*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N 2, 2007*
*Электронный журнал,*
*рег. N П2375 от 07.03.97*
*ISSN 1817-2172*

*http://www.neva.ru/journal*
*http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/*
*e-mail: jodiff@mail.ru*

*Управление в нелинейных системах*
*Управление в сложных системах*

# Поиск множества активных блоков в одноканальной системе управления с множественным доступом

П.Е.БАСКАКОВА
Россия, 190013, Санкт-Петербург, Московский пр., д. 26,
Санкт-Петербургский государственный технологический
(технический) институт,
кафедра высшей математики,
e-mail: polevca@mail.ru

Л.Э.ЗАБАЛКАНСКАЯ
Россия, 199178, Санкт-Петербург,
В.О., 12 линия, д. 13,
Институт проблем транспорта РАН,
лаборатория проблем экологии транспортных систем,
e-mail: eco@ipt.nw.ru

## Аннотация

Рассматривается система управления, содержащая несколько компьютерных блоков, подключенных к одному каналу. В работе исследуются возможности группового тестирования для поиска множества активных блоков. Доказанные теоремы позволяют оценивать верхние границы однозначно разде-

ляющих планов тестирования. В некоторых случаях решена задача выбора оптимального размера тестовых множеств.

## Введение

В настоящее время резко возрос интерес к анализу систем управления, содержащих связанные между собой и обменивающиеся информацией компьютерные блоки (см., например, [1]).

В данной работе мы изучаем вопрос о поиске множества активных (на некоторый момент) блоков такой системы, подключенных к одному каналу.

Рассмотрим систему управления, включающую некоторое множество компьютерных блоков. Предполагается, что все блоки подключены к одному каналу. Блок, передающий в канал сообщение, называется активным. Для удобства предположим, что каждое сообщение имеет единичную длину и передается за один временной промежуток. Сообщение, переданное в канал, могут получать все блоки, активные и пассивные. Однако если в один и тот же промежуток времени более чем один блок передает сообщение, то эти сообщения конфликтуют и сводятся к шуму.

В начале каждого сеанса все блоки разделяются на активные и пассивные; активными считаются те блоки, которые к началу сеанса готовы передать сообщение. Если в процессе сеанса у пассивного блока тоже появляется сообщение, то он может его передать только в следующем сеансе. Активные блоки по очереди передают сообщения, и в тот момент, когда все сообщения переданы, сеанс считается законченным.

Если в начале сеанса известно множество активных блоков, то их сообщения остается только упорядочить каким угодно способом. Однако обычно неизвестно, какие блоки являются активными. Один из способов решения данной задачи заключается в том, что в каждом сеансе у каждого блока есть свой временной интервал, в который он может передать сообщения. Такой подход, однако, является неудобным, так как число активных блоков обычно невелико по сравнению с их общим числом. Поэтому необходимо выделить множество активных блоков. Это можно сделать, опросив каждый блок, не является ли он активным, что неудобно по той же причине. Предлагается для поиска множества активных блоков использовать групповое тестирование, т.е. опрашивать сразу несколько блоков.

## Постановка задачи

Рассмотрим модель с точки зрения теории поиска как задачу группового тестирования. Из множества всех блоков $\underline{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ необходимо выделить целевую группу (множество) $T \subset \underline{X}$, элементами которой являются активные в данном сеансе блоки. Будем считать, что число активных блоков известно и невелико по сравнению с общим числом блоков. Для их поиска проводятся $N$ тестов, каждый из которых состоит в следующем: выбирается некоторое подмножество $X \subset \underline{X}$, которое называется тестовой группой, и производится некоторая проверка (тест). Число блоков, входящих в тестовое или целевое множество, называется размером множества.

Задачей дискретного поиска называется тройка $\{\mathrm{T}, \mathrm{X}, f\}$, где $\mathrm{T} = \{T\}$ – множество всех возможных целевых групп, $\mathrm{X} = \{X\}$ – множество тестовых групп, и $f : \mathrm{X} \times \mathrm{T} \to \mathrm{Y}$ – тестовая функция, значение которой есть результат проверки, в которой тестируется некоторое $X \in \mathrm{X}$, в задаче поиска целевой группы $T \in \mathrm{T}$. В задаче о канале с множественным доступом

$$f = \min\{2, |X \cap T|\},$$

т.е. $f$ принимает всего три значения: тестовая функция равна 0, если в тестовой группе нет активных блоков, тестовая функция равна 1, если в тестовой группе ровно один блок (и, следовательно, он может передавать сообщение беспрепятственно) и, наконец, тестовая функция равна 2, если в тестовой группе несколько активных блоков (и, следовательно, успешная передача сообщения невозможна).

**Основные результаты**

Рассматриваются задачи, в которых $\mathrm{T} = G_t$ или $\mathrm{T} = G_{\leq t}$ и, аналогично, $\mathrm{X} = G_s$, где $2 \leq t < n, t$ – число активных блоков, а

$$G_k = \{\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\}, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\} \quad \text{и} \quad G_{\leq k} = \bigcup_{j=0}^{k} G_j \quad –$$

множества всех групп переменных, содержащих ровно $k$ элементов и не более $k$ элементов, соответственно. Обозначим $M = |\mathrm{T}|$ и $R = |\mathrm{X}|$, где $|A|$ – количество элементов в множестве $A$.

Статическим планом длины $N$ называется набор тестовых групп $\{X_1, \ldots, X_n\}$, которые выбираются до начала тестирования. Таким образом, на выбор тестовой группы не влияют результаты уже произведенных проверок. При этом в каждом тесте мы будем проверять, сколько активных блоков в группе. Если их больше одного, то успешная передача сообщения невозможна. Цель данной работы – изучение оптимальных размеров тестовых множеств.

Для того чтобы план выделял неизвестную цель $T \in \mathrm{T}$, он должен быть однозначно разделяющим. Это означает, что для любых $T, T' \in \mathrm{T}$ с $T \neq T'$ существует тестовая группа $X$, которая разделяет эти цели: $f(X,T) \neq f(X,T')$.

Комлос и Гринберг [2], используя вероятностные соображения, доказали, что длина статических алгоритмов имеет порядок $O(t \log(n/t))$, где $t$ – число активных блоков. Дьячков и Рыков [3] получили верхние границы длин статических алгоритмов.

Используя теоремы существования статических планов для задач дискретного поиска и методику применения этих теорем для задач группового тестирования, мы получим верхние границы длин статических планов и изучим их асимптотическое поведение.

**Теорема 1.** *Пусть* $\{\mathrm{T}, \mathrm{X}, f\}$ *– задача поиска и пусть*

$$k_{ij} = |\{X \in \mathrm{X} : f(X,T_i) = f(X,T_j)\}| \tag{1}$$

*для любых фиксированных* $T_i, T_j \in \mathrm{T}$.

*Тогда существует однозначно разделяющий план, длина которого*

$$N \leq N^* = \min\left\{ l = 1, 2 \cdots : \sum_{i=1}^{M} \sum_{j-1}^{i-1} \left(\frac{k_{ij}}{R}\right)^i < 1 \right\}. \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы приведено в работе [4]. Видно, что формула (1) носит вычислительный характер, т.е. для того, чтобы подсчитать числа $k_{ij}$ для конкретной модели, приходится перебирать все возможные целевые и тестовые группы. В задаче о канале с множественным доступом, как и в некоторых других задачах группового тестирования, оказывается возможным, используя вероятностные соображения, получить аналитические формулы для чисел $k_{ij}$.

Пусть $0 \leq p \leq m < n$ и $p < l$. Возьмем $(T_i, T_j) \in G_{\leq n} \times G_{\leq n}$. Обозначим

$$T(n,l,m,p) = \{(T_i,T_j) : |T_i| = l \, |T_j| = m \, |T_i \cap T_j| = p\}.$$

Тогда число различных неупорядоченных пар в множестве $T(n,l,m,p)$ выражается через биномиальные коэффициенты следующим образом:

$$Q(n,l,m,p) = \begin{cases} \binom{n}{p \quad m-p \quad l-p \quad n-l-m+p}, & m < l, \\ \frac{1}{2}\binom{n}{p \quad m-p \quad m-p \quad n-2m+p}, & m = l. \end{cases} \tag{3}$$

Для любой пары целевых групп из данного множества значение $k_{ij}$ будет одно и тот же. Доказательство этой формулы приведено в [5].

Возьмем $T, T' \in \mathrm{T}(n, l, m, p)$ и определим множество

$$X_{uvr} = \{X : |X \cap (T \setminus (T \cap T'))| = u,\ |X \cap (T' \setminus (T \cap T'))| = v,\ |X \cap (T \cap T')| = r\},$$

где $r \le p \le m \le l < n$, $p < l$, $0 \le u \le l - p$, $0 \le v \le m - p$, $0 \le r \le p$.

Количество элементов в множестве $X_{uvr}$ обозначим $R(n, l, m, p, u, v, r)$. Комбинаторные рассуждения приводят к следующей формуле:

$$R(n, l, m, p, u, v, r) = \binom{l-p}{u}\binom{m-p}{v}\binom{p}{r}\binom{n-l-m+p}{s-u-v+r}. \qquad (4)$$

Для того, чтобы выразить $k_{ij}$ через $R(n, l, m, p, u, v, r)$, введем следующие обозначения:

$$X^{10} = \{X : f(X, T) = 1,\ f(X, T') = 0\},$$
$$X^{01} = \{X : f(X, T) = 0,\ f(X, T') = 1\},$$
$$X^{12} = \{X : f(X, T) = 1,\ f(X, T') = 2\},$$
$$X^{21} = \{X : f(X, T) = 2,\ f(X, T') = 1\}.$$

Заметим, что

$$k_{ij} = R - |\{X : f(X, T_i) \ne f(X, T_j)\}|.$$

Следовательно,

$$k_{ij} = R - |X^{01}| - |X^{10}| - |X^{12}| - |X^{21}|,$$

где

$$|X^{10}| = |\{X : |X \cap T_i| > 0,\ |X \cap T_j| = 0\}| =$$

$$= |\{X : |X \cap (T_i \cap T_j)| = 0,\ |X \cap (T_i - T_j)| > 0,\ |X \cap (T_j - T_i)| > 0\}| =$$

$$= \sum_u |X_{u00}| = \sum_u R(n, l, m, p, u, 0, 0).$$

Аналогично получены следующие формулы:

$$|X^{10}| = \sum_u R(n, l, m, p, 0, v, 0),$$

$$|X^{12}| = \sum_{u=1} R(n,l,m,p,u,0,1) + \sum_{u=2} R(n,l,m,p,u,1,0),$$
$$|X^{21}| = \sum_{v=1} R(n,l,m,p,0,u,1) + \sum_{v=2} R(n,l,m,p,1,v,0).$$

При этом в случае $p = t-1$ вторая сумма в каждом из этих выражений исчезает.

При подстановке выведенных выражений для $k_{ij}$ и $Q(n,l,m,p)$ в формулу (2) мы получаем следующие теоремы существования статических однозначно разделяющих планов в двух различных задачах о канале с множественным доступом.

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathrm{T} = G_t$ *и* $\mathrm{X} = G_s$, *где* $n \geq 2$, $2 \leq t < n$, $1 \leq s < n$.

*Тогда существует статический однозначно разделяющий план, длина которого*

$$N \leq N^* = N(n,t,s),$$

*где*

$$N^* = \min\{k: \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{t-1} \begin{pmatrix} & & n & \\ p & t-p & t-p & n-2t+p \end{pmatrix} \times$$
$$\times \left(1 - 2\frac{\binom{n-t}{s} - \binom{n-2t+p}{s}}{\binom{n}{s}} - 2\frac{t\binom{n-t}{s-1} - t\binom{n-2t+p}{s-1} - (t-p)^2\binom{n-2t+p}{s-2}}{\binom{n}{s}}\right)^k < 1\}. \tag{5}$$

Для того случая, когда точное число активных блоков неизвестно, но их может быть не более $t$, выполнено следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть* $\mathrm{T} = G_{\leq t}$ *и* $\mathrm{X} = G_s$, *где* $n \geq 2$, $2 \leq t < n$, $1 \leq s < n$.

*Тогда существует статический однозначно разделяющий план, длина которого*

$$N \leq N^* = N(n, \leq t, s),$$

*где*

$$N^* = \min\{k: \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{t-1}\sum_{p=0}^{m} \begin{pmatrix} & & n & \\ p & m-p & m-p & n-2m+p \end{pmatrix} \times$$

$$\times (1 - 2\frac{\binom{n-m}{s} - \binom{n-2m+p}{s}}{\binom{n}{s}} - 2\frac{t\binom{n-m}{s-1} - t\binom{n-2m+p}{s-1} - (m-p)^2\binom{n-2m+p}{s-2}}{\binom{n}{s}})^k +$$

$$+\sum_{l=1}^{t}\sum_{m=1}^{l-1}\sum_{p=0}^{m}\binom{n}{p \quad l-p \quad m-p \quad n-l-m+p}\times$$

$$\times(1-\frac{\binom{n-t}{s}+\binom{n-m}{s}+l\binom{n-t}{s-1}+m\binom{n-m}{s-1}}{\binom{n}{s}}-$$

$$-\frac{(l+m)\binom{n-l-m+p}{s-1}-2(l-p)(m-p)\binom{n-l-m+p}{s-2}-2\binom{n-l-m+p}{s}}{\binom{n}{s}})^k<1\}. \qquad (6)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение величины $N^*$ в случае, когда общее число блоков существенно больше, чем число активных блоков.

Предположим, что

$$n\to\infty,\quad t=t(n)\geq 2,\quad \frac{t(n)}{n}\to 0,\quad s=s(n)\to\infty,\quad \frac{t(n)}{n}\to\lambda,\quad \lambda\in[0,1].$$

Применяя формулу Стирлинга,

$$k!\sim\sqrt{2\pi k}k^k e^k,\quad k\to\infty,$$

мы видим, что

$$\frac{k_{ij}}{R}=r_{l,m,n}(\lambda)+O(1/n),\quad n\to\infty,$$

где

$$r_{l,m,n}(\lambda)=1-[(1-\lambda)^l(1+\lambda(l-1))+(1-\lambda)^m(1+\lambda(m-1))-$$

$$-(1-\lambda)^{l+m-p}\left(2+\frac{(l+m)\lambda}{1-\lambda}+\frac{2(l-p)(m-p)\lambda^2}{(1-\lambda)^2}\right)],\quad n\to\infty,$$

и

$$Q(n,l,m,p)=c_{l,m,p}n^{l+m-p}(1+O(1/n)),\quad n\to\infty,$$

где числа

$$c_{l,m,p}=\begin{cases}\frac{1}{p!(m-p)!(l-p)!},\ m<l,\\ \frac{1}{2p!((m-p)!)^2},\ m=l,\end{cases}$$

удовлетворяют условиям теоремы 4.

**Теорема 4.** *Пусть выполнены следующие предположения:*

*(1) $I$ – целое число;*

*(2) $c_i, r_i, \alpha_i$, $i=1,\ldots,I$, – такие вещественные числа, что $c_i>0$, $0<r_i<1$ и по крайней мере одно из $\alpha_i$ положительно;*

*(3) $\{q_{i,n}\}$ и $\{r_{i,n}\}$ – такие семейства положительных чисел, что*

$$q_{i,n} = c_i n^{\alpha_i}(1 + O(1)), \quad n \to \infty,$$

*и*

$$r_{i,n} = r_i + o\left(\frac{1}{\log n}\right), \quad n \to \infty.$$

*Пусть*

$$N = N(n) = \min\left\{k = 1, 2, \cdots : \sum_{i=1}^{I} q_{i,n} r_{i,n}^k < 1\right\},$$

*L=L(n) – решение уравнения*

$$\sum_{i=1}^{I} q_{i,n} r_{i,n}^L = 1,$$

$$C = \max_{i-1,\dots,I} \frac{\alpha_i}{-\log r_i} \tag{7}$$

*и c – решение уравнения*

$$\sum_{j \in J} c_j r_j^c = 1,$$

*где $J$ – то подмножество множества $\{1, \dots, I\}$, на котором достигается максимум в (7).*

*Тогда $N(n) = [L(n)] + 1$ для всех $n$ и*

$$L(n) = C \log n + c + o(1)$$

*при $n \to \infty$.*

Доказательство приведено в [6]. Согласно этой теореме, асимптотическое поведение сумм в формулах (5) и (6) определяется поведением одного ведущего слагаемого. Непосредственное применение данной теоремы позволяет выписать асимптотические границы в двух рассматриваемых в данной работе моделях. В задаче, где ровно $t$ блоков являются активными,

$$N(n, t, \lambda) = \frac{(t+1)\log n - \log(t-1)! - \log 2}{-\log(1 - 2\lambda(1-\lambda)^{t-1}(1 - \lambda(t-2)))}.$$

При этом оптимальное отношение размера тестовых групп к общему числу блоков, т.е. число $\lambda$, доставляющее минимальное значение $N(n, t, \lambda)$, равно

$$\lambda = \frac{4 - t - \sqrt{5t^2 - 12t + 8}}{2t - 2t^2 + 4}.$$

В ситуации, когда число активных блоков не превышает $t$, асимптотическая граница выглядит следующим образом:

$$N(n,t,\lambda) = \frac{t\log n - \log(t-1)!}{-\log(1-\lambda(1-\lambda)^{t-2}(1+\lambda(t-2)))}.$$

Оптимальный выбор размера тестовых множеств соответствует

$$\lambda = \frac{3-t+3\sqrt{5t^2-14t+9}}{4t-2t^2}.$$

**Список литературы**

[1] Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. Мир, М. 1987.

[2] Komlos J., Greenberg A. An asymptotically nonadaptive algorithm for conflict resolution in multiple access channels // IEEE Trans. Inform Theory. 1985. Vol. 31. P. 302-306.

[3] Dyachkov A.G., Rykov V.V. One application of codes for multiple access channels to ALOHA-system// 6th All-Union Seminar on Computer Networks. 1981. Paper 14. P. 18-24.

[4] O′Geran J.H., Winn H.P., Zhiglyavsky A.A. Search // Acta Appl. Math. 1991. Vol. 25. P. 241-276.

[5] Zhiglyavsky A.A., Zabalkanskaya L.E. Existence theorems for some group testing strategies // J. Statist. Plan. Inference. 1996. Vol. 25. P. 151-173.

[6] Winn H.P., Zhiglyavsky A.A. Fundamentals of Search. 1997. Springer-Verlag.