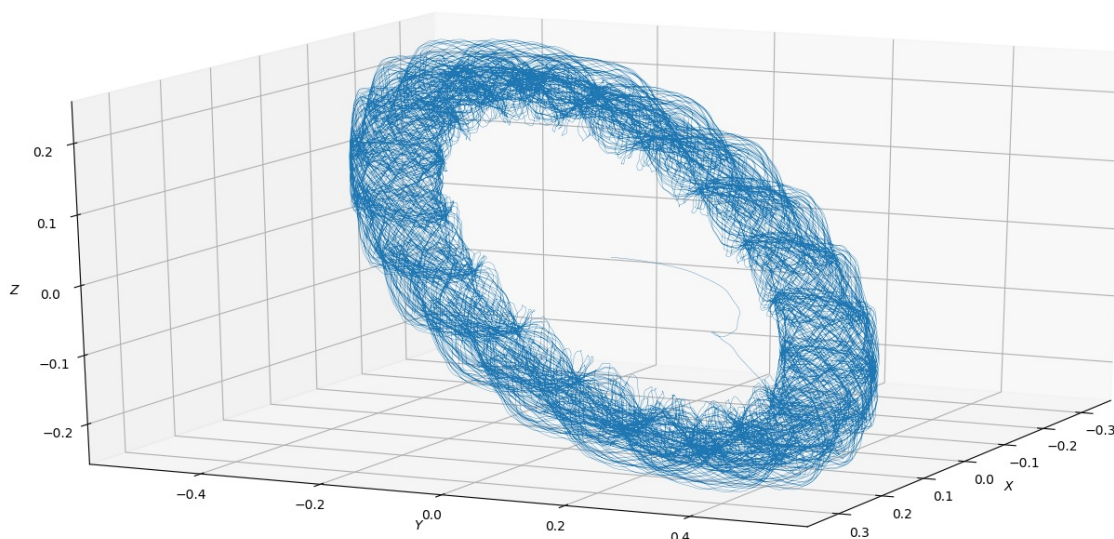


Рис. 6: Множество \mathcal{M}_{u^*} из примера 3.

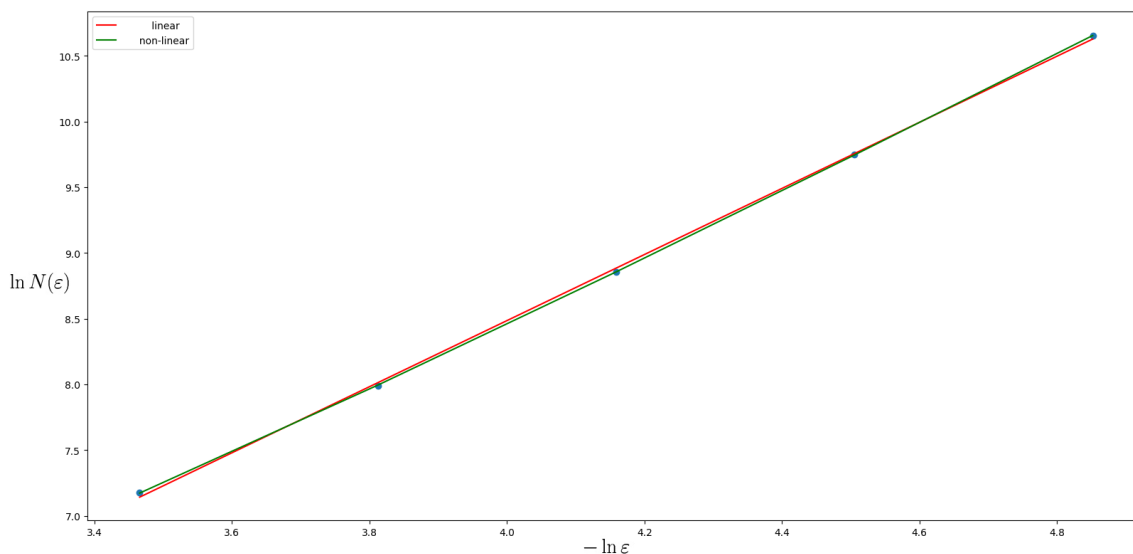


Рис. 7: Графики линейной (красный) и нелинейной (зеленый) регрессий, выражающих зависимость $\ln N(\varepsilon)$ (по вертикали) от $-\ln \varepsilon$ (по горизонтали), полученные в примере 3. Оценки $\overline{\dim}_B \mathcal{M}_{u^*}$ равны 2.51 и 2.76 для линейной и нелинейной модели соответственно.

Список литературы

- [1] Аникушин М. М., О явлении Лиувилля в оценках фрактальных размерностей вынужденных квазипериодических колебаний. *Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*, **52**(3) (2019).
- [2] Буркин И. М., Якубович В. А. Частотные условия существования двух

- почти периодических решений у нелинейной системы автоматического регулирования. *Сибирский математический журнал*, **16**(5), 699–705, (1975).
- [3] Самойленко А. М. *Элементы математической теории многочастотных колебаний: Инвариантные торы*, Изд-во Наука, Москва (1987).
- [4] Хинчин А. Я. *Цепные дроби*. Изд-во Физматлит, Москва (1961).
- [5] Якубович В. А. Частотная теорема в теории управления. *Сибирский математический журнал*, **14**(2), 384–420 (1973).
- [6] Anikushin M. M., On the Smith reduction theorem for almost periodic ODEs satisfying the squeezing property. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, **15**(1), 97–108 (2019).
- [7] Anikushin M. M. Dimensional aspects of almost periodic dynamics. In [12] (2019).
- [8] Burkin I. M. The method of transfer to the derivative space: 40 years of evolution. *Differential Equations and Control Processes* (Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia), **72**(3) (2015).
- [9] Cartwright M. L. Almost periodic differential equations and almost periodic flows. *J. Differ. Equ.*, **5**(1), 167–181 (1969).
- [10] Fink A. M. *Almost periodic differential equations*. Springer (2006).
- [11] Krasnosel'skii M. A., Burd V. S., Kolesov Yu. S. *Nonlinear almost periodic oscillations*, John Wiley & Sons (1973).
- [12] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Reitmann V. *Attractor dimension estimates for dynamical systems: theory and computation*. Switzerland: Springer International Publishing AG (2019).
- [13] Levitan B. M., Zhikov V. V. *Almost periodic functions and differential equations*. CUP Archive (1982).
- [14] Naito K. Dimension estimate of almost periodic attractors by simultaneous Diophantine approximation. *Journal of Differential Equations*, **141**(1), 179–200 (1997).
- [15] Reitmann V. Über die Beschränktheit der Lösungen diskreter nichtstationärer Phasensysteme. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, **1**(1), 83–93 (1982).

- [16] Stankevich N. V., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., and Chua L. O. Scenario of the birth of hidden attractors in the Chua circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **27**(12), 1–18 (2017).
- [17] Suresh K., Prasad A., and Thamilmaran K. Birth of strange nonchaotic attractors through formation and merging of bubbles in a quasiperiodically forced Chua’s oscillator, *Phys. Lett. A*, **377**(8), 612–621 (2013).
- [18] Zygmund A. *Trigonometric series*. Cambridge University Press (2002).