ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2011
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

УДК 519.622

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

О. Б. Арушанян, Н. И. Волченскова, С. Ф. Залеткин

Предложены способы определения начального приближения коэффициентов разложений решений обыкновенных дифференциальных уравнений и их производных в ряды по многочленам Чебышева первого рода. Полученные приближения предназначены для использования в методе приближенного аналитического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе ортогональных разложений.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, приближенные аналитические методы интегрирования, численные методы интегрирования, смещенные ряды Чебышева, квадратурные формулы Маркова.

Рассматривается задача Коши для нормальной системы M обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

В [1] предложен приближенный аналитический метод решения задачи (1), основанный на ортогональном разложении решения и его производной на шаге интегрирования в ряды по смещенным многочленам Чебышева первого рода. Приближенное решение вычисляется в виде частичной суммы такого ряда. В [1] также приведены соотношения, которые связывают коэффициенты Чебышева решения с коэффициентами Чебышева правой части системы. Для нахождения последних на основе квадратурных формул Маркова [2, 3] построены уравнения и описан итерационный процесс их решения.

Настоящая статья посвящена вопросу, связанному с определением начального приближения коэффициентов Чебышева правой части системы для данного итерационного процесса. Здесь мы рассмотрим два способа определения начального приближения. Будем предполагать, что правая

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10–01–00297-а).

часть дифференциального уравнения имеет нужное число непрерывных частных производных, обеспечивающих справедливость приводимых оценок и преобразований.

1. Первый способ определения начального приближения. Опишем этот способ для частичного сегмента $[x_0, x_0 + h]$, $0 < h \leqslant X$, на котором приближенное решение ищется в виде конечной суммы ряда.

Пусть $\tilde{J}_k$ — k-я частичная сумма смещенного ряда Чебышева правой части системы (1) на сегменте $[x_0, x_0+h]$, U — частичная сумма смещенного ряда Чебышева для решения задачи (1) на том же сегменте, a_i^* — значения коэффициентов смещенного ряда Чебышева и $T_i^*(\alpha)$ — смещенные многочлены Чебышева первого рода. Положим

$$\frac{1}{2}\, a_0^* \, [\tilde{J}_k] = \frac{1}{2}\, a_0^* \, \big[f(x_0, y_0)\big] = f(x_0, y_0)$$

и определим приближенные значения первых двух коэффициентов Чебышева решения:

$$a_1^*[U] = \frac{h}{4}\, a_0^*[\tilde{J}_k], \quad \frac{1}{2}\, a_0^*[U] = y_0 + \frac{h}{4}\, a_0^*[\tilde{J}_k].$$

Далее вычисляем в узлах

$$x_j^0 = x_0 + \alpha_j h, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_j = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right), \quad j = 1, \ldots, k,$$

значения приближенного решения и правой части:

$$U(x_j^0) = \frac{1}{2}\, a_0^*[U] T_0^*(\alpha_j) + a_1^*[U] T_1^*(\alpha_j) = \frac{1}{2}\, a_0^*[U] + a_1^*[U] \cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\,,$$

$$\tilde{\Phi}(\alpha_0) = f(x_0, y_0), \quad \tilde{\Phi}(\alpha_j) = f\big(x_j^0, U(x_j^0)\big), \quad j = 1, \ldots, k.$$

В качестве нулевого приближения для $a_i^*[\tilde{J}_k]$ возьмем значения, определяемые по следующей квадратурной формуле Маркова:

$$a_i^{*^{(0)}}[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \tilde{\Phi}(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j), \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Здесь символ $\sum'$ определен формулой ${\sum\limits_{j=l}^{m}}' a_j = \frac{1}{2}\, a_l + a_{l+1} + \ldots + a_m$, $m \geqslant l$. Эти значения имеют погрешность $O(h^2)$. Дальнейшее уточнение значений коэффициентов выполняется с помощью итерационного процесса так, как это описано в [1]. Для погрешности полученных в результате итерационного процесса приближенных значений $a_i^*[\tilde{J}_k]$ коэффициентов Чебышева справедлива асимптотическая оценка

$$a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde{J}_k] = O(h^{k+1}), \quad h \to 0, \tag{2}$$

где

$$\Phi(\alpha) = F(x_0 + \alpha h) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\big), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{3}$$

В рассмотренном способе используется только значение решения на левом конце промежутка интегрирования, поэтому приведенный алгоритм может быть применен на любом частичном сегменте $[x_n, x_n + h]$.

2. Второй способ определения начального приближения. Описанный ниже способ опирается на экстраполяцию коэффициентов Чебышева с предыдущего сегмента на следующий.

Покажем, как коэффициенты Чебышева разложения функции (3) могут быть использованы для получения коэффициентов Чебышева разложения функции

$$\Phi_1(\alpha) = F(x_1 + \alpha h^*) = f\big(x_1 + \alpha h^*, y(x_1 + \alpha h^*)\big), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad x_1 = x_0 + h,$$

где h^* — длина следующего частичного сегмента $[x_1, x_1 + h^*]$.

Обратимся к частичной сумме смещенного ряда Чебышева функции $\Phi(\alpha)$ с приближенными коэффициентами. Пусть $t = 2\alpha - 1$ и $\bar{\Phi}(t) = \Phi\big(\alpha(t)\big)$, тогда $a_i^*\big[\Phi(\alpha)\big] = a_i\big[\bar{\Phi}(t)\big]$, где a_i — коэффициенты ряда по несмещенным многочленам Чебышева. С учетом (2) имеем

$$\tilde{S}_k(\alpha, \Phi) = \tilde{J}_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[\tilde{J}_k] T_i^*(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i[\bar{\Phi}(t)] T_i(t) + O(h^{k+1}). \tag{4}$$

Используя выражение коэффициента Чебышева функции через производную этой функции [4]

$$a_i\big[\bar{\Phi}(t)\big] = \frac{1}{2^{i-1}} \frac{\bar{\Phi}^{(i)}(\zeta_i)}{i!}, \quad \zeta_i \in [-1, 1],$$

и упорядочивая сумму по степеням переменной t, получим

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k(t, \bar{\Phi}) &= {\sum_{i=0}^{k}}' \frac{1}{2^{i-1}} \frac{\bar{\Phi}^{(i)}(\zeta_i)}{i!} T_i(t) + O(h^{k+1}) = \\ &= {\sum_{i=0}^{k}}' \frac{1}{2^{i-1}} \left[\frac{1}{i!}\Big(\frac{h}{2}\Big)^i F^{(i)}(x_{1/2}) + O(h^{i+1})\right] T_i(t) + O(h^{k+1}) = \\ &= \sum_{i=0}^{k} \Big(\frac{1}{i!}\Big(\frac{h}{2}\Big)^i F^{(i)}(x_{1/2}) + O(h^{i+1})\Big) t^i + O(h^{k+1}), \quad x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогично можно представить частичную сумму ряда Чебышева функции $\Phi_1(\alpha)$:

$$\tilde{S}_k(t, \bar{\Phi}_1) = \sum_{i=0}^{k} \Big(\frac{1}{i!}\Big(\frac{h^*}{2}\Big)^i F^{(i)}(x_{3/2}) + O({h^*}^{i+1})\Big) t^i + O({h^*}^{k+1}), \quad x_{3/2} = x_1 + \frac{h^*}{2}. \tag{6}$$

Для дальнейшего определим следующие матрицы: P — верхняя треугольная матрица Паскаля с элементами $p_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, $1 \leqslant j \leqslant k+1$, $i \leqslant j$; T и I — диагональные матрицы $(k+1)$-го порядка: $T = \big\{1, 1+\xi, (1+\xi)^2, \ldots, (1+\xi)^k\big\}$ и $I = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^k\}$, где $\xi = h^*/h$ и $\omega = \xi/(1+\xi)$.

Введем векторы длины $k+1$:

$$Z(x_{1/2}) = \bigg(F(x_{1/2}), \frac{h}{2} F'(x_{1/2}), \frac{1}{2}\Big(\frac{h}{2}\Big)^2 F''(x_{1/2}), \ldots, \frac{1}{k!}\Big(\frac{h}{2}\Big)^k F^{(k)}(x_{1/2})\bigg)^T,$$

$$Z(x_{3/2}) = \bigg(F(x_{3/2}), \frac{h^*}{2} F'(x_{3/2}), \frac{1}{2}\Big(\frac{h^*}{2}\Big)^2 F''(x_{3/2}), \ldots, \frac{1}{k!}\Big(\frac{h^*}{2}\Big)^k F^{(k)}(x_{3/2})\bigg)^T.$$

Последовательно применяя линейные преобразования, задаваемые матрицами T, P и I, к вектору $Z(x_{1/2})$, приходим к следующим соотношениям:

$$TZ(x_{1/2}) = \bigg(F(x_{1/2}), \frac{h+h^*}{2} F'(x_{1/2}), \ldots, \frac{1}{k!}\Big(\frac{h+h^*}{2}\Big)^k F^{(k)}(x_{1/2})\bigg)^T,$$

$$PTZ(x_{1/2}) = \Big(F(x_{3/2}), \frac{h+h^*}{2}\,F'(x_{3/2}),\,\dots\,, \frac{1}{k!}\Big(\frac{h+h^*}{2}\Big)^k F^{(k)}(x_{3/2})\Big)^T + O(h^{k+1}),$$

$$IPTZ(x_{1/2}) = Z(x_{3/2}) + O(h^{k+1}).$$

Точные компоненты вектора $Z(x_{1/2})$ нам не известны, но приближения к ним могут быть получены из (5). Применяя указанные выше преобразования к вектору, составленному из этих приближений, мы получим компоненты вектора $Z(x_{3/2})$ с погрешностями $O(h^*), O(h^{*^2}),\,\dots\,, O(h^{*^{k+1}})$, а именно получим величины

$$d_i = \frac{1}{i!}\,\Big(\frac{h^*}{2}\Big)^i F^{(i)}(x_{3/2}) + O(h^{*^{i+1}}).$$

Далее составим полином переменной t с коэффициентами, равными числам d_i, и выполним с ним те преобразования, которые были использованы при выводе формул (4)–(6), но осуществим их в обратном порядке:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} d_i t^i &= \sum_{i=0}^{k}\Big(\frac{1}{i!}\,\Big(\frac{h^*}{2}\Big)^i F^{(i)}(x_{3/2}) + O(h^{*^{i+1}})\Big)t^i = \sum_{i=0}^{k}\Big(\frac{1}{i!}\,\bar{\Phi}_1^{(i)}(0) + O(h^{*^{i+1}})\Big)t^i = \\
&= {\sum_{i=0}^{k}}'\Big(\frac{1}{2^{i-1}}\,\frac{1}{i!}\,\bar{\Phi}_1^{(i)}(0) + O(h^{*^{i+1}})\Big)T_i(t) = {\sum_{i=0}^{k}}'\Big(a_i\big[\bar{\Phi}_1(t)\big] + O(h^{*^{i+1}})\Big)T_i(t) = \\
&= {\sum_{i=0}^{k}}'\Big(a_i^*\big[\Phi_1(\alpha)\big] + O(h^{*^{i+1}})\Big)T_i^*(\alpha).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем в итоге коэффициенты Чебышева функции $\Phi_1(\alpha)$ с погрешностями $O(h^*), O(h^{*^2}),\,\dots\,, O(h^{*^{k+1}})$, которые и принимаем за нулевое приближение для неизвестных $a_i^*[\tilde{J}_k]$ на сегменте $[x_1, x_1 + h^*]$. Дальнейшее уточнение значений коэффициентов $a_i^*[\tilde{J}_k]$ выполняется с помощью итерационного процесса так, как это описано в [1].

3. Примеры. 1) Интегрируется обыкновенное дифференциальное уравнение [5]

$$y' = y^2 - x\ln x\, y + \ln x + 1, \quad y(1) = 0. \tag{7}$$

Точное решение $y = x\ln x$ представляет собой произведение линейной и логарифмической функций. Задача решалась методом рядов Чебышева на интервале $[1, X_F]$, при этом задавалось разбиение интервала на несколько частичных сегментов длиной h и на каждом сегменте решение представлялось в виде $(k+1)$-й частичной суммы ряда Чебышева. Вычисления проводились с 16 значащими цифрами. Значения X_F, h и k, способ выбора начального приближения для коэффициентов Чебышева правой части дифференциального уравнения, а также количество верных цифр в приближенных значениях решения $y(X_F)$, вычисленных в конце интервала, приведены в табл. 1 и 2. В них содержатся результаты счета, отражающие разные условия окончания итерационного процесса вычисления коэффициентов разложения решения в ряд по многочленам Чебышева. В табл. 1 даны результаты, полученные за *фиксированное число* итераций, в то время как результаты из табл. 2 относятся к случаю *исправления до сходимости.*

Из табл. 1 наглядно видно, что применение второго способа определения начального приближения коэффициентов, основанного на экстраполировании уже известных на предыдущем частичном сегменте коэффициентов, может существенно повысить точность нахождения коэффициентов разложения решения и точность вычисления самого решения на данном сегменте.

В табл. 2 даны для сравнения результаты, полученные классическим методом Рунге–Кутта четвертого порядка и методом Адамса пятого порядка типа предиктор-корректор с постоянным шагом h [2, 6, 7]. Прочерк в таблице означает, что при указанном в ней значении h вычисленные значения приближенного решения задачи не имеют ни одной верной цифры.

Таблица 1

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">X_F</th><th rowspan="4">h</th><th colspan="3">Количество верных цифр
для $y(X_F)$ в методе рядов Чебышева</th></tr>
<tr><th rowspan="3">k</th><th colspan="2">Способ выбора начального приближения</th></tr>
<tr><th>Первый способ: из
начального условия</th><th>Второй способ:
экстраполяция</th></tr>
<tr></tr>
<tr><td>1</td><td>3.2</td><td>0.2</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3.2</td><td>0.2</td><td>10</td><td>6</td><td>14</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3.4</td><td>0.2</td><td>10</td><td>6</td><td>13</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3.4</td><td>0.4</td><td>10</td><td>9</td><td>12</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3.4</td><td>0.4</td><td>20</td><td>9</td><td>13</td></tr>
<tr><td>6</td><td>5.0</td><td>0.4</td><td>20</td><td>4</td><td>9</td></tr>
</table>

Таблица 2

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">X_F</th><th rowspan="4">h</th><th colspan="5">Количество верных цифр для $y(X_F)$</th></tr>
<tr><th colspan="3">Метод рядов Чебышева</th><th rowspan="3">Классический метод Рунге–Кутта 4-го порядка</th><th rowspan="3">Метод Адамса 5-го порядка</th></tr>
<tr><th rowspan="2">K</th><th colspan="2">Способ выбора начального приближения</th></tr>
<tr><th>Первый способ: из начального условия</th><th>Второй способ: экстраполяция</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3.2</td><td>0.2</td><td>5</td><td>9</td><td>9</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3.2</td><td>0.2</td><td>10</td><td>14</td><td>14</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3.4</td><td>0.2</td><td>10</td><td>14</td><td>13</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3.4</td><td>0.4</td><td>10</td><td>12</td><td>12</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3.4</td><td>0.4</td><td>20</td><td>13</td><td>13</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>5.0</td><td>0.4</td><td>20</td><td>9</td><td>9</td><td>–</td><td>–</td></tr>
</table>

Из данных таблиц также следует, что использование второго способа может существенно сократить число итераций в итерационной процедуре вычисления коэффициентов разложения решения без потери точности приближенного решения.

В табл. 3 приведены с удвоенной точностью коэффициенты Чебышева разложения решения $y(x)$ на сегменте $[3.0, 3.2]$ в виде частичной суммы смещенного ряда Чебышева, соответствующего $k = 10$:

$$y(3 + 0.2\alpha) = {\sum_{i=0}^{11}}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Эти коэффициенты получены с использованием описанных выше способов определения начального приближения. Видно, что последовательность коэффициентов достаточно регулярно стремится к нулю и ряд Чебышева на данном сегменте быстро сходится.

При интегрировании уравнения (7) на интервале $[1, X_F]$, $X_F = 3.2$, методом Рунге–Кутта с автоматическим выбором шага интегрирования максимальная фактически достигнутая точность в точке X_F равнялась 0.400×10^{-12}, при этом было выполнено 5396 вычислений правой части уравнения (7). Для метода Адамса с автоматическим выбором шага интегрирования максимальная фактически достигнутая точность в точке $X_F = 3.2$ равнялась 0.176×10^{-11} при количестве вычислений правой части 1784. При интегрировании (7) методом рядов Чебышева с разбиением промежутка интегрирования $[1, X_F]$, $X_F = 3.2$, на одиннадцать частичных сегментов длиной $h = 0.2$ и представлением решения на каждом таком сегменте $(k+1)$-й частичной суммой ряда Чебышева (при $k = 10$) полученное приближенное решение $y(X_F)$ имеет 14 верных цифр и абсолютную погрешность 0.621×10^{-14}, при этом было выполнено 781 вычислений правой части.

Таблица 3

Номер коэффициента	Коэффициенты Фурье-Чебышева	
	Первый способ	Второй способ
0	.7016306204338346D+01	.7016306204338350D+01
1	.2131272004797743D+00	.2131272004797756D+00
2	.8065915307780902D-03	.8065915307787086D-03
3	-.4337454135282221D-05	-.4337454134895229D-05
4	.3498766228166824D-07	.3498766252168790D-07
5	-.3386726712828877D-09	-.3386725384792346D-09
6	.3642481730688130D-11	.3642542704863059D-11
7	-.4200086991603610D-13	-.4197639966661063D-13
8	.5014507045545968D-15	.5093808811166757D-15
9	-.9868649107779156D-17	-.5169310316412304D-17
10	.4798272239606154D-18	.5855369357779519D-18
11	.5250372225053376D-18	-.1109027938139574D-17

Качественно такое же соотношение между вычислительными затратами и максимальной фактически достигнутой точностью приближенного решения наблюдается для методов Рунге–Кутта, Адамса и рассматриваемого метода рядов также и при интегрировании уравнения (7) на интервале $[1, X_F]$, $X_F = 5.0$.

2) Интегрируется обыкновенное дифференциальное уравнения [5]

$$y' = \frac{1}{1+x}\left(y^2 + 1 - \ln^2(1+x)\right), \quad y(0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{8}$$

Точным решением задачи является логарифмическая функция $y(x) = \ln(1+x)$. На заданном интервале решение представляется в виде частичной суммы смещенного ряда Чебышева при $k = 20$:

$$y(x) \approx \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y] T_i^*(x). \tag{9}$$

Вычисления проводились с 16 значащими цифрами. Приближенное значение решения $y(1) \approx 0.6931471805599453$ в конце промежутка интегрирования, найденное с помощью данной частичной суммы, имеет 16 верных цифр. Аналогичные значения искомого решения, полученные классическим методом Рунге–Кутта четвертого порядка и методом Адамса пятого порядка типа предиктор-корректор с шагом $h = 1$ имеют соответственно только две и одну верную цифры.

Приближенные значения коэффициентов $a_0^*[y]$ и $a_1^*[y]$ разложения (9), вычисленные с помощью метода рядов, имеют абсолютные погрешности 0.555×10^{-16} и 0.166×10^{-15}. Абсолютные погрешности остальных коэффициентов в (9) существенно меньше, чем 10^{-16}, и сами коэффициенты имеют 16 верных десятичных знаков. Погрешности коэффициентов определялись, исходя из известного ряда Чебышева логарифмической функции:

$$\ln(1+x) = 2\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2} - 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{(\sqrt{2}-1)^{2i}}{i} T_i^*(x).$$

При интегрировании задачи (8) методом Рунге–Кутта с автоматическим выбором шага интегрирования максимальная фактически достигнутая точность в конце промежутка интегрирования равнялась 0.343×10^{-13}, при этом было выполнено 10 276 вычислений правой части уравнения (8). Для метода Адамса с автоматическим выбором шага интегрирования максимальная фактически достигнутая точность в конце промежутка равнялась 0.164×10^{-13} при количестве вычислений правой части, равном 2104. При интегрировании уравнения (8) с помощью частичной суммы ряда (9) было выполнено всего 301 вычислений правой части и все 16 цифр приближенного решения $y(1)$ являются верными.

Из приведенных результатов можно сделать следующий вывод. Представление решения обыкновенного дифференциального уравнения в виде частичной суммы ряда Чебышева позволяет вычислять приближение к решению с такой высокой точностью, которая на практике может оказаться недостижимой в методах типа Рунге–Кутта и Адамса для той же разрядной сетки, поскольку эта точность требует столь малых размеров шага интегрирования, что эти шаги выходят за границу *реальной области асимптотики* для этих методов [7].

Список литературы

1. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Приближенное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе ортогональных разложений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. **14**, № 4. 59–68.

2. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1998.

3. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О некоторых свойствах частичных сумм рядов Чебышева // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. **14**, № 3. 26–34.

4. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.

5. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001.

6. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ, 2007.

7. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.