ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2006
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Об одной модификации правил экстремального сдвига Н.Н.Красовского и А.И.Субботина[1]

Ю.В.Авербух

Россия, 620219, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16,
Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук,
e-mail: ayv@immm.uran.ru

Аннотация.

В работе исследуются вопрос о наведении конфликтно-управляемой системы на целевое множество методами экстремального сдвига. Рассматриваются аналоги процедур позиционного управления и управления с поводырем в случае, когда прицеливание ведется на множества, построенные методом программных итераций.

1 Введение

Статья посвящена вопросу приведения конфликтно управляемой системы на целевое множество в заданный момент времени методами экстремального прицеливания и экстремального управления с поводырем. Мы рассматриваем

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-01-00414.

стратегии экстремальные к множествам, близким к множеству позиционного поглощения. Структура нелинейной дифференциальной игры наведения исчерпывающим образом характеризуется теоремой об альтернативе, доказанной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным [1], [2]; она утверждает существование седловой точки в классе позиционных стратегий при выполнении условия информационной согласованности. Также известен вид оптимальной стратегии в задаче наведения [2]: стратегия строится методом экстремального сдвига на множество позиционного поглощения для первого игрока; множество позиционного поглощения для первого игрока является максимальным u-стабильным мостом в смысле Н. Н. Красовского. Таким образом, благодаря теореме об альтернативе задача наведения сведена к построению множества позиционного поглощения. Также альтернатива справедлива и в классе стратегий по принципу управления с поводырем [2], [17].

Физически реализуемыми являются пошаговые движения в смысле Н. Н. Красовского. Согласно теореме об альтернативе, если пошаговое движение выходит из позиции, принадлежащей u-стабильному мосту и построено методом экстремального сдвига в некоторые моменты времени на u-стабильный мост, то расстояние от этого пошагового движения до рассматриваемого u-стабильного моста стремится к 0 при уменьшении мелкости разбиения, образованного выбранными моментами времени.

Конкретное построение стабильного моста при выполнении известных условий регулярности (см. [2]–[4]) удается реализовать на основе вспомогательных программных конструкций. На основе этих конструкций А. Г. Ченцовым [5]–[7] (см. также [8]–[10]) был предложен метод программных итераций (МПИ), сводящий дифференциальную игру общего вида к последовательности игровых задач программного управления. Метод программных итераций также применим в задаче построения функции цены. Аналоги процедур МПИ были применены А. И. Субботиным и А. Г. Ченцовым для решения уравнения Гамильтона-Якоби [11], [12].

Позднее в [13]–[15] был предложен вариант МПИ для построения наследственного мультиселектора заданной мультифункции. Этот вариант МПИ используется для построения решения дифференциальных игр в классе квазистратегий и является по смыслу прямым [16].

Возвращаясь к ранним версиям МПИ, отметим что А. Г. Ченцов построил несколько различных по смыслу вариантов МПИ, приводящих к множествам позиционного поглощения (см. [17], [19],[20]). Известно [21], [22], что в случае компактности целевого множества, последовательность множеств, реализующая каждый из вариантов МПИ, сходится к множеству позиционного поглощения в метрике Хаусдорфа. В настоящей работе предложены аналоги правила экстремального сдвига на элементы этих последовательностей. Также рассматриваются аналоги экстремального управления с поводырем.

2 Общие определения и обозначения

Рассматривается конфликтно управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \tag{1}$$

$t \in I_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$, $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$ – вещественная прямая), $u \in P$, $v \in Q$. Предполагается, что P и Q – непустые компакты в конечномерных арифметических пространствах. На выбор функции f наложены традиционные условия [2]: функция f непрерывна, локально липшицева по переменной x, и удовлетворяет условию подлинейного роста: существует $\varkappa$, $\varkappa > 0$, такое, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \varkappa(1 + \|x\|) \ \forall t \in I_0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall u \in P \ \forall v \in Q.$$

Также будем предполагать, что выполнено условие седловой точки в маленькой игре (условие Айзекса):

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} < s, f(t, x, u, v) >= \min_{u \in P} \max_{v \in Q} < s, f(t, x, u, v) > \tag{2}$$

для всех $s \in \mathbb{R}^n$ и $(t, x) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$.

Через $\|\cdot\|$ обозначаем евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом случае расстояние от x до компактного множества $C \subset \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$d[x, C] \triangleq \min_{y \in C} \|x - y\|.$$

На семействе всех непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ введем метрику Хаусдорфа $\mathbf{h}$ по стандартному правилу: если C_1 и C_2 – непустые компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, то значение метрики Хаусдорфа $\mathbf{h}$ определим как

$$\mathbf{h}(C_1, C_2) \triangleq \sup\{\max_{x \in C_1} d[x, C_2]; \max_{x \in C_2} d[x, C_1]\}.$$

Для двух позиций (t_1, x_1) и (t_2, x_2) определим расстояние

$$\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \triangleq \sup\{|t_1 - t_2|, \|x_1 - x_2\|\}.$$

Если (t, x) – некоторая позиция, $D \subset I_0 \times \mathbb{R}^n$ определим растояние от позиции до множества по формуле:

$$\mathbf{d}[(t, x), D] \triangleq \min\{\rho((t, x), (\tau, y)) : (\tau, y) \in D\}.$$

Также на семействе всех непустых компактных подмножеств $I_0 \times \mathbb{R}^n$ введем метрику Хаусдорфа $\mathbf{H}$: если D_1, D_2 непустые компакты в $I_0 \times \mathbb{R}^n$, то

$$\mathbf{H}(D_1, D_2) \triangleq \sup\{\max_{(t,x)\in D_1} \mathbf{d}[(t, x), D_2]; \max_{(t,x)\in D_2} \mathbf{d}[(t, x), D_1]\}.$$

Если $W \subset I_0 \times \mathbb{R}^n$, $t_* \in I_0$, то через $W[t_*]$ мы обозначаем сечение W гиперплоскостью $t = t_*$:

$$W[t_*] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : (t_*, x) \in W\}.$$

Рассматривается задача наведения на множество $M \subset \mathbb{R}^n$ в момент времени ϑ_0 в классе позиционных стратегий первого игрока [2]. Предполагается, что M – компакт. Пошаговое движение в силу позиционной стратегии $U(t, x)$ из позиции (t_*, x_*) определяется следующим образом [2]: пусть $\Delta = \{t_k\}_{k=0}^N$ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, $v[\cdot]$ – измеримое управление второго игрока, ломаной Эйлера $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, t_*, x_*, U, v[\cdot]]$ называется абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнениям

$$x_\Delta[t] = x_\Delta[t_k] + \int_{t_k}^{t} f(\theta, x_\Delta[\theta], u_k, v[\theta])d\theta$$

на отрезках $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, N-1}$; здесь $u_k = U(t_k, x_\Delta[t_k])$, $x_\Delta[\tau_0] = x_*$.

В теории дифференциальных игр обыкновенно рассматриваются пределы ломаных Эйлера при стремлении мелкости разбиения к 0 – конструктивные движения [2].

Как говорилось выше, структура решений дифференциальной игры определяется теоремой об альтернативе. Из нее следует, что множество позиций, для которых существует позиционная стратегия, доставляющая наведение конструктивного движения на M в момент ϑ_0, является максимальным (наибольшим) u-стабильным мостом: W – u-стабильный мост [2], [12], если $W[\vartheta_0] \subset M$ и для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$, любого $v_* \in Q$ существует решение $x(\cdot)$ дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{F}_u(t, x(t), v_*) \triangleq \mathrm{co}\{f(t, x(t), u, v_*) : u \in P\} \tag{3}$$

такое, что $x(t_*) = x_*$, со свойством $x(t) \in W[t]$, $t \geq t_*$. Максимальный (наибольший в смысле вложения) u-стабильный мост является множеством позиционного поглощения [2], обозначим его через $\mathfrak{W}$. В этом случае позиционная стратегия, разрешающая задачу наведения, определяется методом экстремального сдвига. Из определения стабильности следует, что если $\mathfrak{W}[t^*] \neq \varnothing$ для некоторого $t^* \in I_0$, то $\mathfrak{W}[t] \neq \varnothing$ для всех $t \in [t^*, \vartheta_0]$.

Множество позиционного поглощения может быть построено методом программных итераций. Существует несколько вариантов метода программных итераций. В настоящей работе мы рассмотрим некоторые из них.

Пусть E – множество, $\tilde{E}$ σ-алгебра подмножеств E. Обозначим через $(\sigma - \text{add})_+[\tilde{E}]$ – конус всех неотрицательных вещественнозначных мер на $\tilde{E}$.

Следуя [6], [17], введем при $t \in I_0$ компакты

$$Y_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P,\ Z_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times Q,\ \Omega_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P \times Q, \tag{4}$$

оснащаемые σ-алгебрами $\mathcal{K}_t$, $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{C}_t$ борелевских подмножеств соответственно. При этом, конечно, множества-произведения в (4) оснащаются обычными топологиями покоординатной сходимости, а упомянутые σ-алгебры порождены этими топологиями [23]. Кроме того, при $t \in I_0$ вводим σ-алгебру $\mathcal{T}_t$ борелевских подмножеств отрезка $[t, \vartheta_0]$.

Введем следующие множества:

$$\mathcal{R}_t \triangleq \{\mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{K}_t] | \mu(\Gamma \times P) = \lambda_t(\Gamma)\ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\},$$

$$\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{D}_t] | \nu(\Gamma \times Q) = \lambda_t(\Gamma)\ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\},$$

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{C}_t] | \eta(\Gamma \times P \times Q) = \lambda_t(\Gamma)\ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}.$$

Меры $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$ являются аналогами обычных управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, меры $\eta \in \mathcal{H}_t$ – аналогами пар управлений $(u(\cdot), v(\cdot))$.

Кроме этого для каждого $t \in [t_0, \vartheta_0]$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$ введем множество мер из $\mathcal{H}_t$, согласованных с ν:

$$\Pi_t[\nu] \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t | \eta(D \boxtimes P) = \nu(D)\ \forall D \in \mathcal{D}_t\}. \tag{5}$$

Здесь

$$D \boxtimes P \triangleq \{(t, u, v) : u \in P, (t, v) \in D\}\ \forall D \in \mathcal{D}_t.$$

Для каждой меры $\mu \in \mathcal{R}_t$ и элемента $v_* \in Q$ обозначим через $\mu \odot v_*$ такую меру из $\mathcal{C}_t$, определенную по правилу

$$(\mu \odot v_*)(C) \triangleq \mu(\{(t,u) : (t,u,v_*) \in C\}).$$

Пусть $\delta_v \in \mathcal{E}_t$ – мера, определенная по правилу:

$$\delta_{v_*}(D) = \lambda(\{t : (t,x) \in D\}) \ \forall D \in \mathcal{D}_t.$$

Тогда для каждого t, любая мера $\eta \in \Pi_t[\delta_v]$ представима в виде

$$\eta = \mu \odot v_*.$$

В самом деле, для по данной мере η определим меру на измеримом пространстве $(Y_t, \mathcal{K}_t)$

$$\mu(K) \triangleq \eta(K \times \{v_*\}) \ \forall K \in \mathcal{K}_t.$$

Докажем, что $\mu \odot v = \eta$. В самом деле, для любого множества $C \in \mathcal{C}_t$

$$\eta(C) = \eta(C \cap \{v_*\}) + \eta(C \setminus \{v_*\}).$$

Рассмотрим $\eta(C \setminus \{v_*\})$. Обозначим через $\Gamma \triangleq \{t : \exists u \in P \exists v \in Q : \ (t,u,v) \in C\}$. Тогда,

$$\eta(C \setminus \{v_*\}) \leq \eta(\Gamma \times P \times (Q \setminus \{v_*\})).$$

Поскольку $\eta \in \Pi_t[\delta_{v_*}]$

$$\eta(\Gamma \times P \times (Q \setminus \{v_*\})) = 0.$$

Положим $K \triangleq \{(t,u) : (t,u,v_*) \in C \cap \{v_*\}\}$. Тогда $C \cap \{v_*\} = K \times \{v_*\}$. Следовательно,

$$\eta(C) = \eta(C \cap \{v_*\}) = \eta(K \times \{v_*\}) = \mu(K).$$

Что и доказывает требуемое равенство.

Для каждой меры $\eta \in \mathcal{C}_t$ и каждой позиции (t_*, x_*) обозначим через $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)$ решение уравнения

$$x(t) = x_* + \int_{\Omega_{t_*}} f(\theta, x(\theta), u, v)\eta(d(\theta, u, v)). \tag{6}$$

Заметим также, что для фиксированных $v \in Q$ и позиции (t_*, x_*) множество всех функций $\{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \odot v_*) : \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\}$ совпадает с множеством решений дифференциального включения (3) выходящих из позиции (t_*, x_*).

Таким образом свойство стабильности можно переформулировать следующим образом: множество $W \subset I_0 \times \mathbb{R}^n$ называется u-стабильным, если для каждой позиции $(t_*, x_*) \in W$ и $v_* \in Q$ существует мера $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$, что $\varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v_*) \in W[t]\ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]$.

Введем теперь операторы програмного поглощения: пусть E – замкнутое множество, положим

$$A(E) \triangleq \{(t_*, x_*) \in E : \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists \eta \in \Pi_{t_*}[\nu] : \\ (\varphi(\vartheta_0, t_*, x_*, \eta) \in M \& \forall t \in [t_*, \vartheta_0]\ \varphi(t, t_*, x_*, \eta) \in E[t])\},$$

$$\mathbf{A}(E) \triangleq \{(t_*, x_*) \in E : \forall v \in Q \exists \mu \in \mathcal{R}_{t_*} : \\ (\varphi(\vartheta_0, t_*, x_*, \mu \odot v) \in M \& \forall t \in [t_*, \vartheta_0]\ \varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v) \in E[t])\}.$$

Различие между оператором A и $\mathbf{A}$ состоит в том, что в первом случае рассматриваются реакции на все обобщенные управления второго игрока, а во втором, реакции на обычные, притом постоянные управления второго игрока.

Используя операторы программного поглощения, определим две последовательности множеств $\{W^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{W_j\}_{k=0}^{\infty}$, следуя [17], [19] по правилу:

$$W^{(0)} \triangleq I_0 \times \mathbb{R}^n,\ W^{(k)} \triangleq A(W^{(k-1)})\ \forall k \in \mathbb{N};$$

$$W_0 \triangleq I_0 \times \mathbb{R}^n,\ W_k \triangleq \mathbf{A}(W_{k-1})\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

В [21], [22] показано, что множества $W^{(k)}[t]$, $W_k[t]$, для $k \in \mathbb{N}$, и $\mathfrak{W}[t]$ компактны при $t \in I_0$. Также в [21], [22] доказано, что

$$\mathbf{H}(W^{(k)}, \mathfrak{W}) \to 0,\ \mathbf{H}(W_j, \mathfrak{W}) \to 0,\ k \to \infty.$$

Также, если $t \in [t_0, \vartheta_0]$ такого, что $\mathfrak{W}[t] \neq \varnothing$, то $W^{(k)}[t] \neq \varnothing$, $W_j[t] \neq \varnothing$, $k \in \mathbb{N}$ и

$$\mathbf{h}(W^{(k)}[t], \mathfrak{W}[t]) \to 0,\ \mathbf{h}(W_j[t], \mathfrak{W}[t]) \to 0,\ k \to \infty. \tag{7}$$

3 Формулировка основного результата

Пусть $V \subset I_0 \times \mathbb{R}^n$ замкнуто. Пусть, также, $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ – некоторое множество моментов времени ($\tau_j < \tau_{j+1}$). Мы будем формировать пошаговое движение (ломаную Эйлера) методом экстремального сдвига Н. Н. Красовского и А. И. Субботина в моменты τ_j на множество V. Иными словами, на промежутке $[\tau_j, \tau_{j+1}[$ управление u_j формируется следующим образом: если x_j – положение системы в момент времени τ_j, y_j – ближайшая к x_j – точка множества $V[\tau_j]$, то u_j выбирается по правилу

$$\max_{v\in Q} < x_j - y_j, f(\tau_j, x_j, u_j, v) >= \min_{u\in P} \max_{v\in Q} < x_j - y_j, f(\tau_j, x_j, u, v) > . \qquad (8)$$

Если (τ_0, x_0) – некоторая позиция, $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ – разбиение отрезка $[\tau_0, \vartheta_0]$, $j \in \mathcal{N}$, то обозначим через $X^{(k)}_{\Delta,x_0}$ множество ломаных Эйлера, выходящих из (τ_0, x_0) и полученных методом экстремального сдвига в моменты τ_j на множество $W^{(k)}$, через X_{k,Δ,x_0} – множество ломаных Эйлера, выходящих из (τ_0, x_0) и полученных методом экстремального сдвига в моменты τ_j на множество W_k.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $\tau_* \in I_0$ такой момент времени, что $\mathfrak{W}[\tau_*] \neq \varnothing$, и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$, удовлетворяющего условию*

$$\max_{j=\overline{0,N-1}} (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \delta,$$

существует $K \in \mathbb{N}$ со свойством: для любого $k > K$ и любого $x_* \in W^{(k)}[\tau_*]$

$$d(x[\vartheta_0], M) \leq \varepsilon \ \forall x[\cdot] \in X^{(k)}_{\Delta,x_*}.$$

Аналогичная теорема справедлива и для случая прицеливания на множества W_j.

Теорема 2. *Пусть $\tau_* \in I_0$ такой момент времени, что $\mathfrak{W}[\tau_*] \neq \varnothing$, и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$, удовлетворяющего условию*

$$\max_{j=\overline{0,N-1}} (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \delta,$$

существует $K \in \mathbb{N}$ со свойством: для любого $k > K$ и любого $x_* \in W_j[\tau_*]$

$$d(x[\vartheta_0], M) \leq \varepsilon \ \forall x[\cdot] \in X_{k,\Delta,x_*}.$$

Наряду с позиционными стратегиями мы рассмотрим процедуру управления с поводырем. В настоящей работе мы рассматриваем аналог экстремальных стратегий управлений с поводырем, предложенных Н.Н.Красовским и А.И. Субботиным [2], [18]. Пусть Y', Y'' два множества, обладающих следующими свойствами:

1. $Y'' \subset Y'$;

2. для всякой позиции $(\theta_*, y_*) \in Y''$ и каждого $v \in Q$ существует $\mu \in \mathcal{R}_{\theta_*}$ такое, что справедливо включение

$$\varphi(t, \theta_*, y_*, \mu \odot v) \in Y'[t] \ \forall t \in [\theta_*, \vartheta_0]. \tag{9}$$

Как известно [17], стратегия по принципу управления с поводырем представляет собой тройку (U, ψ, χ). Функция $U(t, x, w)$ – функция, которая формирует управление системой в момент времени t, при услови, что система находится в положении x а поводырь в положении w, функция $\psi(t^*, t_*, x_*, w_*)$ – переходная функция поводыря, равная положению поводыря в момент t^* при условии того, что система и поводырь в момент времени t_* находятся соответственно в точках x_* и w_*, функция $\chi(t_0, x_0)$ – функция равная начальному положению поводыря.

Для каждых $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $w_* \in \mathbb{R}^n$ найдем u_*, v_* такие, что

$$\max_{v \in Q} < w_* - x_*, f(t_*, x_*, u_*, v) >= \min_{u \in P} \max_{v \in Q} < w_* - x_*, f(t_*, x_*, u, v) >, \tag{10}$$

$$\min_{u \in P} < w_* - x_*, f(t_*, x_*, u, v_*) >= \min_{u \in P} \max_{v \in Q} < w_* - x_*, f(t_*, x_*, u, v) > . \tag{11}$$

Положим

$$U(t_*, x_*, w_*) \triangleq u_*. \tag{12}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $w_* \in Y''[t_*]$. Для этого мы построим соответствующие начальную и переходную функции поводыря. По условию существует мера $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$, что включение (9) справедливо при $\theta_* = t_*$, $y_* = w_*$, $v = v_*$. Пусть $t^* \geq t_*$. Положим $y^* \triangleq \varphi(t^*, t_*, w_*, \mu \odot v_*)$. Пусть $w^* \in Y''[t^*]$ – ближайший к y^* элемент $Y''[t^*]$. Положим

$$\psi(t^*, t_*, x_*, w_*) \triangleq w^*. \tag{13}$$

Отметим, что функция ψ не зависит от x_*, поэтому в дальнейшем мы будем опускать аргумент x_*. Наконец определим функцию $\chi(t_0, x_0)$ по следующему правилу: пусть $w_0 \in Y''[t_0]$ – ближайший к x_0 элемент $Y[t_0]$, положим

$$\chi(t_0, x_0) \triangleq w_0. \tag{14}$$

Как видно из построения положение поводыря в каждый момент времени лежат в сечении множества Y''.

В дальнейшем мы будем рассматривать случай наличия информационных помех. А именно, мы предполагаем положение системы используемое при определении U известно неточно, при чем

$$\|x_* - \tilde{x}_*\| \leq \sigma.$$

Здесь x_* – точное положение системы, $\tilde{x}_*$ – известное при формировании управления.

Пусть теперь, (t_*, x_*) – некоторая точка, $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^N$ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, σ – уровень информационных помех. Положим $w_0 \triangleq \chi(t_*, \tilde{x}_*)$, где $\tilde{x}_*$ – некоторая точка, что $\|x_* - \tilde{x}_*\| \leq \sigma$. Если x_j, w_j – положение системы и поводыря в момент времени τ_j, $(j = \overline{0, N-1})$, то положим $u_j \triangleq U(\tau_j, \tilde{x}_j, w_j)$, ($\tilde{x}_j$ - некоторая точка такая, что $\|\tilde{x}_j - x_j\| \leq \sigma$). Ломаную Эйлера на отрезке времени $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ определим, следуя [2], как решение уравнения

$$x[t] = x_j + \int_{\tau_j}^{t} f(\xi, x[\xi], u_j, v[\xi]) d\xi. \tag{15}$$

Здесь $v[\cdot]$ – некоторое управление второго игрока. При этом положение поводыря в момент τ_{j+1} равно $w_{j+1} \triangleq \psi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j)$. В случае если в качестве пары Y' и Y'' рассматривается пара множеств $W^{(k)}$, $W^{(k+1)}$ $(k \in \mathbb{N})$ обозначим множество всех ломаных Эйлера, получающихся при переборе всех допустимых управлений второго игрока $v[\cdot]$ и информационных помех, через $Z^{(k),[\sigma]}_{\Delta,x_*}$. Если же в качестве пары множеств рассматриваются пары множеств W_k, W_{k+1} $(k \in \mathbb{N})$, то соответствующее множество ломаных Эйлера обозначим через $Z^{[\sigma]}_{k,\Delta,x_*}$.

Теорема 3. *Пусть $\tau_* \in I_0$ такой момент времени, что $\mathfrak{W}[\tau_*] \neq \varnothing$, и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $\zeta > 0$, $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^N$ отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$, удовлетворяющего условию*

$$\max_{j=\overline{0,N-1}} (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \delta,$$

существует $K \in \mathbb{N}$ со свойством: для любого $k > K$ и любого $x_* \in W^{(k)}[\tau_*]$

$$d(x[\vartheta_0], M) \leq \varepsilon \ \forall x[\cdot] \in Z^{(k),[\zeta]}_{\Delta,x_*}.$$

Аналогичная теорема справедлива и для движений из $Z^{[\sigma]}_{k,\Delta,x_*}$.

Теорема 4. *Пусть $\tau_* \in I_0$ такой момент времени, что $\mathfrak{W}[\tau_*] \neq \varnothing$, и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $\zeta > 0$, $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^N$ отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$, удовлетворяющего условию*

$$\max_{j=\overline{0,N-1}}(\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \delta,$$

существует $K \in \mathbb{N}$ со свойством: для любого $k > K$ и любого $x_* \in W^{(k)}[\tau_*]$

$$d(x[\vartheta_0], M) \leq \varepsilon \ \forall x[\cdot] \in Z^{[\zeta]}_{k,\Delta,x_*}.$$

4 Оценка расхождения при прицеливании на близкое множество на одном шаге

В настоящем разделе мы получим оценку, являющуюся аналогом леммы Н. Н. Красовского и А. И. Субботина об оценке расстояния между движениями при экстремальном прицеливании одного движения на другое. Отличие от леммы в [2] состоит в том, что направление прицеливание задается с ошибкой; размер ошибки задается величиной α. Рассматриваемое утверждение переходит в лемму Н. Н. Красовского и А. И. Субботина при $\alpha = 0$.

Утверждение 1. *Пусть $\alpha, \sigma \geq 0$, $x_*^{(1)}, x_0^{(1)}, x_*^{(2)}, z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| \leq \alpha$, $\|x_0^{(1)} - x_*^{(1)}\| \leq \sigma$, $\tau^* \in I_0$, постоянные управления $\hat{u}$ и v^* выбраны из условий*

$$\max_{v\in Q} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)} + z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v) >=$$
$$= \min_{u\in P}\max_{v\in Q} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)} + z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v) >, \quad (16)$$

$$\min_{u\in P} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x^{(1)}, u, v^*) >=$$
$$= \max_{v\in Q}\min_{u\in P} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x^{(1)}, u, v) > . \quad (17)$$

Рассмотрим движения $x_0^{(1)}[t]$, $x_*^{(2)}(t)$ такие, что $x_0^{(1)}[\tau^*] = x_0^{(1)}$,

$$\dot{x}_0^{(1)}[t] = f(t, x_0^{(1)}[t], \hat{u}, v[t])$$

($v[\cdot]$– измеримое управление 2-го игрока, $v[t] \in Q$), $x_*^{(2)}[\tau^*] = x_*^{(2)}$,

$$\dot{x}_*^{(2)}(t) \in \mathcal{F}_u(t, x_*^{(2)}(t), v^*). \quad (18)$$

$\mathcal{F}_u(\cdot,\cdot,\cdot)$ *определяется так же, как в (3). Обозначим*

$$\rho(t) \triangleq \|x_0^{(1)}[t] - x_*^{(2)}(t)\|.$$

В этом случае существуют постоянные $\beta > 0$, $M > 0$, M_1 *и функции* $\varphi(\cdot)$ ($\varphi(\xi) \to 0$ *при* $\xi \to 0$) *такие, что для любого* $\delta > 0$

$$\rho^2(\tau^* + \delta) \leq \rho^2(\tau^*)(1 + \beta\delta) + (\varphi(\delta) + M\alpha + M_1\sigma)\delta. \tag{19}$$

Оценка (19) является равномерной в каждой ограниченной области $x_*^{(1)}, x_*^{(2)} \in G \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Фиксируем ограниченную область $G \subset \mathbb{R}^n$. Существует ограниченная область $G_1 \subset \mathbb{R}^n$, такая, что для всех $x' \in G$, $t' \in I_0$ решение, выходящее из (t', x'), не покидает G_1. Обозначим

$$K \triangleq \max\{\|f(t,x,u,v)\| : t \in I_0, x \in G_1, u \in P, v \in Q\} < \infty.$$

Пусть $f^{(1)}[t] = f(t, x_0^{(1)}[t], \hat{u}, v[t])$, измеримая функция $f^{(2)}(t)$ такова, что $f^{(2)}(t) = \dot{x}_*^{(2)}(t) \in \mathcal{F}_u(t, x^{(2)}(t), v^*)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\rho^2(t) = \|x_0^{(1)} - x_*^{(2)} + \int_{\tau^*}^t \{f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)\}d\theta\|^2 = \\
= \|x_0^{(1)} - x_*^{(2)}\|^2 + 2 < x_0^{(1)} - x_*^{(2)}, \int_{\tau^*}^t \{f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)\}d\theta > + \\
+ \left\| \int_{\tau^*}^t \{f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)\}d\theta \right\|^2 \leq \\
\leq \|x_0^{(1)} - x_*^{(2)}\|^2 + 2\int_{\tau^*}^t < x_0^{(1)} - x_*^{(2)}, f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta) > d\theta + \\
+ \left\{ \int_{\tau^*}^t \|f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)\| d\theta \right\}^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку

$$\|f^{(1)}[\theta]\|, \ \|f^{(2)}[\theta]\| \leq K,$$

$$\rho^2(t) \leq \rho^2(\tau^*) + 2\int_{\tau^*}^t < x_0^{(1)} - x_*^{(2)}, f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta) > d\theta + 4K^2(t - \tau^*)^2. \tag{21}$$

Оценим теперь $< x_0^{(1)} - x_*^{(2)}, f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta) >$

По теореме Каратеодори вектор $f^{(2)}(t)$, который содержится в $\mathcal{F}_u(t, x_*^{(2)}(t), v^*)$, может быть представлен в виде

$$f^{(2)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_t^{(i)} f(t, x_*^{(2)}(t), u_t^{(i)}, v^*),$$

$$\alpha_t^{(i)} \geq 0, \sum_{k=0}^{n} \alpha_t^{(i)} = 1, \quad u_t^{(i)} \in P.$$

Учитывая непрерывность функции f и локальную липшицевость по фазовой переменной, мы получаем, что

$$\begin{gathered} f^{(2)}[\theta] = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_\theta^{(i)} f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*) + \Delta f^{(2)}(\theta), \\ \|\Delta f^{(2)}(\theta)\| \leq \lambda \|x_0^{(1)} - x_*^{(2)}\| + \lambda \|x_0^{(1)} - x_*^{(1)}\| + \varphi^*(\theta - \tau^*). \end{gathered} \tag{22}$$

Здесь λ – постоянная Липшица по x в области G_1, $\varphi^*(\cdot)$ – модуль непрерывности сужения функции f на компакт $I_0 \times G_1 \times P \times Q$. Из равномерной непрерывности рассматриваемого сужения функции f следует, что

$$\lim_{\delta \to 0} \varphi^*(\delta) = 0.$$

Также, вектор $f^{(1)}[\theta]$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} f^{(1)}[\theta] = f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) + \Delta f^{(1)}(\theta), \\ \|\Delta f^{(1)}(t)\| \leq \varphi^*(\theta - \tau^*) + \lambda \|x_0^{(1)} - x_*^{(1)}\|. \end{gathered} \tag{23}$$

Используя представления (22) и (23), получаем

$$\begin{aligned} &< x_0^{(1)} - x_*^{(2)}, f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta) > \ \leq \\ &\quad \leq \ < x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_\theta^{(i)} f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*) > + \\ &\qquad + \lambda \|x_0^{(1)}[\tau^*] - x_*^{(2)}(\tau^*)\|^2 + 2\varphi^*(\theta - \tau^*) \|x_0^{(1)} - x_*^{(2)}\| + \\ &\qquad\qquad + 2\lambda \|x_0^{(1)} - x_*^{(2)}\| \cdot \|x_0^{(1)} - x_*^{(1)}\|. \end{aligned} \tag{24}$$

Оценим

$$< x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_\theta^{(i)} f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*) > .$$

Заметим, что

$$| < s+z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v) > - < s, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v) > | \le \alpha K \qquad (25)$$

для всех $s \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| \le \alpha$, $\tau^* \in I_0$, $x_*^{(1)} \in G$, $u \in P$, $v \in Q$. Из определения $\hat{u}$ и v^* (см. (16) и (17)) следует, что

$$\begin{aligned} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) > - < x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*) > \le \\ \le \max_{v \in Q} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)} + z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v) > - \\ - \min_{u \in P} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v^*) > + \alpha K = \\ = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)} + z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v) > - \\ \max_{v \in Q} \min_{u \in P} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v) > + \alpha K. \end{aligned}$$

Из (25) следует, что

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} < s+z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v) > - \min_{u \in P} \max_{v \in Q} < s, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v) > \quad \le \alpha K$$

для всех $s \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| \le \alpha$, $\tau^* \in I_0$, $x_*^{(1)} \in G$.

Из этого неравенства и условия седловой точки в маленькой игре (2) получаем, что

$$\begin{aligned} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) - f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*) > \le \\ - \min_{u \in P} \max_{v \in Q} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v) > - \\ - \max_{v \in Q} \min_{u \in P} < x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v) > + 2\alpha K = \\ = 2K\alpha. \qquad (26) \end{aligned}$$

Умножая i-е неравенство (26) на $\alpha_\theta^{(i)}$ и суммируя их по i, получаем

$$< x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_\theta^{(i)} f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*) > \le 2K\alpha. \qquad (27)$$

Таким образом, из (21), (24) и (27) имеем

$$\begin{aligned} \rho^2(t) \le \rho^2(\tau^*)[1 + 2\lambda(t-\tau^*)] + 4K\alpha(t-\tau^*) + [4\varphi^*(t-\tau^*)\mathrm{diam}(G) + \\ + 4K^2(t-\tau^*)](t-\tau^*) + 4\lambda \cdot \mathrm{diam}(G) \cdot \sigma \cdot (t-\tau^*), \end{aligned}$$

что эквивалентно (19), где $\beta = 2\lambda$, $M = 4K$, $M_1 = 4\lambda \mathrm{diam}(G)$, $\varphi(\xi) = [4\varphi^*(\xi)\mathrm{diam}(G) + 4K^2(\xi)]$. $\square$

5 Метод экстремального сдвига на элементы последовательности, построенной по методу программных итераций

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ – конечное множество моментов времени ($\tau_j < \tau_{j+1}$),

$$\alpha = \sup_{j=\overline{0,N-1}} \mathbf{h}(W^{(k)}[\tau_j], \mathfrak{W}[\tau_j]).$$

Пусть также $x_\Delta[t] \in X^{(k)}_{\Delta,x_*}$. Если y_j – ближайший к $x_\Delta[\tau_j]$ элемент $W^{(k)}[\tau_j]$, то через w_j обозначим ближайший к y_j элемент $\mathfrak{W}[\tau_j]$: $w_j \in \mathfrak{W}[\tau_j]$,

$$\|w_j - y_j\| = \min_{w \in \mathfrak{W}[\tau_j]} \|w - y_j\|.$$

Управление u_j выбирается из условия (8) или, что то же самое, из условия (16), где $z = w_j - y_j$. На j-м шаге ($j = \overline{0, N-1}$) рассмотрим движение, определенное (18), где $x_*^{(1)} = x_j$, $x_*^{(2)} = w_j$; обозначим его $x_j(\cdot)$. Из u-стабильности множества позиционного поглощения $\mathfrak{W}$ следует, что можно выбрать движение $x_j(t)$ так, что $x_j(t) \in \mathfrak{W}[t]$, $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$. Обозначим

$$\rho_{j,k}(t) \triangleq \|x_\Delta[t] - x_j(t)\|, \ t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]. \tag{28}$$

Пусть также

$$\delta \triangleq \max_{j=\overline{0,N-1}} (\tau_{j+1} - \tau_j).$$

Справедливо

Утверждение 2. *Существует такая константа $R > 0$, что*

$$\rho^2_{j,k}(t) \le [\rho^2_{0,k}(\tau_0) + (t-\tau_0)(\varphi(\delta) + M\alpha) + jR\alpha] \exp \beta(t-\tau_0), \ t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]. \tag{29}$$

Константы M, β и функция $\varphi(\cdot)$ определены в утверждении 1.

Доказательство.

$$\rho^2_{j,k}(t) \le [\rho^2_{j,k}(\tau_j) + (t - \tau_j)(\varphi(\delta) + M\alpha)] \exp \beta(t - \tau_j), \ t \in [\tau_j, \tau_{j+1}],$$
$$j = \overline{0, N-1}. \tag{30}$$

В самом деле, из утверждения 1, примененной при $\sigma = 0$, следует неравенство

$$\rho^2_{j,k}(t) \le \rho^2_{j,k}(\tau_j)(1 + \beta(t - \tau_j)) + (\varphi(\delta) + M\alpha)(t - \tau_j) \le$$
$$\le \rho^2_{j,k}(\tau_j) \exp \beta(t - \tau_j) + (t - \tau_j)(\varphi(\delta) + M\alpha) \exp \beta(t - \tau_j).$$

Найдем соотношение между $\rho_{j,k}(\tau_{j+1})$ и $\rho_{j+1,k}(\tau_{j+1})$.

Поскольку $\mathfrak{W}[\tau_{j+1}] \subset W^{(k)}[\tau_{j+1}]$,

$$\|x_\Delta[\tau_{j+1}] - y_{j+1}\| \le \|x_\Delta[\tau_{j+1}] - x_j(\tau_{j+1})\| = \rho_{j,k}(\tau_{j+1}).$$

Следовательно,

$$\rho_{j+1,k}(\tau_{j+1}) = \|x_\Delta[\tau_{j+1}] - w_{j+1}\| \le \|x_\Delta[\tau_{j+1}] - y_{j+1}\| + \|w_{j+1} - y_{j+1}\| \le \\ \le \rho_{j,k}(\tau_{j+1}) + \alpha.$$

Возводя это неравенство в квадрат, получаем, что при $\alpha < 1$

$$\rho^2_{j+1,k}(\tau_{j+1}) \le \rho^2_{j,k}(\tau_{j+1}) + R\alpha, \tag{31}$$

где $R = 2\mathrm{diam}(G_1) + 1$. Область G строится как множество всех достижимых из начальной позиций, G_1 определяется по G в утверждении 1.

Теперь докажем справедливость (29).

Доказательство проведем методом математической индукции по k. База индукции верна в силу (30). Пусть (29) верно для k, докажем неравенство для $k+1$. В силу (30), (31) и предположения индукции для $t \in [\tau_{j+1}, \tau_{j+2}]$ имеем

$$\rho^2_{j+1,k}(t) \le [\rho^2_{j,k}(\tau_j) + R\alpha + (t-\tau_j)(\varphi(\delta) + M\alpha)] \exp\beta(t-\tau_j) \le \\ \le \{[\rho^2_{0,k}(\tau_0) + (\tau_j - \tau_0)(\varphi(\delta) + M\alpha) + jR\alpha] \exp\beta(\tau_j - \tau_0) + \\ + R\alpha + (t-\tau_j)(\varphi(\delta) + M\alpha)\} \exp\beta(t-\tau_j) \le \\ \le [\rho^2_{0,k}(\tau_0) + (t-\tau_0)(\varphi(\delta) + M\alpha) + (j+1)R\alpha] \exp\beta(t-\tau_0).$$

□

Теперь мы дадим

Доказательство теоремы 1. Пусть $x[\cdot] \in X^{(k)}_{\Delta,x_*}$. Заметим, что

$$d(x[t], \mathfrak{W}[t]) \le \rho_{j,k}(t) \; t \in [\tau_j, \tau_{j+1}].$$

Здесь $\rho_{j,k}(t)$ определяется аналогично (28), с одним отличием: вместо $x_\Delta[\cdot]$ подставляется $x[\cdot]$. Также по построению $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}[\vartheta_0] = M$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно подобрать $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$ $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ со свойством $\tau_{j+1} - \tau_j \le \delta$, существует номер K, что $\rho_{j,k}(t) < \varepsilon$ для всех $k \ge K$. Для этого мы воспользуемся оценкой (29). Поскольку по построению $\varphi(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\varphi(\delta) < \frac{\varepsilon^2}{2(\vartheta_0 - \tau_*) \exp\beta(\vartheta_0 - \tau_*)}. \tag{32}$$

Пусть $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^N$ – разбиение отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$ со свойством $\tau_{j+1} - \tau_j < \delta$, $(j = \overline{0, N-1})$. Выберем $\alpha \in (0,1)$ такое, что

$$\alpha < \frac{\varepsilon^2}{2(1 + (\vartheta_0 - \tau_*)M + NR)\exp\beta(\vartheta_0 - \tau_*)}. \tag{33}$$

Для каждого j в силу (7) существует номер L_j, что для любого $l > L_j$

$$\mathbf{h}(\mathfrak{W}[\tau_j], W^{(l)}[\tau_j]) < \alpha.$$

Выберем

$$K \triangleq \max_{j=\overline{0,N-1}} L_k.$$

Следовательно, если $k > K$, начальная точка $x_0 \in W^{(k)}[\tau_j]$ и прицеливание в моменты τ_j осуществляется на множества $W^{(k)}[\tau_j]$, то из оценки (29) и выбора δ и α (см. (32) и (33)) следует оценка

$$\rho_{j,k}^2(t) \leq \varepsilon^2,\ t \in [\tau_j, \tau_{j+1}],$$

которая и заканчивает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 2 полностью аналогично предыдущему.

6 Управление, экстремальное к паре множеств

Настоящий раздел посвящен доказательству теорем 3 и 4. Доказательства этих теорем очень близки. Поэтому мы ограничимся изложением доказательства теоремы 3.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Пусть, (t_*, x_*) – некоторая позиция, $\Delta = \{\tau\}_{j=0}^N$ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, $\sigma > 0$. Выберем произвольное движение $x[\cdot] \in Z_{\Delta,x_*}^{(k),\sigma}$. С этим движением связано движение поводыря. А именно, в каждый момент τ_j определена точка w_j (положение поводыря). Оценим величину $\|x[\tau_j] - w_j\|$. Обозначим

$$\gamma \triangleq \max_{j=\overline{0,N-1}} \mathbf{h}(W^{(k)}[\tau_j], W^{(k+1)}[\tau_j]). \tag{34}$$

Справедливо следующее

Утверждение 3. *Существует такая константа $R > 0$, что*

$$\|x[\tau_j] - w_j\|^2 \leq [\|x[\tau_0] - w_0\| + (\tau_j - \tau_0)(\varphi(\delta) + M_1\sigma) + jR\gamma]\exp\beta(\tau_j - \tau_0). \tag{35}$$

Здесь константы β, M_1 и функция $\varphi(\cdot)$ определены в утверждении 1.

Доказательство. Зафиксируем $j \in \overline{0, N-1}$. Обозначим через u_j и v_j величины u_* и v_*, определенных согласно (10) и (11) для $t_* = \tau_j$, $x_* = x[\tau_j] + r$, $w_* = w_j$ соответственно. Здесь $r \in \mathbb{R}^n$, $\|r\| \leq \sigma$. При построении поводыря выбирается мера $\mu \in \mathcal{R}_{\tau_{j-1}}$, такая, что $\varphi(t, \tau_j, w_j, \mu \odot v_j) \in W^{(k)}[t]$ для всех $t \in [\tau_j, \vartheta_0]$. Применяя утверждение 1 при $\alpha = 0$, мы получаем, что

$$\|x[t] - \varphi(t, \tau_j, w_j, \mu \odot v_j)\|^2 \leq \\ \leq \|x[\tau_j] - w_j\|^2 (1 + \beta(t - \tau_j)) + (\varphi(t - \tau_{j+1}) + M_1\sigma)(t - \tau_j).$$

По определению поводыря, $w_{j+1} \triangleq \psi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j)$ есть ближайшая к $\varphi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu \odot v_j)$ точка множества $W^{(k+1)}[\tau_{j+1}]$. Поскольку $\varphi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu \odot v_j) \in W^{(k)}[\tau_{j+1}]$, из (34) следует, что $\|w_j - \varphi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu \odot v_j)\| \leq \gamma$. Из компактности целевого множества следует [21], [22], что существует область G_1, такая, что любое движение выходящее из позиции, принадлежащей $W^{(1)}$ не покидает этой области G_1. Обозначим $R = 2\mathrm{diam} G_1 + 1$. Предположим, теперь, что $\gamma \leq 1$. Имеем,

$$\|x[t] - w_{j+1}\|^2 \leq \\ \leq [\|x[t] - \varphi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu \odot v_j)\| + \|\varphi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu \odot v_j) - w_{j+1}\|]^2 \leq \\ \leq \|x[t] - \varphi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu \odot v_j)\|^2 + R\gamma$$

Отсюда, следует, что

$$\|x[t] - w_{j+1}\|^2 \leq \|x[\tau_j] - w_j\|^2 (1 + \beta(t - \tau_j)) + (\varphi(t - \tau_{j+1}) + M_1\sigma)(t - \tau_j) + R\gamma.$$

Отсюда методом математической индукции получаем утверждение. □

Доказательство теоремы 3. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ со свойством:

$$\varphi(\delta) \leq \frac{\varepsilon^2}{3(\vartheta_0 - t_0)\exp[\beta(\vartheta_0 - t_0)]}.$$

Выберем

$$\zeta \triangleq \frac{\varepsilon^2}{3(M_1(\vartheta_0 - t_0) + 1)\exp[\beta(\vartheta_0 - t_0)]}.$$

Пусть теперь $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$ и $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^N$ некоторое разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$ такое, что

$$\max_{j=\overline{1,N}} (\tau_j - \tau_{j-1}) \leq \delta.$$

Выберем

$$\gamma \triangleq \frac{\varepsilon^2}{3(1+NR)\exp[\beta(\vartheta_0 - t_0)]}.$$

Поскольку $\mathbf{h}(W^{(k)}[\tau_j], \mathfrak{W}[\tau_j]) \to 0$, $k \to \infty$, имеем, $\mathbf{h}(W^{(k)}[\tau_j], W^{(k+1)}[\tau_j]) \to 0$, $k \to \infty$, $j = \overline{0, N-1}$. Следовательно, для каждого j существует L_j такое, что для каждого $l > L_j$ $\mathbf{h}(W^{(k)}[\tau_j], W^{(k+1)}[\tau_j]) \le \gamma$. Выберем $K = \max_{j=\overline{0,N-1}} L_j$. Тогда для $k > K$ мы имеем, что если $x_* \in W^{(k+1)}[t_*]$, $x[\cdot] \in Z^{(k),(\zeta)}_{\Delta, x_*}$, то

$$\|x[\tau_j] - w_j\|^2 \le \varepsilon^2.$$

Поскольку $W^{(k)}[\tau_N] = W^{(k+1)}[\tau_N] = M$ и $w_N \in W^{(k+1)}[\tau_N]$, $d(x[\tau_N], M) \le \varepsilon$. $\square$

Список литературы

[1] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи движения // ПММ, 1970, Т. 34, №6, С. 1005–1022.

[2] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционые дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[3] *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения-уклонения – I // Изв. АН СССР (Техническая кибернентика), 1973, №2, С. 3–18.

[4] *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения-уклонения – II // Изв. АН СССР (Техническая кибернентика), 1973, №3, С. 22–42.

[5] *Ченцов А. Г.* О структуре одной игровой задачи сближения // ДАН СССР, 1975, Т. 224, №6, С. 1272–1275.

[6] *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Матем. сб., 1976, Т. 99, №3, С.394–420.

[7] *Ченцов А. Г.* К игровой задаче наведения // ДАН СССР, 1976, Т. 226, №1, С. 73–76.

[8] *Чистяков С. В.* К решению игровых задач преследования // ПММ, 1977, Т. 41, № 5, С. 825–832.

[9] *Меликян А. А.* Цена игры в линейной дифференциальной игре сближения // ДАН, 1977, Т. 237, №3, С. 521–524.

[10] *Ухоботов В. И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // ПММ, 1977, Т. 41, №2, С. 358–364.

[11] *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби и ее обобщения // Труды МИ РАН. 1999. Т. 224. С. 311–334

[12] *Субботин А. И.* Обобщенные решения дифференцильных уравнений 1-го порядка. Ижевск: РХД, 2003.

[13] *Ченцов А. Г.* К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений // Известия ВУЗов. Математика, 2000, №3, С. 66–76.

[14] *Ченцов А. Г.* Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций, I // Дифференциальные уравнения, 2001, Т. 37, №4, С. 470–480.

[15] *Ченцов А. Г.* Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций, II // Дифференциальные уравнения, 2001, Т. 37, №5, С. 679–688.

[16] *Ченцов А. Г.* Метод программных итераций в абстрактных задачах управления //ПММ, 2004, Т. 68, №4, С. 573–585.

[17] *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

[18] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Аппроксимация в дифференциальной игре // ПММ, 1973, Т. 37, №2, С. 197-204.

[19] *Ченцов А. Г.* Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения // Депонировано в ВИНИТИ 1933-79Деп, 103 стр.

[20] *Ченцов А. Г.* О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций, II // Депонирована в ВИНИТИ №5406-80Деп., 56 стр.

[21] Авербух Ю. В., Ченцов А. Г., К вопросу о приближенной реализации сечений множеств позицонного поглощения в одной игровой задаче управления // Вестник УГТУ-УПИ (Серия радиотехническая), 2005, № 17 (69), С. 217–230.

[22] *Авербух Ю. В., Ченцов А. Г.* О характере сходимости в одной процедуре метода программных итераций // Труды семинара "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби", 2006, Т. 1, С. 166–175.

[23] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей. М.:Мир, 1969, с.309.