ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2005
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Оптимальное управление

Некоторые свойства процедур, связанных с методом программных итераций

Ю.В.Авербух

Россия, 620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. Софьи Ковалевской, 16,
Институт Математики и Механики
Уральского Отделения Российской Академии Наук,
e-mail: ayv@imm.uran.ru

А.Г.Ченцов

Россия, 620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. Софьи Ковалевской, 16,
Институт Математики и Механики
Уральского Отделения Российской Академии Наук,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Аннотация.

Рассматриваются версии метода программных итераций для решения задачи конфликтного управления с фиксированным временем окончания. Исследуются процедуры построения функции цены и множества позиционного поглощения в смысле Н. Н. Красовского. Для общего нелинейного случая задачи управления получены условия реализации множества программного поглощения в семействе компактов пространства позиций и, при этих условиях, установлена сходимость итерационной процедуры к множеству программного

[0]Работа выполена при поддержке РФФИ. Грант № 03-01-00415

поглощения в метрике Хаусдорфа. Для собственно линейной управляемой системы с выпуклой функцией платы установлено, что непрерывные функции позиции с выпуклыми сечениями образуют инвариантное подпространство оператора программного поглощения, в котором реализуются итерации при построении функции цены. Если, к тому же, функция платы имеет компактные множества Лебега, то такими же являются сечения функций, являющихся итерациями программного максимина, для каждого фиксированного момента времени.

1 Введение

Статья посвящена исследованию метода программных итераций (МПИ), применяемого в теории дифференциальных игр для построения функции цены и стабильных мостов в смысле Н. Н. Красовского. Структура нелинейной дифференциальной игры общего вида исчерпывающим образом характеризуется фундаментальной теоремой об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [1], [2]; из этой теоремы следует существование седловой точки в классе позиционных стратегий при выполнении надлежащих условий информационной согласованности (см. [1]–[7]). Конкретное построение функции цены и стабильного моста при выполнении известных условий регулярности (см. [1], [3], [4]) удается реализовать на основе вспомогательных программных конструкций, т. е. средствами теории программного управления, восходящей к исследованиям Л. С. Понтрягина. В то же время существенной особенностью упомянутых вспомогательных конструкций является игровой характер применяемых задач программного управления; эти конструкции были подготовлены работами Н. Н. Красовского и его школы (см. [4], [8]–[10]). Они нашли широкое применение в теории регулярных дифференциальных игр (см. [1], [4]). На основе этих конструкций позднее [11], [12] были построены первые версии МПИ; см. также работы [13]–[15]. Конструкция МПИ не требовали выполнения условий регулярности. При этом для некоторых классов нерегулярных, вообще говоря, дифференциальных игр был установлен факт "быстрой" стабилизации итерационной последовательности (см. [7], [11], [12]): метод итераций вырождался (в этих случаях) в конечную процедуру. При построении упомянутых вариантов МПИ и многозначных квазистратегий, используемых в качестве идеализированных управляющих процедур, активно использовались [7], [11], [12] конструкции расширений, применяемых ранее [1], [3] в программных конструкциях для регулярных дифференциальных игр; обобщенные управления [7], [11], [12] определялись как (стратегические) борелевские меры на декартовых произведениях конечномерных компактов; при этом использовались традиционные для современной теории меры и теории вероятностей конструкции [16]–[22] отождествления борелевских мер и линейных непрерывных функционалов на пространстве непрерывных функций, восходящие к известной теореме Рисса [18, с. 288], а также представления на основе скользящих режимов [20], [21] (игровые версии скользящих режимов см. в [1], [4], [7]). Идеи, связанные с расширениями, понимаемыми уже в другом смысле, нашли свое отражение в глубоких исследованиях А. И. Субботина [22], [23], посвященных построению обобщенных решений уравнения Гамильтона-Якоби и целого ряда других уравнений в частных производных. В этой связи отметим, что аналоги МПИ нашли свое применение и при построении упомянутых обобщенных решений; см. [24].

Отметим, что в задачах теории дифференциальных игр процедуры на основе МПИ с самого начала использовались в нескольких вариантах: версии МПИ, реализующие построение функции цены (см. [11], [12], [13] и др.), варианты МПИ, ориентированные на построение стабильных мостов (см., например, [25]); позднее была создана [26]–[28] (прямая) версия МПИ, реализующая построение многозначных квазистратегий (один из вариантов упомянутой процедуры был использован для исследования задачи управления с неполной информацией в классе квазистратегий; см [29]). Это позволяло выбирать более удобные представления как при исследовании дифференциальных игр, так и динамических задач другой природы (отметим, в частности, аналогию итерационных процедур в [24] и в [25]).

В настоящей работе мы продолжаем эту традицию, реализуя совместное рассмотрение процедур МПИ на пространстве (непрерывных) функций позиции и на пространстве множеств, элементами которых являются позиции. В последнем случае мы ставим своей целью исследования вопросов реализации итераций в классе компактов и, на этой основе, обоснование сходимости итераций-множеств в метрике Хаусдорфа [30], [20]. В качестве вспомогательной применяем "функциональную" версию МПИ.

2 Общие определения и обозначения

Ниже рассматриваются процессы конфликтного управления на конечном промежутке времени $I_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in]t_0, \infty[$. Здесь $\mathbb{R}$ – вещественная прямая; $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$, $\mathcal{N}_0 \triangleq \{0; 1; 2; \ldots\}$. При $k \in \mathcal{N}$ через $\mathbb{R}^k$ обозначим

k-мерное арифметическое пространство. Фиксируем $n \in \mathcal{N}$, $p \in \mathcal{N}$ и $q \in \mathcal{N}$, P и Q – непустые компакты в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, а также функцию

$$f : I_0 \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Рассматриваем $\mathbb{R}^n$ в качестве фазового пространства системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v),\ u \in P,\ v \in Q. \tag{1}$$

Мы интерпретируем векторы u и v как управляющие параметры игроков I и II соответственно. Условия на выбор f полагаем традиционными и далеко не самыми общими: полагаем, что f непрерывна и локально липшецева по фазовой переменной x в смысле [1, с. 52]. Кроме того, постулируется условие подлинейного роста f на $I_0 \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ в форме [1, с. 32]. В этой связи см., также, [12]. Для системы (1), удовлетворяющей упомянутым требованиям, выполнены все условия теоремы существования обобщенных решений, порожденных управлениями-мерами, подобными используемым в [12]; в связи с упомянутыми положениями см. [16], [17], [18]. Ниже используются традиционные обозначения для функций, их образов и сужений этих функций на подмножества области определения. В частности, если A и B множества, h функция из A в B, а C – подмножество A, то $(h|C)$ действует из C в B по правилу $(h|C)(x) = h(x)\ \forall x \in C$.

В дальнейшем используется аппарат скользящих режимов с элементами игровых постановок. В этой связи нам потребуется сводка определений и обозначений из теории меры и топологии. По причинам методического характера ниже будут использоваться, для целей представления обобщенных управлений, борелевские меры на декартовых произведениях конечномерных компактов.

Если $\tilde{E}$ – множество, а $\tilde{\mathcal{E}}$ есть σ-алгебра подмножеств множества $\tilde{E}$, то через $(\sigma - add)[\tilde{\mathcal{E}}]$ обозначаем множество всех вещественнозначных счетно-аддитивных мер на $\tilde{\mathcal{E}}$, а через $(\sigma - add)_+[\tilde{\mathcal{E}}]$ – конус всех неотрицательных мер из $(\sigma - add)[\tilde{\mathcal{E}}]$. Следуя [7], [12], введем при $t \in I_0$ компакты

$$Z_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times Q,\ \Omega_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P \times Q, \tag{2}$$

оснащаемые σ-алгебрами $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{C}_t$ борелевских подмножеств Z_t и Ω_t соответственно. При этом, конечно, множества-произведения в (2) оснащаются обычными топологиями покоординатной сходимости, а упомянутые σ-алгебры порождены этими топологиями [16]. Кроме того, при $t \in I_0$ вводим σ-алгебру $\mathcal{T}_t$

борелевских подмножеств отрезка $[t, \vartheta_0]$. Отметим, что в этих обозначениях имеют место следующие простые свойства [7], [12]: если $t \in I_0$, то

$$(\Gamma \times Q \in \mathcal{D}_t \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t) \& (D \boxtimes P \triangleq \{(t, u, v) \in \Omega_t | (t, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t \ \forall D \in \mathcal{D}_t). \quad (3)$$

(отметим, в частности, в упомянутых обозначениях (3), что при $B \in \mathcal{T}_t$ имеет место $(B \times Q) \boxtimes P = B \times P \times Q \in \mathcal{C}_t$); через λ_t обозначим меру Лебега-Бореля на $[t, \vartheta_0]$: $\lambda_t \in (\sigma - add)_+[\mathcal{T}_t]$. Кроме того, будем следовать [7], [12] при введении обобщенных управлений в терминах "стратегических" мер. Именно, при $t \in I_0$ полагаем, что (см. [7, с. 160])

$$\mathcal{H}_\lambda[t] \triangleq \{\eta \in (\sigma - add)_+[\mathcal{C}_t] | \eta(\Gamma \times P \times Q) = \lambda_t(\Gamma) \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}), \quad (4)$$

$$\mathcal{E}_\lambda[t] \triangleq \{\nu \in (\sigma - add)_+[\mathcal{D}_t] | \nu(\Gamma \times Q) = \lambda_t(\Gamma) \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}. \quad (5)$$

Элементы (4) играют роль пар $(u(\cdot), v(\cdot))$ обычных борелевских управлений

$$u(\cdot) : [t, \vartheta_0] \longrightarrow P, \ v(\cdot) : [t, \vartheta_0] \longrightarrow Q,$$

а элементы $\mathcal{E}_\lambda[t]$ аналоги управлений $v(\cdot)$ упомянутого типа. Кроме того, при $t \in I_0$ и $\lambda \in \mathcal{E}_\lambda[t]$ мы введем ν-программу

$$\Pi_\nu[t] \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_\lambda[t] | \eta(D \boxtimes P) = \nu(D) \ \forall D \in \mathcal{D}_t\}; \quad (6)$$

мы учли в (6) второе представление в (3). По смыслу (6) играет роль множества всех пар $(u(\cdot), v(\cdot))$ обычных борелевских управлений на $[t, \vartheta_0]$ со значениями в P и Q соответственно, у которых $v(\cdot) = \bar{v}(\cdot)$ для некоторого фиксированного управления $\bar{v}(\cdot)$. Мы используем следующую логику применения обобщенных управлений-мер $\eta \in \mathcal{H}_\lambda[t]$: один из участников, именуемый далее вторым игроком, выбирает $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t]$, предоставляя затем своему противнику – первому игроку – выбрать произвольно $\eta \in \Pi_\nu[t]$.

В связи с используемыми ранее борелевскими (и непременно регулярными [17])мерами имеет смысл упомянуть о классической теореме Рисса об общем виде линейного функционала на (банаховом) пространстве непрерывных функций; см., например, [18, гл. IV]. Именно, при $t \in I_0$ пространства $C^*(Z_t)$ и $C^*(\Omega_t)$, топологически сопряженные к оснащенным sup-нормами пространствам $C(Z_t)$ и $C(\Omega_t)$ непрерывных вещественнозначных функций на Z_t и Ω_t, изометрически изоморфны пространствам $(\sigma - add)[\mathcal{D}_t]$ и $(\sigma - add)[\mathcal{C}_t]$ (с нормой-вариацией) соответственно. По этой причине весьма логичным является оснащение множеств (4),(5) относительными и (метризуемыми) $*$-слабыми топологиями. При этом каждое из множеств (4)–(6) является метризуемым компактом в соответствующей относительной $*$-слабой топологии.

По этой причине, действуя в согласии с [7], [12], мы будем ограничиваться использованием (секвенциальной) $*$-слабой сходимости, достаточной для представления соответствующих операторов замыкания в пространствах (4), (5). Соответственно, далее мы ограничиваемся использованием секвенциальной компактности.

С каждым (обобщенным) управлением связывается единственная траектория системы (1), если только фиксирована начальная позиция: если $t_* \in I_0$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_\lambda[t_*]$, то существует единственная траектория $x(\cdot) = (x(t), t_* \leq t \leq \vartheta_0) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, где $C_n([t_*, \vartheta_0])$ – множество всех непрерывных функций из $[t_*, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$, для которой

$$x(t) = x_* + \int_{[t_*, t[\times P \times Q} f(\tau, x(\tau), u, v)\eta(d(\tau, u, v)) \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0];$$

эту траекторию $x(\cdot)$ будем обозначать через

$$\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t \in [t_*, \vartheta_0]}.$$

Данная траектория является, вообще говоря, скользящим режимом, порожденным η.

3 Метод программных итераций в задаче с фиксированным временем окончания: общие сведения. Три варианта метода программных итераций

Мы рассматриваем пространство $C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ всех непрерывных вещественнозначных функций на $I_0 \times \mathbb{R}^n$ и его преобразования в соответствии с оператором Γ [12, с. 399]. Именно для $g \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ функция $\Gamma(g) \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ такова, что

$$\Gamma(g)(t_*, x_*) \triangleq \max_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \max_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]} \min_{\eta \in \Pi_\nu[t_*]} g(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) =$$

$$= \max_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \max_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]} \min_{y \in G(\vartheta, t_*, x_*, \nu)} g(\vartheta, y), \quad (7)$$

где $G(\vartheta, t_*, x_*, \nu)$ есть область достижимости программы $\Pi_\nu[t_*]$, $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]$, из позиции (t_*, x_*).

С оператором Γ естественно связать уравнение $g = \Gamma(g)$ на пространстве $C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ с краевым условием определяемым целевой функцией; см. [12, с. 408]. Последнюю фиксируем в дальнейшем и обозначаем через f_0,

$$f_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};$$

эту функцию, как и в [12], полагаем непрерывной: $f_0 \in C(\mathbb{R}^n)$. Тогда множество [12, с. 408]

$$G_0 \triangleq \{g \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n) | (g = \Gamma(g)) \& (g(\vartheta_0, x) = f_0(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n)\} \tag{8}$$

обладает, как известно, наименьшим, в смысле поточечного порядка $\leqq$, элементом [12, с. 408] c_0:

$$(c_0 \in G_0) \& (c_0 \leqq g\ \forall g \in G_0) \tag{9}$$

При этом c_0 является функцией цены (потенциалом) дифференциальной игры с фиксированным временем окончания. Оператор Γ (7) является, по смыслу игровым: на выбор ν следует отвечать выбором η_ν, причем цели участников этих процедур противоположны. Можно, однако, ввести подобные операторы, фиксируя ν.

Для этого при $t \in I_0$ рассмотрим $\mathcal{E}_\lambda[t] = \{(\nu|\mathcal{D}_t) : \nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]\}$; в этой связи см. конструкции "нарезки-склейки" для управлений-мер в [7, с. 259]. Если $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]$, то оператор Γ_ν, действут из $C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ в множество всех вещественнозначных функций на $I_0 \times \mathbb{R}^n$ по следующему правилу: если $g \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ и $(t_*, x_*) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$, то

$$\Gamma_\nu(g)(t_*, x_*) = \max_{\theta \in [t_*, \vartheta]} \min_{\eta \in \Pi_{(\nu|\mathcal{D}_{t_*})}[t_*]} g(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)). \tag{10}$$

Введем при $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]$ множество

$$\mathbb{G}[\nu] \triangleq \{g \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n) | (g = \Gamma_\nu(g)) \& (g(\vartheta_0, x) = f_0(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n)\}. \tag{11}$$

Из (10) вытекает при $g \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ и $(t_*, x_*) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$, что

$$\Gamma(g)(t_*, x_*) \triangleq \max_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]} \max_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{\eta \in \Pi_{(\nu|\mathcal{D}_{t_*})}[t_*]} g(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) = \max_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]} \Gamma_\nu(g)(t_*, x_*). \tag{12}$$

Из (10) имеем при $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]$, $g \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ и $(t_*, x_*) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$, что

$$g(t_*, x_*) = \min_{\eta \in \Pi_{(\nu|\mathcal{D}_t)}[t_*]} g(t_*, \varphi(t_*, t_*, x_*, \eta)) \leq \Gamma_\nu(g)(t_*, x_*) \leq \Gamma(g)(t_*, x_*). \tag{13}$$

Утверждение 1. *Справедливо равенство*

$$G_0 = \bigcap_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]} \mathbb{G}[\nu].$$

Доказательство. Пусть $g_0 \in G_0$. Тогда $g_0 \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ обладает свойствами $g_0 = \Gamma(g_0)$ и $g_0(\vartheta_0, \cdot) = f_0$. Пусть $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]$. Сравним g_0 и $\Gamma_\nu(g_0)$. Пусть $(t_*, x_*) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$. С учетом (12), (13) и свойства неподвижной точки для g_0 (относительно Γ)

$$\Gamma_\nu(g_0)(t_*, x_*) \leq \Gamma(g_0)(t_*, x_*) = g_0(t_*, x_*) \leq \Gamma_\nu(g_0)(t_*, x_*),$$

то есть $g_0(t_*, x_*) = \Gamma_\nu(g_0)(t_*, x_*)$. Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, то $g_0 = \Gamma_\nu(g_0)$, то есть $g_0 \in \mathbb{G}[\nu]$. Но и выбор ν был произвольным, а тогда g_0 есть точка пересечения всех множеств $\mathbb{G}[\nu]$, $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]$. Вложение

$$G_0 \subset \bigcap_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]} \mathbb{G}[\nu] \tag{14}$$

установлено. Пусть

$$g_* \in \bigcap_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]} \mathbb{G}[\nu].$$

Тогда при $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]$ в силу (11) имеем для $g_* \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ свойство $g_* = \Gamma_\nu(g_*)$. Кроме того, поскольку $\mathcal{E}_\lambda[t_0] \neq \varnothing$, $g_*(\vartheta_0, \cdot) = f_0$. При этом (см. (12))

$$\Gamma(g_*)(t, x) = \max_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_0]} \Gamma_\nu(g_*)(t, x) = g_*(t, x) \ \forall (t, x) \in I_0 \times \mathbb{R}^n.$$

Итак, $g_* = \Gamma(g_*)$, то есть $g_* \in G_0$. Вложение, противоположное (14) установлено. □

Напомним, что на основе Γ в [7], [12] вводится итерационный процесс, начальный элемент которого (для $f_0 \in C(\mathbb{R}^n)$) есть функция

$$\varepsilon^0 \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n) \tag{15}$$

такая, что

$$\varepsilon^0(t_*, x_*) = \max_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]} \min_{\eta \in \Pi_\nu[t_*]} f_0(\varphi(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta)) \ \forall t_* \in I_0 \forall x_* \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Далее, мы конструируем последовательность

$$(\varepsilon^{(k)})_{k \in \mathcal{N}_0} : \mathcal{N}_0 \longrightarrow C(I_0 \times \mathbb{R}^n), \tag{17}$$

которая удовлетворяет условиям:

$$(\varepsilon^{(0)} = \varepsilon^0) \& (\varepsilon^{(k)} = \Gamma(\varepsilon^{(k-1)}) \ \forall k \in \mathcal{N}). \tag{18}$$

При этом имеет место следующее свойство:

$$g \leq \Gamma(g) \ \forall g \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n); \tag{19}$$

это следует из (13). Поэтому в смысле поточечного порядка $\leqq$ пространства всех вещественнозначных функций на $I_0 \times \mathbb{R}^n$ имеет место

$$\varepsilon^{(k)} \leqq \varepsilon^{(k+1)} \ \forall k \in \mathcal{N}_0. \tag{20}$$

Наконец, из результатов [12, с. 405] следует, что

$$(\varepsilon^{(k)}(t,x))_{k\in\mathcal{N}} \longrightarrow c_0(t,x) \ \forall (t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

Напомним, что $c_0 \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$. Свойство (21) усиливается с учетом (20) и теоремы Дини [19]. Именно, если $\mathbb{K}$ – непустой компакт в $\mathbb{R}^n$, то последовательность

$$k \longrightarrow (\varepsilon^{(k)}|I_0 \times \mathbb{K}) : \mathcal{N} \longrightarrow C(I_0 \times \mathbb{K})$$

сходится равномерно к функции $(c_0|I_0 \times \mathbb{K})$ – сужению функции цены на $I_0 \times \mathbb{K}$. Условимся полагать для всякого непустого компакта $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ и номера $k \in \mathcal{N}_0$, что

$$\varepsilon_{\mathbb{K}}^{(k)} \triangleq (\varepsilon^{(k)}|I_0 \times \mathbb{K}); \tag{22}$$

кроме того, полагаем

$$c_{\mathbb{K}}^0 \triangleq (c_0|I_0 \times \mathbb{K}). \tag{23}$$

В этих обозначениях имеем [19]: если $\mathbb{K}$ – непустой компакт в $\mathbb{R}^n$, то

$$(\varepsilon_{\mathbb{K}}^{(k)})_{k\in\mathcal{N}} \rightrightarrows c_{\mathbb{K}}^0. \tag{24}$$

В дальнейшем рассматриваются также итерационные процедуры на пространстве подмножеств $I_0 \times \mathbb{R}^n$, реализующие в пределе множество позиционного поглощения (стабильный мост в смысле Н. Н. Красовского) для целевого множества, порожденного функцией f_0. Именно, если $c \in \mathbb{R}$, то

$$\mathcal{W}_c^0 \triangleq \{(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}^n | \varepsilon^0(t,x) \leq c\}.$$

(множество Лебега функции ε^0, отвечающее уровню c) есть при условии, что

$$M_c = f_0^{-1}(]-\infty, c]) = \{x \in \mathbb{R}^n | f_0(x) \leq c\}, \tag{25}$$

множество всех позиций $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\forall \nu \in \mathcal{E}_\lambda[t] \ \exists \eta \in \Pi_\nu[t] : \varphi(\vartheta_0, t, x, \eta) \in M_c. \tag{26}$$

Если E – подмножество $I_0 \times \mathbb{R}^n$ и $t \in I_0$, то полагаем

$$E[t] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n | (t,x) \in E\}.$$

Далее, мы следуя [12, с. 411], введем оператор $\mathbf{A}$ (программного поглощения), действующий в пространстве всех подмножеств $I_0 \times \mathbb{R}^n$по следующему правилу: $\mathbf{A}(E)$ есть, по определению, множество всех позиций $(t_*, x_*) \in E$, для каждой из которых

$$G(t^*, t_*, x_*, \nu) \cap E[t^*] \neq \varnothing \; \forall \nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*] \forall t^* \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{27}$$

Посредством $\mathbf{A}$ определяется итерационная процедура [12, с. 411, 412]

$$(\mathcal{W}_c^{(0)} \triangleq \mathcal{W}_c^0) \& (\mathcal{W}_c^{(k)} = \mathbf{A}(\mathcal{W}_c^{(k-1)}) \; \forall k \in \mathcal{N}), \tag{28}$$

в результате которой получается последовательность $(\mathcal{W}_c^{(k)})_{k \in \mathcal{N}_0}$ подмножеств $I_0 \times \mathbb{R}^n$. Она “автоматически” является сходящийся к множеству

$$\mathcal{W}_c \triangleq \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \mathcal{W}_c^{(k)} \tag{29}$$

(речь идет о монотонной теоретико-множественной сходимости: $\mathcal{W}_c^{(s+1)} \subset \mathcal{W}_c^{(s)} \; \forall s \in \mathcal{N}_0$). В дополнение к (28) отметим, что (см. [12, с. 403, 412])

$$\mathcal{W}_c^{(k)} = \{(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}^n | \varepsilon^{(k)}(t,x) \leq c\}. \tag{30}$$

Кроме того, из (29) и построений [12, с. 406, 412] следует, что

$$\mathcal{W}_c = c_0^{-1}(]-\infty, c]) = \{(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}^n | c_0(t,x) \leq c\}. \tag{31}$$

Из (30) и (31) вытекает [12, с. 401], что каждое из множеств $\mathcal{W}_c^{(k)}$, $k \in \mathcal{N}_0$, и $\mathcal{W}_c$ замкнуто в $I_0 \times \mathbb{R}^n$ с топологией $\mathbf{t}$ покоординатной сходимости.

Кроме того, для построения $\mathcal{W}_c$ можно использовать и другую версию МПИ; см. [25], [7, с. 179]. Мы вводим оператор $\mathbb{A}_c$, действующий (см. [25]) в семействе всех подмножеств множества $I_0 \times \mathbb{R}^n$ по следующему правилу: $\mathbb{A}_c(E)$ есть множество всех $(t_*, x_*) \in E$ таких, что

$$\forall \nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*] \exists \eta \in \Pi_\nu[t_*] : (\varphi(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta) \in M_c) \& (\varphi(t, t_*, x_*, \eta) \in E[t] \; \forall t \in [t_*, \vartheta_0]). \tag{32}$$

Подчеркнем, что в (32) дана конкретизация оператора [25], [7, с. 179], отвечающая случаю, когда целевое множество содержится в гиперплоскости $t = \vartheta_0$. Требуемая процедура (вариант МПИ) имеет вид

$$(W_c^{(0)} \triangleq I_0 \times \mathbb{R}^n) \& (W_c^{(k)} = \mathbb{A}_c(W_c^{(k-1)}) \; \forall k \in \mathcal{N}). \tag{33}$$

Сравним операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbb{A}_c$. Из (27) и (32) вытекает, что для каждого множества E, $E \subset I_0 \times \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{A}_c(E) \subset \mathbf{A}(E). \tag{34}$$

Замечание. *Мы учитываем, что при $t_* \in I_0$ $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]$, $\eta \in \Pi_\nu[t_*]$ и $t^* \in [t_*, \vartheta_0]$ непременно $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta) \in G(t^*, t_*, x_*, \nu)$*

Из (34) вытекает, что и итерационные последовательности (28), (33) является "вложенными". В самом деле, из определений на основе (26), (28), (32) вытекает, что

$$W_c^{(1)} = \mathbb{A}_c(I_0 \times \mathbb{R}^n) = \mathcal{W}_c^0 = \mathcal{W}_c^{(0)}. \tag{35}$$

Пусть вообще $k \in \mathcal{N}_0$ и уже известно, что $W_c^{(k+1)} \subset \mathcal{W}_c^{(k)}$ (при $k = 0$ это выполнено в силу (35)). Тогда с учетом (34) имеем,

$$W_c^{(k+2)} = \mathbb{A}_c(W_c^{(k+1)}) \subset \mathbf{A}(W_c^{(k+1)}) \subset \mathbf{A}(\mathcal{W}_c^{(k)}) = \mathcal{W}_c^{(k+1)}; \tag{36}$$

мы учитываем здесь тот факт, что оператор $\mathbf{A}$ является изотонным по вложению; (см. (27)). Учитывая (35), мы получаем по индукции, что

$$W_c^{(k+1)} \subset \mathcal{W}_c^{(k)} \ \forall k \in \mathcal{N}_0. \tag{37}$$

Учтем теперь, что (см. [7, с. 179], [25]) в силу (31) $\mathcal{W}_c$ есть предел последовательности (33):

$$\mathcal{W}_c = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} W_c^{(k)} = \bigcap_{k \in \mathcal{N}} W_c^{(k)}. \tag{38}$$

Из (37),(38) имеем, в частности, цепочки вложений

$$\mathcal{W}_c \subset W_c^{(k+1)} \subset \mathcal{W}_c^{(k)} \ \forall k \in \mathcal{N}_0. \tag{39}$$

4 Условия сходимости версии МПИ на пространстве множеств в метрике Хаусдорфа

Всюду в дальнейшем оснащаем непустое множество $I_0 \times \mathbb{R}^n$ метрикой $\mathbf{d}$, для которой при всяком выборе $(t', x') \in I_0 \times \mathbb{R}^n$ и $(t'', x'') \in I_0 \times \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{d}((t', x'), (t'', x'')) \triangleq \sup(\{|t' - t''|, \|x' - x''\|\}). \tag{40}$$

Здесь $\| \cdot \|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Через $(\mathbf{d} - comp)[I_0 \times \mathbb{R}^n]$ обозначим семейство всех непустых компактных в метрическом пространстве

$$(I_0 \times \mathbb{R}^n, \mathbf{d}) \tag{41}$$

подмножеств $I_0 \times \mathbb{R}^n$. Кроме того, для $(t_*, x_*) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$ и $K \in (\mathbf{d} - comp)[I_0 \times \mathbb{R}^n]$ полагаем

$$(\mathbf{d} - min)[(t_*, x_*), K] \triangleq \min_{(t,y) \in K} \mathbf{d}((t_*, x_*), (t, y)).$$

Введем теперь метрику Хаусдорфа $\mathbf{H}$ на пространстве $(\mathbf{d} - comp)[I_0 \times \mathbb{R}^n]$ по традиционному правилу (см. [30])

$$\mathbf{H}(K_1, K_2) \triangleq \sup(\{\max_{(t,x) \in K_1} (\mathbf{d} - min)[(t, x), K_2]; \max_{(t,x) \in K_2} (\mathbf{d} - min)[(t, x), K_1]\})$$
$$\forall K_1, K_2 \in (\mathbf{d} - comp)[I_0 \times \mathbb{R}^n].$$

(см. [30]).

Через $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех непустых компактов в $\mathbb{R}^n$. Введем множество

$$\mathbf{C}_0 \triangleq \{c \in \mathbb{R} | f_0^{-1}(] - \infty, c]) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n))\} = \{c \in \mathbb{R} | M_c \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)\} \qquad (42)$$

.

Отметим сейчас одно полезное свойство, восходящее на идейном уровне к известной лемме Гронуола [20].

Пусть $\bar{t} \in I_0$, h есть непрерывная вещественнозначная неотрицательная функция на $[\bar{t}, \vartheta_0]$, $\delta \in]0, +\infty[$, $L \in]0, +\infty[$, $\gamma \in]0, +\infty[$ и для всех $t \in [\bar{t}, \vartheta_0]$ имеет место

$$h(t) < \delta + \int_t^{\vartheta_0} (\gamma + Lh(\xi)) d\xi, \qquad (43)$$

Покажем, что в этих условиях при всех $t \in [\bar{t}, \vartheta_0]$

$$h(t) < \frac{\gamma}{L}(e^{L(\vartheta_0 - t)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0 - t)}. \qquad (44)$$

В самом деле, (44) выполнено при $t = \vartheta_0$ очевидным образом. Допустим все же, что

$$T \triangleq \{t \in [\bar{t}, \vartheta_0] | \frac{\gamma}{L}(e^{L(\vartheta_0 - t)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0 - t)} \leq h(t)\} \neq \varnothing. \qquad (45)$$

Тогда момент $\tau \triangleq \sup(T) \in [\bar{t}, \vartheta_0]$ обладает свойством $\tau \in T$ (следствие непрерывности функций, определяемых выражениями в правой и левой частях (45)). Из (43), (44) имеем, однако,

$$h(\tau) < \delta + \int_\tau^{\vartheta_0} (\gamma + Lh(\xi)) d\xi \leq \delta + \int_\tau^{\vartheta_0} \left[\gamma + L(\frac{\gamma}{L}(e^{L(\vartheta_0 - \xi)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0 - \xi)})\right] d\xi =$$
$$= \delta + \frac{\gamma}{L} e^{L(\vartheta_0 - \xi)} \,|_{\vartheta_0}^{\tau} + \delta e^{L(\vartheta_0 - \xi)}|_{\vartheta_0}^{\tau} = \frac{\gamma}{L}(e^{L(\vartheta_0 - \tau)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0 - \tau)}.$$

Из упомянутой цепочки неравенств вытекает, что

$$h(\tau) < \frac{\gamma}{L}(e^{L(\vartheta_0-\tau)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0-\tau)}.$$

Это неравенство невозможно, так как $\tau \in T$. Полученное, в предположении (45), противоречие означает, что само (45) невозможно и, стало быть, $T = \varnothing$, что в свою очередь означает справедливость (44) при всех $t \in [\bar{t}, \vartheta_0]$.

Итак установлено, что при всяком выборе $\delta \in]0, +\infty[$, $L \in]0, +\infty[$, $\gamma \in]0, +\infty[$

$$(h(t) < \delta + \int_t^{\vartheta_0} (\gamma + Lh(\xi))d\xi \ \forall t \in [\bar{t}, \vartheta_0]) \Rightarrow \\ (h(t) < \frac{\gamma}{L}(e^{L(\vartheta_0-t)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0-t)} \ \forall t \in [\bar{t}, \vartheta_0]). \quad (46)$$

Сейчас мы установим несколько иную оценку. Пусть снова $\gamma \in]0, +\infty[$, $L \in]0, +\infty[$ и $\alpha \in [0, +\infty[$. Пусть, кроме того,

$$h(t) \leq \alpha + \int_t^{\vartheta_0} (\gamma + Lh(\xi))d\xi \ \forall t \in [\bar{t}, \vartheta_0]. \quad (47)$$

Легко видеть, что в этом случае непременно

$$h(t) \leq \frac{\gamma}{L}(e^{L(\vartheta_0-t)} - 1) + \alpha e^{L(\vartheta_0-t)} \ \forall t \in [\bar{t}, \vartheta_0]. \quad (48)$$

В самом деле, пусть $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Тогда из (47) тем более следует система неравенств

$$h(t) < (\alpha + \varepsilon) + \int_t^{\vartheta_0} (\gamma + Lh(\xi))d\xi \ \forall t \in [\bar{t}, \vartheta_0]. \quad (49)$$

Тогда с учетом (46), где $\delta = \alpha + \varepsilon$, мы получаем из (49) систему неравенств

$$h(t) < \frac{\gamma}{L}(e^{L(\vartheta_0-t)} - 1) + \alpha e^{L(\vartheta_0-t)} + \varepsilon e^{L(\vartheta_0-t)}. \quad (50)$$

Поскольку выбор ε был произвольным, из (49) вытекает, что справедливо (48). Стало быть, для всяких числа $\bar{t} \in I_0$, непрерывной вещественнозначной неотрицательной функции h на $[\bar{t}, \vartheta_0]$, $\gamma \in]0, +\infty[$, $L \in]0, +\infty[$ и $\alpha \in [0, +\infty[$ истина импликация

$$(h(t) \leq \alpha + \int_t^{\vartheta_0} (\gamma + Lh(\xi))d\xi \ \forall t \in [\bar{t}, \vartheta_0]) \Rightarrow \\ (h(t) \leq \frac{\gamma}{L}(e^{L(\vartheta_0-t)} - 1) + \alpha e^{L(\vartheta_0-t)} \ \forall t \in [\bar{t}, \vartheta_0]). \quad (51)$$

Это свойство мы будем использовать сейчас для оценки программных движений, порожденных управлениями мерами.

Пусть $t_* \in I_0$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathcal{H}_\lambda[t_*]$ и $x(\cdot) = (x(t), t_0 \leq t \leq \vartheta_0) = \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)$. Тогда

$$x(\vartheta_0) = x_* + \int_{[t_*,\vartheta_0[\times P\times Q} f(\xi, x(\xi), u, v)\eta(d(\xi, u, v)) =$$
$$= x(t) + \int_{[t,\vartheta_0[\times P\times Q} f(\xi, x(\xi), u, v)\eta(d(\xi, u, v)) \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Тогда в силу неравенства треугольника,

$$\|x(t)\| = \|x(\vartheta_0) - \int_{[t,\vartheta_0[\times P\times Q} f(\xi, x(\xi), u, v)\eta(d(\xi, u, v))\| \leq$$
$$\leq \|x(\vartheta_0)\| + \int_{[t,\vartheta_0[\times P\times Q} \|f(\xi, x(\xi), u, v)\|\eta(d(\xi, u, v)) \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (52)$$

Утверждение 2. *Если* $c \in \mathbf{C}_0$, *то* $\mathcal{W}_c^0 \in (\mathbf{d} - comp)[I_0 \times \mathbb{R}^n]$.

Доказательство. Фиксируем $c \in \mathbf{C}_0$. Тогда в силу (42)

$$M_c = f_0^{-1}(]-\infty, c]) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n).$$

Это, в частности, означает, что для некоторого $b \in]0, \infty]$ имеет место

$$\|x\| \leq b \ \forall x \in f_0^{-1}(]-\infty, c]). \quad (53)$$

Кроме того, $\mathcal{W}_c^0$ замкнуто в метрическом пространстве (41). Пусть теперь $\varkappa \in]0, +\infty[$ есть такое число, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \varkappa(1 + \|x\|) \ \forall t \in I_0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall u \in P \ \forall v \in Q.$$

Учтем данную оценку в (52). Тогда при $t_* \in I_0$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathcal{H}_\lambda[t_*]$ и $x(\cdot) = \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)$

$$\|x(t)\| \leq \|x(\vartheta_0)\| + \int_{[t,\vartheta_0[\times P\times Q} \varkappa(1 + \|x(\xi)\|)\eta(d(\xi, u, v)) =$$
$$= \|x(\vartheta_0)\| + \int_t^{\vartheta_0} \varkappa(1 + \|x(\xi)\|)d\xi \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (54)$$

В (54) мы использовали то обстоятельство, что мера η своим маргинальным распределением на σ-алгебре $\mathcal{T}_t$ имеет меру Лебега-Бореля. Теперь воспользуемся (51), полагая, что

$$\bar{t} = t_*,\ h = (\|x(t)\|)_{t\in[t_*,\vartheta_0]},\ \gamma = L = \varkappa,\ \alpha = \|x(\vartheta_0)\|.$$

Из (51) и (54) мы, в этих условиях, получаем:

$$\|x(t)\| \leq e^{\varkappa(\vartheta_0 - t)} - 1 + \|x(\vartheta_0)\| e^{\varkappa(\vartheta_0 - t)}\ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{55}$$

Поскольку выбор t_*, x_* и η был произвольным, установлено, что

$$\forall t_* \in I_0 \forall x_* \in \mathbb{R}^n \forall \eta \in \mathcal{H}_\lambda[t_*] \forall t \in [t_*, \vartheta_0]$$
$$\|\varphi(t, t_*, x_*, \eta)\| \leq (e^{\varkappa(\vartheta_0 - t_0)} - 1) + \|\varphi(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta)\| e^{\varkappa(\vartheta_0 - t_0)}. \tag{56}$$

Пусть теперь $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_c^0$. Тогда $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}_c(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ и потому $(t_*, x_*) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$ обладает свойством (32). Поскольку $\mathcal{E}_\lambda[t_*] \neq \varnothing$, можно выбрать $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]$ и подобрать $\eta \in \Pi_\nu[t_*]$ так, что при этом

$$\varphi(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta) \in M_c. \tag{57}$$

Тогда, в частности, $\eta \in \mathcal{H}_\lambda[t_*]$ и $\varphi(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta) \in f_0^{-1}(] - \infty, c])$ (см. (25)). В силу (53)

$$\|\varphi(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta)\| \leq b. \tag{58}$$

В силу (56) и (58) мы имеем, что

$$\|x_*\| = \|\varphi(t_*, t_*, x_*, \eta)\| \leq (e^{\kappa(\vartheta_0 - t_0)} - 1) + b e^{\varkappa(\vartheta_0 - t_0)}. \tag{59}$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, то (см. (59)) в терминах

$$\alpha_0 \triangleq (e^{\varkappa(\vartheta_0 - t_0)} - 1) + b e^{\varkappa(\vartheta_0 - t_0)} \in]0, \infty[$$

мы получаем утверждение

$$\mathcal{W}_c^0 \subset I_0 \times \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq \alpha_0\}.$$

Напомним, что при $c \in \mathbf{C}_0$ $\mathcal{W}_c^0$ – множество, замкнутое в топологии $\mathbf{t}$, которая, как легко видеть, порождается метрикой $\mathbf{d}$; иными словами, $\mathcal{W}_c^0$ компактно в метрическом пространстве (41), т. е.

$$\mathcal{W}_c^0 \in (\mathbf{d} - comp)[I_0 \times \mathbb{R}^n].$$

$\square$

Заметим, что при $c \in \mathbf{C}_0$ множества $\mathcal{W}_c^{(k)}$, $k \in \mathcal{N}_0$ – суть подмножества $\mathcal{W}_c^{(0)} = \mathcal{W}_c^0$, замкнутые в $\mathbf{t}$ и стало быть, компактные в (41). Как следствие, при $c \in \mathbf{C}_0$ множества $\mathcal{W}_c^{(k)}$, $k \in \mathcal{N}_0$, компактны в смысле

$$(I_0 \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t}). \tag{60}$$

Для каждого множества A, $A \subset I_0 \times \mathbb{R}^n$, и для любого $\varepsilon \in]0, \infty[$, через $\mathbb{O}(A, \varepsilon)$ обозначаем открытую ε-окрестность A, то есть

$$\mathbb{O}(A, \varepsilon) \triangleq \bigcup_{(t,x) \in A} \{(\tilde{t}, \tilde{x}) \in I_0 \times \mathbb{R}^n | \mathbf{d}((t, x), (\tilde{t}, \tilde{x})) < \varepsilon\}. \tag{61}$$

Нам данное определение потребуется лишь в случае компактного множества A, $A \subset I_0 \times \mathbb{R}^n$. При этом учитываем, что для $c \in \mathbf{C}_0$ множество $\mathcal{W}_c$ компактно в пространстве (41) как пересечение замкнутых подмножеств компакта $\mathcal{W}_c^0$.

Итак, $\mathcal{W}_c^{(k)}$, $k \in \mathcal{N}_0$, и $\mathcal{W}_c$ – суть компакты в (41) при $c \in \mathbf{C}_0$; определяем $\mathbb{O}(\mathcal{W}_c, \varepsilon)$ при $\varepsilon \in]0, \infty[$. Ясно (см. (61)), что

$$\mathbb{O}(\mathcal{W}_c, \varepsilon) \in \mathbf{t} \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[. \tag{62}$$

Разумеется, в (62) мы имеем открытые окрестности компакта $\mathcal{W}_c$, где $c \in \mathbf{C}_0$.

Условимся об обозначении: если $s \in \mathcal{N}_0$, то $\overrightarrow{s, \infty} \triangleq \{i \in \mathcal{N}_0 | s \leq i\}$. Из следствия 3.15 монографии [30] вытекает следующее

Утверждение 3. *Если $c \in \mathbf{C}_0$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то*

$$\exists m \in \mathcal{N} : \mathcal{W}_c^{(k)} \subset \mathbb{O}(\mathcal{W}_c, \varepsilon) \ \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}.$$

Отметим, что $\{\vartheta_0\} \times M_c \subset \mathcal{W}_c$ при $c \in \mathbb{R}$. Поэтому $\mathcal{W}_c \neq \varnothing \ \forall c \in \mathbf{C}_0$. Далее при $c \in \mathbf{C}_0$

$$(\mathcal{W}_c^{(k)} \in (\mathbf{d} - comp)[I_0 \times \mathbb{R}^n] \ \forall k \in \mathcal{N}_0) \& (\mathcal{W}_c \in (\mathbf{d} - comp)[I_0 \times \mathbb{R}^n]); \tag{63}$$

поэтому $\mathbf{H}(\mathcal{W}_c^{(j)}, \mathcal{W}_c) \in [0, +\infty[$ определяется корректно, как значение метрики Хаусдорфа в точках ее области определения. Из (33), (61) и предложения 3 имеем

$$(\mathbf{H}(\mathcal{W}_c^{(k)}, \mathcal{W}_c))_{k \in \mathcal{N}} \longrightarrow 0 \ \forall c \in \mathbf{C}_0. \tag{64}$$

Итак последовательность (28) реализуется (при $c \in \mathbf{C}_0$) в семействе $(\mathbf{d} - comp)[I_0 \times \mathbb{R}^n]$ и сходится к $\mathcal{W}_c$ в метрике Хаусдорфа.

Рассмотрим теперь процедуру (33). Из (39) и предложения 3 следует

Утверждение 4. *Если* $c \in \mathbf{C}_0$ *и* $\varepsilon \in]0, +\infty[$, *то*

$$\exists m \in \mathcal{N} : W_c^{(k)} \subset \mathbb{O}(\mathcal{W}_c, \varepsilon) \ \forall k \in \overrightarrow{m, +\infty}.$$

Доказательство очевидно (см. (39)). В силу (38) имеем, что при $c \in \mathbf{C}_0$

$$(W_c^{(k)})_{k \in \mathcal{N}_0} : \mathcal{N}_0 \to (\mathbf{d} - comp)[I_0 \times \mathbb{R}^n].$$

С учетом (63) имеем теперь свойство: при $k \in \mathcal{N}$ число $H(W_c^{(k)}, \mathcal{W}_c) \in [0, +\infty[$ корректно определено. Более того, справедлива следующая

Теорема 1. *Если* $c \in \mathbf{C}_0$, *то* $(\mathbf{H}(W_c^{(k)}, \mathcal{W}_c))_{k \in \mathcal{N}} \longrightarrow 0$.

Доказательство получается непосредственной комбинацией (38) и предложения 4.

5 Структура одного инвариантного пространства для случая собственно линейной системы

В дальнейшем рассматривается частный случай системы (1). Именно, будем предполагать, что данная система собственно линейна (линейна по фазовому состоянию), т. е. рассматриваемая далее система имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + \hat{f}(t, u, v). \tag{65}$$

Здесь

1. A– $(n \times n)$-матрицант на I_0, все компоненты которого $A_{i,j}$ которого непрерывны ($i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, n}$);
2. $\hat{f}$ – непрерывная функция $I_0 \times P \times Q$ в $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что упомянутые после (1) условия на правую часть в нашем случае (65) выполняется очевидным образом (используется простейшие свойства функций, непрерывных на компакте). В рассматриваемом далее случае сохраняется принятая ранее символика для общего нелинейного случая. В частности, в интересах единства обозначений (в частности, имея в виду символику [7], [12]) мы сохраняем далее конструкцию на основе скользящих режимов, применяя, однако, для описания последних формулу Коши. Тогда, как легко видеть, для $t_* \in I_0$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathcal{H}_\lambda[t_*]$ и $t \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\varphi(t, t_*, x_*, \eta) = \Phi(t, t_*)x_* + \int_{[t_*, t[\times P \times Q} \Phi(t, \tau)\hat{f}(\tau, u, v)\eta(d(\tau, u, v)). \tag{66}$$

Здесь $\Phi(\cdot,\cdot)$ – матрицант, соответствующий фундаментальной матрице решений однородной однородной системы $\dot{x} = A(t)x$ (для наших целей достаточно рассмотрение $\Phi(t,t_*)$ при $t_0 \leq t_* \leq t \leq \vartheta_0$). Разумеется интеграл в правой части (66) понимается в покомпонентном смысле.

Далее, имея в виду возможность применения неособого линейного преобразования [1], мы будем без потери общности предполагать, что все коэффициенты матрицанта A тождественно (на I_0) равны 0. Тогда при $t_* \in I_0$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathcal{H}_\lambda[t_*]$ и $t \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\varphi(t,t_*,x_*,\eta) = x_* + \int_{[t_0,t[\times P\times Q} \hat{f}(\tau,u,v)\eta(d(\tau,u,v)). \tag{67}$$

Отметим некоторые полезные (и очень простые) особенности варианта МПИ, связанные с выпуклостью.

Заметим, что каждая ν-программа (6) выпукла (линейные комбинации, как обычно, определяются поточечно). Это свойство приводит к выпуклости соответствующих ν-программам областей достижимости (используются свойства интеграла). Отметим также простой факт: если $t_* \in I_0$, $x' \in \mathbb{R}^n$, $x'' \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]$, $\eta_1 \in \Pi_\nu[t_*]$, $\eta_2 \in \Pi_\nu[t_*]$, $\alpha \in [0,1]$ и $t \in [t_*, \vartheta_0]$, то

$$\varphi(t,t_*,\alpha x' + (1-\alpha)x'', \alpha\eta_1 + (1-\alpha)\eta_2) = \alpha\varphi(t,t_*,x',\eta_1) + (1-\alpha)\varphi(t,t_*,x'',\eta_2), \tag{68}$$

где $\alpha\eta_1 + (1-\alpha)\eta_2 \in \Pi_\nu[t_*]$. Всюду в дальнейшем через $C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ обозначаем множество всех функций $g \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ таких, что при всяком $t \in I_0$ функция-сечение

$$g(t,\cdot) \triangleq (g(t,x))_{x\in\mathbb{R}^n}$$

выпукла (вниз) на $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 5. *Если* $g \in C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)$, *то* $\Gamma(g) \in C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Фиксируем $g \in C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)$. Рассмотрим функцию $\Gamma(g) \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$, определенную в (7). Фиксируем $t_* \in I_0$, $x_*^{(1)} \in \mathbb{R}^n$, $x_*^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, а также $\alpha \in [0,1]$. Полагаем $\bar{x} \triangleq \alpha x_*^{(1)} + (1-\alpha)x_*^{(2)}$. Требуется установить, что

$$\Gamma(g)(t_*,\bar{x}) \leq \alpha\Gamma(g)(t_*,x_*^{(1)}) + (1-\alpha)\Gamma(g)(t_*,x_*^{(2)}). \tag{69}$$

Фиксируем $\nu_* \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]$ и $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_0]$, после чего подберем $\eta_*^{(1)} \in \Pi_{\nu_*}[t_*]$ и

$\eta_*^{(2)} \in \Pi_{\nu_*}[t_*]$ так, что при этом

$$(g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, x_*^{(1)}, \eta_*^{(1)})) = \min_{\eta \in \Pi_{\nu_*}[t_*]} g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, x_*^{(1)}, \eta)))\& \\ (g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, x_*^{(2)}, \eta_*^{(2)})) = \min_{\eta \in \Pi_{\nu_*}[t_*]} g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, x_*^{(2)}, \eta))) \quad (70)$$

Введем, $\bar{\eta} \triangleq \alpha\eta_1 + (1-\alpha)\eta_2 \in \Pi_{\nu_*}[t_*]$ (используем выпуклость каждой ν-программы). Тогда в силу (68) и определений $\bar{x}$ и $\bar{\eta}$ получаем, что

$$\varphi(\vartheta_*, t_*, \bar{x}, \bar{\eta}) = \alpha\varphi(\vartheta_*, t_*, x_*^{(1)}, \eta_*^{(1)}) + (1-\alpha)\varphi(\vartheta_*, t_*, x_*^{(2)}, \eta_*^{(2)}). \quad (71)$$

Разумеется, имеет место неравенство

$$\min_{\eta \in \Pi_{\nu_*}[t_*]} g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, \bar{x}, \eta)) \leq g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, \bar{x}, \bar{\eta})) \quad (72)$$

Напомним, что $g(\vartheta_*, \cdot)$ есть непрерывная выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$, а потому в силу (71) и (72) справедливо неравенство

$$\min_{\eta \in \Pi_{\nu_*}[t_*]} g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, \bar{x}, \eta)) \leq \alpha g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, x_*^{(1)}, \eta_*^{(1)})) + \\ + (1-\alpha) g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, x_*^{(2)}, \eta_*^{(2)})).$$

С учетом (70) получаем теперь цепочку неравенств

$$\min_{\eta \in \Pi_{\nu_*}[t_*]} g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, \bar{x}, \eta)) \leq \alpha \min_{\eta \in \Pi_{\nu_*}[t_*]} g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, x_*^{(1)}, \eta)) + \\ + (1-\alpha) \min_{\eta \in \Pi_{\nu_*}[t_*]} g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, x_*^{(2)}, \eta)) \leq \\ \leq \alpha \max_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \max_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]} \min_{\eta \in \Pi_\nu[t_*]} g(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*^{(1)}, \eta)) + \\ + (1-\alpha) \max_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \max_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]} \min_{\eta \in \Pi_\nu[t_*]} g(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*^{(2)}, \eta)) = \\ = \alpha\Gamma(g)(t_*, x_*^{(1)}) + (1-\alpha)\Gamma(g)(t_*, x_*^{(2)}). \quad (73)$$

Поскольку выбор ϑ_* и ν_* был произвольным, из (73) следует, что

$$\Gamma(g)(t_*, \alpha x_*^{(1)} + (1-\alpha)x_*^{(2)}) = \Gamma(g)(t_*, \bar{x}) = \\ = \max_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \max_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]} \min_{\eta \in \Pi_{\nu_*}[t_*]} g(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, \bar{x}, \eta)) \leq \\ \leq \alpha\Gamma(g)(t_*, x_*^{(1)}) + (1-\alpha)\Gamma(g)(t_*, x_*^{(2)}). \quad (74)$$

Поскольку $x_*^{(i)}$, $i = 1, 2$, и α выбирались произвольно, выпуклость функции $\Gamma(g)(t_*, \cdot)$ установлена. Но и t_* выбиралось произвольно, что означает (см. (74)) требуемое свойство $\Gamma(g) \in C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)$. $\square$

Из предложения 5 следует, что $C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ есть Γ-инвариантное подпространство $C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$. Пусть

$$f_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \tag{75}$$

есть заданная непрерывная (на $\mathbb{R}^n$) функция. Будем предполагать в дальнейшем, что f_0 (75) – выпуклая функция. Рассмотрим функцию (16)

$$\varepsilon^0 : I_0 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \tag{76}$$

программного максимина при целевой функции f_0.

Известно [7, с. 186], что $\varepsilon^0 \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$.

Утверждение 6. $\varepsilon^0 \in C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)$.

Доказательство требует только свойство выпукости функции f_0. Оно вполне очевидно (см. [1, с. 379]) в силу свойств функции максимума. □

Напомним метод построения последовательности итераций в $C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$ (18):

$$(\varepsilon^{(0)} \triangleq \varepsilon^0)\&(\varepsilon^{(k)} = \Gamma(\varepsilon^{(k-1)})\ \forall k \in \mathcal{N}). \tag{77}$$

Утверждение 7. $\varepsilon^{(k)} \in C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)\ \forall k \in \mathcal{N}_0$

Доказательство получается из предложений 5, 6 по индукции.

Напомним, что [12, с. 407] последовательность

$$(\varepsilon^{(k)})_{k \in \mathcal{N}_0} : \mathcal{N}_0 \longrightarrow C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)$$

сходится поточечно к функции

$$c_0 \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n) \tag{78}$$

являющейся функцией цены дифференциальной игры с фиксированным временем окончания и терминальным функционалом, определенным посредством f_0. В качестве очевидного следствия отметим положение, отмеченное в [23], [22, с. 212].

Утверждение 8. $c_0 \in C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)$.

Доказательство приводится для полноты изложения. В силу (78) доказательство требует лишь свойства выпуклости функций

$$c_0(t, \cdot) \triangleq (c_0(t, x))_{x \in \mathbb{R}^n}$$

в $\{\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\}$. Фиксируем $t_* \in I_0$ и рассматриваем $c_0(t_*, \cdot)$. Покажем, что данная функция выпукла. Пусть $x_*^{(1)} \in \mathbb{R}^n$, $x_*^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in [0, 1]$ и

$$\bar{x} \triangleq \alpha x_*^{(1)} + (1 - \alpha) x_*^{(2)}.$$

Тогда $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. При этом имеем следующее свойство сходимости

$$(\varepsilon^{(k)}(t_*, x_*^{(1)}))_{k \in \mathcal{N}} \longrightarrow c_0(t_*, x_*^{(1)}), \tag{79}$$

$$(\varepsilon^{(k)}(t_*, x_*^{(2)}))_{k \in \mathcal{N}} \longrightarrow c_0(t_*, x_*^{(2)}), \tag{80}$$

$$(\varepsilon^{(k)}(t_*, \bar{x}))_{k \in \mathcal{N}} \longrightarrow c_0(t_*, \bar{x}), \tag{81}$$

При этом (см. Предложение 7)

$$\varepsilon^{(k)}(t_*, \bar{x}) \leq \alpha \varepsilon^{(k)}(t_*, x_*^{(1)}) + (1 - \alpha) \varepsilon^{(k)}(t_*, x_*^{(2)}) \ \forall k \in \mathcal{N}. \tag{82}$$

Из (79)-(82) следует (в пределе) неравенство

$$c_0(t_*, \bar{x}) \leq \alpha c_0(t_*, x_*^{(1)}) + (1 - \alpha) c_0(t_*, x_*^{(2)}).$$

С учетом определения $\bar{x}$ имеем, в силу произвольности выбора $x_*^{(1)}$, $x_*^{(2)}$ и α, свойство выпуклости $c_0(t_*, \cdot)$. Но и t_* также был выбран произвольным. Поэтому $c_0 \in C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n)$. □

Отметим еще одно наследственное свойство итераций (77) и предельной функции c_0; имеется в виду условия компактности множеств Лебега сечений функций (77) и функции c_0.

$$\tilde{\Omega} \triangleq \{g \in C_{\mathbb{C}}(I_0 \times \mathbb{R}^n) | \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \beta \in [0, \infty[: g(t, \cdot)^{-1}(]-\infty, \alpha]) \subset B_n(\beta) \ \forall t \in I_0\}, \tag{83}$$

где $B_n(\beta)$ – замкнутый евклидов шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат и радиусом β.

Утверждение 9. *Пусть f_0 обладает следующим свойством*

$$f_0^{-1}(]-\infty, \beta]) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n) \ \forall \beta \in \mathbb{R}. \tag{84}$$

Тогда:

1. $\varepsilon^0 \in \tilde{\Omega}$;
2. $\varepsilon^{(k)} \in \tilde{\Omega} \ \forall k \in \mathcal{N}_0$;
3. $c^0 \in \tilde{\Omega}$.

Доказательство. Докажем свойство 1. Пусть $t_* \in I_0$; Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$; рассматривается функция

$$\varepsilon_* \triangleq \varepsilon^0(t_*, \cdot) \in C(\mathbb{R}^n).$$

Тогда при произвольном $\tilde{x}^0 \in \mathbb{R}^n$

$$\varepsilon_*(\tilde{x}^0) = \varepsilon^0(t_*, \tilde{x}^0) = \max_{\nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]} \min_{\eta \in \Pi_\nu[t_*]} f_0(\varphi(\vartheta_0, t_*, \tilde{x}^0, \eta)).$$

Фиксируем $\alpha \in \mathbb{R}$ и рассматриваем множество Лебега

$$\varepsilon_*^{-1}(]-\infty, \alpha]) = \{x \in \mathbb{R}^n | \varepsilon_*(x) \leq \alpha\}. \tag{85}$$

Введем

$$M \triangleq \max_{(t,u,v) \in \Omega_{t_0}} \|\hat{f}(t, u, v)\|.$$

Пусть $x^0 \in \varepsilon_*^{-1}(]-\infty, \alpha])$. Тогда

$$\min_{\eta \in \Pi_\nu[t_*]} f_0(\varphi(\vartheta_0, t_*, x^0, \eta)) \leq \alpha \ \forall \nu \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]. \tag{86}$$

Напомним, что $\mathcal{E}_\lambda[t_*] \neq \varnothing$. Пусть $\nu_* \in \mathcal{E}_\lambda[t_*]$. Тогда из (86) при некотором $\eta_* \in \Pi_{\nu_*}[t_*]$

$$f_0(\varphi(\vartheta_0, t_*, x^0, \eta_*)) \leq \alpha.$$

Это означает, что

$$\varphi(\vartheta_0, t_*, x^0, \eta_*) \in f_0^{-1}(]-\infty, \alpha]).$$

Из (67) и определения M имеем, что

$$\|\varphi(\vartheta_0, t_*, x^0, \eta_*) - x^0\| \leq M(\vartheta_0 - t_0). \tag{87}$$

По выбору f_0 имеем из (84) что,

$$f_0^{-1}(]-\infty, \alpha]) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n),$$

а потому можно указать число $a \in]0, \infty[$, для которого

$$\|z\| \leq a \ \forall z \in f_0^{-1}(]-\infty, \alpha]). \tag{88}$$

Тогда из (88), (87) имеем, что

$$\|x^0\| \leq a + M(\vartheta_0 - t_0). \tag{89}$$

Поскольку x^0 выбиралось произвольно, то

$$\varepsilon_*^{-1}(]-\infty, \alpha]) \subset B_n(a + M(\vartheta_0 - t_0));$$

иными словами (по определению ε_*) имеем

$$\varepsilon^0(t_*,\cdot)^{-1}(]-\infty,\alpha])\subset B_n(a+M(\vartheta_0-t_0)).$$

Но и t_* выбиралось произвольно. Следовательно,

$$\varepsilon^0(t,\cdot)^{-1}(]-\infty,\alpha])\subset B_n(a+M(\vartheta_0-t_0))\ \forall t\in I_0. \tag{90}$$

Разумеется, число a зависит от α. С учетом предложения 6, (83) и (90) имеем свойство $\varepsilon^0\in\tilde{\Omega}$. Мы установили свойство 1.

Далее, напомним, что

$$g(t,x)\le\Gamma(g)(t,x)\ \forall g\in C(I_0\times\mathbb{R}^n)\ \forall(t,x)\in I_0\times\mathbb{R}^n.$$

Поэтому в силу (77) имеем

$$\varepsilon^0(t,x)\le\varepsilon^{(k)}(t,x)\ \forall k\in\mathcal{N}_0\ \forall(t,x)\in I_0\times\mathbb{R}^n. \tag{91}$$

Стало быть,

$$\forall k\in\mathcal{N}_0\forall\gamma\in\mathbb{R}\forall t\in I_0:\ \varepsilon^{(k)}(t,\cdot)^{-1}(]-\infty,\gamma])\subset\varepsilon^0(t,\cdot)^{-1}(]-\infty,\gamma]).$$

Поэтому в силу предложения 7 и (90) имеем

$$\varepsilon^{(k)}\in\tilde{\Omega}\ \forall k\in\mathcal{N}_0. \tag{92}$$

Из (91) имеем, что

$$\varepsilon^0(t,x)\le c_0(t,x)\ \forall k\in\mathcal{N}_0.$$

Как следствие, у нас $\forall\gamma\in\mathbb{R}\forall t\in I_0$

$$c_0(t,\cdot)^{-1}(]-\infty,\gamma])\subset\varepsilon^0(t,\cdot)^{-1}(]-\infty,\gamma]).$$

С учетом предложения 68 и (90) мы получаем, что $c_0\in\tilde{\Omega}$, то есть свойство 3 также установлено. □

Полезно отметить, что функция f_0, определяемая евклидовым расстоянием до выпуклого компакта, обладает свойством (84)

Список литературы

[1] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974, 456с.

[2] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи движения // ПММ, 1970, Т. 37, №6, С. 1005–1022.

[3] *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения-уклонения – I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, №2, С. 3–18.

[4] *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения-уклонения – II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, №3 С. 22–42.

[5] *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированном результате. М.: Наука, 1985, 520с.

[6] *Красовский Н. Н.* Дифференциальные игры. Аппромаксионные и формальные модели // Математ. сб., 1978, Т. 107, №4, С. 541–571.

[7] *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981, 287с.

[8] *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970, 420с.

[9] *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., Наука, 1968, 475с.

[10] *Куржанский А. Б., Осипов Ю. С.* К задаче об управлении при стесненных координатах // ПММ, 1969, Т. 33, вып. 4, С. 705–719.

[11] *Ченцов А. Г.* О структуре одной игровой задачи сближения // ДАН СССР, 1975, Т. 224, №6, С. 1272–1275.

[12] *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Матем. сб., 1976, Т. 99, № 3. С. 394–420.

[13] *Чистяков С. В.* К решению игровых задач преследования // ПММ, 1977, Т. 41, №5. С. 825–832.

[14] *Меликян А. А.* Цена игры в линейной дифференциальной игре сближения // ДАН, 1977, Т. 237, №3, С. 521–524.

[15] *Ухоботов В. И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // ПММ, 1977, Т. 41, № 2. с. 358–364.

[16] *Невё Ж.*, Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969, 310с.

[17] *Биллингсли*, Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351с.

[18] *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.,* Линейные операторы, т. I. М.: ИЛ, 1962, 896с.

[19] *Шварц Л.*, Анализ, М.: Мир, 1972, 838с.

[20] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977, 624с..

[21] Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления, Тбилиси: Изд-во. Тбилисского университета, 1977, 253с.

[22] *Субботин А. И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка порядка. Ижевск: РХД, 2003, 336с.

[23] *Субботин А. И.*, Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби, М.: Наука, 1991, 215с.

[24] *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби и ее обобщения // Труды МИ РАН, 1999. Т. 224. С. 311–334.

[25] *Ченцов А. Г.* К игровой задаче наведения // ДАН СССР, 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.

[26] *Ченцов А. Г.* К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений // Известия ВУЗов. Математика, 2000, №3. С. 66–76.

[27] *Ченцов А. Г.* Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итерацмй I // Дифференциальные уравнения, 2001, Т. 37, №4, С. 470-480.

[28] *Ченцов А. Г.* Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итерацмй II // Дифференциальные уравнения, 2001, Т. 37, №5, С. 679-688.

[29] *Ченцов А. Г.* Метод программных итераций в абстрактных задачах управления //ПММ, 2004, Т. 68, №4, С. 573–585.

[30] *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986, 751с.

[31] *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967, 223с.