

УПРАВЛЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ С AW-КОРРЕКЦИЕЙ¹

Г. А. ЛЕОНОВ¹, Б. Р. АНДРИЕВСКИЙ^{1,2},
Н. В. КУЗНЕЦОВ^{1,3}, А. Ю. ПОГРОМСКИЙ^{1,4}

¹Санкт-Петербургский гос. университет, Санкт-Петербург, Россия

²Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

³Университет Ювяскюля, Финляндия

⁴Технологический университет Эйндховена, Нидерланды

Аннотация

Рассмотрен метод AW-коррекции, обеспечивающий когергентность замкнутой системы для некоторого класса задающих воздействий. Показано применение метода к задаче управления полетом летательного аппарата.

1 Введение

При наличии внешних возмущений в системе рулевого управления самолетом вместе с желаемым устойчивым решением, соответствующим желаемому полету самолета, могут возникнуть другие устойчивые и неустойчивые решения, которые соответствуют нежелаемому и опасному поведению летательного аппарата (ЛА). Кроме того, при больших амплитудах входного сигнала, желаемое решение может терять свою устойчивость, что может приводить к катастрофическим последствиям [1].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, Санкт-Петербургского государственного университета, *Academy of Finland* и РФФИ, проект № 12-08-01183-а.

Известен ряд катастроф летательных аппаратов, вызванных неправильным синтезом алгоритмов управления: катастрофы американского многоцелевого истребителя YF-22 «Раптор» (производитель – Локхид Мартин/Боинг), который потерпел аварию при посадке на авиабазе Эдвардс в апреле 1992 года [2] и шведского истребителя «Грифон» (*JAS39 Gripen*, производитель – СААБ) [3]. Эти катастрофы были вызваны неправильным синтезом алгоритмов управления, которое производилось без учета нелинейностей типа «насыщение», влияние которых может вызвать т.н. «колебания, вызванные летчиком» (англ. – *Pilot Induced Oscillations*), нарушающих процесс пилотирования ЛА [4]. В них наблюдался эффект «флаттера по тангажу» в режиме приземления самолетов (т.е. возникали колебания угла тангажа с нарастающей амплитудой).

Отметим, что так называемые *скрытые колебания* (область притяжения которых не содержит окрестностей состояний равновесия) [5–9], возникающие в таких системах, существенно затрудняют численный анализ и могут приводить к ошибочным выводам: “*Since stability in simulations does not imply stability of the physical control system (an example is the crash of the YF22) stronger theoretical understanding is required*” [10].

Хорошо также известны случаи входа космического аппарата в неконтролируемое вращение [11, 12]. Исследования переходных режимов при таком гашении приводит к необходимости разработки математической теории глобального анализа систем ориентации. На необходимость развития такой теории указывал академик Б.В. Раушенбах, отмечая сложности управления космическим аппаратом при быстрых разворотах.

Особенно наглядно представить возникновение нежелательных ситуаций можно в случае если система описывает объект управления в виде «чистого» интегратора с ограничением типа насыщения по входу, охваченного отрицательной обратной связью с ПИ- или ПИД-регулятором. В этом случае, ошибка управления интегрируется регулятором, но при больших рассогласованиях она не может парироваться из-за наличия насыщения. Это приводит к появлению в системе колебательных процессов, соответствующих максимально возможным амплитудам входного воздействия для объекта управления (интегратора). В англоязычной научной литературе это явление получило название «виндап» (от англ. «*wind up*» – *заводит, приводит в возбужденное состояние, взвинчивать*). Соответственно, меры по противодействию этому явлению путем введения дополнительных обратных связей и/или компенсаторов, именуется «антивиндап» (англ. *anti-windup, AW*).

Напомним, что М. В. Келдышем [13] разработаны математические методы анализа различных систем подавления флаттера в конструкциях самолетов 1940-х годов. В настоящей статье методы М. В. Келдыша развиваются и модифицируются для задач *AW*-коррекции.

Статья построена следующим образом. Краткий обзор публикаций по способам *AW*-коррекции дан в разделе 2. В разделе 3 приводятся общие сведения о конвергентных системах и описана возможность применения метода гармонического баланса для их исследования. Метод *AW*-коррекции на основе свойства конвергенции для нейтрально-устойчивых объектов управления описан в разделе 4. Раздел 5 посвящен его применению к управлению углом рыскания ЛА. Заключительные замечания даны в разделе 6.

2 Методы *AW*-коррекции

Ранние методы предотвращения возбуждения интегратора (*antiwindup*, *AW*) были, в основном, эвристическими, в них не хватало математической строгости. Обзоры этих методов даны в [14, 15], библиографический список – в [16]. Современное состояние *AW*-методов отражено в монографиях [17, 18] и обзоре [19].

В [20] отмечено, что синтез регуляторов при ограничении на управляющее воздействие можно выполнять на основе методов оптимального управления – например, оптимального по быстродействию, или по затрачиваемой энергии [21, 22]. Однако подобные решения, приводящие к релейному (рывному) управлению, если и принципиально определимы в форме обратной связи, то даже для простейших систем реализация этих методов связана к существенными вычислительными трудностями. Поэтому в большинстве приложений оптимальные решения такого рода не используются, а синтезируется «номинальный» линейный регулятор в предположении отсутствия насыщения, в который вводится некоторый сигнал коррекции, когда насыщение становится «активным».

Одна из первых попыток теоретического обоснования известных к тому времени методов подавления возбуждения интегратора в регуляторе при насыщении управляющего воздействия представлена в [23] (в работе используется аббревиатура *ARW* – «*antireset-windup*», так как интегральная составляющая в ПИ- и ПИД-регуляторах в технической литературе иногда называется «обнуляющей», англ. *reset*). В работе отмечено, что к тому времени основная идея подавления возбуждения интегратора заключалась в ограни-

чении выходного сигнала линейного регулятора с помощью дополнительных обратных связей так, чтобы ограниченная переменная (например – команда на перемещение штока исполнительного устройства) не выходила за заданные пределы. С этой целью в ранних работах использовались нелинейные сумматоры, умножители, или селекторы минимального и максимального значений. Несмотря на широкое и успешное применение на практике таких структур, исследование свойств замкнутой системы с теоретической точки зрения было явно недостаточным, уступая место интуиции, опыту проектировщиков, моделированию, и применению поисковых методов настройки. Авторами [23] ставилась задача – используя методы теории нелинейных систем показать робастность предложенной в [24] системы с ARW по сравнению с номинальной линейной системой в случае скалярного управления.

В [25] исследуется AW -коррекция в системах с каскадным (двухконтурным) дискретным регулятором, в которых устанавливаются ограничения на величину сигнала управления, вырабатываемого ПИ-регулятором внешнего контура (например – ограничение на силу тока, протекающего через обмотку двигателя в системе управления скоростью). Отмечено, что вследствие дискретизации большое значение коэффициента компенсирующей обратной связи влечет потерю устойчивости. Исследование устойчивости в [25] производится на основе критерия Попова для дискретных систем [26–28]. Рассмотрен числовой пример системы управления инерционным объектом первого порядка.

В [29] предлагается ARW -метод для систем с несколькими исполнительными устройствами, имеющими насыщение, и с векторным управлением, при формировании которого используется закон управления с интегральной составляющей. Принято, что нелинейные блоки в исполнительных устройствах описываются статическими зависимостями с верхним и нижним граничными значениями, которые задают уровни насыщения. Внутри этих границ выходы нелинейных блоков совпадают со входными сигналами. В этой ARW схеме интеграторы в регуляторе охватываются простыми нелинейными обратными связями с нечувствительностью: если выходной сигнал некоторого интегратора находится в допустимом интервале, то сигнал корректирующей обратной связи равен нулю, а вне данного интервала возникает сигнал отрицательной обратной связи, пропорциональный с некоторым коэффициентом выходу данного интегратора. Таким образом, по каждой компоненте управляющего воздействия система принимает форму Лурье с двумя нелинейными блоками, имеющими общий вход (выход линейной части системы – это выход интегрирующего звена регулятора). Линейная часть системы имеет два вхо-

да: собственно управление (выход звена с насыщением) и другой вход – выход нелинейного звена корректирующей обратной связи. Кроме того, на систему действует и задающее (командное) воздействие, формируемое вне обратной связи.

В [20] изложена систематическая методика синтеза многосвязных (с векторными входами и выходами) систем для асимптотически устойчивых объектов управления (при введении интеграла в закон управления, это означает, что линейная часть системы нейтрально устойчива), при наличии нескольких блоков насыщения. В работе отмечено, что при векторном управлении насыщение может привести не только к «раскачке» интегратора (виндапу), но и к изменению направления векторного сигнала управления, что также приводит к нарушению работоспособности системы. В основе предлагаемого в [20] метода лежит введение супервизорной обратной связи таким образом, что если задающие и возмущающие воздействия достаточно малы, то система управления работает как «номинальная» линейная система (синтезированная без учета насыщения). При появлении относительно больших воздействий, приводящих к насыщению, закон управления модифицируется таким образом, чтобы обеспечить устойчивость и сохранить, по возможности, характеристики номинальной линейной системы. Для решения поставленной задачи в [20] предлагается ввести в цепь сигнала рассогласования так называемый «регулятор сигнала ошибки» (*Error Governor, EG*), действие которого заключается в том, что, поскольку это возможно в принципе, сигнал управления не достигает насыщения ни при каких задающих или возмущающих воздействиях. В качестве одного из примеров в [20] рассматривается задача управления продольным движением самолета *F8*.

По-видимому первой публикацией, где рассматривается совместно влияние насыщения по уровню и по скорости изменения управляющего сигнала является работа [30]. Как и в [20], здесь для нейтрально-устойчивых в разомкнутом состоянии многосвязных линейных систем предложена систематическая методика синтеза регуляторов, обеспечивающая устойчивость и приемлемое поведение замкнутой системы.

В [31, 32] представлены способы *AW*-коррекции с *безударной передачей управления* (*anti-windup bumpless transfer, AWBT*), в которых учет нелинейностей входного сигнала реализуется следующей двухшаговой процедурой синтеза: первоначальная разработка линейного регулятора без учета нелинейностей на входе объекта и, затем, введение *AWBT*-коррекции так, чтобы минимизировать вредное влияние входных нелинейностей на поведение за-

мкнутой системы. Тем самым выполняется «подгонка» стандартных регуляторов, разработанных для систем без ограничений к появлению ограничений. Синтез регулятора основывается на применении концепции *пассивности* [33] и теории множителей (*multiplier theory*) [34, 35]. Для правильного выбора множителей выполняется приведение достаточных условий устойчивости к эквивалентным линейным матричным неравенствам (ЛМН). В работе рассматриваются секторные нелинейности, прежде всего – нелинейности вида «насыщение». Отмечено, что если известна граница сигнала на входе нелинейности, то можно получить менее консервативные условия, сужая границы рассматриваемого сектора.

Проблема виндапа, возникающая при наличии ограничений на величину и скорость отклонения исполнительного механизма при ручном пилотировании статически неустойчивого ЛА рассмотрена в [36], где предложено одно из ее решений и проведено сравнение полученного решения с оптимальным. В [37] рассмотрено короткопериодическое продольное движение бесхвостового ЛА при произвольных балансировочных режимах полета. Показано, что предложенный анти-виндап (AW) компенсатор допускает более энергичное маневрирование по сравнению с полученным на основе стандартного метода ограничения управления (*command limiting*). Предложенный механизм компенсации гарантирует устойчивость пилотируемого ЛА для любых подаваемых летчиком команд управления и обеспечивает достижение требуемых показателей качества полета в той мере, в которой они достижимы при имеющихся ограничениях на управление.

Авторы [38] рассмотрели механизм AW-коррекции для линейных стационарных систем при наличии нелинейных ограничений по величине и по скорости отклонения рулевых органов. Основываясь на расширенной версии кругового критерия для так называемых *LFT*-систем, являющихся классом линейных нестационарных систем с линейной пропорциональной (*fractional*) зависимостью параметров, была разработана процедура синтеза выпуклого AW-управления. Уравнения компенсатора получены в явном виде, что облегчает его реализацию. Эффективность предложенного метода управления продемонстрирована для линеаризованной модели ЛА F-8 из [20]. В [39] предложен метод AW-коррекции при наличии ограничения по скорости в исполнительном механизме, и алгоритм настройки компенсатора, позволяющий достичь компромисса между качеством управления и размером оценки области притяжения устойчивого режима. Применение метода продемонстрировано на реалистичном примере системы управления полетом для нелинейной мо-

дели продольного и поперечного движения экспериментального ЛА *ATTAS* (*Advanced Technology Testing Aircraft*), используемого Германским аэрокосмическим центром (*Deutsche Zentrum für Luft und Raumfahrt, DLR*). Показана возможность применения *AW*-коррекции для снижения чувствительности ЛА к вызванным летчиком колебаниям (*Pilot-induced Oscillations, PIO*). Результаты работы получили последующее подтверждение в ряде испытательных полетов. В [40] выполнен синтез, анализ и приведены данные летных испытаний для экспериментального ЛА *ATTAS*, полученные Германским аэрокосмическим центром. Дальнейшие результаты были представлены в [41], где был проведен сравнительный анализ динамических *AW*-компенсаторов пониженного порядка для определения значимости различных конструктивных параметров. Проблема статической *AW*-коррекции для линейных неустойчивых летательных аппаратов при наличии насыщения в канале управления рассмотрена в [42]. Используются стандартные подходы, основанные на квадратичных функциях Ляпунова, *S*-процедуре и нелинейностях с секторными ограничениями. Предложенный подход был проанализирован на предмет увеличения области допустимых задающих воздействий и увеличения области безопасных начальных условий, для которых может быть обеспечена устойчивость замкнутой системы.

В работе [43] предложена робастная *AW*-коррекция для улучшения качества управления в поперечном канале управления ЛА и продемонстрирована ее эффективность. Проблема синтеза *AW*-регулятора, который учитывает компромисс между качеством управления при наличии и отсутствии нелинейности типа насыщения в исполнительном механизме, рассмотрена в [44]. Результаты применены для управления по крену ЛА *F8*. Случай больших параметрических неопределенностей в модели ЛА при наличии насыщения в исполнительных механизмах рассмотрен в [45, 46]. Авторами предложен робастный адаптивный линейно-квадратичный синтез закона управления с адаптивной *AW*-коррекцией для парирования изменения во времени параметров ЛА. Показано, что планер отслеживает траекторию, формируемую алгоритмом навигации, несмотря на наличие больших параметрических неопределенностей. В [47] проблема *AW*-коррекции рассмотрена в дискретном времени. Эти результаты применены на модельном примере управления перспективным истребителем в [48]. В [49] была предложена процедура синтеза *AW*-компенсации для линейных систем, описываемых правильными передаточными функциями, при наличии амплитудных и скоростных ограничений в управляющих механизмах. Используя обобщенные секторные условия и *линейные матричные неравенства* (ЛМН), предложена процедура нахождения

коэффициента усиления в AW -компенсаторе, который обеспечивает устойчивость для заданных начальных условий. Этот подход проиллюстрирован на примере управления продольным движением истребителя $F8$ в продольном канале. В [50] предложена процедура AW -коррекции на основе реакции нелинейной системы с нелинейностью типа «насыщение» на ступенчатое входное воздействие. Эта процедура применена к задаче управления продольным движением ЛА $M-2000$. Данный подход был дальше развит в [51, 52] для обеспечения наискорейшего слежения за желаемым углом атаки без сопутствующей установившейся ошибки с высоким качеством управления. В [53, 54] для нелинейностей с зоной нечувствительности, с использованием модифицированного секторного условия, было предложено решение проблемы AW -коррекции на основе ЛМН для построения динамических компенсаторов полного и пониженного порядков.

Во многих публикациях задача AW -коррекции для системы ставится как задача обеспечения глобальной асимптотической устойчивости ее положения равновесия при отсутствии внешних воздействий. Данный подход является в корне неверным и опасным для приложений. Так, в [55] приведен пример системы второго порядка с нелинейностью типа насыщения, которая удовлетворяет критическому случаю критерия Попова, и, следовательно, является глобально асимптотически устойчивой при отсутствии внешнего воздействия. В то же время, при наличии внешнего (периодического) воздействия, в системе могут сосуществовать множественные периодические режимы, а низкоамплитудный (желаемый) режим может терять свою устойчивость. Аналогичные результаты для системы управления ЛА по курсу приведены в [56]. Данное наблюдение показывает необходимость проведения правильного и строгого математического определения задачи синтеза AW -коррекции.

3 Конвергентные системы и метод гармонического баланса

3.1 Постановка задачи AW -коррекции

Как следует из обзорной части работы, в настоящее время не существует единого общепринятого подхода к описанию проблемы: многие авторы предлагают свои определения и, соответствующие им, методы решения. Наметим альтернативный подход к описанию проблемы на основе упрощенного при-
мера.

Рассмотрим систему управления, в которой сигнал рассогласования формируется как разность между задающим воздействием и выходом объекта управления - интегрирующего звена. Сигнал рассогласования подается на вход линейного ПИ-звена (пропорционально-интегрирующего) и, далее, на вход объекта управления через нелинейность типа насыщение. Пользуясь критерием Попова, нетрудно показать, что при нулевом задающем воздействии, замкнутая система асимптотически устойчива в целом при положительных коэффициентах ПИ-регулятора. В то же время, при гармоническом задающем воздействии, пользуясь методом гармонической линеаризации (вообще говоря, нестрогим), можно предсказать существование множественных периодических решений в замкнутой системе.

Чтобы показать наличие множественных периодических решений в такой системе, рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -K_i x_2 + K_i w(t) \\ \dot{x}_2 &= \text{sat}(x_1 - K_p x_2 + K_p w(t))\end{aligned}$$

для параметров $K_p = 10, K_i = 20$. Здесь $\text{sat}(\cdot) := \text{sign}(\cdot) \min\{|\cdot|, 1\}$ - функция насыщения. Эти параметры обеспечивают асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия при нулевом входном воздействии ($w(t) = 0$). Более того, применение критерия Попова, позволяет доказать устойчивость этого положения равновесия в целом. Моделирование системы при гармоническом входном воздействии $w(t) = \sin t$ показывает, однако, что в системе существуют как минимум два периодических устойчивых решения, соответствующих одному и тому же входному воздействию. Подобная ситуация может быть проиллюстрирована и на другом академическом примере - осцилляторе Дюффинга с трением. Известно, что при отсутствии входного воздействия, осциллятор Дюффинга асимптотически устойчив в целом. В то же время, при гармоническом входном воздействии, могут наблюдаться множественные периодические и, даже, хаотические решения.

Указанные примеры демонстрируют, что подход, основанный на обеспечении асимптотической условия в целом при отсутствии входного сигнала, может оказаться неадекватным для практического применения. Нам представляется, что в этой связи, уместна следующая постановка задачи АИ-коррекции: посредством дополнительных обратной связи, обеспечить выполнение в системе свойства конвергенции по Демидовичу [57]. Данный подход используется в настоящей работе. Кроме того, для анализа качества регулирования в замкнутой системе при ненулевом задающем воздействии, инте-

ресно получить область применимости метода гармонической линеаризации и оценить погрешность этого метода.

3.2 Метод гармонического баланса для неавтономных конвергентных систем

В данном параграфе приведены используемые в дальнейшем основные определения и свойства *равномерно конвергентных систем* [55, 58–60].

Рассмотрим системы вида

$$\dot{x}(t) = f(x, w(t)) \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ – входное воздействие, принадлежащее к классу \mathbb{W} ограниченных кусочно-непрерывных функций \mathbb{PC}_m , $w(t) \in \mathbb{W} \subset \mathbb{PC}_m$. Считаем, кроме того, что вектор-функция $f(x, w)$ удовлетворяет некоторым условиям регулярности, гарантирующим существование локальных решений $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) при любом входе $w \in \mathbb{W}$.

Определение 1 . Система (1) называется *равномерно-конвергентной для класса входов \mathcal{W}* если для каждого входа $w(t) \in \mathcal{W}$ имеется решение $\bar{x}(t) = x(t, t_0, \bar{x}_0)$ удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\bar{x}(t)$ определено и ограничено для всех $t \in (-\infty, +\infty)$,
2. $\bar{x}(t)$ глобально равномерно асимптотически устойчиво для каждого входа $w(t) \in \mathcal{W}$.

Заметим, что *равномерность* в приведенном определении относится к равномерности по времени, то есть если система равномерно-конвергентна для класса входов $\mathcal{W} \subset \mathbb{PC}_m$, то это значит, что для каждого произвольного входа $w(t) \in \mathcal{W}$ имеется единственное глобально асимптотически равномерное (по времени) решение $\bar{x}(t)$.

Решение $\bar{x}(t)$ называется *предельным решением*. Как следует из приведенного определения, любое решение равномерно-конвергентной системы «забывает» свои начальные условия и сходится к предельному решению. Следующие утверждения характеризуют некоторые свойства предельного решения.

Свойство 1 [61]. Рассмотрим систему (1) при заданном входе $w(t)$, определенном для всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, положительно инвариантный по отношению к динамике системы (1). Тогда имеется хотя бы одно решение $\bar{x}(t)$ такое, что $\bar{x}(t) \in \mathcal{D}$ для всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Свойство 2 [62]. Предельное решение $\bar{x}(t)$ равномерно-конвергентной системы единственно, то есть оно является единственным решением, ограниченным при всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Свойство 3 [63]. Если система (1) равномерно-конвергентна, то при постоянном входном сигнале $w(t) \equiv w$ соответствующее предельное решение $\bar{x}(t)$ также постоянно, $\bar{x}(t) \equiv \bar{x}$. Если вход $w(t)$ – периодическая функция с периодом T , то соответствующее предельное решение $\bar{x}(t)$ – также периодическая функция с периодом T .

Важной особенностью конвергентных нелинейных систем среди нелинейных систем общего вида является то, что конвергентные системы можно исследовать почти также, как и линейные системы. Действительно, тогда как исследование нелинейных систем в общем случае затруднено из-за возможности появления различных установившихся процессов в зависимости от начального состояния системы, конвергентные системы имеют при данном входном воздействии единственное предельное решение и, следовательно, их предельное поведение может быть также определено единственным образом. Это, в частности, позволяет выполнять анализ таких систем в частотной области на основе изучения поведения предельного решения при гармоническом входном воздействии [64], [65]. Кроме того, поскольку предельное решение конвергентной системы зависит только от входного воздействия и не зависит от начальных условий, его можно численно находить *моделированием системы* при фиксированных начальных условиях, в то время как для нелинейных систем требуется, вообще говоря, исследовать поведение при бесконечно большом количестве начальных состояний. Эти свойства конвергентных систем используются ниже для получения их функций чувствительности и анализа систем с насыщением.

Анализ свойств линейных систем управления (СУ) существенным образом опирается на получение частотных характеристик, таких как *функция чувствительности* $S(i\omega)$ и *дополнительная функция чувствительности* $T(i\omega)$ [66, 67]. В [68] введены обобщенные версии этих функций для нелинейных систем в форме Лурье, обладающих свойством конвергентности. Приведем основные положения.

Рассмотрим нелинейную систему вида

$$\dot{x}(t) = f(x, r), \quad y = h(x, r), \quad e(t) = r(t) - y(t), \quad (2)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, скалярные функции $y(t)$ – выход системы, $r(t)$ – задающее воздействие и $e(t)$ – ошибка слежения, $f(x, r) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$ – вектор-функция системы, $h(x, r) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$ – функция выхода. Рассмотрим гармонические задающие воздействия $r(t) = a \sin(\omega t)$ с амплитудой a и частотой ω . Предположим, что система (2) *равномерно конвергентна* для воздействий этого класса. Тогда для каждого a и ω существует единственное установившееся T -периодическое решение $\bar{x}(t)$ (2) с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и соответствующие ему выходной процесс $\bar{y}(t)$ и ошибка $\bar{e}(t) = r(t) - \bar{y}(t)$ [55, 69].

Определение 2 [68]. *Функции*

$$\mathbb{S}(a, \omega) = \|\bar{e}\|_2 / \|r\|_2, \quad \mathbb{T}(a, \omega) = \|\bar{y}\|_2 / \|r\|_2,$$

где $\|z\|_2 = \left(\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} z(\tau)^2 d\tau \right)^{1/2}$ называются, соответственно, обобщенной функцией чувствительности и обобщенной дополнительной функцией чувствительности конвергентной системы (2).

Для линейных систем, функции $\mathbb{S}(a, \omega)$ и $\mathbb{T}(a, \omega)$ совпадают с обычными амплитудно-частотными характеристиками $|S(i\omega)|$, $|T(i\omega)|$, соответственно. Для нелинейных систем, функции $\mathbb{S}(a, \omega)$, $\mathbb{T}(a, \omega)$ зависят не только от частоты внешнего воздействия ω , но также и от его амплитуды a . Обобщенные функции чувствительности можно получить численно, интегрируя (2) $N_a \cdot N_\omega$ раз при гармоническом воздействии $r(t)$ с различными амплитудами a_i , $i = 1, 2, \dots, N_a$ и частотами ω_j , $j = 1, 2, \dots, N_\omega$. Объем вычислений можно существенно уменьшить, используя метод гармонического баланса для неавтономных конвергентных систем, имеющих форму Лурье [65] (линейная динамическая подсистема, замкнутая статической нелинейностью, см. [66, 70]). Основные положения метода приведены ниже.

Пусть система (2) представима в следующей форме Лурье:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\psi(y) + Fw(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t), \quad z(t) = Hx(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $w(t)$ – внешнее скалярное воздействие, $y(t)$ – скалярный выход системы, $\psi(y)$ – непрерывная скалярная функция, $A, B, C,$

D, F, H – матрицы соответствующих размеров. Предполагается, кроме того, что функция $\psi(\cdot)$ при некотором конечном $\mu > 0$ удовлетворяет следующему *секторному условию роста*

$$0 \leq \frac{\psi(y_1) - \psi(y_2)}{y_1 - y_2} \leq \mu \quad \text{для всех } y_1, y_2, \quad y_1 \neq y_2. \quad (4)$$

Исследуем поведение системы (4) при гармоническом входном воздействии $w(t) = b \sin(\omega t)$ с амплитудой b и частотой ω . Согласно [68, 71], в установившемся режиме (по окончании переходных процессов) выход $y(t)$ может быть приближенно представлен гармоническим процессом с частотой ω и амплитудой a , удовлетворяющей следующему *уравнению гармонического баланса*

$$|1 - K(a)G(i\omega)|^2 a^2 = |H(i\omega)|^2 b^2, \quad (5)$$

где $G(i\omega) = C(i\omega I_n - A)^{-1}B$, $H(i\omega) = C(i\omega I_n - A)^{-1}F + D$, $K(a)$ – коэффициент гармонической линеаризации (по другой терминологии – *описывающая функция*) для нелинейности $\psi(\cdot)$, I_n – единичная матрица порядка n .

Для нечетной нелинейности $\psi(x)$, коэффициент гармонической линеаризации $K(a)$ определяется выражением (см. также [66])

$$K(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \psi(a \sin \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta. \quad (6)$$

3.3 Точность метода

Оценка точности анализа методом обобщенной гармонической линеаризации получена в [68], где найдены границы на \mathbb{L}_2 -норму ошибки между выходами нелинейной системы и модели, полученной в результате ее гармонической линеаризации при гармоническом внешнем воздействии. Основной результат формулируется следующей теоремой [68].

Теорема 1 *Рассмотрим систему (3) с периодическим входным воздействием $w(t) = b \sin(\omega t)$. Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Пара (A, B) – полностью управляема, пара (A, C) – полностью наблюдаема,*
2. *Уравнение гармонического баланса (5) имеет единственное положительное вещественное решение $a(b, \omega)$,*

3. Для всех $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ выполнено частотное условие $\operatorname{Re} G(ik\omega) < 1$;

4. Функция $\psi(\cdot)$ нечетная.

Тогда система (3) имеет единственное однопериодно-симметричное $2\pi/\omega$ -периодическое решение и \mathbb{L}_2 -норма ошибки между выходами нелинейной системы и ее линеаризованной по методу гармонического баланса моделью ограничена величиной $\gamma\nu(a(b, \omega))$, где

$$\begin{aligned} \gamma &= 2\rho_2/(2 - \mu\rho_1), \\ \rho_1 &= \sup_{k=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots} \left| C(ik\omega I - A - \frac{\mu}{2}BC)^{-1}B \right|, \\ \rho_2 &= \sup_{k=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots} \left| H(ik\omega I - A - \frac{\mu}{2}BC)^{-1}B \right|, \\ \nu(a) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(aK(a) \cdot \sin \vartheta - \psi(a \sin \vartheta) \right)^2 d\vartheta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Через $\psi(\cdot)$ обозначена нелинейность в обратной связи системы при ее записи в форме Лурье, а $K(a)$ – коэффициент гармонической линеаризации функции $\psi(\cdot)$.

3.4 Гармоническая линеаризация для систем с насыщением

Для симметричной нелинейности типа «насыщение» $\psi(y) = \operatorname{sat}_m(y)$, где

$$\operatorname{sat}_m(z) = \begin{cases} b & \text{если } z \geq m, \\ a & \text{если } z \leq -m, \\ z & \text{иначе,} \end{cases} \quad (m > 0). \quad (8)$$

выражение (6) принимает вид

$$K(a) = \begin{cases} 1, & a \leq m, \\ \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{m}{a} \right) + \frac{m}{a} \sqrt{1 - \frac{m^2}{a^2}} \right), & a > m. \end{cases} \quad (9)$$

Оценим для этого случая точность метода, вычислив явно функцию $\nu(a)$.

Если $a \leq m$, то $K(a) = 1$ и, очевидно, $\nu(a) = 0$. Рассмотрим теперь подынтегральную функция в выражении (7):

$$\chi(a, \vartheta) = \left(aK(a) \cdot \sin \vartheta - \psi(a \sin \vartheta) \right)^2.$$

Нетрудно показать что при $a > m$ выполнено

$$\int_0^{2\pi} \chi(a, \vartheta) d\vartheta = 4 \left(\int_0^\alpha \chi(a, \vartheta) d\vartheta + \int_\alpha^{\pi/2} \chi(a, \vartheta) d\vartheta \right), \quad (10)$$

где $\alpha = \arcsin \frac{m}{a}$. Интегрируя (10) по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \chi(a, \vartheta) d\vartheta &= 2\alpha a^2 (1 - 2K(a)) - 2m(1 + 2K(a))\sqrt{a^2 - m^2} + \\ &+ K(a)^2 a^2 \pi + 2m^2(\pi - 2\alpha), \end{aligned} \quad (11)$$

где коэффициент гармонической линейризации $K(a)$ определяется выражением (9). Таким образом, функцию $\nu(a)$ можно вычислить подстановкой (11) в (7).

Отметим, что для *релейной* нелинейности $\psi(x) = m \operatorname{sign}(x)$ значение ν не зависит от a , $\nu(a) \equiv \nu^*$, поскольку соответствующий коэффициент гармонической линейризации имеет вид $K(a) = \frac{4m}{\pi a}$. подстановкой получаем $\nu^* = m \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{\pi} \approx 0.435 m$. Вместе с тем, для нелинейности типа *насыщение* (7) и (11), функция $\nu(a)$ асимптотически стремится к ν^* при $a \rightarrow \infty$, поскольку с возрастанием a уменьшается относительная величина разности между значениями релейной функции и функции насыщения.

Графики $\nu(a)$ и ν^* для $m = 1$ при $a \in [1, 10]$ показаны на рисунке. 1.

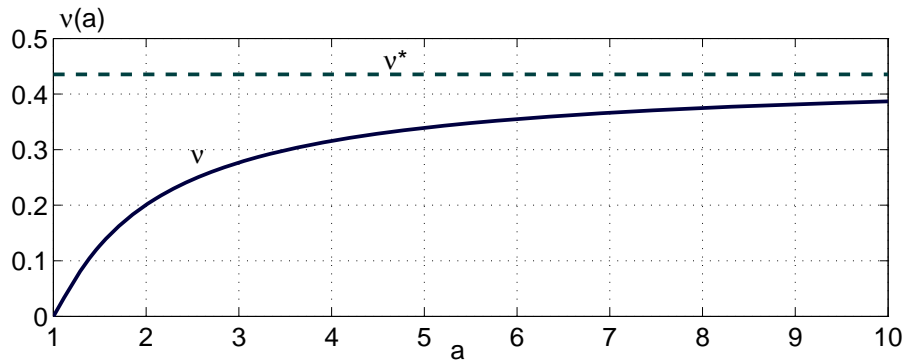


Рис. 1: Графики $\nu(a)$ и ν^* для нелинейности $y = \operatorname{sat}_m(a)$ при $m = 1$

4 AW-коррекция на основе свойства конвергенции

4.1 Равномерная конвергентность нейтрально-устойчивых систем Лурье с насыщением

Рассмотрим следующие системы в форме Лурье с нелинейностью вида «насыщение»

$$\dot{x} = Ax + B\text{sat}(u) + Fw, \quad u = Cx + Dw, \quad y = Hx \quad (12)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы, $u \in \mathbb{R}$ – управляющее воздействие, $w \in \mathbb{R}^m$ – внешнее воздействие (например – задающий сигнал или возмущение), $y \in \mathbb{R}^p$ – выход системы. Функция насыщения $\text{sat}(\cdot)$ определяется как $\text{sat}(u) = \text{sign}(u) \min(1, |u|)$. Матрицу A считаем *нейтрально-устойчивой*, то есть такой, что существует симметричная положительно-определенная матрица $P = P^T > 0$, удовлетворяющая следующему матричному неравенству Ляпунова $PA + A^T P \leq 0$ и, кроме того, считаем что матрица A имеет хотя бы одно нулевое собственное значение.

Не теряя общности предположим, что если вектор состояния x представлен в виде $x = [x_1, x_2]^T$, где $x_1 \in \mathbb{R}^1$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$, то матрицы A , B , F в (12) имеют следующую блочную структуру

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где, очевидно, B_1 – скаляр. Если исходная система (12) не удовлетворяет (13), то с учетом указанных выше свойств матрицы A , всегда имеется преобразование подобия, приводящее (12) к виду (13). Заметим, что свойство конвергентности инвариантно по отношению выбору базиса и, следовательно, сохраняется при преобразовании подобия.

Далее предполагаем, что входное воздействие $w(t)$ принадлежит классу \mathcal{W} , определение которого дано ниже.

Определение 3. *Непрерывная функция $t \mapsto w(t)$, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ называется принадлежащей классу \mathcal{W} , если она ограничена и удовлетворяет следующим условиям:*

1. для всех $t \in \mathbb{R}$, функция $Dw(t)$ равномерно-непрерывна;
2. для всех $t \in \mathbb{R}$ и некоторого постоянного $\alpha_1 < 1$ выполнено $|F_1 w(t)| \leq \alpha_1 |B_1|$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 . Если существует симметричная положительно-определенная матрица Ляпунова $P = P^T > 0$ такая, что

$$PA + A^T P \leq 0 \quad (14)$$

и

$$P(A + BC) + (A + BC)^T P < 0, \quad (15)$$

то для любой функции $w \in \mathcal{W}$, система (12) равномерно-конвергентна.

Если существует симметричная положительно-определенная матрица Ляпунова $P = P^T > 0$ такая, что выполнено строгое неравенство $PA + A^T P < 0$ (вместо (14)), а также имеет место $P(A + BC) + (A + BC)^T P < 0$, то нетрудно показать, что соответствующая система квадратично-конвергентна. Однако, рассматриваемые здесь системы нейтрально-устойчивы, поэтому выполнение неравенства $PA + A^T P < 0$ не может быть обеспечено.

Замечание 1 . Как следует из условия теоремы, производная квадратичной функции $V(e) = e^T P e$, где $e \in \mathbb{R}^n$ – разница между двумя произвольными решениями системы, неположительна. Причем, производная обращается в ноль, если два решения совпадают, и/или одновременно находятся в «зоне насыщения». В случае периодического входного воздействия доказательство теоремы можно провести непосредственно с помощью обобщения принципа Ла Салля. Можно формально показать, хоть это и не является целью настоящей публикации, что условие периодичности можно ослабить в смысле наложенного предположения на входное воздействие.

Замечание 2 . Как следует из леммы Якубовича–Калмана [61, 72, 73], выполнение следующего частотного неравенства

$$\operatorname{Re} W(i\omega) < 1 \quad (16)$$

для всех $\omega \neq 0$, где $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$, обеспечивает существование положительно-определенной матрицы P , удовлетворяющей условиям (14), (15).

4.2 Равномерная конвергентность систем с AW -коррекцией для нейтрально-устойчивых объектов управления

Рассмотрим следующую модель динамики объекта управления

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p (\text{sat}(u) + w_1) \\ y_p &= C_p x_p\end{aligned}\tag{17}$$

где матрица A_p нейтрально-устойчива (среди ее собственных чисел имеются простые с нулевой вещественной частью, а остальные собственные числа имеют отрицательные вещественные части). Пусть динамика регулятора задается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c (w_2 - y_p) + k_A (\text{sat}(u) - u), \\ u &= C_c x_c + D_c (w_2 - y_p),\end{aligned}\tag{18}$$

где k_A – коэффициент AW -коррекции.

Уравнения замкнутой системы (17), (18) приводятся к форме Лурье (12) где $x = [x_p, x_c]^T \in \mathbb{R}^n$, $w = [w_1, w_2]^T \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ k_A D_c C_p - B_c C_p & A_c - k_A C_c \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} B_p \\ k_A \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & B_c - k_A D_c \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} -D_c C_p & C_c \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & D_c \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} C_p & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Для обеспечения равномерной конвергентности этой системы используем теорему 2, что сделано в разделе 5 для задачи управления ЛА по углу рыскания. В частности, там показана процедура выбора коэффициента k_A , обеспечивающего конвергентность системы.

5 Применение к задаче управления углом рыскания ЛА

Применим описанный в разделе 4 метод, основанный на свойстве конвергенции, для задачи управления ЛА по рысканию.

5.1 Управление углом рыскания ЛА со статической АW-коррекцией

Рассмотрим задачу слежения ЛА по углу рыскания $\psi(t)$ за командным (задающим) воздействием $\psi^*(t)$, в которой требуется обеспечить астатизм первого порядка – то есть отсутствие установившейся ошибки по отношению к изменяющейся линейно по времени составляющей воздействия $\psi^*(t)$. Чтобы обеспечить астатизм, используем ПИД-регулятор

$$u_r(t) = k_D \omega_y(t) - k_P \Delta\psi(t) - k_I \int_0^t \Delta\psi(t) dt, \quad (19)$$

где $u(t)$ – управляющее воздействие, подаваемое на привод руля направления, $\Delta\psi = \psi^*(t) - \psi(t)$ – ошибка слежения, $\omega_y(t)$, $\psi(t)$ – угловая скорость и угол рыскания. Параметры k_D , k_P и k_I – *дифференциальный, пропорциональный и интегральный* коэффициентами передачи автопилота, выбираемые при синтезе закона управления. Величина сигнала управления $u_r(t)$, поступающего на сервопривод руля направления ограничивается из-за ограничений на угол скольжения, боковое ускорение и механические характеристики руля значением \bar{u}_r , то есть должно выполняться условие

$$-\bar{u}_r \leq u_r(t) \leq \bar{u}_r. \quad (20)$$

Чтобы выполнить условия (20) введем нелинейность вида «насыщение» в командный сигнал σ_r сервосистемы руля направления δ_r как

$$\sigma_r = \text{sat}_{\bar{u}}(u), \quad (21)$$

где $\text{sat}_{\bar{u}}(u) = \{\bar{u} \text{sign}(u) \text{ при } |u| > \bar{u} \mid u \text{ при } |u| \leq \bar{u}\}$.¹

Уравнения (19), (21) описывают ПИД-регулятор с насыщением входа рулевого привода (для простоты изложения считаем статический коэффициент передачи сервосистемы руля направления равным единице).

5.2 Модель динамики движения ЛА по курсу

В качестве примера рассмотрим линеаризованную модель бокового углового движения гипотетического ЛА [74, 75]. Следуя [56] будем считать, что угол

¹ Строго говоря, выполнение (21) не гарантирует соблюдение (20) во все моменты времени при произвольном входном сигнале из-за возможного перерегулирования в приводе руля. Однако, обычно в сервоприводах перерегулирование мало, и им можно в контексте решаемой задачи пренебречь. Можно также взять значение \bar{u}_r «с запасом». Кроме того, рулевые машины имеют конструктивные ограничения на перемещение штока, например – в виде пары винт-гайка с упорами, или концевых выключателей, которые прекращают подачу энергии в крайних положениях.

крена γ стабилизируется быстродействующим каналом автопилотирования (то есть что разворот по курсу выполняется со скольжением без крена). Поэтому используем модель изолированного движения по курсу, которая получается из приведенной в [75] модели если принять $\gamma(t) \equiv 0$. Опуская внешние возмущения, запишем следующие уравнения динамики ЛА

$$\begin{cases} \dot{\beta}(t) = a_z^\beta \beta(t) + \cos \alpha^* \cdot \omega_y(t) + a_z^{\delta_r} \delta_r(t), \\ \dot{\omega}_y(t) = a_{m_y}^\beta \beta(t) + a_{m_y}^{\omega_y} \omega_y(t) + a_{m_y}^{\delta_r} \delta_r(t), \\ \dot{\psi}(t) = \omega_y(t), \end{cases} \quad (22)$$

где $\beta(t)$ – угол скольжения ЛА; $\psi(t)$, $\omega_y(t)$ – угол и угловая скорость рыскания; α^* – «опорное» значение угла атаки, соответствующее рассматриваемому режиму полета; a_z^β , $a_z^{\delta_r}$, $a_{m_y}^\beta$, $a_{m_y}^{\omega_y}$, $a_{m_y}^{\delta_r}$ – коэффициенты линеаризованной модели ЛА. Далее используем следующие числовые значения коэффициентов (в единицах СИ) [75]: $a_z^\beta = -0.152$, $a_z^{\delta_r} = -0.032$, $a_{m_y}^\beta = -1.757$, $a_{m_y}^{\omega_y} = -0.136$, $a_{m_y}^{\delta_r} = -1.46$, $\alpha = 0.4363$ рад (25°), откуда $\cos \alpha^* = 0.906$.

Сервопривод руля направления с достаточной точностью можно моделировать следующей системой второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_r(t) = \omega_r(t), \\ \dot{\omega}_r(t) = k_\sigma(\sigma_r(t) - \delta_r) - k_2\omega_r(t), \end{cases} \quad (23)$$

где $\delta_r(t)$, $\omega_r(t)$ – угол и угловая скорость отклонения руля; $k_{\sigma 1}$, k_ω – коэффициенты передачи, выбираемые при синтезе сервопривода. Далее примем $k_\sigma = 67.2 \text{ с}^{-2}$, $k_2 = 11.5 \text{ с}^{-1}$, что соответствует передаточной функции привода $W_{\delta_r}^{\sigma_r}(s) = \frac{1}{T_r^2 s^2 + 2\xi_r T_r s + 1}$, где постоянная времени $T_r = k_\sigma^{-\frac{1}{2}} = 0.122 \text{ с}$, а коэффициент демпфирования $\xi_r = 0.5 k_\sigma^{-\frac{1}{2}} k_\omega = 0.7$; $s \in \mathbb{C}$ – аргумент преобразования Лапласа.

Таким образом, передаточная функция от сигнала управления σ_r к углу рыскания ψ для «расширенного» объекта управления (22), (23) имеет вид

$$W_{\psi}^{\sigma_r}(s) = \frac{\psi(s)}{\sigma_r(s)} = \frac{-98.2(s + 0.113)}{s(s^2 + 0.288s + 1.61)(s^2 + 11.5s + 67.2)}. \quad (24)$$

5.3 Исследование системы управления курсом ЛА

5.3.1 Синтез номинального регулятора

Рассмотрим «номинальный» режим (без насыщения), при котором $\sigma_r^*(t) \equiv u(t)$ и замкнутая СУ ЛА описывается линейными уравнениями (19), (22) (за-

метим, что в этом режиме AW -составляющая сигнала управления $u_r(t) - \sigma_r(t)$ в (26) равна нулю, поэтому выходные сигналы, согласно (19), (26), совпадают). Используя частотный критерий устойчивости для линейной системы (19), (22) и процедуру поисковой оптимизации Нелдера–Мида (*Nelder–Mead*) пакета MATLAB [76], получим следующие параметры ПИД-регулятора (19): $k_I = 0.46 \text{ с}^{-1}$, $k_P = 0.37$, $k_D = 1.8 \text{ с}$. При таких коэффициентах передаточная функция разомкнутой системы от входного сигнала сервопривода $\sigma_r(t)$ до выхода $u(t)$ ПИД-регулятора (19) имеет вид

$$W_u^{\sigma_r}(s) = \frac{-173(s + 0.113)(s^2 + 0.208s + 0.261)}{s^2(s^2 + 0.288s + 1.61)(s^2 + 11.5s + 67.2)} \quad (25)$$

что соответствует запасу устойчивости по усилению $G_m = 12.8 \text{ дБ}$, запасу устойчивости по фазе $\varphi_m = 60^\circ$ и показателю колебательности (значению H_∞ -нормы) замкнутой системы $M = 1.26$. Кривая Найквиста $W_u^{\sigma_r}(i\omega)$ и переходная функция замкнутой системы приведены на рисунках 2, 3.¹

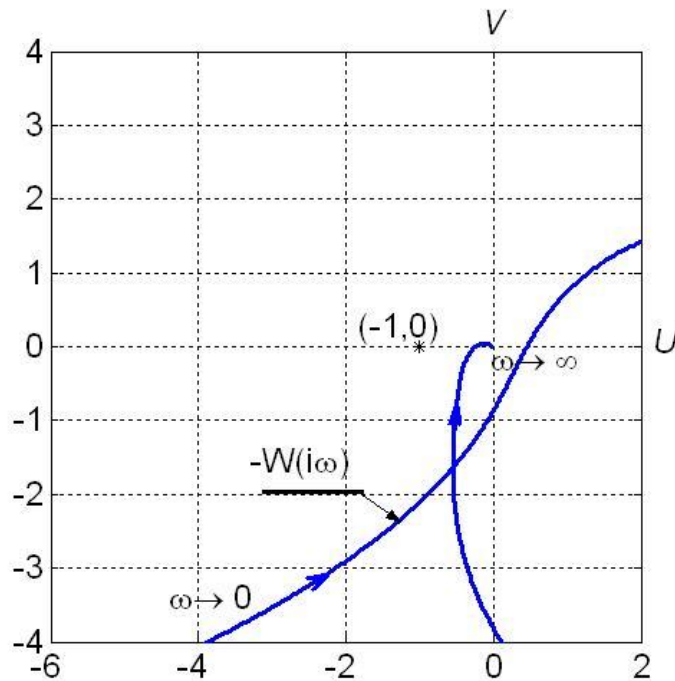


Рис. 2: Кривая Найквиста разомкнутой СУ ЛА. Закон управления (19).

5.3.2 Влияние насыщения

Учтем теперь насыщение входного сигнала в цепи обратной связи. ОУ нейтрально-устойчив, поэтому разомкнутая линейная система, включающая ПИД-

¹ Частотная характеристика $W_u^{\sigma_r}(i\omega)$ на рисунке 2 изображена с противоположным знаком так как для ЛА нормальной аэродинамической схемы коэффициент усиления передаточной функции (25) на высоких частотах отрицателен.

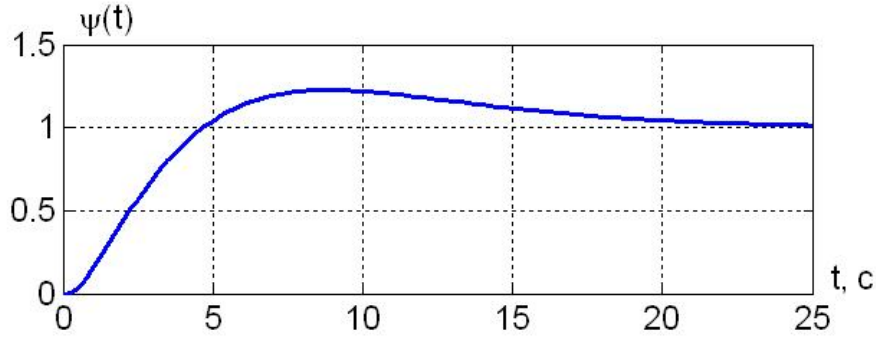


Рис. 3: Переходная функция замкнутой «номинальной» СУ ЛА. Закон управления (19), $\sigma_r(t) \equiv u_r(t)$.

регулятор (19) неустойчива из-за наличия в (25) нулевых полюсов кратности 2. Следовательно, частотное неравенство (16) не может быть выполнено и конвергентность системы (19), (21), (22) на основе теоремы 2 не может быть установлена. Нарушение неравенства (16) для рассматриваемого численного примера видно из кривой Найквиста (АФХ) для $-W(i\omega)$, приведенной на рисунке (2). При данных параметрах ЛА, неравенство (16) не выполняется при всех $\omega \leq 0.19 \text{ c}^{-1}$.

Как отмечено выше, наличие насыщения в контуре управления с интегральной составляющей может привести к падению качества управления вплоть до потери устойчивости, причем этот эффект может не проявиться при исследовании собственного движения системы (под действием только начальных условий), а лишь при определенных видах входного воздействия, или даже при определенных сочетаниях внешних воздействий и начальных условий. Рассмотрим это свойство подробнее для исследуемой СУ ЛА.

На рисунке 4 показаны переходные процессы в замкнутой СУ ЛА при ступенчатом задающем воздействии ψ^* разного уровня: 5° и 12° (заметим, что из-за нейтральной устойчивости ЛА эти процессы эквивалентны собственным движениям при соответствующих $\psi(0)$). Как видно из графиков, при $\psi^* = 5^\circ$ насыщения не наступает и процесс имеет вид переходной функции «номинальной» системы, показанной на рисунке 3. При $\psi^* = 12^\circ$, вследствие насыщения, качество процесса значительно снижается. Хотя состояние равновесия остается асимптотически устойчивым, перерегулирование достигает 60%, а время переходного процесса возрастает вдвое. На этом рисунке также показано, что амплитуда сигнала управления $u_r(t)$ на выходе ПИД-регулятора (19) в несколько раз превышает уровень насыщения сервопривода \bar{u} .

Рассмотрим теперь реакцию системы на гармоническое входное воздействие вида $\psi^*(t) = \psi_{\max}^* \sin(\Omega t)$. Будем изменять значение $\psi_{\max}^* = 0 \div 30^\circ$ в

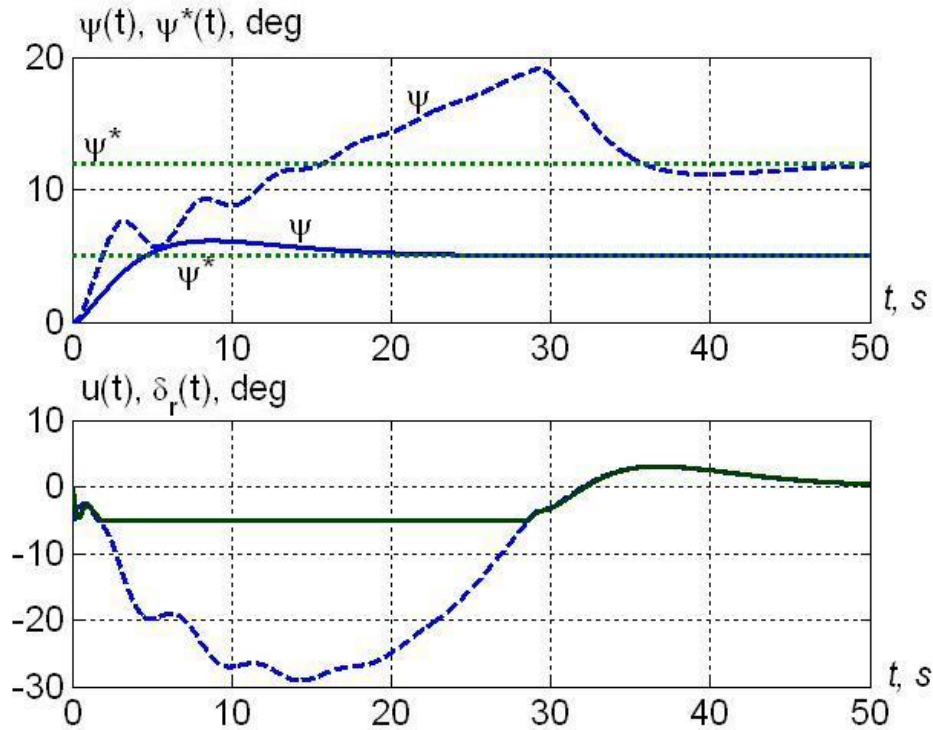


Рис. 4: Переходные процессы в СУ ЛА при ступенчатом задающем воздействии $\psi^* = 5^\circ$ (сплошная линия) и $\psi^* = 12^\circ$ (пунктир), а также графики выходного сигнала ПИД-регулятора $u_r(t)$ (сплошная линия) и отклонения руля направления $\delta_r(t)$ (пунктир) при $\psi^* = 12^\circ$.

направлении возрастания и убывания в диапазоне $\psi_{max}^* = 0 \div 26^\circ$, примем $\Omega = 0.025 \text{ c}^{-1}$. Результаты расчета представлены на рисунке 5 в виде зависимостей амплитуд сигнала управления u_r и ошибки слежения $\Delta\psi(t)$ от амплитуды задающего воздействия.² Как видно из графиков, при увеличении ψ_{max}^* амплитуды u_{max} , $\Delta\psi_{max}$ постепенно растут до появления некоторого скачка. Затем, при уменьшении ψ_{max}^* , амплитуды u_{max} , $\Delta\psi_{max}$ монотонно убывают до возникновения второго скачка. Из рисунка 5 виден явно выраженный гистерезисный характер зависимостей u_{max} и $\Delta\psi_{max}$. Аналогичный результат получен в [77] при управлении бесщеточным электродвигателем постоянного тока. Отсюда видно, что из-за вайдапа может нарушаться устойчивость систем при действии входного сигнала: при одинаковом входном воздействии установившиеся процессы могут оказаться различными. Этот эффект иллюстрируется рисунком 6, где показаны графики $\psi(t)$, $u(t)$, полученные при $\psi^*(t) = \psi_0^* + \psi_{max}^* \sin(\Omega t)$, $\psi_0^* = 11^\circ$, $\psi_{max}^* = 25^\circ$, $\Omega = 0.01 \text{ c}^{-1}$ и начальных значениях $\psi(0) \in [-40, 40]^\circ$ (остальные начальные условия взяты нулевыми). Из графиков видно возникновение отличающихся между собой установившихся

² Для расчета интервал моделирования взят равным $10^4\pi$ секунд. Первую половину этого интервала значение ψ_{max}^* задавалось возрастающим по линейному закону от 0 до 26° , а вторую – убывающим.

процессов в системе при одном и том же задающем воздействии. Кроме того, основная часть процессов сходится к установившемуся движению, при котором насыщение не наступает и амплитуда ошибки слежения мала (составляет доли градуса), но имеются отдельные реализации со «срывом» слежения, в которых амплитуда ошибки достигает ста градусов. Возможность появления таких процессов сложно установить даже интенсивным компьютерным моделированием, однако они могут возникнуть при эксплуатации системы.

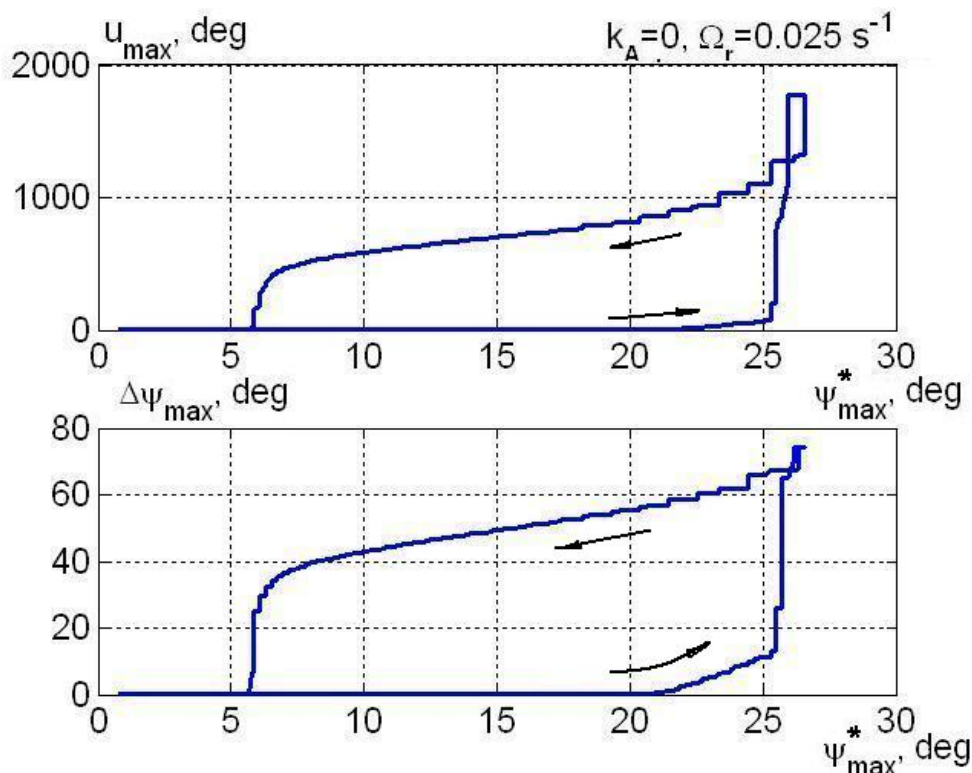


Рис. 5: Зависимости амплитуд сигнала управления u_r и ошибки слежения $\Delta\psi(t)$ от амплитуды задающего воздействия в системе при законе управления (19), (21).

5.3.3 Система управления ЛА с АW-коррекцией

Рассмотрим теперь следующий закон управления с АW-коррекцией

$$u_r(t) = k_D \omega_y(t) - k_P \Delta\psi(t) - k_I \int_0^t (\Delta\psi(\tau) + k_A (u(\tau) - \sigma_r(\tau))) d\tau, \quad (26)$$

где k_A – коэффициент АW-коррекции, выбираемый при синтезе, остальные параметры – те же, что и в (19), (21).

Применим теперь вместо закона управления (19) закон (21), (26) с АW-коррекцией. Как видно из рисунка 7, неравенство (16) выполняется при

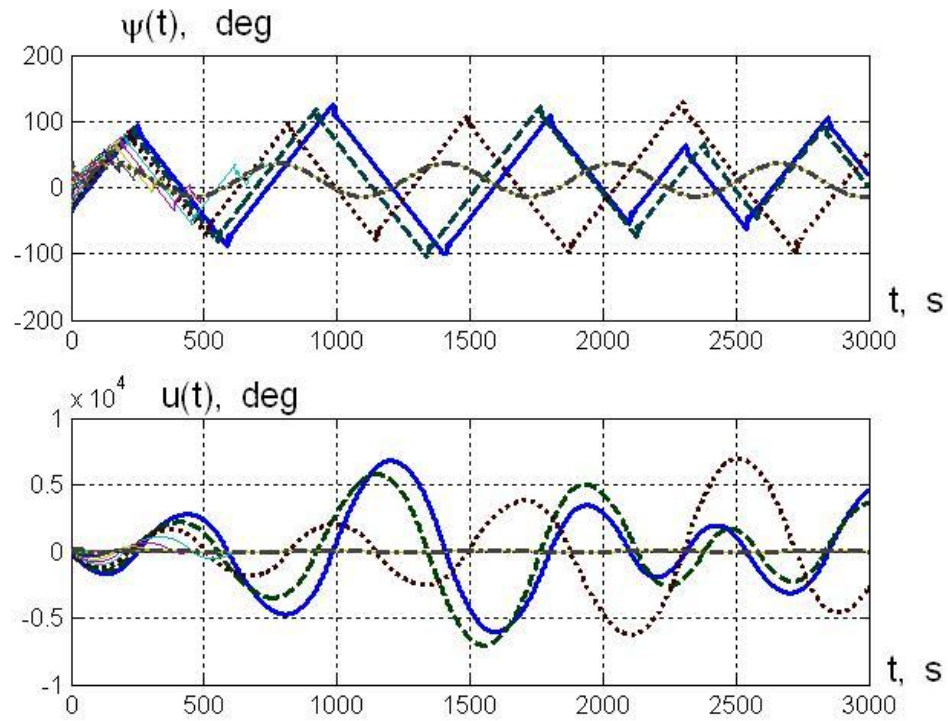


Рис. 6: Множество процессов $\psi(t)$, $u_r(t)$ при законе управления (19), (21) для $\psi^*(t) = \psi_0^* + \psi_{\max}^* \sin(\Omega t)$ и различных $\psi(0)$.

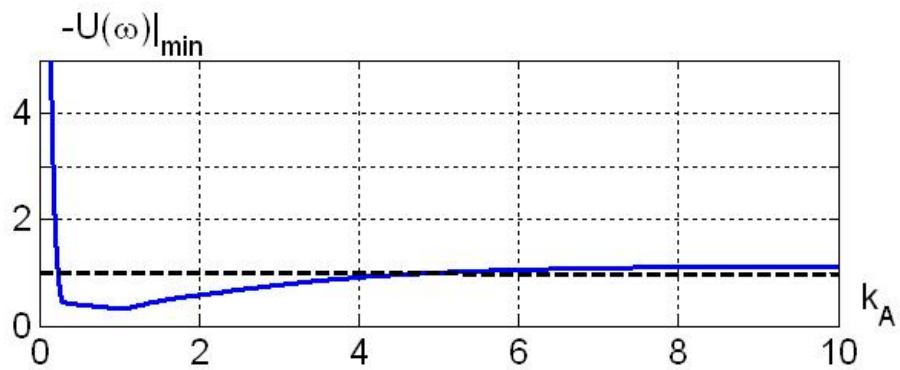


Рис. 7: Зависимость $\min(-U(\omega))$ для линейной части системы (21) – (23), (26) от коэффициента k_A .

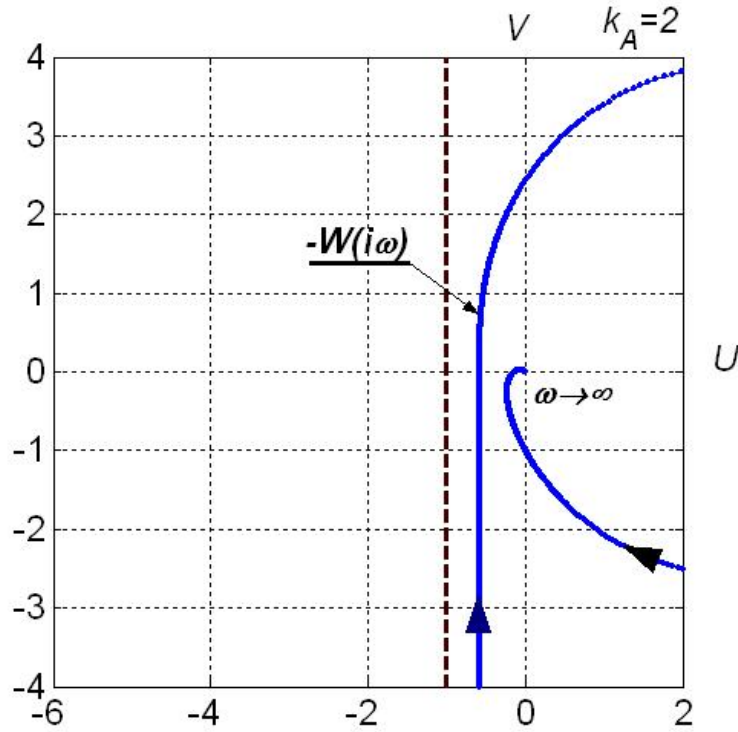


Рис. 8: Кривая Найквиста для СУ ЛА с AW -коррекцией. Закон управления (21), (26), $k_A = 2$.

$0.24 \leq k_A \leq 5.0$. Следовательно, согласно теореме 2, система (26), (21), (22) при $k_A \in [0.24, 5.0]$ конвергентна. Передаточная функция линейной части системы с учетом AW -коррекции при $k_A = 2$ имеет вид

$$W_u^{\sigma_r}(s) = \frac{-111(s + 0.90)(s - 0.44)(s - 0.11)}{s(s + 0.92)(s^2 + 0.29s + 1.6)(s^2 + 11.5s + 67.2)}.$$

Соответствующая кривая Найквиста представлена на рисунке 8.

Промоделируем СУ ЛА с AW -коррекцией при $k_A = 2$ для тех же входных воздействий и начальных условий, которые были использованы выше для СУ без AW -коррекции. Результаты приведены на рисунках 9–11.

Переходные процессы в СУ ЛА при постоянном задающем воздействии $\psi^* = 12^\circ$ и графики выходного сигнала ПИД-регулятора $u_r(t)$ и отклонения руля направления $\delta_r(t)$ показаны на рисунке 9. Сравнивая полученные графики с приведенными на рисунке 4 для $\psi^* = 12^\circ$ видим существенное улучшение качества процессов. Конечно, насыщение сигнала управления приводит к некоторому замедлению процессов регулирования по сравнению с «номинальной» СУ ЛА (ср. рисунок 3), однако это ухудшение не носит такого фатального характера, как в СУ без AW -коррекции.

Реакция СУ ЛА на гармоническое входное воздействие $\psi^*(t) =$

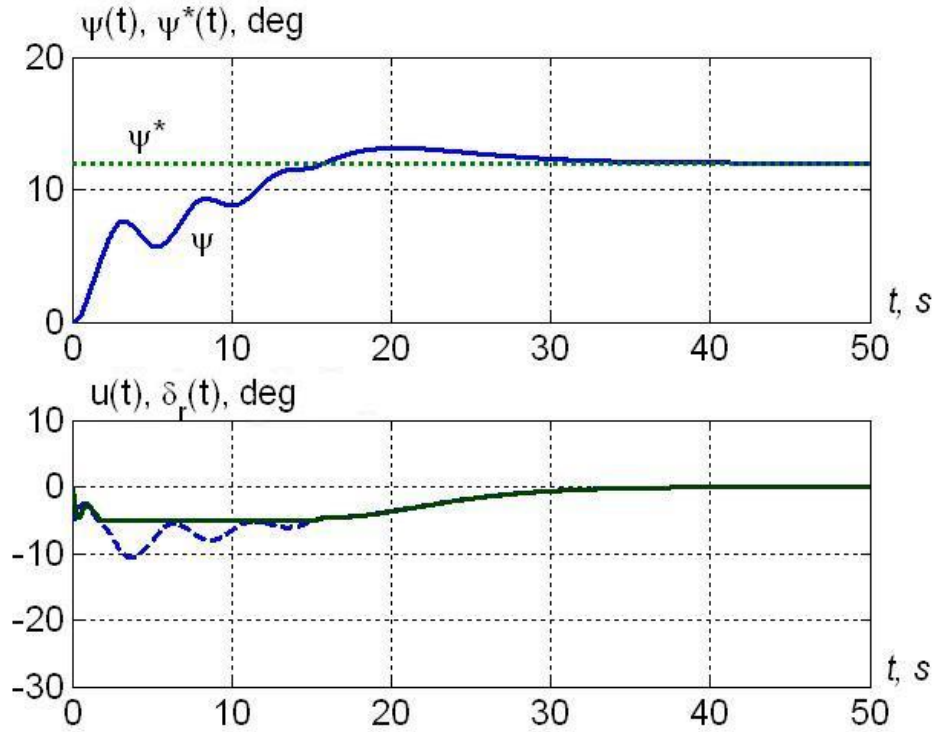


Рис. 9: Переходные процессы в СУ ЛА при ступенчатом задающем воздействии $\psi^* = 12^\circ$, а также графики выходного сигнала ПИД-регулятора $u_r(t)$ (сплошная линия) и отклонения руля направления $\delta_r(t)$ (пунктир). Закон управления (21), (26), $k_A = 2$.

$\psi_{\max}^* \sin(\Omega t)$ с изменяющейся в пределах $0 \div 30^\circ$ амплитудой ψ_{\max}^* при $\Omega = 0.025 \text{ с}^{-1}$ отражена на рисунке 10 в виде зависимостей амплитуд сигнала управления u_r и ошибки слежения $\Delta\psi(t)$ от амплитуды задающего воздействия. В отличие от СУ ЛА без *AW*-коррекции (рисунок 5), здесь отсутствует гистерезис и, кроме того, амплитуды сигналов управления и ошибки слежения по рысканию находятся в пределах эксплуатационных требований.

Графики $\psi(t)$, $u(t)$, полученные при $\psi^*(t) = \psi_0^* + \psi_{\max}^* \sin(\Omega t)$, $\psi_0^* = 11^\circ$, $\psi_{\max}^* = 25^\circ$, $\Omega = 0.01 \text{ с}^{-1}$ и начальных значениях $\psi(0) \in [-40, 40]^\circ$ показаны на рисунке 11. Из графиков видно совпадение между собой установившихся процессов в СУ ЛА при заданном командном воздействии.

Ввиду того, что СУ ЛА с *AW*-коррекцией (21), (26) при $k_A = 2$ конвергентна, согласно параграфу 3.2 становится возможным рассчитать для нее функцию чувствительности $\mathbb{S}(\psi_{\max}^*, \omega)$, характеризующую точность слежения за гармоническим воздействием в зависимости от его частоты и амплитуды. Для рассматриваемой системы график $\mathbb{S}(\psi_{\max}^*, \omega)$ приведен на рисунке 12.

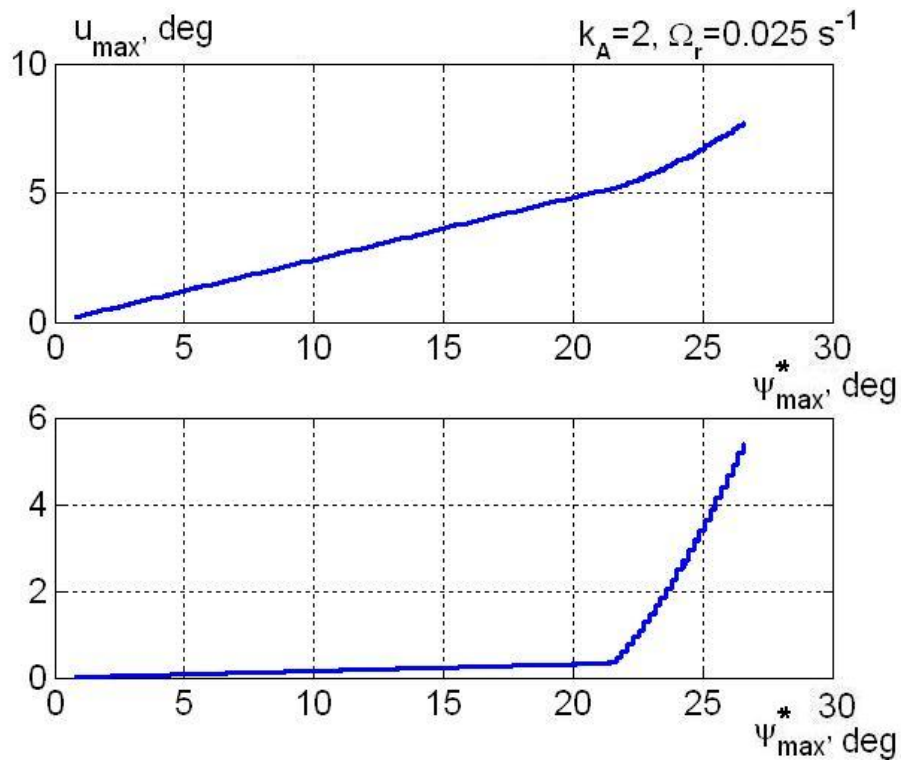


Рис. 10: Зависимости амплитуд сигнала управления u_r и ошибки слежения $\Delta\psi(t)$ от амплитуды задающего воздействия в системе. Закон управления (21), (26), $k_A = 2$.

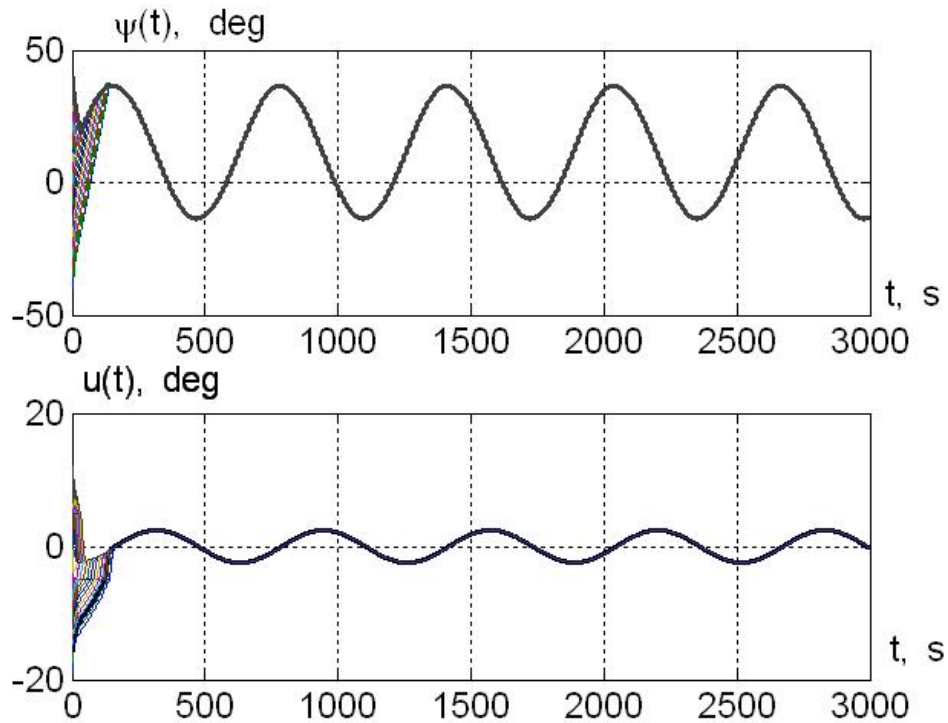


Рис. 11: Процессы $\psi(t)$, $u_r(t)$. Закон управления (21), (26) ($k_A = 2$) для $\psi^*(t) = \psi_0^* + \psi_{\max}^* \sin(\Omega t)$ и различных $\psi(0)$.

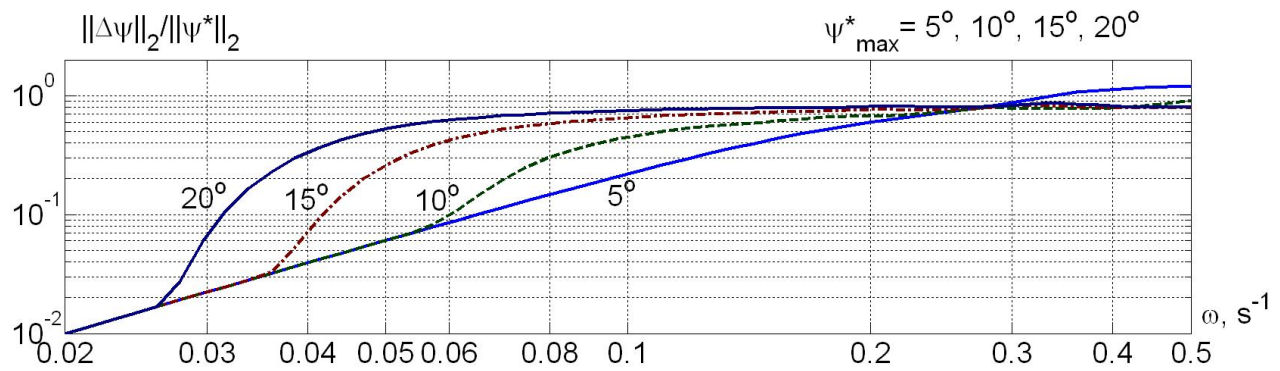


Рис. 12: Функция чувствительности $\mathcal{S}(\psi_{\max}^*, \omega) = \|\Delta\psi\|_2/\|\psi^*\|_2$. Закон управления (21), (26) ($k_A = 2$) при $\psi_{\max}^* = 5^\circ \div 25^\circ$.

6 Заключение

Статья посвящена задачам управления при наличии нелинейного эффекта насыщения сигнала управления, приводящего к возникновению нежелательных колебательных режимов в системах с изодромным регулятором. Дан обзор публикаций по способам *AW*-коррекции. Изложен метод *AW*-коррекции, обеспечивающий ковергентность замкнутой системы для задающих воздействий определенного класса для нейтрально-устойчивых объектов управления.

Показано применение метода к задаче управления полетом летательного аппарата. Приведены результаты моделирования систем управления ЛА с различными видами регуляторов, дан анализ точности предложенных алгоритмов на основе применения метода гармонического баланса для конвергентных систем. Показано применение разработанных аналитико-численных методов для анализа нежелательных колебательных режимов в системах управления с насыщением. Проведено моделирование СУ ЛА при больших амплитудах задающего воздействия и эффекте насыщения нелинейных элементов управления,

Список литературы

- [1] J. C. Lozier, "A steady-state approach to the theory of saturable servo systems," *IRE Trans. Automat. Contr.*, pp. 19–39, May 1956.
- [2] M. Dornheim, "Report pinpoints factors leading to YF-22 crash," *Aviation Week and Space Technology*, vol. 137, pp. 53–54, 1992.

- [3] C. Shifrin, “Sweden seeks cause of Gripen crash,” *Aviation Week and Space Technology*, vol. 139, pp. 78–79, 1993.
- [4] Y. Yildiz and I. Kolmanovsky, “A control allocation technique to recover from pilot-induced oscillations (CAPIO) due to actuator rate limiting,” in *Proc. American Control Conf. (ACC 2010)*. Baltimore, MD, USA: AACC, June 30–July 02, 2010, pp. 516–523.
- [5] N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, and S. M. Seledzhi, “Hidden oscillations in nonlinear control systems,” *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, vol. 18, no. 1, pp. 2506–2510, 2010.
- [6] G. A. Leonov and N. V. Kuznetsov, “Algorithms for searching hidden oscillations in the Aizerman and Kalman problems,” *Doklady Mathematics*, vol. 84, no. 1, pp. 475–481, 2011.
- [7] V. O. Bragin, V. I. Vagaitsev, N. V. Kuznetsov, and G. A. Leonov, “Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. the Aizerman and Kalman conjectures and Chua’s circuits,” *Journal of Computer and Systems Sciences International*, vol. 50, no. 4, pp. 511–543, 2011.
- [8] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, O. A. Kuznetsova, S. M. Seledzhi, and V. I. Vagaitsev, “Hidden oscillations in dynamical systems,” *Transaction on Systems and Control*, vol. 6, no. 2, pp. 54–67, 2011.
- [9] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, and V. I. Vagaitsev, “Localization of hidden Chua’s attractors,” *Physics Letters A*, vol. 375, no. 23, pp. 2230–2233, 2011.
- [10] T. Lauvdal, R. Murray, and T. Fossen, “Stabilization of integrator chains in the presence of magnitude and rate saturations: a gain scheduling approach,” in *Proc. IEEE Control and Decision Conference*, 1997.
- [11] Раушенбах Б.В., Токаръ Е.Н., *Управление ориентацией космических аппаратов*. М: Наука, 1974.
- [12] Каргу Л.И., *Системы угловой стабилизации космических аппаратов. Изд. 2-е, перераб и доп.* М: Машиностроение, 1980.
- [13] Келдыш М.В. *Избранные труды. Механика*. Москва, Наука. 1985.
- [14] R. Hanus, “Antiwindup and bumpless transfer: A survey,” in *Proc. 12th IMACS World Congr.*, vol. 2, Paris, France, Jul. 1988, pp. 59–65.

- [15] K. J. Åström and L. Rundqwist, “Integrator windup and how to avoid it,” in *Proc. Amer. Control Conf. (ACC’89)*, vol. 2, Pittsburgh, PA, USA, Jun. 1989, pp. 1693–1698.
- [16] D. Bernstein and A. Michel, “A chronological bibliography on saturating actuators,” *Int. J. Robust Nonlinear Contr.*, vol. 5, pp. 375–380, 1995.
- [17] A. Glattfelder and W. Schaufelberger, *Control Systems with Input and Output Constraints*. Springer-Verlag, 2003.
- [18] P. Hippe, *Windup in Control: Its Effects and Their Prevention*. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [19] S. Tarbouriech and M. Turner, “Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems,” *IET Control Theory Appl.*, vol. 3, no. 1, pp. 1–19, 2009, <https://lra.le.ac.uk/handle/2381/4813>.
- [20] P. Kapasouris, M. Athans, and G. Stein, “Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators,” in *Proc. 27th IEEE Conf. Decision and Control (CDC’88)*, vol. 1. Austin, Texas: IEEE Press, Dec. 1988, pp. 469–479.
- [21] M. Athans and P. Falb, *Optimal Control*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [22] Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
- [23] A. Glattfelder and W.Scaufelberger, “Stability analysis of single loop control systems with saturation and antireset-windup circuits,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, no. 12, pp. 1074–1081, Dec. 1983.
- [24] R. Hanus, “A new technique for preventing control windup,” *Journal A*, vol. 21, no. 1, pp. 15–20, 1980.
- [25] A. Glattfelder and W. Schaufelberger, “Stability of discrete override and cascade-limiter single-loop control systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 6, pp. 532–540, jun 1988.
- [26] Сю Д., Мейер А., *Современная теория автоматического управления и ее применение*, . Топчиев, Ed. М.: Машиностроение, 1972.
- [27] E. Jury and B. Lee, “On the stability of a certain class of nonlinear sampled data systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-9, pp. 51–61, Jan. 1964.

- [28] Цыпкин Я. З. Частотные критерии абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем // Автоматика и телемеханика. 1964. №3. С. 281–289.
- [29] P. Karasouris and M. Athans, “Multivariable control systems with saturating actuators antireset windup strategies,” in *Proc. Amer. Control Conf. (ACC’85)*, Boston, MA, USA, Jun. 1985, pp. 1579–1584.
- [30] —, “Control systems with rate and magnitude saturation for neutrally stable open loop systems,” in *Proc. 29th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC’90)*, vol. 6. Honolulu, Hawaii: IEEE Press, Dec. 1990, pp. 3404–3409.
- [31] M. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, and C. N. Nett, “A unified framework for the study of antiwindup designs,” *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 1869–1883, Dec. 1994.
- [32] M. Kothare and M. Morari, “Multiplier theory for stability analysis of antiwindup control systems,” *Automatica*, vol. 35, pp. 917–928, 1999.
- [33] Дезоер Ч., Видьясагар М. Системы с обратной связью: вход-выходные соотношения. 1983.
- [34] V. Balakrishnan, “Linear matrix inequalities in robustness analysis with multipliers,” *Systems Control Lett.*, vol. 25, no. 4, pp. 265–272, 1995.
- [35] G. Zames and P. Falb, “Stability conditions for systems with monotone and slope-restricted nonlinearities,” *SIAM J.*, vol. 6, no. 1, pp. 89–108, 1968.
- [36] C. Barbu, R. Reginatto, A. R. Teel, and L. Zaccarian, “Anti-windup design for manual flight control,” in *Proc. American Control Conf. (ACC’99)*, vol. 5. AACC, Jun. 1999, pp. 3186–3190.
- [37] C. Barbu, S. Galeani, A. R. Teel, and L. Zaccarian, “Non-linear anti-windup for manual flight control,” *Int. J. Control*, vol. 78, no. 14, pp. 1111–1129, Sep. 2005.
- [38] F. Wu and M. Soto, “Extended anti-windup control schemes for LTI and LFT systems with actuator saturations,” *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 14, no. 15, pp. 1255–1281, Oct. 2004.
- [39] J. Sofrony, M. C. Turner, I. Postlethwaite, O. Brieger, and D. Leissing, “Anti-windup synthesis for PIO avoidance in an experimental aircraft,” in *Proc. 45th IEEE Conf. Decision & Control (CDC 2006)*. San Diego, CA, USA: IEEE Press, Piscataway, NJ, Dec. 13–15, 2006, pp. 5412–5417.

- [40] O. Brieger, M. Kerr, D. Leissling, J. Postlethwaite, J. Sofrony, and M. C. Turner, “Anti-windup compensation of rate saturation in an experimental aircraft,” in *Proc. American Control Conf. (ACC 2007)*. AACC, Jul. 2007, pp. 924–929.
- [41] O. Brieger, M. Kerr, J. Postlethwaite, J. Sofrony, and M. C. Turner, “Flight testing of low-order anti-windup compensators for improved handling and PIO suppression,” in *American Control Conf. (ACC 2008)*. AACC, Jun. 2008, pp. 1776–1781.
- [42] I. Queinnec, S. Tarbouriech, and G. Garcia, “Anti-windup design for aircraft flight control,” in *Proc. IEEE Int. Symp. Intelligent Control*, Oct. 2006, pp. 2541–2546.
- [43] C. Roos and J. Biannic, “Aircraft-on-ground lateral control by an adaptive LFT-based anti-windup approach,” in *Proc. IEEE Int. Symp. Intelligent Control*, Oct. 2006, pp. 2207–2212.
- [44] P. Y. Tiwari, E. F. Mulder, and M. V. Kothare, “Multivariable anti-windup controller synthesis incorporating multiple convex constraints,” in *Proc. American Control Conf. (ACC 2007)*. AACC, Jul. 2007, pp. 5212–5217.
- [45] N. E. Kahveci, P. A. Ioannou, and M. D. Mirmirani, “A robust adaptive control design for gliders subject to actuator saturation nonlinearities,” in *Proc. American Control Conf. (ACC 2007)*. AACC, Jul. 2007, pp. 492–497.
- [46] —, “Adaptive LQ control with anti-windup augmentation to optimize UAV performance in autonomous soaring applications,” *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, vol. 16, no. 4, pp. 691–707, Jul. 2008.
- [47] G. Herrmann, M. C. Turner, and I. Postlethwaite, “Discrete-time and sampled-data anti-windup synthesis: stability and performance,” *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 37, no. 2, pp. 91–113, Feb. 2006.
- [48] J.-S. Yee, J. L. Wang, and N. Sundararajan, “Robust sampled data H_∞ -flight controller design for high α stability-axis roll manoeuvre,” *Control Engineering Practice*, vol. 8, pp. 735–747, 2001.
- [49] S. Galeani, S. Onori, A. R. Teel, and L. Zaccarian, “A magnitude and rate saturation model and its use in the solution of a static anti-windup problem,” *Systems & Control letters*, vol. 57, no. 1, pp. 1–9, Jan. 2008.

- [50] J. Biannic, S. Tarbouriech, and D. Farret, “A practical approach to performance analysis of saturated systems with application to fighter aircraft flight controllers,” in *Proc. 5th IFAC Symposium ROCOND*, Toulouse, France, Jul. 2006, <http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/30006.html>.
- [51] J. Biannic and S. Tarbouriech, “Stability and performance enhancement of a fighter aircraft flight control system by a new anti-windup approach,” in *Proc. 17th IFAC Symp. Automatic Control in Aerospace (ACA 2007)*, vol. 17, Toulouse, France, 2007, <http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/38634.html>.
- [52] —, “Optimization and implementation of dynamic anti-windup compensators with multiple saturations in flight control systems,” *Control Engineering Practice*, vol. 17, pp. 703–713, 2009.
- [53] J. Biannic, C. Roos, and S. Tarbouriech, “A practical method for fixed-order anti-windup design,” in *Proc. IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2007)*, Pretoria, Aug. 2007, <http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/38515.html>.
- [54] C. Roos and J. Biannic, “A convex characterization of dynamically-constrained anti-windup controllers,” *Automatica*, vol. 44, no. 9, pp. 2449–2452, Sep. 2008.
- [55] R. van den Berg, A. Y. Pogromsky, G. A. Leonov, and J. E. Rooda, “Design of convergent switched systems,” in *Group Coordination and Cooperative Control. (Lecture Notes in Control and Information Sciences*, K. Y. Pettersen and J. Y. Gravdahl, Eds. Berlin: Springer, 2006, vol. 336, pp. 291–311.
- [56] A. Pogromsky, B. Andrievsky, and J. Rooda, “Aircraft flight control with convergence-based anti-windup strategy,” in *Proc. IFAC Workshop Aerospace Guidance, Navigation and Flight Control Systems (AGNFCS 09)*. Samara, Russia: IFAC, Jun. 30, 2009.
- [57] Демидович Б.П., *Лекции по математической теории устойчивости. Учебное пособие для вузов.* М.: Наука, 1967.
- [58] A. Pavlov, A. Pogromsky, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer, “Convergent dynamics, a tribute to Boris Pavlovich Demidovich,” *Systems & Control Letters*, vol. 52, pp. 257–261, 2004.

- [59] A. Pavlov, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer, *Uniform Output Regulation of Nonlinear Systems: A Convergent Dynamics Approach*. Boston, MA: Birkhäuser, 2006.
- [60] R. van den Berg, A. Y. Pogromsky, and J. E. Rooda, “Convergent systems design: Anti-windup for marginally stable plants,” in *Proc. 45th IEEE Conf. Decision & Control (CDC 2006)*. San Diego, CA, USA: IEEE Press, Piscataway, NJ, Dec. 13–15, 2006, pp. 5441–5446.
- [61] Якубович В.А., “Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний,” *Автоматика и телемеханика*, vol. 25, no. 7, pp. 1017–1029, 1964.
- [62] A. Pavlov, A. Pogromsky, N. v.d.Wouw, and H. Nijmeijer, “On convergence properties of piecewise affine systems,” *Int. J. Control*, vol. 80, pp. 1233–1247, 2007.
- [63] A. Pavlov, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer, *Uniform Output Regulation of Nonlinear Systems: a Convergent Dynamics Approach*. Birkhäuser, 2006.
- [64] A. Pavlov, N. v.d.Wouw, and H. Nijmeijer, “Frequency response functions for nonlinear convergent systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 52, no. 6, pp. 1159–1165, 2007.
- [65] R. van den Berg, A. Pogromsky, and J. Rooda, “Well-posedness and accuracy of harmonic linearization for Lur’e systems,” in *Proc. 46th IEEE Conf. Decision and Control*, New Orleans, USA, 2007.
- [66] Бесекерский В.А., Попов Е.П., *Теория систем автоматического регулирования*. М.: Наука, 1975.
- [67] Квакуернаак Х., Сиван Р., *Линейные оптимальные системы управления*. М.: Мир, 1977.
- [68] A. Pavlov, N. van de Wouw, A. Pogromsky, M. Heertjes, and H. Nijmeijer, “Frequency domain performance analysis of nonlinearly controlled motion systems,” in *Proc. 46th IEEE Conf. Decision and Control*. New Orleans, LA, USA: IEEE, Dec. 12–14, 2007.
- [69] A. Pavlov, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer, “Convergent systems: Analysis and design,” in *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*. Springer, 2005.

- [70] Первозванский А.А., *Курс теории автоматического регулирования. Учеб. пособ.* М.: Наука, 1986.
- [71] A. Y. Pogromsky, R. A. van den Berg, and J. E. Rooda, “Performance analysis of harmonically forced nonlinear systems,” in *Proc. 3rd IFAC Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO’07)*, vol. 3. Saint Petersburg: IFAC, Aug. 2007.
- [72] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А., *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.* М.: Наука, 1978.
- [73] А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, А.Л. Фрадков, Ed., *Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
- [74] *Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / Под ред. Бюшгенса Г.С.* М.: Наука. Физматлит, 1998.
- [75] Буков В.Н., Рябченко В.Н., “Вложение систем. Классы законов управления,” *Автоматика и телемеханика*, no. 4, pp. 11–26, 2001.
- [76] P. Venkataraman, *Applied Optimization with MATLAB Programming.* Wiley-Interscience, Dec. 2001.
- [77] R. A. van den Berg, *Performance analysis of switching systems. PhD Thesis.* Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2008.