ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

А.П. Бакланов

К вопросу о представлении максимина в одной задаче импульсного управления[1]

Аннотация

Рассматривается одна игровая задача программного управления с фиксированным временем окончания и импульсными ограничениями. Исследуются представление максимина при различных асимптотических режимах, вызванных импульсами управления малой длительности.

1 Введение

В статье рассматривается игровая задача программного управления в русле работ [1], [2]. В дальнейшем фиксируем две линейные управляемые системы

$$\dot{x}(t) = C(t)x(t) + u(t)b(t),\ \dot{y}(t) = D(t)y(t) + v(t)c(t)$$

с управлениями $u(t), v(t)$ соответственно первого и второго игроков. Фазовое пространство первой системы (второй системы) полагаем k-мерным (l-мерным), промежуток управления совпадает с $I_0 \overset{\triangle}{=} [0,1]$, а начальные условия таковы, что $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^k$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^l$. Полагаем, что при $t \in [0,1]$ $C(t)$ — $k \times k$-матрица и $D(t)$ — $l \times l$-матрица. Все компоненты матрицантов $C(\cdot)$ и $D(\cdot)$ — непрерывные функции на отрезке $[0,1]$. Каждая компонента

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-90432-укр_ф_а.

$b_i = b_i(\cdot)$ $(c_j = c_j(\cdot))$ вектор-функции b (вектор-функции c) есть вещественнозначная функция на $I \overset{\triangle}{=} [0, 1[$, которая может быть разрывна. Программные управления игроков u, v полагаем кусочно-постоянными и непрерывными справа вещественнозначными функциями. Более того, их выбор должен осуществляться с соблюдением ограничений на полный импульс

$$\int_I |u(t)|\, dt \leq 1, \quad \int_I |v(t)|\, dt \leq 1. \tag{1.1}$$

Данное условие формализует «запас доступного топлива». Отметим, что равенство ресурсных констант первого и второго игрока не снижает общности задачи, а именно: любую подобную нашей задачу, где ресурсные константы не совпадают, можно свести к задаче, где они совпадают. Игроки также должны стремиться использовать только такие управления, которые отличны от нуля лишь на некотором «малом» промежутке времени. Всюду в работе под ограничениями асимптотического характера будем понимать асимптотическую версию последнего ограничения. Используя формулу Коши, мы можем построить траектории $\phi_u(\cdot), \xi_v(\cdot)$, соответствующие управлениям u, v. Нас будут интересовать область достижимости для систем игроков, удовлетворяющие ограничениям асимптотического характера. Данные области достижимости мы будем искать в виде множеств притяжения, используя конечно-аддитивные меры в качестве обобщенных управлений. Подобный подход развит в работах [3], [4], [5]. Следует отметить, что обобщенные управления используются в теории оптимального управления уже достаточно давно. Здесь следует упомянуть об использовании обобщенных функций в задачах импульсного управления; оригинальный подход, предусматривающий применение обобщенных функций в качестве управлений был предложен Н.Н. Красовским [6]. В классических задачах теории управления в качестве обобщенных управлений используются мерозначные функции [7], [8]. Вопрос о распространении постановки [1], в которой рассматривались ограничения на полный импульс для неотрицательных управлений, до исследуемой в настоящей работе был поставлен В.И. Ухоботовым на семинаре кафедры теории управления и оптимизации ЧелГУ.

Будем полагать, что задана некоторая непрерывная по совокупности переменных функция

$$\alpha_0 : \mathbb{R}^k \times R^l \to \mathbb{R}.$$

Первый игрок стремится к минимизации значений $\alpha_0(\phi_u(1), \xi_v(1))$ путем рационального выбора u, а второй игрок стремится к максимизации этих значений посредством выбора v. Мы рассматриваем при этом задачу на программный максимин с терминальной платой. Более того, нас интересует результат данной задачи, удовлетворяющий ограничениям асимптотического характера.

Основные сокращения: в/з (вещественнозначная), ОАХ (ограничения асимптотического характера), МП (множество притяжения), к.-а. (конечно-аддитивная), ТП (топологическое пространство), с н.м. (с некоторого момента).

2 Обозначения и определения

Используем общие конструкции расширений абстрактных задач о достижимости [3], [9]. Через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению. Семейством будем называть множество, все элементы которого сами являются множествами. Если S — множество, то через $\mathcal{P}(S)$ (через $\mathcal{P}'(S)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества S. Через B^A обозначаем множество всех операторов, действующих из множества A в множество B; при $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ множество $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии f. Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ — натуральный ряд и $\overline{1,s} \triangleq \{i \in \mathbb{N} | i \leqslant s\}$ $\forall s \in \mathbb{N}$. Линейные операции, умножение и порядок в пространствах в/з функций определяем поточечно. Если $s \in \mathbb{N}$, то через $\mathbb{R}^s$ обозначаем множество всех кортежей

$$(x_i)_{i\in\overline{1,s}} : \overline{1,s} \to \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

получая фактически s-мерное арифметическое пространство, а в виде (2.1) — s-мерный вектор. В дальнейшем оснащаем (при $s \in \mathbb{N}$) линейное конечномерное пространство $\mathbb{R}^s$ нормой

$$|| \cdot ||^{(s)} \triangleq (||x||^{(s)})_{x\in\mathbb{R}^s},$$

где при $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^s$ число $||\widetilde{x}||^{(s)}$ есть наибольшее из чисел $|\widetilde{x}(i)|,\ i \in \overline{1,s}$. Норма $|| \cdot ||^{(s)}$ порождает обычную топологию покоординатной сходимости $\tau_{\mathbb{R}}^{(s)}$. В случае $s = 1$ мы имеем обычную $|\cdot|$-топологию $\mathbb{R}$, для ее обозначения будем использовать $\tau_{\mathbb{R}}$.

Если (X, τ) — ТП и $A \in \mathcal{P}(X)$, то через $cl(A, \tau)$ обозначим замыкание множества A в ТП (X, τ), а $\tau|_A \triangleq \{A \cap G : G \in \tau\}$ — топология множества A, индуцированная из ТП (X, τ) [10, с. 111]. Если же (X, τ) — ТП и $x \in X$, то полагаем $N^0_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau |\ x \in G\}$,

$$N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{Y \in \mathcal{P}(X) |\ \exists G \in N^0_\tau(x) : G \subset Y\}, \qquad (2.2)$$

получая в (2.2) фильтр [11, гл. I] окрестностей x в ТП (X, τ). Через $(\tau - comp)[X]$ обозначаем семейство всех непустых компактных в ТП (X, τ) подмножеств X.

Направленностью [12, гл. 2] в множестве H будем называть всякий триплет $(D, \preceq, f)$ [3, с. 33], где $(D, \preceq)$ — непустое направленное множество [12, гл. 2], а f — отображение из D в H. Если $(D, \preceq, f)$ есть направленность в (H, τ), то

$$(H{-}ass)[D, \preceq, f] \stackrel{\triangle}{=} \{V \in \mathcal{P}(H) |\ \exists d_1 \in D\ \forall d_2 \in D\ \big((d_1 \preceq d_2) \Rightarrow (f(d_2) \in V)\big)\}$$

есть фильтр множества H, ассоциированный с этой направленностью. Сходимость (по Мору-Смиту) к элементу $h \in H$ в терминах направленности определяется следующим образом:

$$\big((D, \preceq, f) \xrightarrow{\tau} h\big) \Longleftrightarrow \big(N_\tau(h) \subset (H - ass)[D, \preceq, f]\big).$$

Если E — непустое множество, (X, τ) — ТП, $r \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то МП $\mathbf{as}[X, \tau, r, \mathcal{E}]$ [13, определение 3.1] есть множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует направленность $(D, \preceq, f)$ в множестве E, для которой

$$(\mathcal{E} \subset (E - ass)[D, \preceq, f])\ \&\ ((D, \preceq, r \circ f) \xrightarrow{\tau} x),$$

где $\circ$ — символ суперпозиции. Условия секвенциальной реализации МП приведены в [3, с. 38]. Отметим, что в рассматриваемой далее задаче упомянутые условия выполнены. Если X — множество, то

$$\beta_0[X] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X)) | \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\} \qquad (2.3)$$

есть множество всех баз фильтров X. Если E — непустое множество, (X, τ) — ТП, $r \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$, то имеем также следующее представление для МП [3, (3.3.10)]:

$$\mathbf{as}[X, \tau, r, \mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{L \in \mathcal{E}} cl(r^1(L), \tau). \qquad (2.4)$$

Введем полуалгебру $\mathcal{L}$ подмножеств I заданную следующим образом (см. [14, §3.9]):

$$\mathcal{L} \stackrel{\triangle}{=} \{[a, b[: a \in [0, 1], b \in [0, 1]\}. \qquad (2.5)$$

Таким образом, мы получили измеримое пространство $(I, \mathcal{L})$. Через $B_0(I, \mathcal{L})$ обозначим множество всех ступенчатых, в смысле $(I, \mathcal{L})$, в/з функций на множестве I ([5, гл.3], [14, гл.2]), а через $B(I, \mathcal{L})$ — замыкание $B_0(I, \mathcal{L})$ в топологии sup-нормы $||\cdot||_I$ (см. [15, с. 261]) пространства всех ограниченных в/з функций на I; функции из $B(I, \mathcal{L})$ также называют ярусными (в смысле $(I, \mathcal{L})$). Отметим, что по выбору полуалгебры (2.5) множество всех кусочно-постоянных и непрерывных справа в/з функций на I совпадает с $B_0(I, \mathcal{L})$. Введем множество программных управлений удовлетворяющих (1.1):

$$\mathfrak{F} \stackrel{\triangle}{=} \{w \in B_0(I, \mathcal{L}) : \int_I |w(t)|\, dt \leq 1\}. \tag{2.6}$$

Пусть

$$\operatorname{supp}[w] \stackrel{\triangle}{=} \{\tau \in I | w(\tau) \neq 0\} \ \forall w \in \mathfrak{F}. \tag{2.7}$$

3 Конкретизация задачи

По формуле Коши [6, §5] для каждого управления $u \in \mathfrak{F}$ и $v \in \mathfrak{F}$ определена траектория

$$\phi_u(t) = \Phi_1(t, 0)x_0 + \int_0^t u(\zeta)\Phi_1(t, \zeta)b(\zeta)\, d\zeta, \tag{3.1}$$

$$\xi_v(t) = \Phi_2(t, 0)y_0 + \int_0^t v(\zeta)\Phi_2(t, \zeta)c(\zeta)\, d\zeta, \tag{3.2}$$

где $t \in [0, 1]$, Φ_1 и Φ_2 — фундаментальные матрицы решений (матриканты) систем $\dot{x} = C(t)x$ и $\dot{y} = D(t)y$ соответственно. Как следствие, определены вектор-функционалы от управления u и v, соответственно g и h:

$$u \longmapsto \phi_u(1) : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}^k, \ v \longmapsto \xi_v(1) : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}^l, \tag{3.3}$$

определяющие терминальные состояния систем. В терминах (3.3) можно определить асимптотические аналоги областей достижимости обоих игроков в виде МП, посредством которых будет введена задача на максимин.

Итак, в этой главе мы переходим к конкретизации игровой постановки. Напомним, что игроки должны стремиться использовать управления «малой» длительности. На уровне строгой математической постановки данную тенденцию удается реализовать в асимптотическом варианте, подобном [1],[16], [17]. В этой связи полагаем при $\kappa \in]0, \infty[$, что

$$F_\kappa = \{w \in \mathfrak{F} | \exists t \in I : \operatorname{supp}[w] \subset [t, t + \kappa[\} \subset \mathfrak{F}. \tag{3.4}$$

Отметим, что тождественно равная нулю функция $\mathcal{O} \in B_0(I, \mathcal{L})$ содержится в F_κ $\forall \kappa \in]0, \infty[$. Пусть $\mathcal{F} \overset{\triangle}{=} \{F_\kappa : \kappa \in]0, \infty[\}$, тогда $\mathcal{F}$ является базой фильтра в множестве $\mathfrak{F}$ (см. (2.3)):

$$\mathcal{F} \in \beta_0[\mathfrak{F}]. \tag{3.5}$$

Определено МП в пространстве терминальных состояний (см. (2.4)):

$$A \overset{\triangle}{=} \mathbf{as}[\mathbb{R}^k, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}, g, \mathcal{F}] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^k), B \overset{\triangle}{=} \mathbf{as}[\mathbb{R}^l, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}, h, \mathcal{F}] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^l). \tag{3.6}$$

В силу (3.5), [3, (5.2.24)] выполняются включения:

$$A \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} - comp)[\mathbb{R}^k],\ B \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)} - comp)[\mathbb{R}^l]. \tag{3.7}$$

Пусть

$$H_1 \overset{\triangle}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}. \tag{3.8}$$

Введем дополнительно одно просто описываемое множество управлений, которые удовлетворяют нашему ресурсному ограничению. Пусть $\gamma > 0, t \in I, t_\gamma \overset{\triangle}{=} \inf(\{t + \gamma; 1\})$, $(p, q) \in H_1$ и

$$f_{t,\gamma}^{(p,q)}(\tau) \overset{\triangle}{=} \begin{cases} \frac{2p}{t_\gamma - t}, & \tau \in [t, t + \frac{t_\gamma - t}{2}[\\ \frac{2q}{t_\gamma - t}, & \tau \in [t + \frac{t_\gamma - t}{2}, t_\gamma[\\ 0, & \tau \in I \setminus [t, t_\gamma[\end{cases} \tag{3.9}$$

Аналогично (3.4), в терминах функций (3.9) введем при каждом $\kappa > 0$ множество F_κ^0 всех функций $f_{t,\gamma}^{(p,q)}$, где $t \in I, \gamma \in]0, \kappa], (p, q) \in H_1$. Отметим, что $F_\kappa^0 \subset \mathfrak{F}$ $\forall \kappa \in]0, \infty[$. Более того, для семейства $\mathcal{F}_0$ всех множеств $F_\kappa^0, \kappa \in]0, \infty[$ выполняется включение

$$\mathcal{F}_0 \in \beta_0[\mathfrak{F}]. \tag{3.10}$$

Определены МП аналогичные (3.6):

$$A_0 \overset{\triangle}{=} \mathbf{as}[\mathbb{R}^k, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}, g, \mathcal{F}_0] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^k), B_0 \overset{\triangle}{=} \mathbf{as}[\mathbb{R}^l, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}, h, \mathcal{F}_0] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^l). \tag{3.11}$$

В силу (3.10), [3, (5.2.24)] выполняются включения:

$$A_0 \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} - comp)[\mathbb{R}^k],\ B_0 \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)} - comp)[\mathbb{R}^l]. \tag{3.12}$$

Отметим, что множества в (3.6) и (3.11) допускают секвенциальную реализацию. Именно, множество A_0 состоит из всех точек $x \in \mathbb{R}^k$, для которых можно построить последовательность $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ в множестве $\mathfrak{F}$ удовлетворяющую следующим свойствам (см. [3, с. 38]):

$$\Big(\forall\kappa>0\ \exists m\in\mathbb{N}\ \forall d\in\overrightarrow{m,\infty}: f_d\in F^0_\kappa\Big)\&\Big((g(f_i))_{i\in\mathbb{N}}\overset{\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}}{\to}x\Big).$$

Подобное утверждение с необходимыми поправками справедливо и для A, B, B_0. Один конкретный способ построения таких последовательностей указан в доказательстве леммы 2.

Сравним МП (3.6) и (3.11). Выполняется $F^0_\kappa\subset F_\kappa\ \forall\kappa\in]0,\infty[$. Следовательно, из определения МП имеем следующую важную оценку:

$$A_0\subset A, B_0\subset B. \tag{3.13}$$

Если $u\in\mathfrak{F}$ и $v\in\mathfrak{F}$, то определено значение $\alpha_0(\phi_u(1),\xi_v(1))\in\mathbb{R}$. Для удобства введем функцию $\Upsilon:\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}\to\mathbb{R}$ по следующему правилу: $\forall u\in\mathfrak{F}\ \forall v\in\mathfrak{F}$

$$\Upsilon(u,v)\overset{\triangle}{=}\alpha_0(\phi_u(1),\xi_v(1)).$$

Теперь мы можем рассмотреть игровую задачу, в которой первый игрок стремится к минимизации значений Υ путем рационального выбора $u\in\mathfrak{F}$, а второй игрок стремится к максимизации этих значений посредством выбора $v\in\mathfrak{F}$. Конкретнее, нас интересует результат задачи, где управления удовлетворяют также ограничениям: $u\in F_\varepsilon, v\in F_\delta, \varepsilon>0, \delta>0$. Также мы ставим задачу найти асимптотику значений этой задачи при усилении ограничений, которое мы понимаем в естественном смысле уменьшения неотрицательных значений ε,δ. Такми образом, наша задача с ослабленными (реализуемыми) ограничениями имеет следующий смысл:

$$\Upsilon(u,v)\to\sup_{v\in F_\delta}\inf_{u\in F_\varepsilon}, \tag{3.14}$$

где $\varepsilon\in]0,\infty[$, $\delta\in]0,\infty[$. Напомним, нас также интересует асимптотика значений (3.14).

Далее мы вводим конструкцию расширения подобную [1],[16]–[18]. А именно, будем использовать без дополнительного пояснения конструкции, подробно рассмотренные в [18]. Через $(add)_+[\mathcal{L}]$ обозначаем конус всевозможных неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$ (см. (2.5)), а через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — пространство (всех) в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию. Введем для каждой меры $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$ вариацию $v_\mu\in(add)_+[\mathcal{L}]$ как функцию множеств (см. [14, (2.2.14)]). Через λ далее обозначаем след меры Лебега на полуалгебре $\mathcal{L}$, то есть суть функцию длины (см. [19, с. 89]). В общей теории расширения задач управления в классе к.-а. мер важную роль играет множество слабо абсолютно непрерывных мер из $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ относительно меры Лебега, суженной на выбранную измеримую структуру. В нашем случае (см. (2.5)) вышеупомянутое множество имеет следующий вид:

$$\mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) : \forall L \in \mathcal{L} \ \ (\lambda(L) = 0) \Rightarrow (\mu(L) = 0)\}. \tag{3.15}$$

По выбору $\mathcal{L}$ мы имеем совпадение $\mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) = \mathbb{A}(\mathcal{L})$; см. [19, с. 89]. Следует отметить, что в случае более богатой измеримой структуры такое равенство не выполняется. Таким образом, в нашем случае введение множества (3.15) не обязательно, но желательно для формального соответствия процедуре расширения, изложенной в [3], [9], [18]. Пусть

$$\mathbb{K} \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) | v_\mu(I) \leq 1\} = \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) | v_\mu(I) \leq 1\}.$$

Для ярусной функции $f \in B(I, \mathcal{L})$ введем неопределенный λ-интеграл [14, §3.7] f в виде $f * \lambda \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$. Отметим, что $\forall f \in B(I, \mathcal{L})$ $\forall y \in B(I, \mathcal{L})$ имеет место включение $fy \in B(I, \mathcal{L})$ [14, с. 112]. Следовательно, определены интегралы $\int_I fy \, d\lambda$ и при этом (см. [14, с. 158])

$$\int_I fy \, d\lambda = \int_I f \, d(y * \lambda).$$

Отметим, что справедливо

$$\int_L y d\lambda = (y * \lambda)(L) \ \forall L \in \mathcal{L}. \tag{3.16}$$

Напомним, что $\mathfrak{F} \subset B(I, \mathcal{L})$ (см. (2.6)). Определим оператор $\mathbf{m}$ из $\mathfrak{F}$ в $\mathbb{K}$ по правилу

$$\mathbf{m}(f) \stackrel{\triangle}{=} f * \lambda \ \forall f \in \mathfrak{F}. \tag{3.17}$$

Из результатов [18] следует, что

$$\mathbb{K} = cl(\mathbf{m}^1(\mathfrak{F}), \tau^*_{\mathbb{K}}),$$

где $\tau^*_{\mathbb{K}} \stackrel{\triangle}{=} \tau_*|_{\mathbb{K}}$, τ_* — $*$-слабая топология. Более того, $\mathbb{K} \in (\tau_* - comp)[\mathbb{A}(\mathcal{L})]$. Следовательно, мы получили для множества обычных управлений всюду плотное в смысле $\tau^*_{\mathbb{K}}$ погружение в компакт обобщенных управлений. Более того (см. [18, (8.14)]), мы также имеем для пучка обычных траекторий $\{\phi_u(t) : u \in \mathfrak{F}\}$

(для пучка $\{\xi_v(t) : v \in \mathfrak{F}\}$) всюду плотное погружение в пучок обобщенных траекторий $\{\tilde{\phi}_\mu(t) : \mu \in \mathbb{K}\}$ (в пучок $\{\tilde{\xi}_\nu(t) : \nu \in \mathbb{K}\}$), где

$$\tilde{\phi}_\mu(t) = \Phi_1(t,0)x_0 + \int_0^t \Phi_1(t,\zeta)b(\zeta)\mu(d\zeta), \mu \in \mathbb{K},$$

$$\tilde{\xi}_\nu(t) = \Phi_2(t,0)x_0 + \int_0^t \Phi_2(t,\zeta)c(\zeta)\nu(d\zeta), \nu \in \mathbb{K}.$$

При этом имеется в виду плотность в смысле топологии поточечной сходимости множества всех k-вектор функций или l-вектор функций на множестве I_0 соответственно.

Введем оператор $\mathbf{s}_1 : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^k$ по правилу

$$\mu \longmapsto \widetilde{\phi}_\mu(1) : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^k, \tag{3.18}$$

а также оператор $\mathbf{s}_2 : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^l$ по правилу

$$\nu \longmapsto \widetilde{\xi}_\nu(1) : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^l. \tag{3.19}$$

Из (3.3), (3.17)–(3.19) следует свойства суперпозиции

$$\big(g = \mathbf{s}_1 \circ \mathbf{m}\ \forall u \in \mathfrak{F}\big)\&\big(h = \mathbf{s}_2 \circ \mathbf{m}\ \forall v \in \mathfrak{F}\big). \tag{3.20}$$

Далее мы приводим ключевое свойство для МП каждого игрока, в котором заключается философия расширения и которое позволяет ввести нам множество допустимых в смысле ОАХ обобщенных элементов M (см. (2.4), (3.6), (3.17), (3.20) и [2, предложение 1,2]):

$$A = \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} cl(g^1(F_\varepsilon), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) = \mathbf{s}_1^1\Big(\bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} cl(\mathbf{m}^1(F_\varepsilon), \tau_{\mathbb{K}}^*)\Big) = \mathbf{s}_1^1(M) \neq \emptyset, \tag{3.21}$$

$$B = \bigcap_{\delta \in]0,\infty[} cl(h^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) = \mathbf{s}_2^1\Big(\bigcap_{\delta \in]0,\infty[} cl(\mathbf{m}^1(F_\delta), \tau_{\mathbb{K}}^*)\Big) = \mathbf{s}_2^1(M) \neq \emptyset, \tag{3.22}$$

где

$$M \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{\epsilon \in]0,\infty[} cl(\mathbf{m}^1(F_\epsilon), \tau_{\mathbb{K}}^*) \neq \emptyset. \tag{3.23}$$

Аналогичные соотношения выполняются при ОАХ, заданных семейством $\mathcal{F}_0$:

$$A_0 = \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} cl(g^1(F_\varepsilon^0), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) = \mathbf{s}_1^1(M_0) \neq \emptyset, \tag{3.24}$$

$$B_0 = \bigcap_{\delta \in]0,\infty[} cl(h^1(F_\delta^0), \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) = \mathbf{s}_2^1(M_0) \neq \emptyset, \tag{3.25}$$

где

$$M_0 \overset{\triangle}{=} \bigcap_{\epsilon\in]0,\infty[} cl(\mathbf{m}^1(F^0_\epsilon),\tau^*_{\mathbb{K}}) \neq \emptyset. \qquad (3.26)$$

Выполняется следующее вложение (см. (3.13)):

$$M_0 \subset M. \qquad (3.27)$$

Отметим, что $\forall\varepsilon \in]0,\infty[, \delta \in]0,\infty[$ выполняется (см.(1.1),(3.3),(3.4))

$$\Big(g^1(F_\varepsilon) \subset cl(g^1(\mathfrak{F}),\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}) \in (\tau^{(k)}_{\mathbb{R}} - comp)[\mathbb{R}^k]\Big)$$
$$\&\Big(h^1(F_\delta) \subset cl(h^1(\mathfrak{F}),\tau^{(l)}_{\mathbb{R}}) \in (\tau^{(l)}_{\mathbb{R}} - comp)[\mathbb{R}^l]\Big). \qquad (3.28)$$

Введем значения реализуемых «максиминов» при ОАХ в терминах семейства $\mathcal{F}$: $\forall\varepsilon \in]0,\infty[, \delta \in]0,\infty[$

$$V(\varepsilon,\delta) \overset{\triangle}{=} \sup_{v\in F_\delta}\inf_{u\in F_\varepsilon} \alpha_0(g(u),h(v)) = \sup_{v\in F_\delta}\inf_{u\in F_\varepsilon} \Upsilon(u,v) = \sup_{y\in h^1(F_\delta)}\inf_{x\in g^1(F_\varepsilon)} \alpha_0(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Из (3.28) следует ограниченность значений $V(\varepsilon,\delta)$. Далее, до конца раздела, мы приводим результаты, которые являются следствиями более общих утверждений работы [2], поэтому доказательства будут опущены.

Из [2, (2.34)] следует, что $\forall\varepsilon \in]0,\infty[, \forall\delta \in]0,\infty[$ выполняется:

$$V(\varepsilon,\delta) = \max_{y\in cl(h^1(F_\delta),\tau^{(l)}_{\mathbb{R}})}\ \min_{x\in cl(g^1(F_\varepsilon),\tau^{(k)}_{\mathbb{R}})} \alpha_0(x,y) \in \mathbb{R}. \qquad (3.29)$$

Введем асимптотический максимин (см. (3.7)):

$$\mathbf{v} \overset{\triangle}{=} \max_{y\in B}\min_{x\in A} \alpha_0(x,y) \in \mathbb{R}, \qquad (3.30)$$

где множества A, B есть МП и определены в (3.6). Из [2, теорема 1] следует, что имеет место следующее аппроксимативное представление $\mathbf{v}$:

$$\forall\kappa \in]0,\infty[\ \exists\theta_\kappa \in]0,\infty[: |V(\varepsilon,\delta) - \mathbf{v}| < \kappa\ \forall\varepsilon \in]0,\theta_\kappa[\ \forall\delta \in]0,\theta_\kappa[. \qquad (3.31)$$

Введем в рассмотрение отображение $\widetilde{\alpha}$, действующее по правилу

$$(\mu,\nu) \longmapsto \alpha_0(\mathbf{s}_1(\mu),\mathbf{s}_2(\nu)) : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{R}.$$

Из [2, предложение 5] следует совпадение обобщенного и асимптотического максимина:

$$\max_{\nu\in M}\min_{\mu\in M} \widetilde{\alpha}(\mu,\nu) = \mathbf{v}. \qquad (3.32)$$

4 Представление множеств M, M_0

Введем $\forall f \in B(E,\mathcal{L})$ функцию множеств $(st)[f] : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ по следующему правилу:

$$\Big((st)[f](\emptyset) = 0\Big)\&\Big((st)[f](L) \stackrel{\triangle}{=} f(\sup(L)) - f(\inf(L))\ \forall L \in \mathcal{L}\setminus\emptyset\Big). \qquad (4.1)$$

Следовательно, $\forall a \in [0,1]\ \forall b \in]a,1]\ \ (st)[f]([a,b[) = f(b) - f(a)$. Пусть функция $\chi_L, L \subset [0,1]$ (индикатор произвольных подмножеств $[0,1]$) действует по следующему правилу:

$$(\chi_L(x) = 1\ \forall x \in L)\&(\chi_L(x) = 0\ \forall x \in [0,1]\setminus L).$$

Рассмотрим функцию, привязанную к моменту из интервала $]0,1[$: если $t \in]0,1[$, $(\alpha_1,\alpha_2) \in H_1$ (см. (3.8)), то

$$h_{\alpha_{1,2}}[t] \stackrel{\triangle}{=} \alpha_1\chi_{[t,1]} + \alpha_2\chi_{]t,1]}. \qquad (4.2)$$

Следовательно,

$$\big(h_{\alpha_{1,2}}[t](\zeta) = 0\ \forall\zeta \in [0,t[\big)\&\big(h_{\alpha_{1,2}}[t](t) = \alpha_1\big)\&\big(h_{\alpha_{1,2}}[t](\zeta) = \alpha_1+\alpha_2\ \forall\zeta \in]t,1]\big).$$

Введем обозначения:

$$\mathcal{R}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha\chi_{]0,1]} : |\alpha| \le 1\},\ \mathcal{R}_2 \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha\chi_{\{1\}} : |\alpha| \le 1\},$$

$$\mathcal{R}_3 \stackrel{\triangle}{=} \{h_{\alpha_{1,2}}[t] : t \in]0,1[, (\alpha_1,\alpha_2) \in H_1\}.$$

Пусть $\mathcal{R} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$ и

$$\mathbf{K}^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{(st)[r] : r \in \mathcal{R}\}, \mathbf{K}^*_{(i)}(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{(st)[r] : r \in \mathcal{R}_i\}, i \in \overline{1,3}. \qquad (4.3)$$

Для того, чтобы проанализировать структуру $\mathbf{K}^*(\mathcal{L})$ нам потребуется ввести некоторые необходимые определения. При $t \in I$ через δ_t мы будем обозначать след меры Дирака на полуалгебру $\mathcal{L}$: если $L \in \mathcal{L}$, то $\delta_t(L) = 1\ \forall t \in L$ и $\delta_t(L) = 0\ \forall t \in I\setminus L$. Данная мера является счетно-аддитивной и, более того, из [16, (4.10), (4.11)] имеем $\delta_t = (st)[\chi_{]t,1]}]\ \forall t \in [0,1[$. Пусть $t \in I$, тогда

$$\delta_t^- \stackrel{\triangle}{=} (st)[\chi_{[t,1]}] \qquad (4.4)$$

есть чисто к.-а. мера [20], действие которой на функцию из $B(E,\mathcal{L})$ сводится к определению предела слева в точке $t \in I$ (см. [14, §3.8], [16, (4.4)]). Отметим, в нашей постановке такой предел всегда существует. Опишем эффект, возникающий при действии операции (4.1) на функцию вида (4.2):

$$(st)[h_{\alpha_{1,2}}[t]] = (st)[\alpha_1\chi_{[t,1]}] + (st)[\alpha_2\chi_{]t,1]}] = \alpha_1\delta_t^- + \alpha_2\delta_t. \qquad (4.5)$$

Итак, рассмотрим структуру $\mathbf{K}^*(\mathcal{L})$. Данное множество есть объеденение:

1) множества мер $\mathbf{K}^*_{(1)}(\mathcal{L})$, состоящего из всевозможных произведений коэффициента $\alpha, |\alpha| \leq 1$ и меры Дирака в начальный момент времени $\delta_0 = (st)[\chi_{]0,1]}]$, данные меры формализуют управление в начальный момент времени, а α есть «затраченное топливо»;

2) множества мер $\mathbf{K}^*_{(2)}(\mathcal{L})$, состоящего из всевозможных произведений коэффициента $\alpha, |\alpha| \leq 1$ и чисто к.-а. меры $\delta_1^- = (st)[\chi_{[1,1]}] = (st)[\chi_{\{1\}}]$, интеграл по которой дает предел слева в момент $t = 1$, данные меры формализуют управление в последний момент времени, а α есть «затраченное топливо»;

3) множества мер $\mathbf{K}^*_{(3)}(\mathcal{L}) = \{\alpha_1\delta_t^- + \alpha_2\delta_t : t \in]0,1[, (\alpha_1, \alpha_2) \in H_1\}$ комбинаций меры Дирака и чисто к.-а. меры, интеграл по которой дает предел слева (4.4), (4.5), в моменты $t \in]0,1[$. При этом сумма $|\alpha_1| + |\alpha_2|$ есть «затраченное топливо».

Лемма 1. *Выполняется* $M \subset \mathbf{K}^*(\mathcal{L})$.

Пусть $\mu \in M$. Следовательно, $\mu \in \mathbb{K}$ и $v_\mu(I) \leq 1$. Более того, из определения МП следует, что существует направленность $(D, \preceq, f)$ в множестве $\mathfrak{F}$, для которой

$$\Big(\forall \kappa > 0\ \exists d_1 \in D\ \forall d_2 \in D\ (d_1 \preceq d_2) \Rightarrow (f(d_2) \in F_\kappa)\Big) \& \Big((D, \preceq, \mathbf{m} \circ f) \overset{\tau^*_{\mathbb{K}}}{\to} \mu\Big). \tag{4.6}$$

Пусть (см. (2.7))

$$\tau_d \overset{\triangle}{=} \begin{cases} \inf\big(\mathrm{supp}[f(d)]\big), \text{ если } \mathrm{supp}[f(d)] \neq \emptyset \\ 2, \text{ если } \mathrm{supp}[f(d)] = \emptyset. \end{cases} \tag{4.7}$$

Для направленности $(D, \preceq, (\tau_d)_{d \in D})$ в $[0,1] \cup \{2\}$ можно ввести процедуру прореживания до сходящийся поднаправленности [12, с.102]. А именно, можно указать момент $t_* \in [0,1] \cup \{2\}$, непустое направленное множество $(\mathcal{D}, \sqsubseteq)$ и оператор $\mathcal{J} : \mathcal{D} \to D$ так, чтобы выполнялись свойства:

$$\begin{gathered} \Big(\forall z_1 \in \mathcal{D}\ \forall z_2 \in \mathcal{D}\ \ \big(z_1 \sqsubseteq z_2\big) \Rightarrow \big(\mathcal{J}(z_1) \preceq \mathcal{J}(z_2)\big)\Big) \& \\ \& \Big(\forall d \in D\ \exists z \in \mathcal{D} : d \preceq \mathcal{J}(z)\Big) \& \Big(\big(\mathcal{D}, \sqsubseteq, (\tau_{\mathcal{J}(z)})_{z \in \mathcal{D}}\big) \overset{\tau_{\mathbb{R}}}{\to} t_*\Big). \end{gathered} \tag{4.8}$$

Из (4.6), (4.8) следует, что

$$\big(\mathcal{D}, \sqsubseteq, \mathbf{m} \circ f \circ \mathcal{J}\big) \overset{\tau^*_{\mathbb{K}}}{\to} \mu. \tag{4.9}$$

А это значит, что $\forall L \in \mathcal{L}$

$$\Big(\mathcal{D}, \sqsubseteq, \big((\mathbf{m} \circ f \circ \mathcal{J})(z)(L)\big)_{z \in \mathcal{D}}\Big) \stackrel{\tau_{\mathbb{R}}}{\to} \mu(L).$$

Из (3.16), (3.17) следует, что

$$\Big(\mathcal{D}, \sqsubseteq, \big(\int_L (f \circ \mathcal{J})(z) d\lambda\big)_{z \in \mathcal{D}}\Big) \stackrel{\tau_{\mathbb{R}}}{\to} \mu(L).$$

Введем следующую функцию: $r(t) \stackrel{\triangle}{=} \mu([0,t[)\ \forall t \in [0,1]$. Из общих результатов [21, §6.5] следует, что

$$\mu = (st)[r].$$

Далее доказательство распадается на два случая: $t_* \in [0,1], t_* = 2$.

1^{o}) Пусть сначала $t_* \in [0,1]$. В этом случае для $\forall t \in [0,1]$ выполняется

$$\Big(\mathcal{D}, \sqsubseteq, \big(\int_{[0,t[} (f \circ \mathcal{J})(z) d\lambda\big)_{z \in \mathcal{D}}\Big) \stackrel{\tau_{\mathbb{R}}}{\to} r(t). \tag{4.10}$$

Рассмотрим три возможных случая реализации момента $t \in [0,1]$ в (4.10): $t \in [0,t_*[$, $t = t_*$, $t \in]t_*, 1]$.

При $t \in [0, t_*[$ с н.м. выполняется $t < \tau_{\mathcal{J}(z)}$ и, как следствие,

$$\int_{[0,t[} (f \circ \mathcal{J})(z) d\lambda = 0.$$

Это значит, что $r(t) = 0\ \forall t \in [0, t_*[$. В случае $t = t_*$ получаем $r(t) = r(t_*) = \mu([0,t_*[)$. При $t \in]t_*, 1]$ имеем, что с н.м. $\mathrm{supp}[f(\mathcal{J}(z))] \subset [0,t[$, а следовательно $r(t) = \mu(I)\ \forall t \in]t_*, 1]$.

Теперь перейдем к рассмотрению возможных вариантов реализации t_* в случае 1^{o}). Выполняется $(t_* = 0) \vee (t_* \in]0,1[) \vee (t_* = 1)$. Итак, пусть $t_* = 0$. Следовательно, функция r задана следующим образом:

$$(r(0) = 0) \& (r(t) = \mu(I)\ \forall t \in]0,1]).$$

Таким образом, справедливо представление $r = \alpha \chi_{]0,1]}, \alpha = \mu(I)$. Из $|\mu(I)| \leq v_\mu(I) \leq 1$ следует, что истинна импликация $(t_* = 0) \Rightarrow (r \in \mathcal{R}_1)$.

Пусть теперь $t_* = 1$. Следовательно,

$$(r(t) = 0\ \forall t \in [0,1[) \& (r(1) = \mu(I)).$$

Таким образом, справедливо представление $r = \alpha \chi_{\{1\}}, \alpha = \mu(I) \in [-1,1]$ и импликация $(t_* = 1) \Rightarrow (r \in \mathcal{R}_2)$.

Пусть теперь $t_* \in]0,1[, \beta_1 = \mu([0,t_*[), \beta_2 = \mu([t_*,1[)$. По свойству конечной аддитивности $\mu(I) = \beta_1 + \beta_2$, и при этом $|\beta_1| + |\beta_2| \le v_\mu(I) \le 1$, а значит $(\beta_1, \beta_2) \in H_1$. Более того, имеем следующее представление для r :

$$(r(t) = 0 \ \forall t \in [0, t_*[)\&(r(t_*) = \beta_1)\&(r(t) = \beta_1 + \beta_2 \ \forall t \in]t_*, 1]).$$

Следовательно, $r(t)$ можно представить в виде (4.2), а значит $(t_* \in]0,1[) \Rightarrow (r \in \mathcal{R}_3)$.

2^{o}) Осталось рассмотреть $t_* = 2$. К реализации этого случая нас приводят направленности вида (4.8), значения которых с н.м. являются функциями, тождественно равными нулю. Следовательно, такие направленности приводят нас к единственному обобщенному элементу, который соответствует нулевому обычному управлению игрока. А именно, имеем с н.м. $z_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall z > z_0 \quad (f \circ \mathcal{J})(z)(\tau) = 0 \ \forall \tau \in [0,1[$. Следовательно, $\forall z > z_0 \quad (\mathbf{m} \circ f \circ \mathcal{J})(z) = (f \circ \mathcal{J})(z) * \lambda = \mathbb{O}_\mathcal{L}$, где $\mathbb{O}_\mathcal{L}$ есть, по определению, вещественнозначная функция на $\mathcal{L}$, тождественно равная нулю. Таким образом, в силу (4.9) имеем $\mu = \mathbb{O}_\mathcal{L} = (st)[\mathcal{O}]$. Следовательно, истинна импликация $(t_* = 2) \Rightarrow (r = \mathcal{O} \in \mathcal{R}_i, i \in \overline{1,3})$.

Во всех рассмотренных выше случаях $r \in \mathcal{R}$, следовательно $\mu \in \mathbf{K}^*(\mathcal{L})$. Поскольку выбор $\mu \in M$ был произвольным, установлено вложение $M \subset \mathbf{K}^*(\mathcal{L})$. $\square$

Лемма 2. *Выполняется* $\mathbf{K}^*_{(3)}(\mathcal{L}) \subset M_0$.

Выберем произвольно $\eta \in \mathbf{K}^*_{(3)}(\mathcal{L})$. Согласно (4.3) мы можем подобрать $r \in \mathcal{R}_3 : \eta = (st)[r]$. Более того (см. (4.2),(4.3)),

$$\exists t \in]0,1[\ \exists(\alpha_1, \alpha_2) \in H_1 : r = h_{\alpha_{1,2}}[t] = \alpha_1 \chi_{[t,1]} + \alpha_2 \chi_{]t,1]}.$$

Покажем, что $\eta \in M_0$. Для этого достаточно построить последовательность $\mathbf{f} \triangleq (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в множестве $\mathfrak{F}$ для которой: i) каждое множество F^0_κ содержит почти всю эту последовательность (т.е. всю, кроме, может быть, конечного числа членов этой последовательности), ii) $(\mathbf{m}(f_k))_{k \in \mathbb{N}} \overset{\tau^*_\mathbb{K}}{\to} \eta$. Введем $t_{\inf} \triangleq \inf(\{t; 1-t\})$, а также две числовые последовательности при $k \in \mathbb{N}$:

$$t_k^{(1)} \triangleq t - \frac{t_{\inf}}{2k}, t_k^{(2)} \triangleq t + \frac{t_{\inf}}{2k}. \qquad (4.11)$$

В виде (4.11) имеем две сходящиеся к t последовательности в $\mathbb{R}$. При этом $\forall k \in \mathbb{N}$ выполняется $t_k^{(1)} \in]0,t], t_k^{(2)} \in [t,1[, t_k^{(2)} - t_k^{(1)} = \frac{t_{\inf}}{k}$. Введем последовательности $\forall k \in \mathbb{N}$

$$c_k^{(1)} \triangleq \frac{2k\alpha_1}{t_{\inf}} \in \mathbb{R}, c_k^{(2)} \triangleq \frac{2k\alpha_2}{t_{\inf}} \in \mathbb{R}.$$

Теперь определим последовательность $\mathbf{f}$ ступенчатых функций $f_k \in \mathfrak{F}$ по правилу:

$$\Big(f_k(\xi) \triangleq 0\ \forall \xi \in I \setminus [t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[\Big) \& \Big(f_k(\xi) \triangleq c_k^{(1)}\ \forall \xi \in [t_k^{(1)}, t[\Big)$$

$$\& \Big(f_k(\xi) \triangleq c_k^{(2)}\ \forall \xi \in [t, t_k^{(2)}[\Big),$$

где $k \in \mathbb{N}$. Из определения $\mathbf{f}$ следует, что $\forall \kappa \in]0, \infty[\ \exists m \in \mathbb{N} :\ f_k \in F_\kappa^0$ $\forall k \in \overrightarrow{m, \infty}$. Следовательно, мы построили последовательность, которая удовлетворяет свойству i).

Осталось установить сходимость $(f_k * \lambda)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\tau_{\mathbb{K}}^*} \eta$. Для этого достаточно показать, что $\forall L \in \mathcal{L}$ справедлива сходимость

$$(\int_L f_k d\lambda)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} \eta(L). \tag{4.12}$$

Для $L = \emptyset$ обоснование очевидно. Пусть $L \in \mathcal{L} \setminus \emptyset$. Следовательно, $\exists a \in I, b \in]a, 1] : L = [a, b[$. В силу сходимости к t последовательностей (4.11) для случая $t \notin [a, b]$ имеем, что с н.м. $l \in N$ выполняется $[t_k^{(1)}, t_k^{(2)}[\cap L = \emptyset$, а значит $\int_L f_k d\lambda = 0\ \forall k \in \overrightarrow{l, \infty}$. При этом, $\eta(L) = 0$ в силу того, что $r(a) = r(b)$. Следовательно, $\forall t \notin [a, b]$ получаем $\int_L f_k d\lambda = \eta(L)\ \forall k \in \overrightarrow{l, \infty}$.

Пусть $t \in [a, b]$. Рассмотрим три возможных случая: $t = a, t = b, t \in]a, b[$. Итак, $t = a$. Тогда

$$\int_L f_k d\lambda = c_k^{(2)} \lambda\Big(\big[t, \inf(\{b; t_k^{(2)}\})\big[\Big).$$

Следовательно, начиная с н.м. $l_1 \in \mathbb{N}$ имеем $\int_L f_k d\lambda = c_k^{(2)} \lambda([t, t_k^{(2)}[) = \alpha_2\ \forall k \in \overrightarrow{l_1, \infty}$. С другой стороны,

$$\eta(L) = \eta([a, b[) = \eta([t, b[) = r(b) - r(t) = (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 = \alpha_2.$$

Таким образом, при $t = a$ имеем $\int_L f_k d\lambda = \eta(L)\ \forall k \in \overrightarrow{l_1, \infty}$.

Рассмотрим $t \in]a, b[$. В таком случае, начиная с н.м. $l_2 \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_L f_k d\lambda = c_k^{(1)} \lambda([t_k^{(1)}, t[) + c_k^{(2)} \lambda([t, t_k^{(2)}[) = \alpha_1 + \alpha_2\ \forall k \in \overrightarrow{l_2, \infty}.$$

Более того, $\eta(L) = \eta([a, b[) = r(b) - r(a) = (\alpha_1 + \alpha_2) - 0 = \alpha_1 + \alpha_2$. Следовательно, при $t \in]a, b[$ выполняется $\int_L f_k d\lambda = \eta(L)\ \forall k \in \overrightarrow{l_2, \infty}$.

Перейдем к случаю $t = b$. Начиная с н.м. $l_3 \in \mathbb{N}$ получаем $\int_L f_k d\lambda = c_k^{(1)} \lambda([t_k^{(1)}, t[) = \alpha_1 \; \forall k \in \overrightarrow{l_3, \infty}$. С другой стороны,

$$\eta(L) = \eta([a, b[) = \eta([a, t[) = r(t) - r(a) = \alpha_1 - 0 = \alpha_1.$$

Таким образом, при $t = b$ имеем

$$\int_L f_k d\lambda = \eta(L) \; \forall k \in \overrightarrow{l_3, \infty}.$$

Обобщая, приходим к выводу, что $\forall L \in \mathcal{L}$

$$\exists m \in \mathbb{N} : \int_L f_k d\lambda = \eta(L) \; \forall k \in \overrightarrow{m, \infty}.$$

Таким образом, установлена истинность (4.12). Следовательно, выполняется $(f_k * \lambda)_{k \in \mathbb{N}} \overset{\tau_{\mathbb{K}}^*}{\to} \eta$. Последовательность со свойствами i), ii) построена. Поскольку выбор $\eta \in \mathbf{K}_{(3)}^*(\mathcal{L})$ был произвольным, установлено вложение $\mathbf{K}_{(3)}^*(\mathcal{L}) \subset M_0$. $\square$

Лемма 3. *Выполняются вложения:* $\mathbf{K}_{(i)}^*(\mathcal{L}) \subset M_0, i \in \overline{1, 2}$.

Доказательство опирается на идеях доказательств [17, лемма 3.2, 3.3] и леммы 2.

Из лемм 1–3 и (3.27) следует

Теорема 1. *Выполняется цепочка равенств* $\mathbf{K}^*(\mathcal{L}) = M = M_0$.

Следовательно, мы имеем конструктивное описание множества допустимых обобщенных элементов в виде множества $\mathbf{K}_{(i)}^*(\mathcal{L})$.

Из теоремы 1 и (3.21)–(3.26) также следуют важные равенства:

$$A = A_0, B = B_0. \tag{4.13}$$

Вернемся к определению асимптотического максимина $\mathbf{v}$ (3.30). Как мы теперь видим из (4.13) значение асимптотического максимина совпадает для всех четырех возможных наборов ОАХ:

1)ОАХ обоих игроков заданы в терминах $\mathcal{F}$,

2)ОАХ обоих игроков заданы в терминах $\mathcal{F}_0$,

3)ОАХ первого игрока заданы в терминах $\mathcal{F}$, а второго в терминах $\mathcal{F}_0$,

4)ОАХ первого игрока заданы в терминах $\mathcal{F}_0$, а второго в терминах $\mathcal{F}$.

Таким образом, значения максимина при всевозможных ограничениях в терминах семейств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_0$ в асимптотической постановке совпадают и равны обобщенному максимину $\mathbf{v}$. Стоит также отметить, что для любого набора ОАХ (1–4) определено значение реализуемого максимина (заданному подобно (3.29)) и выполняется аппроксимативное свойство подобное (3.31).

Допустим, что игроки выбрали свои обобщенные управления. Теперь возникает вопрос их аппроксимации обычными управлениями. Ниже мы коротко приведем общую конструкцию, которая позволяет это делать; см. [3, §3.6], [19, §4.3], [22].

Через $\mathbf{D}$ обозначим множество всех (неупорядоченных) конечных разбиений (см. [3, (3.6.10)]) интервала I элементами полуалгебры $\mathcal{L}$. Множество $\mathbf{D}$ не пусто: $\{I\} \in \mathbf{D}$. Это множество мы оснастим естественным направлением, характеризуемым свойством вписанности одного разбиения в другое: $\forall \mathcal{Z} \in \mathbf{D} \ \ \forall \mathcal{R} \in \mathbf{D}$

$$(\mathcal{Z} \prec \mathcal{R}) \Longleftrightarrow (\forall R \in \mathcal{R}\ \exists Z \in \mathcal{Z} : R \subset Z).$$

Таким образом, $(\mathbf{D}, \prec)$ есть непустое направленное множество.

Итак, зафиксируем произвольную неотрицательную меру $\mu \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L})$. Определим функционал $\theta_+[\mu] : \mathcal{L} \to [0, \infty[$ по следующему правилу:

$$\Big(\theta_+[\mu](L) \stackrel{\triangle}{=} 0\ \forall L \in \mathcal{L} : \lambda(L) = 0\Big) \& \Big(\theta_+[\mu](\tilde{L}) \stackrel{\triangle}{=} \frac{\mu(\tilde{L})}{\lambda(\tilde{L})}\ \forall \tilde{L} \in \mathcal{L} : \lambda(\tilde{L}) \neq 0\Big).$$

Приведем основное свойство такого функционала: $\forall L \in \mathcal{L}$

$$\mu(L) = \lambda(L)\theta_+[\mu](L).$$

Если $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$, то по определению функционал $\Theta^+_\mu[\mathcal{K}] : I \to \mathbb{R}$ полагаем таким, что $\forall K \in \mathcal{K}, x \in K$:

$$\Theta^+_\mu[\mathcal{K}](x) \stackrel{\triangle}{=} \theta_+[\mu](K).$$

Следовательно, $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D} \quad \Theta^+_\mu[\mathcal{K}] \in B_0(I, \mathcal{L})$. Такой функционал обладает важным свойством (см. [19, с. 84]):

$$\int_I \Theta^+_\mu[\mathcal{K}] d\lambda = \mu(I).$$

Пусть

$$\Theta^+_\mu[\cdot] * \lambda \stackrel{\triangle}{=} (\Theta^+_\mu[\mathcal{K}] * \lambda)_{\mathcal{K} \in \mathbf{D}}.$$

Из [19, лемма 4.3.1] следует, что направленность

$$(\mathbf{D}, \prec, \Theta^+_\mu[\cdot] * \lambda)$$

сходится к μ в топологическом пространстве $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*)$.

5 Пример

Отметим, что ограничение (1.1) является естественным аналогом условия «полного расхода топлива», рассмотренного в [1]. Таким образом, существенный интерес представляет сравнение областей достижимости при различных типах ограничений для подобных постановок задач. Поэтому мы рассмотрим пример из [1], модифицируя импульсное ограничение согласно направлению настоящей работы.

Итак, пусть заданы система первого игрока

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = u(t)b(t)$$

и система второго игрока

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t),\ \dot{y}_2(t) = v(t)c(t).$$

Промежуток управления совпадает с $[0,1]$, начальные условия нулевые, а коэффициенты при управлениях заданы следующем образом:

$$b(t) = \begin{cases} 4t,\ t \in [0,1/4[\\ t,\ t \in [1/4,1[\end{cases}, \quad c(t) = \begin{cases} 6t,\ t \in [0,1/2[\\ 1,\ t \in [1/2,1[\end{cases}.$$

Управления игроков должны удовлетворять ограничениям (1.1). Введем функцию терминальной платы $\alpha_0(\phi_u(1), \xi_v(1)) = |x_1(1) - y_1(1)|$, где ϕ_u, ξ_v — траектории первой и второй системы соответственно (см. (3.1), (3.2)). Как и прежде рассматриваем задачу на максимин. Теперь нас интересуют асимптотические области достижимости по первой координате, а следовательно, множества значений интегралов

$$\int_{[0,1[} (1-t)b(t)\mu(dt), \quad \int_{[0,1[} (1-t)c(t)\nu(dt),$$

где μ, ν пробегают $\mathbf{K}^*(\mathcal{L})$. Используя приведенное ранее (см. сразу после (4.5)) описание множества $\mathbf{K}^*(\mathcal{L})$ мы приходим к следующемим далее представлениям МП по первой координате. Для первого игрока получаем:

$$\{0\} \cup \{0\} \cup \{\alpha(4t-4t^2) : t \in]0,1/4[, |\alpha| \le 1\} \cup$$
$$\cup \{(\frac{3}{4}\beta_1 + \frac{3}{16}\beta_2) : (\beta_1, \beta_2) \in H_1\} \cup \{\alpha(t-t^2) : t \in]1/4,1[, |\alpha| \le 1\} = [-3/4, 3/4].$$

Первый компонент данного множества соответствует выбору управления в начале, второй — в конце промежутка управления (меры из $\mathbf{K}^*_{(1)}(\mathcal{L})$ и $\mathbf{K}^*_{(2)}(\mathcal{L})$

соответственно). Три последних компонента соответствуют выбору одного из трех промежутков времени для выбора управления: первый — до точки разрыва функции b, то есть $t \in]0, 1/4[$; второй — в момент разрыва ($t = 1/4$), третий — после разрыва ($t \in]1/4, 1[$); это воспроизводит выбор меры из множества $\mathbf{K}^*_{(3)}(\mathcal{L})$. Аналогично, для второго игрока получаем (порядок компонентов соответствует вышеизложенному):

$$\{0\} \cup \{0\} \cup \{\alpha(6t - 6t^2) : t \in]0, 1/2[, |\alpha| \leq 1\} \cup$$
$$\cup \{(\frac{3}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2) : (\beta_1, \beta_2) \in H_1\} \cup \{(\alpha - \alpha t) : t \in]1/2, 1[, |\alpha| \leq 1\} = [-3/2, 3/2].$$

Таким образом, значение обобщенного максимина равно 3/4 (и совпадает с полученным в [1]). Однако теперь есть два способа достижения его. Первый способ: второй игрок выбирает меру $\nu = (st)[\chi_{[\frac{1}{2},1]}]$, а первый — меру $\mu = (st)[\chi_{[\frac{1}{4},1]}]$. Второй способ: второй игрок выбирает меру $\nu = (st)[-\chi_{[\frac{1}{2},1]}]$, а первый — меру $\mu = (st)[-\chi_{[\frac{1}{4},1]}]$. Здесь мера ν есть максиминное управление второго игрока, мера μ есть управление первого игрока, минимизирующее результат игры при выборе управления ν вторым игроком. Отметим, что в работе [1] максимин достигался только первым способом. Обобщенные управления игроков в обоих способах есть чисто-конечно аддитивные меры, которые реализуют предел слева (с соответствующим знаком) для ярусных функций b, c в соответствующих точках разрыва (см. [14, § 3.9]).

Подведем итог. В работе приведен способ построения расширения в классе к.-а. мер для одной игровой задачи программного управления с терминальной функцией платы. На выбор управления мы накладывали импульсное ограничение, а также ОАХ одного из двух типов. В силу равенства вспомогательных МП M, M_0 (см. теорему), все четыре возможные набора ОАХ, упомянутые в разделе 4, приводят к одинаковому обобщенному максимину и, как следствие, к одинаковому асимптотическому максимину. Здесь отчетливо проявляется регуляризующая роль обобщенных элементов (см. также [2]–[5]): результат обобщенной задачи совпадает для различных наборов ОАХ. Более того, мы получили конкретное конструктивное описание вспомогательного МП, что позволило построить терминальные МП в примере и решить поставленную задачу на максимин. Возможным продолжением настоящей работы является построение расширения при другом характере импульсного ограничения, а именно: выбор управления игроками должен осуществляться с соблюдением условия на полный расход топлива.

Список литературы

[1] Бакланов А. П. Об одной игровой задаче асимптотически импульсного управления // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 3–14.

[2] Ченцов А. Г. О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2010. Вып. 3. С. 104–119.

[3] Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. 322 p.

[4] Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and Relaxations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 408 p.

[5] Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York–London–Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.

[6] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

[7] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

[8] Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.

[9] Chentsov A. G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // Journal of Mathematical Sciences. 2006. Vol. 133, № 2. P. 1045–1206.

[10] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.

[11] Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.

[12] Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1968. 385 с.

[13] Ченцов А. Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.

[14] Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. Екатеринбург: РИО УГТУ–УПИ, 2008. 389 с.

[15] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во инос. лит-ры, 1962. 895 с.

[16] Скворцова А. В., Ченцов А. Г. О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645–1657.

[17] Лысенко А. В., Ченцов А. Г. Об асимптотических версиях одноимпульсного управления в линейной системе: множества притяжения в пространстве траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2003. № 2. С. 35–77.

[18] Ченцов А. Г. К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер // Изв. вузов. Матем. 2002. № 2. С. 58–80.

[19] Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: Наука, 1993. 232 с.

[20] Joside K., Hewitt E. H. Finitely additive measures // Trans. Amer. Soc. 1952. Vol. 72. P. 46–66.

[21] Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. II. Екатеринбург: РИО УГТУ–УПИ, 2010. 542 с.

[22] Тарасова С. И. О замыкании пучка траекторий линейной управляемой системы с интегральными ограничениями // Изв. вузов. Матем. 2009. № 12. С. 59–68.