ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет

В. В. Басов

МЕТОД НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ В ЛОКАЛЬНОЙ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Учебное пособие

Издательство Санкт-Петербургского университета
2001

УДК 517.925
ББК 22.161.6
Б27

Р е ц е н з е н т ы:
проф. *Ю. Н. Бибиков* (С.-Петерб. гос. ун-т),
доц. *С. П. Токарев* (С.-Петерб. ун-т телекоммуникаций)

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета

Басов В.В.

Б27 Метод нормальных форм в локальной качественной теории дифференциальных уравнений: Формальная теория нормальных форм: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. — 47 с.

Учебное пособие представляет собой первую часть оригинального курса “Метод нормальных форм в локальной качественной теории дифференциальных уравнений“, читаемого автором для студентов, специализирующихся в области обыкновенных дифференциальных уравнений.

В пособии изложены вопросы, связанные со всевозможными упрощениями автономной системы в окрестности особой точки посредством формальных обратимых замен переменных и сведению ее к системе в нормальной форме или более сложным аналогам. Особое внимание уделено вещественным системам и преобразованиям.

Предназначено для студентов и аспирантов механико-математических специальностей университетов.

Библиогр. 29 назв.

ББК 22.161.6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод нормальных форм локальной качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений является действенным инструментом исследования поведения решений аналитических автономных систем дифференциальных уравнений в окрестности состояния равновесия. Он основан на идее приведения исходной системы к наиболее простому виду — системе в нормальной форме или различным ее аналогам — при помощи локальных замен переменных.

Задачу подобного упрощения впервые четко поставил Г. Дюлак в 1912 году, но приведение систем к нормальной форме в различных частных случаях встречалось уже в работах А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова конца XIX века. Окончательный вид системы в нормальной форме, структура которой определяется корнями характеристического уравнения, предложен А. Д. Брюно в 1964 году.

В том случае, когда все собственные числа матрицы линейной части исходной системы равны нулю, никакого ее упрощения с точки зрения классической теории нормальных форм быть не может, так как любая такая система по определению является системой в нормальной форме. Поэтому в последние десятилетия активно развивается теория обобщенных нормальных форм, позволяющая упрощать системы с нелинейным нулевым приближением.

Изложение метода нормальных форм естественным образом может быть разбито на три части:

1. Формальная теория нормальных форм.
2. Аналитическая теория нормальных форм.
3. Обобщенная нормальная форма.

В первой части, представленной в настоящем пособии, вводятся понятия нормальной формы и ряда ее более сложных аналогов: нормальной формы на инвариантной плоскости, псевдонормальной формы, квазинормальной формы и полунормальной формы, которые, естественно, могут быть получены из исходной системы более простыми заменами. Дается классификация нормальных форм и доказываются теоремы существования формальных нормализующих преобразований. Особое внимание уделяется вещественным системам и сохранению вещественности при заменах переменных.

Во второй части, представленной одноименным пособием, рассматриваются вопросы аналитической эквивалентности систем своей нормальной форме. Изучаются различные условия как на собственные числа исходных систем, так и на нелинейности формально эквивалентных им систем в нормальной форме, при которых существуют аналитические в нуле нормализующие преобразования или, напротив, все нормализующие замены расходятся. Доказывается ряд теорем о сходимости или расходимости.

Наконец, третья часть в изложении метода нормальных форм посвящена вопросам формальной эквивалентности систем с нулевыми корнями характеристического уравнения и их приведению к обобщенной нормальной форме, основанной на выделенных в системах нелинейных невозмущенных частей.

Учебное пособие подготовлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99–01–00753) и Министерства образования РФ (грант Е00–1.0–95).

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1⁰. Рассмотрим нормальную автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n, правая часть которой является формальным или абсолютно сходящимся векторным степенным рядом в некоторой окрестности точки покоя. Не уменьшая общности, будем считать, что эта точка покоя помещена в начало координат и в правой части системы выделены линейные члены, т. е. система имеет вид

$$\dot{x} = Ax + X(x), \tag{1}$$

где векторная переменная $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\dot{x} = dx/dt$, A — постоянная $n \times n$ матрица, $X = (X_1, \dots, X_n)$, причем $X \in \Phi_2$, а Φ_2 — это множество формальных векторных степенных рядов по степеням $x_1, \dots, x_n$, разложения которых начинаются не ниже, чем со второго порядка, т. е. $X = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} X^{(p)} x^p$.

Здесь и всегда в дальнейшем предполагаем, что $p = (p_1, \dots, p_n)$ и имеет целые неотрицательные компоненты, т. е. $p_j \in \mathbb{Z}_+$ $(i = \overline{1,n})$, $|p| = p_1 + \ldots + p_n$, $x^p = x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$, $X^{(p)} = (X_1^{(p)}, \dots, X_n^{(p)})$ — вектор комплексных или вещественных коэффициентов ряда X.

Векторный ряд $X(x) = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} X^{(p)} x^p$ называется абсолютно сходящимся в некоторой окрестности начала координат, если найдется такое положительное число ρ, при котором сходятся числовые ряды $\overline{|X_i|}_\rho = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} |X_i^{(p)}| \rho^{|p|}$ для всякого $i = \overline{1,n}$.

Тем самым, если ряд X сходится (слово абсолютно будем опускать), то $X(x)$ является аналитической в нуле вектор-функцией. Если же указанного $\rho > 0$ не существует хотя бы для одной из компонент вектора X, то ряд $X(x)$ будем называть расходящимся.

Любой степенной ряд как сходящийся, так и расходящийся, будем называть формальным. Как правило о сходимости формального ряда в момент его рассмотрения ничего не известно. Множество формальных рядов, разложение которых начинается не ниже, чем с порядка k, будем обозначать Φ_k $(k \geq 1)$. При подстановке ряда в ряд и дифференцировании с формальными степенными рядами будем поступать точно так же, как и со сходящимися.

В зависимости от сходимости стоящих в правой части системы (1) нелинейностей или возмущений $X_i(x)$ будем называть эту систему сходящейся (аналитической), расходящейся или формальной.

Как уже отмечалось, система (1), вообще говоря, комплексная, т. е. $x,\ X^{(p)} \in C^n$. Но для приложений основной интерес составляют вещественные системы (1), в которых

$$x = \overline{x}, \quad A = \overline{A}, \quad X^{(p)} = \overline{X^{(p)}} \quad (\forall\, p:\ |p| \geq 2).$$

Поэтому важно, если это возможно, в ходе преобразований сохранять вещественность получаемых систем.

Как ведут себя решения системы (1) в окрестности точки покоя? Это основной вопрос локальной качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. А один из основных методов исследования поведения решений аналитических систем в окрестности состояния равновесия заключается в представлении их в виде сходящихся рядов по степеням известных функций. На этом основан, в частности, первый метод А. М. Ляпунова [1] исследования устойчивости невозмущенных движений. При этом исходные координаты $x_1, \ldots, x_n$ далеко не всегда удобны для изучения свойств решений, поэтому хотелось бы максимально упростить систему (1), вплоть до сведения ее к системе, интегрируемой в явном виде.

Системой в нормальной форме или просто нормальной формой называют любую систему, полученную из исходной локальной заменой координат, в которой равны нулю все те слагаемые в разложении правой части, которые могут быть обращены в нуль вне зависимости от вида правой части исходной системы.

Таким образом, нормальная форма — это структурное понятие в том смысле, что система в нормальной форме вне зависимости от величины коэффициентов $X_i^{(p)}$ исходной системы может содержать в правой части каждого уравнения только члены, имеющие строго определенные степени переменных. Как будет видно из дальнейшего, эти степени зависят исключительно от корней характеристического уравнения исходной системы.

2^0. Упрощение системы (1) осуществляется при помощи замены переменных, от которой естественно потребовать сохранения в нуле состояния равновесия и обратимости, чтобы при необходимости было возможно вернуться к системе (1). Рассмотрим такую замену:

$$x = Sy + f(y), \tag{2}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — новые переменные, S — постоянная $n \times n$ матрица, векторный ряд $f \in \Phi_2$, т. е. $f_i = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} f_i^{(p)} y^p \ \ (i = \overline{1, n})$.

Пусть замена переменных (2) преобразует (1) в систему

$$\dot{y} = By + Y(y). \tag{3}$$

Для того чтобы установить, как связаны между собой ряды X, Y, f, продифференцируем замену (2) по t в силу систем (1) и (3).

Иными словами, подставляя в уравнение $\dot{x} = S\dot{y} + (\partial f(y)/\partial y)\dot{y}$ вместо $\dot{x}$ и $\dot{y}$ правые части систем (1) и (3), получаем тождество

$$ASy + Af + X(Sy + f) = SBy + SY + (\partial f/\partial y)(By + Y).$$

Выделяя линейные члены, получаем равенство $AS = SB$ или

$$B = S^{-1}AS, \tag{4}$$

а нелинейности удовлетворяют тождеству

$$\frac{\partial f}{\partial y}By - Af + SY = X(Sy + f) - \frac{\partial f}{\partial y}Y. \tag{5}$$

Итак, формальная замена (2) переводит формальную систему (1) в формальную систему (3), если матрицы A и B подобны, т. е. выполнено равенство (4), и ряд $f(y)$ удовлетворяет уравнению (5).

В случае, когда ряды X или f расходятся, тождество (5) следует понимать как равенство коэффициентов рядов из левой и правой части (5), стоящих при всевозможных степенях y.

Определение 1. Системы (1) и (3) формально эквивалентны, если существует формальная замена переменных (2), которая переводит (1) в (3). Если при этом ряды X и f сходятся, то системы (1) и (3) аналитически эквивалентны и система (3) тогда сходится.

Утверждение 1. *Отношения формальной и аналитической эквивалентности являются отношениями эквивалентности.*

Утверждение 1 очевидно.

3^0. Наибольший интерес для приложений представляют собой аналитические замены (2), так как они наилучшим образом связывают решения систем (1) и (3). Но, как будет видно из дальнейшего, сходимость замены (2), сколько-нибудь существенно упрощающей исходную аналитическую в нуле систему (1), встречается достаточно редко. Поэтому рассматриваются бесконечно дифференцируемые (C^∞) или гладкие (C^k) замены переменных, которые могут существовать и тогда, когда аналитическая замена отсутствует.

Однако формальная эквивалентность систем и сама по себе может представлять практический интерес, даже если в замене (2) расходится ряд f. Во-первых, его можно трактовать как ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой функции, во-вторых, решение многих задач требует упрощения только конечного числа первых членов ряда X, а это достигается полиномиальной заменой переменных.

Сформулируем три основные задачи, стоящие перед классической теорией нормальных форм, которую в последнее время стали также называть резонансной.

1. К какой наиболее простой системе (3) — нормальной форме (НФ) — можно свести систему (1) формальной заменой (2)? А также единственна ли нормальная форма?

2. Для каких исходных систем (1) из их аналитичности следует аналитичность нормализующей замены (2)? Иными словами, когда система (1) аналитически эквивалентна своей нормальной форме?

Здесь возможны два подхода: классический, когда достаточные для сходимости нормализующей замены условия накладываются на коэффициенты какой-либо нормальной формы, формально эквивалентной исходной системе, и прямой (конструктивный), когда условия накладываются непосредственно на коэффициенты системы (1).

3. Когда у исходной аналитической системы все нормализующие преобразования расходятся?

Здесь также возможны два подхода: классический, при котором устанавливается для каких нормальных форм (3) существуют эквивалентные им аналитические системы (1), сводящиеся к нормальным формам только расходящимися преобразованиями, и прямой (конструктивный), при котором для ответа на поставленный вопрос об отсутствии аналитических нормализующих замен условия накладываются непосредственно на коэффициенты исходной системы.

Строгая формулировка и решение первой из поставленных задач с обращением особого внимания вещественности систем и преобразований даны в первых семи параграфах предлагаемого пособия.

Ответы на вторую и третью задачу с доказательствами отдельных теорем сходимости или расходимости приведены во втором пособии “Аналитическая теория нормальных форм продолжающем настоящее пособие в рамках описания метода нормальных форм.

Следует отметить, что в наиболее общем виде как для комплексного, так и для вещественного случая, классическую резонансную теорию нормальных форм можно найти в работах А. Д. Брюно [2, 3].

4^0. К резонансной теории нормальных форм тесно примыкают ее различные обобщения.

Так, например, при изучении критических случаев возникают ситуации, когда максимальное упрощение исходной системы не требуется и ее удобно сводить к неким промежуточным формам: нормальной форме на инвариантной поверхности, псевдонормальной форме, квазинормальной форме, полунормальной форме.

Замена переменных при этом в различной степени упрощается, что может привести, в частности, к тому, что она окажется аналитической, в отличие от нормализующей замены, которая сходится достаточно редко. Промежуточные "формы" описаны в § 8.

Еще одно направление, в котором происходит активное развитие метода нормальных форм в локальной качественной теории, — это теория обобщенных нормальных форм.

Дело в том, что резонансная теория нормальных форм содержательна только тогда, когда не все собственные числа матрицы A равны нулю. И чем больше ненулевых собственных чисел имеет A, тем больше нулевых членов удается получить в нормальной форме.

В противном случае никаких упрощений не происходит, так как исходная система (1) по определению совпадает со своей НФ.

Но системы, у которых линейные части отсутствуют или их матрицы имеют только нулевые собственные числа, также допускают значительные упрощения и сводятся к так называемым обобщенным нормальным формам.

С основами теории обобщенных нормальных форм можно познакомиться в третьем пособии "Обобщенные нормальные формы", завершающем краткое описание метода нормальных форм.

5^0. В заключение — небольшая библиографическая справка.

В различных частных случаях система (1) приводилась к НФ еще А. Пуанкаре [4, гл. 11] и Г. Дюлаком [5], а затем Т. Черри [6], Дж. Д. Биркгофом [7] и другими авторами (подробная аннотация имеется в [2]). Г. Дюлак в 1912 году впервые четко поставил задачу приведения системы к более простому виду локальной заменой. Окончательный вид НФ предложен А. Д. Брюно [8] в 1964 году.

Наряду с вопросом о формальном приведении систем к НФ стоит вопрос об их аналитической эквивалентности или ее отсутствии, т. е. вопрос о сходимости или расходимости нормализующих замен.

Доказательством существования сходящегося нормализующего преобразования в различных случаях занимались уже названные авторы, а также К. Л. Зигель [9, 10], В. А. Плисс [11], В. В. Басов [12] и др. Достаточные и почти во всех случаях необходимые для сходимости условия приведены А. Д. Брюно в фундаментальной работе [2], причем необходимость там доказывается в классической постановке: для произвольной НФ, не удовлетворяющей условиям сходимости, найдется формально эквивалентная ей аналитическая в нуле система, всякое преобразование которой к НФ расходится.

К. Л. Зигель в [13] поставил вопрос о расходимости иначе. Он ввел некое множество вещественных аналитических гамильтоновых систем и доказал, что расходятся нормализующие преобразования у почти всех в известном смысле систем из этого множества. Однако указанные выше работы не позволяют установить, расходятся ли все нормализующие замены в наперед заданной исходной системе.

Долгое время единственным известным результатом, дающим достаточное условие расходимости формального решения у любой системы из определенного класса, являлся результат И. Горна [14], но он был получен для интегрируемых в явном виде систем.

Наконец, В. В. Басову [15] в случае вещественного негрубого фокуса удалось применить прямой метод, выделив такой класс систем (1) с явно указанной верхней границей значений для собственных чисел матрицы A, что у всякой системы из этого класса расходятся все нормализующие преобразования.

§ 2. НОРМАЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

1^0. Рассмотрим формальную систему (1) $\dot{x} = Ax + X(x)$.

Прежде чем упрощать в ней нелинейность X, займемся упрощением линейной части Ax посредством линейной обратимой замены

$$x = Sz, \tag{6}$$

где S — $n \times n$ постоянная матрица и $\det S \neq 0$.

Продифференцируем замену (6) по t в силу системы (1), т. е. подставим в равенство $\dot{x} = S\dot{z}$ значение $\dot{x}$ из правой части (1), тогда $ASz + X(Sz) = S\dot{z}$. Отсюда после умножения слева на S^{-1} получаем систему $\dot{z} = S^{-1}ASz + S^{-1}X(Sz)$.

Из алгебры известно, что любая матрица A подобна жордановой матрице J, т. е. всегда найдется матрица S такая, что $J = S^{-1}AS$.

Поэтому существует замена (6), которая сводит (1) к системе

$$\dot{z} = Jz + Z(z), \tag{7}$$

где $J = S^{-1}AS$ — жорданова форма A, а $Z(z) = S^{-1}X(Sz)$.

Обозначим через $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ вектор собственных чисел матрицы A. Они могут быть как вещественными, так и комплексными.

Жорданова форма J представляет собой квадратную блочно-диагональную матрицу

$$J = \operatorname{diag}\{J_1^{r_1}, \ldots, J_\rho^{r_\rho}\} \qquad (r_1 + \ldots + r_\rho = n, \;\; 1 \le \rho \le n),$$

где любая $J_k^{r_k}$ — это квадратная двухдиагональная $r_k \times r_k$ матрица $(1 \le k \le \rho)$, на главной диагонали которой стоит одно и то же собственное число λ_{i_k}, а диагональ, стоящая под главной, состоит из одинаковых чисел $\sigma_0 > 0$, если $r_k \ge 2$. При этом различные блоки могут иметь на главной диагонали одинаковые числа.

Таким образом, жорданова форма J в системе (7) представляет собой двухдиагональную матрицу, на главной диагонали которой стоят собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A системы (1), а поддиагональ состоит из чисел $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$, равных либо нулю, либо фиксированному положительному числу σ_0, причем $\sigma_k = 0$, если $\lambda_{k-1} \ne \lambda_k$ при $k = 2, \ldots, n$. Все остальные диагонали жордановой формы равны нулю. Ради удобства введем еще число $\sigma_1 = 0$, тогда система (7) в координатной форме будет иметь вид

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sigma_i z_{i-1} + Z_i(z) \qquad (i = \overline{1, n}). \tag{8}$$

Жорданова форма является наиболее простой матрицей, подобной A, поэтому вектор Jz в системе (7) естественно называть нормальной формой для линейной части исходной системы (1).

Дальнейшие упрощения или нормализация нелинейностей будет проводиться только в системах, матрица линейной части которых уже приведена к жордановой форме.

Следует отметить, что при необходимости число $\sigma_0 > 0$ в системах (7) или (8) можно сделать сколь угодно малым, не меняя структуры нелинейностей Z_i, поскольку $\forall\ \varepsilon > 0$ линейная замена $z_i = (\varepsilon/\sigma_0)^{n-i} w_i$ преобразует (8) в систему $\dot{w}_i = \lambda_i w_i + (\sigma_i/\sigma_0)\varepsilon w_{i-1} + (\sigma_0/\varepsilon)^{n-i} Z_i((\varepsilon/\sigma_0)^{n-1} w_1, \ldots, (\varepsilon/\sigma_0) w_{n-1}, w_n)$.

Указанная возможность будет использоваться в дальнейшем при доказательстве сходимости преобразований системы (8).

$\mathbf{2^0}$. Рассмотрим теперь, что будет происходить при нормализации линейной части вещественных систем.

Предположим, что (1) вещественна, т. е. $x = \overline{x}$, $A = \overline{A}$, $X = \overline{X}$. Но если матрица A имеет хоть одно собственное число с ненулевой мнимой частью, эквивалентная (1) система (7) будет комплексной.

Выясним, какие дополнительные условия на жорданову форму J, переменные $z_1, \ldots, z_n$ и нелинейности $Z_1, \ldots, Z_n$ систем (7) или (8) накладывает условие вещественности исходной системы.

Сначала уточним структуру жордановой формы.

Из равенства $A = \overline{A}$ следует, что набор комплексных собственных чисел матрицы A состоит из комплексно-сопряженных пар.

Пусть A имеет l пар комплексно-сопряженных и m вещественных собственных чисел. Тогда, очевидно, $2l + m = n \quad (l, m \geq 0)$.

Будем обозначать в дальнейшем через E^j единичную матрицу размерности j, а через $\mathtt{i}$ — мнимую единицу.

Введем в рассмотрение две вспомогательные неособые матрицы

$$C = \begin{pmatrix} E^l & \mathtt{i}E^l & 0 \\ E^l & -\mathtt{i}E^l & 0 \\ 0 & 0 & E^m \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & E^l & 0 \\ E^l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^m \end{pmatrix}, \tag{9}$$

тогда $\overline{C} = DC$, $DD = E^n$, $D^{-1} = D$, $\overline{D} = D$, $\overline{J} = D^{-1} J D$.

Утверждение 2. *Существует преобразование (6) с $\overline{S} = SD$ вещественной системы (1) в систему (7), в которой*

$$J = \operatorname{diag}\{J_C^l, \overline{J_C^l}, J_R^m\} \qquad (2l + m = n),$$

причем на главной диагонали блока J_C^l стоят собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ с ненулевыми мнимыми частями, в блоке $\overline{J_C^l}$ собраны собственные числа $\lambda_{k+l} = \overline{\lambda}_k$ $(k = \overline{1, l})$, а главная диагональ J_R^m состоит из вещественных собственных чисел $\lambda_{2l+1}, \ldots, \lambda_n$.

Доказательство утверждения можно найти, например, в [16, § 36].

Отметим, что если матрица $S = (S_1^l, S_2^l, S_3^m)$, где S_1^l, S_2^l — $n \times l$, а S_1^m — $n \times m$ матрицы, то условие $\overline{S} = SD \Leftrightarrow S_2^l = \overline{S}_1^l$ и $S_3^m = \overline{S_3^m}$.

Сделаем теперь линейную обратимую замену переменных
$$z = Cu, \tag{10}$$
называемую стандартной, которая переводит систему (7) в систему
$$\dot{u} = Iu + U(u), \tag{11}$$
где $I = C^{-1}JC, \quad U(u) = C^{-1}X(Cu)$ по аналогии с (6) и (7).

В свою очередь, линейная обратимая замена
$$x = Ru, \tag{12}$$
где $R = SC$, являясь суперпозицией замен $x = Sz$ и $z = Cu$, переводит вещественную систему (1) $\dot{x} = Ax + X(x)$ в систему (11), в которой матрица $I = R^{-1}AR$, а нелинейность $U(u) = R^{-1}X(Ru)$.

Матрица R вещественна, так как $\overline{R} = \overline{SC} = SDDC = SC = R$, а значит, вещественны переменные $u_1, \ldots, u_n$, поскольку $u = R^{-1}x$, вещественна матрица I и $U(u) = \overline{U(u)}$.

В результате вещественная замена переменных (12) преобразует вещественную систему (1) в вещественную систему (11).

Матрица I — это вещественная жорданова форма матрицы A.

Матрица $R = SC$, записанная структурно аналогично матрице S, имеет вид: $R = (2\mathrm{Re}\, S_1^l, -2\mathrm{Jm}\, S_1^l, S_3^m)$.

Кроме того, согласно (11) и (9) или (12)
$$I = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, J_C^l & -\mathrm{Im}\, J_C^l & 0 \\ \mathrm{Im}\, J_C^l & \mathrm{Re}\, J_C^l & 0 \\ 0 & 0 & J_R^m \end{pmatrix},$$
и комплексные координаты $z_1, \ldots, z_n$ системы (7) связаны с вещественными координатами $u_1, \ldots, u_n$ системы (11) стандартной заменой (10), преобразующей J в вещественную жорданову форму.

Описанные выше замены, связывающие системы (1), (7) и (11), отражены на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd} \underset{(1)}{\dot{x} = Ax + X} \arrow[r, "x = Sz", "(6)"'] \arrow[dr, "x = Ru"', "(12)"'] & \underset{(7),\,(8)}{\dot{z} = Jz + Z} \arrow[d, "z = Cu", "(10)"'] \\ & \underset{(11)}{\dot{u} = Iu + U} \end{tikzcd}$$

Вещественность системы (1) накладывает на жордановы координаты z условие вещественности:

$$\overline{z} = Dz. \tag{13}$$

В самом деле, согласно (9) $\overline{z} = \overline{C}\overline{u} = DCu = Dz$.

Перейдем к условиям вещественности для нелинейностей.

Поскольку в системе (7) $Z(z) = S^{-1}X(Sz)$, то с учетом (9), (13) и утверждения 2 справедлива следующая цепочка равенств:

$$D^{-1}\overline{Z}(Dz) = D^{-1}\overline{Z}(\overline{z}) = D^{-1}\overline{Z(z)} = D^{-1}\overline{S^{-1}}\,\overline{X}(\overline{S}\overline{z}) =$$

$$= D^{-1}D^{-1}S^{-1}X(SDDz) = S^{-1}X(Sz) = Z(z).$$

Следовательно соотношение вещественности для нелинейных членов системы (7) имеет вид

$$D^{-1}\overline{Z}(Dz) = Z(z) \quad \text{или} \quad \overline{Z(z)} = DZ(z). \tag{14}$$

3⁰. В дальнейшем все новые понятия и получаемые результаты будут апробироваться на примере вещественного негрубого фокуса или, что то же самое, в критическом случае пары чисто мнимых корней характеристического уравнения, т. е. применяться к двумерной вещественной системе, матрица линейной части которой имеет пару комплексно-сопряженных чисто мнимых собственных чисел.

Пример 1.1. Пусть в системе (1) $n = 2$, $\lambda_{1,2} = \pm\mathtt{i}\beta \quad (\beta > 0)$, тогда линейная замена (6) преобразует (1) в систему (8) вида

$$\dot{z}_1 = \mathtt{i}\beta z_1 + Z_1(z_1, z_2), \quad \dot{z}_2 = -\mathtt{i}\beta z_2 + Z_2(z_1, z_2). \tag{15}$$

Предположим, что система (1) вещественна, тогда условия вещественности (13), (14) для системы (15) принимают вид

$$z_2 = \overline{z}_1, \quad Z_2(z_1, z_2) = \overline{Z}_1(z_2, z_1) \;\text{ или }\; Z_2^{(p_1,p_2)} = \overline{Z}_1^{(p_2,p_1)}, \tag{16}$$

так как в (9) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, в случае пары чисто-мнимых корней характеристического уравнения в системе (15), полученной из вещественной системы, второе уравнение — комплексно-сопряженное к первому. Следовательно, можно ограничиться исследованием только первого уравнения, а второе вообще не выписывать.

Вещественная система (11) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\dot{u}_1 = -\beta u_2 + U_1(u_1, u_2), \quad \dot{u}_2 = \beta u_1 + U_2(u_1, u_2). \tag{17}$$

Ее матрица линейной части записана в вещественной жордановой форме. Система (17) получена из вещественной системы (1) заменой $x = Ru$ или из системы (15) стандартной заменой переменных (10): $z_1 = u_1 + \mathtt{i} u_2, \quad z_2 = u_1 - \mathtt{i} u_2$. $\square$

4⁰. Аналогично сделанному в примере 1.1 конкретизируем условия вещественности (13) и (14) для системы (7). Для этого введем следующее разбиение произвольного вектора $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$:

$$\eta = (\eta', \eta'', \eta^*),\ \eta' = (\eta_1, \ldots, \eta_l),\ \eta'' = (\eta_{l+1}, \ldots, \eta_{2l})\ \ (n - 2l = m \geq 0).$$

В новых обозначениях условия (13) и (14) принимают вид

$$z'' = \overline{z}', \quad z^* = \overline{z}^*; \tag{13_c}$$

$$Z''(z', z'', z^*) = \overline{Z}'(z'', z', z^*), \quad Z^*(z', z'', z^*) = \overline{Z}^*(z'', z', z^*). \tag{14_c}$$

5⁰. Приведенные в этом параграфе рассуждения позволяют в дальнейшем исследовать только системы (7) или (8), имеющие жордановы матрицы в линейной части, и для которых выполняются условия вещественности (13) и (14), если они получены из вещественной системы (1). К таким системам будут применяться почти тождественные преобразования $z = y + h(y)$ $(h \in \Phi_2)$, оставляющие уже нормализованную линейную часть неизменной и воздействующие только на нелинейности $Z_i(z)$.

Таким образом, произвольная замена переменных (2) исходной системы (1) разбивается в суперпозицию двух более простых замен: линейной замены (6) и почти тождественной, связанной с (2) формулой $f(y) = Sh(y)$. При этом сохранение условий вещественности для систем, полученных в результате почти тождественных замен — это тема отдельного исследования, которое проводится в § 6.

§ 3. ФОРМАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ

1⁰. Рассмотрим произвольную систему (7) $\dot z = Jz + Z(z)$ или, что тоже самое, систему (8) $\dot z_i = \lambda_i z_i + \sigma_i z_{i-1} + Z_i(z)$ $(i = 1, \ldots, n)$, в которой матрица линейной части жорданова, $\sigma_1 = 0$, возмущения $Z_i = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} Z_i^{(p)} x^p$ — формальные ряды с комплексными, вообще говоря, коэффициентами.

Если при этом система (7) получена из некоторой исходной системы (1) при помощи линейной неособой замены переменных (6) $x = Sz$, то у нее $Z(z) = S^{-1}X(Sz)$.

А если система (1) была вещественной, то в (7) переменные удовлетворяют условию (13) $\overline{z} = Dz$, а нелинейность — условию (14) $D^{-1}\overline{Z}(Dz) = Z(z)$.

Пусть почти тождественная замена переменных

$$z_i = H_i(y) = y_i + h_i(y) \qquad (h \in \Phi_2), \tag{18}$$

в которой, очевидно, $\partial H(y)/\partial y\,|_{y=0} = E$, переводит (8) в систему

$$\dot y_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + Y_i(y) \qquad (Y \in \Phi_2). \tag{19}$$

Тогда согласно определению 1 система (8) формально или аналитически, если Z_i, h_i сходящиеся ряды, эквивалентна системе (19).

Для того чтобы выписать равенства, связывающие ряды Z, Y и h, продифференцируем замену (18) по t в силу систем (8) и (19), т. е. в уравнения $\dot z_i = \dot y_i + \sum_{j=1}^{n}(\partial h_i/\partial y_j)\dot y_j$ вместо производных $\dot y_i$, $\dot z_i$ поставим правые части систем (8) и (19), получая тождества (возможно, формальные) относительно переменной y :

$$\lambda_i(y_i + h_i) + \sigma_i(y_{i-1} + h_{i-1}) + Z_i(y+h) =$$

$$= \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + Y_i(y) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j}(\lambda_j y_j + \sigma_j y_{j-1} + Y_j)$$

или после перегруппировки

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j}\lambda_j y_j - \lambda_i h_i + Y_i = Z_i(y+h) + \sigma_i h_{i-1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j}(\sigma_j y_{j-1} + Y_j).$$

В полученных уравнениях с частными производными приравняем коэффициенты, стоящие при всех линейно независимых мономах (одночленах) $y^p = y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n}$, где $p_i \geq 0$, целые и $|p| \geq 2$.

Для этого каждое слагаемое правой и левой части надо записать, при необходимости сдвигая индексы суммирования, в виде ряда $\sum \alpha_i^{(p)} y^p$, вычислив коэффициенты $\alpha_i^{(p)}$.

Учитывая разложение $h_i = \sum_{p:\,|p|=2}^{\infty} h_i^{(p)} y^p$ и используя обозначение $e_j = (0, \ldots, 1_j, \ldots, 0)$, имеем

$$\frac{\partial h_i}{\partial y_j} = \sum_{|p|=2}^{\infty} p_j h_i^{(p)} y^{p-e_j} = \sum_{|p|=1}^{\infty} (p_j+1) h_i^{(p+e_j)} y^p,$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial y_j} y_{j-1} = \sum_{|p|=1}^{\infty} (p_j+1) h_i^{(p+e_j)} y^{p+e_{j-1}} = \sum_{|p|=2}^{\infty} (p_j+1) h_i^{(p-e_{j-1}+e_j)} y^p.$$

В результате получаем равенства для коэффициентов:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j - \lambda_i\Big) h_i^{(p)} + Y_i^{(p)} = \{Z_i(y+h)\}^{(p)} + \sigma_i h_{i-1}^{(p)} - \tag{20}$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \sigma_j (p_j+1) h_i^{(p-e_{j-1}+e_j)} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{|q|=2}^{|p|-1} (p_j - q_j + 1) h_i^{(p+e_j-q)} Y_j^{(q)}.$$

Запись $\{X_i(y+h)\}^{(p)}$ означает, что после переразложения находящегося в фигурных скобках ряда по степеням y из него выделены слагаемые, стоящие при y^p.

2^0. Множество n-мерных целочисленных векторов с неотрицательными компонентами вполне упорядочим соотношением: вектор q предшествует вектору p, если положительна первая ненулевая из последовательных разностей $|p|-|q|$, $p_1-q_1, \ldots, p_{n-1}-q_{n-1}$.

Такая упорядоченность носит название лексико-графической.

В результате каждому вектору p может предшествовать лишь конечное число векторов q с указанными свойствами.

Например, при $n=2$ векторы возрастают в следующей последовательности: $(0,2), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2), \ldots$

В смысле введенной упорядоченности в правой части системы (20) стоят коэффициенты $h_j^{(q)}$ и $Y_j^{(q)}$, предшествующие коэффициентам $h_i^{(p)}$ и $Y_i^{(p)}$ из левой части, если договориться, что при $q=p$ коэффициент $h_{i-1}^{(p)}$ предшествует коэффициенту $h_i^{(p)}$.

Действительно, в первом и четвертом слагаемом правой части (20) содержатся $h_j^{(q)}$ и $Y_j^{(q)}$ с $|q| < |p|$, поскольку разложения рядов Z, Y, h начинаются со второго порядка.

В третьем слагаемом правой части $|p-e_{j-1}+e_j| = |p|$, но $(j-1)$-я компонента верхнего индекса у коэффициента ряда h_i на единицу меньше компоненты p_j вектора p, а при $j = 1$ там равен нулю множитель σ_j.

Наконец, во втором слагаемом правой части верхний индекс у коэффициента ряда h равен p, как и в левой части, но зато нижний индекс на единицу меньше, и опять при $i = 1$ второе слагаемое в правой части отсутствует за счет того, что $\sigma_1 = 0$.

Следовательно, уравнение (20) представляет собой рекуррентную формулу для последовательного определения входящих в ее левую часть коэффициентов $h_i^{(p)}$ и $Y_i^{(p)}$ при $|p| = 2, 3, \ldots$

В частности, при $|p| = 2$ получаем $(\sum_{j=1}^n p_j\lambda_j - \lambda_i)h_i^{(p)} + Y_i^{(p)} = Z_i^{(p)} + \sigma_i h_{i-1}^{(p)} - \sum_{j=1}^n \sigma_j(p_j+1)h_i^{(p-e_{j-1}+e_j)}$. А начинается все с первой пары $(i,p) = (1, 2e_n)$, для которой $(2\lambda_n - \lambda_1)h_1^{(2e_n)} + Y_1^{(2e_n)} = Z_1^{(2e_n)}$.

$\mathbf{3^0}$. Введем в рассмотрение величины

$$\delta_{ip} = \delta_{ip}(\lambda) = \sum_{j=1}^n p_j\lambda_j - \lambda_i = (p,\lambda) - \lambda_i = (p - e_i, \lambda),$$

которые играют важнейшую роль в теории нормальных форм.

Систему уравнений (20) удобно записать в виде

$$\delta_{ip}h_i^{(p)} + Y_i^{(p)} = \widetilde{Y}_i^{(p)} \qquad (|p| \geq 2, \quad i = 1, \ldots, n), \tag{21}$$

где через $\widetilde{Y}^{(p)}$ обозначена уже известная правая часть системы (20).

Определение 2. Пара индексов (i,p) называется резонансной, если она удовлетворяет резонансному уравнению

$$\delta_{ip} = (p,\lambda) - \lambda_i = 0. \tag{22}$$

В противном случае эта пара индексов — нерезонансная.

Определение 3. Пусть $f(z) \in \Phi_1$, тогда:

— коэффициенты $f_i^{(p)}$ и мономы $f_i^{(p)}z^p$, у которых пара (i,p) удовлетворяем уравнению (22), а также векторный ряд $f^0 = f_\lambda^0(z)$ с компонентами $f_i^0 = \sum_{p:\,\delta_{ip}=0} f_i^{(p)}z^p$, называются резонансными;

— остальные коэффициенты и члены ряда f, а также ряд $f_\lambda^*(z)$ с компонентами $f_i^* = \sum_{p:\,\delta_{ip}\neq 0} f_i^{(p)}z^p$, называются нерезонансными.

Таким образом, любой формальный векторный степенной ряд может быть записан в виде $f(z) = f^0(z) + f^*(z)$. При этом один и тот же вектор p в зависимости от величины собственных чисел λ_i может быть резонансным для одних значениях индекса i и нерезонансным — для других.

Если $\delta_{ip} \neq 0$, то нерезонансные коэффициенты $Y_i^{(p)}$ системы (19), входящие в левую часть (21), можно выбирать произвольным образом. Нерезонансные коэффициенты $h_i^{(p)}$ замены (18) определятся по ним однозначно по формуле

$$h_i^{(p)} = \delta_{ip}^{-1}(\widetilde{Y}_i^{(p)} - Y_i^{(p)}). \tag{23}$$

Если $\delta_{ip} = 0$, то из (21) получается резонансное уравнение

$$Y_i^{(p)} = \widetilde{Y}_i^{(p)} \quad \text{(пара } (i,p) \text{ — резонансная)}, \tag{24}$$

правая часть которого определяет резонансный коэффициент $Y_i^{(p)}$ системы (19). Зато резонансный коэффициент $h_i^{(p)}$ замены (18) не имеет ограничений и может быть выбран произвольным образом, так как множитель δ_{ip} при нем в (21) равен нулю.

В результате доказана теорема о формальной эквивалентности произвольных систем.

Теорема 1. *Пусть формальная замена (18) сводит систему (8) к системе (19), тогда коэффициенты рядов Z, Y, h удовлетворяют алгебраической системе (21). Зафиксируем произвольным образом резонансный ряд h^0 в замене (18) и ряд Y^*, состоящий из нерезонансных членов правой части системы (19), тогда нерезонансная часть h^* ряда h и резонансный ряд Y^0 определятся однозначно из систем (23) и (24) соответственно.*

§ 4. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ

1⁰. Целью метода нормальных форм, вообще говоря, является максимальное упрощение системы (8) $\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sigma_i z_{i-1} + Z_i(z)$ $(i = \overline{1,n})$, полученной из произвольной исходной системы (1) приведением матрицы A к жордановой форме.

Упрощение заключается в обращении в нуль наибольшего числа коэффициентов системы (8) при помощи почти тождественной замены переменных (18) $z_i = y_i + h_i(y)$. В этой связи естественным выглядит следующее определение "самой простой" системы.

Определение 4. Система (19) называется системой в нормальной форме или просто нормальной формой (НФ), если все ее нерезонансные коэффициенты равны нулю, т. е. ряд $Y = Y^0$.

Определение 5. Преобразование (18), переводящее исходную систему (8) в НФ (19), называется нормализующим преобразованием или нормализующей заменой. Нормализующее преобразование, в котором резонансный ряд $h^0 \equiv 0$, называется стандартным.

Теорема 2. *Для любой системы (8) почти тождественное нормализующее преобразование (18) существует. Существует и единственна нормализующая замена (18) с произвольно выбранными резонансными членами, в частности, стандартная.*

Доказательство. Если $\delta_{ip} \neq 0$, то в (21) всегда можно выбрать $Y_i^{(p)} = 0$. Тогда в (23) $h_i^{(p)} = \delta_{ip}^{-1}\widetilde{Y}_i^{(p)}$. А если $\delta_{ip} = 0$, то коэффициенты $Y_i^{(p)}$ находим из резонансного уравнения (24).

Входящие в $\widetilde{Y}_i^{(p)}$ резонансные коэффициенты ряда h предшествуют коэффициентам $h_i^{(p)}$, $Y_i^{(p)}$, поэтому при любом заранее зафиксированном резонансном ряде h^0 нормализующая замена (18) и нормальная форма (19) однозначно определяются.

В частности, можно выбрать резонансный ряд h^0 тождественно равным нулю. $\square$

Теперь становится понятно, что степень возможного упрощения нелинейностей в исходной системе (8) зависит исключительно от величины и соотношения собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Максимальное упрощение достигается, когда собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ рационально несоизмеримы.

Тогда при любых $i = \overline{1, n}$ и целочисленных векторах p величины $\delta_{ip} \neq 0$, т. е. резонансные пары отсутствуют.

В этом случае нормализующая замена однозначно определяется системой (8), НФ которой единственна и линейна: $\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1}$.

Противоположная ситуация возникает, когда все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ равны нулю. Тогда $\delta_{ip} = 0$ всегда, и любая исходная система (8) сама является НФ, поскольку у нее все коэффициенты резонансные, а любая замена координат — нормализующая.

Поэтому к системам с нулевыми собственными числами матрицы линейной части резонансная теория нормальных форм, описываемая в этом пособии, применена быть не может.

Для упрощения систем с нулевым вектором собственных чисел создана специальная теория — теория обобщенных нормальных форм.

В остальных случаях при нормализации достигается более или менее значительное упрощение исходной системы (8), а поскольку существуют как резонансные, так и нерезонансные пары (i, p), то НФ (19) определяется системой (8) неоднозначно из-за возможности произвольного выбора ряда h^0 в нормализующей замене (18).

2^0. Пример 1.2. Продолжим изучение систем в критическом случае пары чисто мнимых корней характеристического уравнение, начатое в примере 1.1. Рассмотрим систему

$$\dot{y}_1 = \mathtt{i}\beta y_1 + Y_1(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = -\mathtt{i}\beta y_2 + Y_2(y_1, y_2) \qquad (\beta > 0). \quad (25)$$

Система (25) может рассматриваться как сама по себе, так и в качестве системы, полученной из системы (15) при помощи замены (18) $z_i = y_i + h_i(y_1, y_2)$ $(i = 1, 2)$, т. е. являться частным случаем системы (19).

Уравнение (22) $\delta_{ip} = 0$ имеет вид $\mathtt{i}\beta(p_1 - p_2 - 1) = 0$ при $i = 1$, т. е $p_1 - 1 = p_2 = r$, и $\mathtt{i}\beta(p_1 - p_2 + 1) = 0$ при $i = 2$, т. е $p_2 - 1 = p_1 = r$. Поэтому в системе (25) коэффициенты $Y_1^{(r+1,r)}$ и $Y_2^{(r,r+1)}$ — резонансные $(r \geq 1)$, а остальные — нерезонансные.

По определению 4 система (25) является НФ, если в ней

$$Y_1 = \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{(r+1,r)} y_1^{r+1} y_2^r, \quad Y_2 = \sum_{r=1}^{\infty} Y_2^{(r,r+1)} y_1^r y_2^{r+1}. \qquad (26)$$

Предположим теперь, что система (25) получена из вещественной системы. Тогда для нее выполняются условия вещественности (16): $y_2 = \overline{y}_1$, $Y_2(y_1, y_2) = \overline{Y_1(y_1, y_2)} = \overline{Y}_1(y_2, y_1)$ или $Y_2^{(p_1,p_2)} = \overline{Y}_1^{(p_2,p_1)}$.

При этих условиях второе уравнение системы (25) становится комплексно-сопряженным к первому. Поэтому в формулах (26) коэффициенты $Y_2^{(r,r+1)} = \overline{Y}_1^{(r+1,r)}$.

Таким образом вещественная нормальная форма в случае пары чисто мнимых корней имеет вид

$$\dot{y}_1 = y_1 \Big(\mathtt{i}\beta + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{(r+1,r)} (y_1 y_2)^r \Big), \qquad (27)$$

а уравнение для $\dot{y}_2$ является комплексно-сопряженным к (27).

Для того чтобы записать вещественную НФ (27) в вещественных координатах $v = (v_1, v_2)$, надо сделать стандартную линейную замену $y = Cv$, в которой согласно (9) матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & \mathtt{i} \\ 1 & -\mathtt{i} \end{pmatrix}$, т. е. замену $y_1 = v_1 + \mathtt{i}v_2$, $\;y_2 = v_1 - \mathtt{i}v_2$.

Дифференцируя первое уравнение указанной замены по t, получаем равенство

$$\dot v_1 + \mathtt{i}\dot v_2 = (v_1 + \mathtt{i}v_2)(\mathtt{i}\beta + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{(r+1,r)}(v_1^2 + v_2^2)^r).$$

Его вещественная и мнимая части образуют систему

$$\begin{aligned} \dot v_1 &= -\beta v_2 + \sum_{r=1}^{\infty} (v_1 \mathrm{Re}\, Y_1^{(r+1,r)} - v_2 \mathrm{Im}\, Y_1^{(r+1,r)})(v_1^2 + v_2^2)^r, \\ \dot v_2 &= +\beta v_1 + \sum_{r=1}^{\infty} (v_2 \mathrm{Re}\, Y_1^{(r+1,r)} + v_1 \mathrm{Im}\, Y_1^{(r+1,r)})(v_1^2 + v_2^2)^r, \end{aligned} \tag{27_r}$$

все коэффициенты которой вещественны.

Таким образом, (27_r) — это вещественная система в нормальной форме, записанная в вещественных координатах. $\square$

3⁰. Как связаны между собой все нормализующие замены?

Пусть система (19) $\dot y_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + Y_i(y)$ — это НФ системы (8), полученная в результате замены (18) $z_i = H_i(y) = y_i + h_i(y)$, т. е. в системе (19) $Y = Y^0$.

Рассмотрим еще одно нормализующее преобразование

$$z_i = G_i(w) = w_i + g_i(w) \qquad (g \in \Phi_2), \tag{28}$$

переводящее систему (8) $\dot z_i = \lambda_i z_i + \sigma_i z_{i-1} + Z_i(z)$ в какую-либо НФ

$$\dot w_i = \lambda_i w_i + \sigma_i w_{i-1} + W_i(w) \qquad (W = W^0 \in \Phi_2). \tag{29}$$

Тогда суперпозиция преобразований обратного к (18) и (28)

$$y_i = F_i(w) = w_i + f_i(w) \qquad (f \in \Phi_2), \tag{30}$$

т. е. $F(w) = H^{-1}(G(w))$, переводит НФ (19) в НФ (29) (см. диагр.).

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{(29)}{\dot w = Jw + W^0} \\
\underset{(7),\,(8)}{\dot z = Jz + Z} \arrow[ur, "{z = G(w)\ (28)}"] \arrow[r, "z = H(y)", "(18)"'] & \underset{(19)}{\dot y = Jy + Y^0} \arrow[u, "{y = F(w)\ (30)}"']
\end{tikzcd}$$

В результате, изучив все замены (30), переводящие НФ в НФ, будем знать все нормализующие замены исходной системы (8).

Теорема 3. *В замене (30), переводящей нормальную форму (19) в нормальную форму (29), все нерезонансные коэффициенты равны нулю, т. е.* $F(w) = F^0(w)$.

Доказательство. Продифференцируем замену (30) в силу систем (19) и (29) аналогично тому, как это было сделано для замены (18), и должным образом перегруппируем слагаемые, тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial w_j} \lambda_j w_j - \lambda_i f_i + W_i = Y_i(w+f) + \sigma_i f_{i-1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial w_j} (\sigma_j w_{j-1} + W_j).$$

Приравнивая коэффициенты при w^p с $|p| \geq 2$, как это делалось в тождествах (20), получаем уравнения, связывающие коэффициенты замены (30) и нормальных форм (19) и (29):

$$\delta_{ip} f_i^{(p)} + W_i^{(p)} = \{Y_i(w+f)\}^{(p)} + \sigma_i f_{i-1}^{(p)} - \tag{31}$$

$$- \sum_{j=2}^{n} \sigma_j (p_j + 1) f_i^{(p-e_{j-1}+e_j)} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{|q|=2}^{|p|-1} (p_j - q_j + 1) f_i^{(p+e_j-q)} W_j^{(q)}.$$

в которых, как обычно, через e_k обозначается k-й орт.

Покажем методом математической индукции, что если (i, p) — нерезонансная пара, то правая часть уравнений (31) равна нулю. А поскольку (29) — это НФ, то в левой части (31) коэффициент $W_i^{(p)} = 0$, откуда следует, что нерезонансный коэффициент $f_i^{(p)}$ также должен равняться нулю, и теорема будет доказана.

В смысле лексико-графической упорядоченности первым вектором среди целочисленных векторов с неотрицательными компонентами и нормой больше единицы, является вектор $2e_n$. Поэтому при $i = 1$ из (31) получаем, что $(2\lambda_n - \lambda_1) f_1^{(2e_n)} + W_1^{(2e_n)} = Y_1^{(2e_n)}$.

Если пара $(1, 2e_n)$ нерезонансная, т. е. $\delta_{1e_n} \neq 0$, то по определению коэффициент $Y_1^{(2e_n)} = 0$, и база индукции имеется.

Предположим, что для всех нерезонансных пар (j, q), предшествующих нерезонансной паре (i, p), коэффициенты $f_j^{(q)} = 0$.

В уравнениях (31) точно так же, как в (20), в правой части все коэффициенты предшествуют коэффициентам из левой части, поэтому для них справедливо индукционное предположение.

Итак, пусть пара (i,p) — нерезонансная. Тогда во втором слагаемом правой части (31) либо $\sigma_i = 0$, либо $\lambda_i = \lambda_{i-1}$, а значит, пара $(i-1,p)$ — нерезонансная и коэффициент $f_{i-1}^{(p)} = 0$.

Точно так же в третьем слагаемом либо $\sigma_j = 0$, либо $\lambda_j = \lambda_{j-1}$ и коэффициент $f_i^{(p-e_{j-1}+e_j)} = 0$.

В последнем слагаемом правой части (31) скалярное произведение $(q-e_j,\lambda) = 0$, так как коэффициент $W_j^{(q)}$ — резонансный. Но тогда $(p+e_j-q,\lambda)-\lambda_i = (p-e_i,\lambda) \neq 0$ по предположению, а значит, коэффициент $f_i^{(p+e_j-q)}$ — нерезонансный и равен нулю.

Рассмотрим, наконец, слагаемое $\{Y_i(w+f)\}^{(p)}$ из (31). Ряд

$$Y_i(w+f) = \sum_{q:\,|q|=2}^{\infty} Y_i^{(q)}\Big(w_1 + \sum_{r:\,|r|=2}^{\infty} f_1^{(r)} w^r\Big)^{q_1} \dots \Big(w_n + \sum_{r:\,|r|=2}^{\infty} f_n^{(r)} w^r\Big)^{q_n}$$

имеет члены следующего вида:

$$Y_i^{(q)}\, w_1^{q_1-s_1} \prod_{l=1}^{s_1} f_1^{(r^{1l})} w^{r^{1l}} \dots\, w_n^{q_n-s_n} \prod_{l=1}^{s_n} f_n^{(r^{nl})} w^{r^{nl}}.$$

Здесь s, r^{kl} — это n-мерные целочисленные векторы с неотрицательными компонентами, причем $s_j \le q_j$ $(i,\, j,\, k = \overline{1,n})$.

Все коэффициенты, входящие в выписанные члены, могут быть отличны от нуля только в тех случаях, когда

$$(q,\lambda) = \lambda_i \quad \text{и} \quad (r^{kl},\lambda) = \lambda_k,$$

так как (19) — это НФ и выполняются индукционные предположения. Поэтому для каждого слагаемого из $\{Y_i(w+f)\}^{(p)}$ справедливы равенства $p_j = q_j - s_j + \sum_{l=1}^{s_1} r_j^{1l} + \ldots + \sum_{l=1}^{s_n} r_j^{nl}$, которым удовлетворяют индексы коэффициентов, стоящих при суммарной степени p_j переменной w_j. Но тогда $(p,\lambda) = (q - s + \sum_{l=1}^{s_1} r^{1l} + \ldots + \sum_{l=1}^{s_n} r^{nl}, \lambda) = \lambda_i - (s,\lambda) + s_1\lambda_1 + \ldots + s_n\lambda_n = \lambda_i$.

Таким образом, и для первого слагаемого из правой части уравнений (31) удалось доказать, что оно может быть отлично от нуля, если только пара (i,p) — резонансная. $\square$

Отметим, что из равенства $F = F^0$ помимо $f = f^0$ вытекает равенство $w = w^0$, поскольку линейная часть i-го уравнения замены (30) $w_i = w^{e_i}$ — резонансная. В ней пара (i,e_i) удовлетворяет уравнению (22).

Следствие 1. *Пусть $F^0(w) = w+f^0(w)$, тогда нормализующие преобразования (18) и (28) связаны соотношением*

$$g(w) = f^0(w) + h(w + f^0(w)) \quad \text{или} \quad G(w) = H(F^0(w)). \qquad (32)$$

Действительно, система (29) получается из (8) последовательным применением замен (18) и (30).

Лемма 1. *Резонансные члены нормализующих замен (18) и (28) связаны соотношением*

$$G^0(w) = H^0(F^0(w)). \qquad (33)$$

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству теоремы 3. Индукцией надо показать, что при подстановке резонансного ряда F^0 в H резонансные члены G^0 могут появиться только из резонансных слагаемых H^0 ряда H ([2, § 1, л. 2]).

4^0. В связи с наличием в нормализующей замене (18) не имеющего никаких ограничений резонансного ряда h^0 и связанной с этим неединственностью НФ (19), возникают три вопроса.

1. Как зависит сходимость или расходимость нормализующей замены (18) от выбора резонансного ряда h^0?

2. Нельзя ли, используя h^0, упростить саму нормальную форму, т. е. осуществить так называемую вторичную нормализацию?

3. Каким нужно выбирать h^0, чтобы из вещественной исходной системы (8), т. е. системы (8), для которой выполняются условия вещественности аналогичные условиям (13) и (14), была бы получена вещественная НФ (19)?

Ответ на первый вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4. *1) Если у системы (8) существует сходящаяся нормализующая замена (18), то любое ее нормализующее преобразование (28) сходится, когда в нем сходится резонансный ряд g^0. 2) Если у системы (8) существует расходящаяся нормализующая замена (18), у которой резонансный ряд h^0 сходится, то любое ее нормализующее преобразование (28) расходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы вытекает из леммы 1 и следствия 1. Согласно (33) функция $F^0 = H^{0^{-1}}(G^0)$. Она аналитична в нуле как суперпозиция двух аналитических по условию теоремы функций, ибо функция обратная к аналитической также аналитическая и $G^0(w) = w + g^0(w)$.

Сходимость нормализующего преобразования G следует теперь из равенства (32).

Второе утверждение теоремы вытекает непосредственно из первого рассуждением от противного. $\square$

Ответы на два других вопроса даны в следующих параграфах.

§ 5. ВТОРИЧНАЯ НОРМАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ

1^0. Дополнительное упрощение НФ бывает возможно. Оно может быть осуществлено за счет должного выбора резонансного ряда в нормализующей замене, который по теореме 3 и определяет эту замену. При этом упрощение основывается уже не на использовании линейных членов системы (8), как это делалось в уравнении (21) при переходе к НФ, когда величина δ_{ip} была отлична от нуля.

Вторичная нормализация, предложенная А. Д. Брюно [17], производится при помощи первых отличных от нуля нелинейных резонансных членов НФ (19), выступающих в роли δ_{ip} и позволяющих аннулировать все или часть резонансных членов старших порядков.

Покажем на примере вещественной двумерной системы, матрица линейной части которой имеет собственные числа $\pm\mathtt{i}\beta$ $(\beta > 0)$, что нормальная форма, правая часть которой представлена бесконечным рядом, в результате вторичной нормализации всегда может быть преобразована в полиномиальную нормальную форму.

В примере 1.2 было установлено, что первое уравнение вещественной НФ (27) имеет вид $\dot{y}_1 = y_1(\mathtt{i}\beta + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{(r+1,r)}(y_1y_2)^r)$, а второе — комплексно-сопряженное к первому, и $y_2 = \overline{y}_1$.

Определение 6. Говорят, что для системы (27) реализуется алгебраический случай, если существует такое натуральное число p_0, что $\operatorname{Re} Y_1^{(r+1,r)} = 0$ при $1 \leq r < p_0$, а $\operatorname{Re} Y_1^{(p_0+1,p_0)} = a \neq 0$. Если такого p_0 не существует, т. е. $\operatorname{Re} Y_1^{(r+1,r)} = 0$ при всех $r \geq 1$, то случай называется трансцендентным.

Пусть в системе (27) q_0 — это первое, если существует, натуральное число такое, что $\operatorname{Im} Y_1^{(q_0+1,q_0)} = b \neq 0$.

Тем самым, если q_0 не существует в трансцендентном случае, то $Y_1 \equiv 0$, т. е. НФ (27) линейна и никаких дополнительных упрощений не требует.

Теорема 5. *Существует замена переменных*

$$y_1 = w_1 + f_1(w_1, w_2), \quad y_2 = w_2 + \overline{f}_1(w_2, w_1) \qquad (w_2 = \overline{w}_1), \tag{34}$$

переводящая вещественную НФ (27) в вещественную НФ

$$\dot{w}_1 = \mathtt{i}\beta w_1 + w_1 W_1(w_1 w_2), \quad \dot{w}_2 = -\mathtt{i}\beta w_2 + w_2 \overline{W}_1(w_1 w_2), \tag{35}$$

у которой в трансцендентном случае, если q_0 *существует, то*

$$W_1 = \mathtt{i}b\,(w_1 w_2)^{q_0}, \tag{36_1}$$

а в алгебраическом случае

$$W_1 = a\,(w_1 w_2)^{p_0} + \widetilde{a}\,(w_1 w_2)^{2p_0} + \mathtt{i}\sum_{k=q_0}^{p_0} b^{(k)}(w_1 w_2)^k, \tag{36_2}$$

где $\widetilde{a},\ b^{(k)} \in \mathbb{R}$ *и последняя сумма отсутствует, если* $q_0 > p_0$.

Доказательство для наглядности в трансцендентном и алгебраическом случаях проведем различными способами.

Трансцендентный случай. Продифференцировав по t замену (34) в силу систем (27) и (35), получаем уравнение

$$\mathtt{i}\beta(w_1 + f_1) + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{(r+1,r)}(w_1 + f_1)^{r+1}(w_2 + \overline{f}_1)^r =$$

$$= \mathtt{i}\beta w_1 + w_1 W_1 + (\partial f_1/\partial w_1) w_1(\mathtt{i}\beta + W_1) + (\partial f_1/\partial w_2) w_2(-\mathtt{i}\beta + \overline{W}_1).$$

По теореме 3 ряд f_1 замены (34), переводящей НФ в НФ, не содержит нерезонансных членов, поэтому $f_1 = \sum_{s=1}^{\infty} f_1^{(s+1,s)} w_1^{s+1} w_2^s$, а $W_1 = \sum_{r=1}^{\infty} W_1^{(r+1,r)}(w_1 w_2)^r$.

Линейные члены нормальной формы (27), как и следовало ожидать, не могут оказать влияния на W_1, поскольку

$$(\partial f_1/\partial w_1)\mathtt{i}\beta w_1 - (\partial f_1/\partial w_2)\mathtt{i}\beta w_2 - \mathtt{i}\beta f_1 \equiv 0.$$

Приравнивая остальные коэффициенты при резонансных мономах $w_1^{k+1} w_2^k$ $(k \geq 1)$, получаем равенства

$$W_1^{(k+1,k)} = \Big\{ \sum_{r=q_0}^{k} Y_1^{(r+1,r)} w_1^{r+1} w_2^r \times$$

$$\times (1 + \sum_{s=1}^{k} f_1^{(s+1,s)}(w_1 w_2)^s)^{r+1}(1 + \sum_{s=1}^{k} \overline{f}_1^{(s+1,s)}(w_1 w_2)^s)^r \Big\}^{(k+1,k)} -$$

$$- \sum_{r=1}^{k-1} ((k-r+1) f_1^{(k-r+1,k-r)} W_1^{(r+1,r)} + (k-r) f_1^{(k-r+1,k-r)} \overline{W}_1^{(r+1,r)}).$$

По определению 6 в системе (27) все коэффициенты $Y_1^{(r+1,r)}$ — чисто мнимые числа. Выбирая вещественными коэффициенты ряда f_1 из замены (34), получаем в НФ (35) чисто мнимый ряд W_1.

Очевидно, что $W_1^{(r+1,r)} = Y_1^{(r+1,r)} = 0$ при $k < q_0$, а коэффициент $W_1^{(q_0+1,q_0)} = Y_1^{(q_0+1,q_0)} = \mathtt{i}b \neq 0$.

При $k \geq q_0 + 1$ выделим в правой части те слагаемые, которые содержат коэффициенты замены (34) $f_1^{(s+1,s)}$ с максимально возможным верхним индексом s. Имеем:

$$W_1^{(k+1,k)} = \Phi^{(k)} + ((q_0+1)f_1^{(k-q_0+1,k-q_0)} + q_0\overline{f}_1^{(k-q_0+1,k-q_0)})W_1^{(q_0+1,q_0)} -$$

$$-(k-q_0+1)f_1^{(k-q_0+1,k-q_0)}W_1^{(q_0+1,q_0)} - (k-q_0)f_1^{(k-q_0+1,k-q_0)}\overline{W}_1^{(q_0+1,q_0)},$$

где функция $\Phi^{(k)}$ содержит только предшествующие коэффициенты рядов f_1 и W_1. Таким образом, получена формула

$$W_1^{(k+1,k)} = Y_1^{(k+1,k)} + 2q_0 f_1^{(k-q_0+1,k-q_0)}\mathtt{i}b + \Phi^{(k)} \qquad (k > q_0),$$

которая позволяет так последовательно выбирать коэффициенты $f_1^{(k-q_0+1,k-q_0)}$, чтобы $W_1^{(k+1,k)} = 0$ при всех $k > q_0$ и в НФ (35) ряд $W_1(w_1w_2)$ имел вид (36_1).

Алгебраический случай. Следуя доказательству теоремы 3 из [17], покажем, что степенная замена переменных

$$y_1 = u_1u_2^{-1}, \qquad y_2 = u_2 \tag{37}$$

переводит нормальную форму (27) в систему

$$\dot{u}_1 = u_1U_1(u_1), \qquad \dot{u}_2 = -\mathtt{i}\beta u_2 + u_2U_2(u_1), \tag{38}$$

где $U_1 = \sum_{r=p_0}^{\infty} U_1^{(r)}u_1^r$, $U_1^{(r)} = 2\mathrm{Re}\,Y_1^{(r+1,r)}$, $U_2 = \sum_{r=1}^{\infty} \overline{Y}_1^{(r+1,r)}u_1^r$.

Действительно, если подставить во второе уравнение системы (27) $\dot{y}_2 = -\mathtt{i}\beta y_2 + y_2\sum_{r=1}^{\infty} \overline{Y}_1^{(r+1,r)}(y_1y_2)^r$ переменную u_2 вместо y_2 и u_1 вместо y_1y_2, то сразу получим второе уравнение системы (38).

Дифференцируя теперь по t первое уравнение замены (37) в силу систем (27) и (38), получаем равенство

$$u_1u_2^{-1}\Big(\mathtt{i}\beta + \sum_{r=p_0}^{\infty}\mathrm{Re}\,Y_1^{(r+1,r)}u_1^r + \mathtt{i}\sum_{r=q_0}^{\infty}\mathrm{Im}\,Y_1^{(r+1,r)}u_1^r\Big) =$$

$$= u_1U_1(u_1)u_2^{-1} - u_1u_2^{-2}\Big(-\mathtt{i}\beta u_2 + u_2\sum_{r=1}^{\infty}\overline{Y}_1^{(r+1,r)}u_1^r\Big),$$

в суммах которого мнимые части сокращаются, а вещественные удваиваются, что дает требуемые значения для коэффициентов ряда $U_1(u_1)$. Таким образом, все $U_1^{(r)}$ — вещественные и $U_1^{(p_0)} = 2a$.

Рассмотрим замену с вещественными коэффициентами

$$u_1 = v_1(1 + g_1(v_1)), \tag{39}$$

переводящую систему (38) в систему

$$\dot{v}_1 = v_1 V_1(v_1), \qquad \dot{u}_2 = -\mathtt{i}\beta u_2 + u_2 V_2(v_1), \tag{40}$$

где $g_1 = \sum_{s=1}^{\infty} g_1^{(s)} v_1^s$, $V_i = \sum_{r=1}^{\infty} V_i^{(r)} v_1^r$.

Ряды U_1, V_1, g_1 связаны равенством

$$(1 + g_1)U_1(v_1(1 + g_1)) = V_1 + g_1 V_1 + (\partial g_1/\partial v_1) v_1 V_1.$$

Приравнивая в нем коэффициенты при v_1^k $(k \geq 1)$, получаем

$$V_1^{(k)} = \Big\{ \sum_{r=p_0}^{k} U_1^{(r)} v_1^r (1 + g_1(v_1))^r \Big\}^{(k)} - \sum_{r=1}^{k-1} (k-r) g_1^{(k-r)} V_1^{(r)} +$$
$$+ \{ g_1(v_1) U_1(v_1(1 + g_1(v_1)) - g_1(v_1) V_1(v_1) \}^{(k)}.$$

Отсюда, если $p_0 \geq 2$, то $V_1^{(1)}, \ldots, V_1^{(p_0-1)} = 0$.

Далее, $V_1^{(p_0)} = U_1^{(p_0)}$, а при $k \geq p_0 + 1$ выделим в правой части те слагаемые, которые содержат коэффициенты замены (39) $g_1^{(l)}$ с максимально возможным верхним индексом. Имеем:

$$V_1^{(k)} = p_0 g_1^{(k-p_0)} U_1^{(p_0)} - (k - p_0) g_1^{(k-p_0)} V_1^{(p_0)} + \Psi^{(k)},$$

где $\Psi^{(k)}$ содержит только предшествующие коэффициенты рядов g_1 и V_1. При этом в разности из последней фигурной скобки правой части слагаемые $g_1^{(k-p_0)} U_1^{(p_0)}$ и $g_1^{(k-p_0)} V_1^{(p_0)}$, очевидно, сокращаются.

При $k \neq 2p_0$ коэффициенты $g_1^{(k-p_0)}$ всегда можно подобрать так, чтобы $V_1^{(k)} = 0$, а при $k = 2p_0$ вынужденно получаем

$$V_1^{(2p_0)} = U_1^{(2p_0)} + \Psi^{(2p_0)}(g_1^{(1)}, \ldots, g_1^{(p_0-1)}) = 2\widetilde{a}$$

и $g_1^{(p_0)}$ не имеет ограничений. Таким образом в системе (40)

$$V_1(v_1) = 2a v_1^{p_0} + 2\widetilde{a} v_1^{2p_0}.$$

В ее втором уравнении, полученном в результате замены (39), ряд

$$V_2(v_1) = U_2(v_1(1 + g_1(v_1)) = \sum_{k=p_0}^{\infty} a^{(k)} v_1^k - \mathtt{i} \sum_{k=q_0}^{\infty} b^{(k)} v_1^k,$$

где $a^{(k)}$, $b^{(k)}$ — это вещественные числа и $a^{(p_0)} = a$, так как ряд $g_1(v_1)$ имеет вещественные коэффициенты и $U_2^{(p_0)} = \overline{Y}_1^{(p_0+1,p_0)}$.

Применим теперь к системе (40) замену

$$u_2 = v_2 \exp\Big\{ \int \frac{v_1^{-p_0-1}}{2a + 2\widetilde{a}v_1^{p_0}} \Big(\sum_{k=p_0+1}^{\infty} (a^{(k)} - \mathtt{i}b^{(k)})v_1^k - \widetilde{a}v_1^{2p_0} \Big)\, dv_1 \Big\}. \quad (41)$$

Очевидно, эта замена не затрагивает первого уравнения системы (40) и имеет стандартный вид $u_2 = v_2(1 + \sum_{s=1}^{\infty} g_2^{(s)} v_1^s)$.

Дифференцируя (41) по t в силу второго уравнения (40) и сокращая на экспоненту, получаем уравнение $-\mathtt{i}\beta v_2 + v_2 V_2(v_1) = \dot{v}_2 + v_2 (\sum_{k=p_0+1}^{\infty} (a^{(k)} - \mathtt{i}b^{(k)})v_1^k - \widetilde{a}v_1^{2p_0})v_1^{-p_0-1} 2(a + \widetilde{a}v_1^{p_0})^{-1} v_1 V_1(v_1)$, в котором аннулированы все члены, чей порядок больше p_0, кроме члена порядка $2p_0$, а остальные члены оставлены без изменений.

В результате замены (39) и (41) переводят (38) в систему

$$\dot{v}_1 = 2v_1(av_1^{p_0} + \widetilde{a}v_1^{2p_0}), \quad \dot{v}_2 = v_2\Big(-\mathtt{i}\beta + av_1^{p_0} + \widetilde{a}v_1^{2p_0} - \mathtt{i}\sum_{k=q_0}^{p_0} b^{(k)} v_1^k\Big),$$

которая, в свою очередь, обратной к (37) степенной заменой

$$v_1 = w_1 w_2, \qquad v_2 = w_2 \qquad (42)$$

переводится в НФ (35), причем ряд $W_1(w_1w_2)$ удовлетворяет (36_2).

Очевидно, что суперпозиция замен (37), (39), (41) и (42)

$$y_1 = w_1(1 + g_1(w_1w_2))(1 + g_2(w_1w_2))^{-1}, \quad y_2 = w_2(1 + g_2(w_1w_2))$$

имеет стандартный вид (34). $\square$

2⁰. Вторичная нормализация может быть проведена не всегда. Например, любая система

$$\dot{y}_j = y_j, \quad \dot{y}_n = my_n + Y(y_1, \ldots, y_{n-1}) \qquad (1 \le j \le n-1),$$

где Y — однородный многочлен степени $m \ge 2$, является НФ, так как $\lambda = (1, \ldots, 1, m)$ и пара (n, p) резонансная, если $p_n = 0$, а $p_1 + \ldots + p_{n-1} = m$. Указанная система не может быть упрощена никаким нормализующим преобразованием (30), поскольку все ее резонансные члены имеют один и тот же порядок малости.

§ 6. НОРМАЛИЗАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СИСТЕМ

1⁰. В этом параграфе предстоит разобраться, каким условиям должна удовлетворять нормализующая замена для того, чтобы преобразовать исходную вещественную систему в вещественную НФ?

Рассмотрим формальную систему (7) $\dot z = Jz + Z(z)$, в которой жорданова матрица J удовлетворяет условию вещественности $J = \operatorname{diag}\{J_C^l, \overline{J_C^l}, J_R^m\}$ и $\overline{J}_R^m = J_R^m$, а также выполняются условия вещественности для переменных (13) $\overline{z} = Dz$ и для нелинейностей (14) $D^{-1}\overline{Z}(Dz) = Z(z)$, где матрица D определена в (9).

Предположим, что среди собственных чисел матрицы J имеются комплексные, т. е. $l \geq 1$, иначе система (7) имеет вещественные переменные и сама вещественна, так как получена из вещественной системы (1) линейной заменой (6) с вещественной матрицей S.

Пусть записанная в векторном виде замена (18) $z = y + h(y)$ переводит систему (7) в НФ (19) $\dot y = Jy + Y(y)$ с $Y = Y^0$.

Согласно теореме 1 коэффициенты резонансного ряда h^0 можно выбирать любыми. По ним и по коэффициентам возмущения $Z(z)$ однозначно определятся нерезонансный ряд $h^* = h - h^0$ нормализующей замены (18) и резонансный ряд $Y^0 = Y$, т. е. вся НФ (19).

Хотелось бы, чтобы переменные и нелинейности в системе (19) удовлетворяли условиям вещественности аналогичным (13) и (14), а именно, чтобы:

$$\overline{y} = Dy, \tag{43}$$

$$D^{-1}\overline{Y}(Dy) = Y(y). \tag{44}$$

Согласно условию (13) в преобразовании (18) $\overline{y} + \overline{h}(\overline{y}) = \overline{z} = Dz$, откуда $D^{-1}\overline{y} + D^{-1}\overline{h}(DD^{-1}\overline{y}) = z = y + h(y)$. Поэтому условие вещественности (43) выполняется, если

$$D^{-1}\overline{h}(Dy) = h(y). \tag{45}$$

Условие (45) накладывается на нелинейные члены замены (18) и, очевидно, аналогично условию вещественности (14) для системы (7).

Покажем, что условие (45) гарантирует также выполнение и второго условия вещественности (44) для нормальной формы (19).

Как было установлено в § 2, стандартная замена (10) $z = Cu$ позволяет записать систему (7) в вещественных координатах $u_1, \ldots, u_n$ в виде системы (11) $\dot u = Iu + U(u)$ с вещественными I и U.

В свою очередь, стандартная замена

$$y = Cv \tag{46}$$

с матрицей C из (9) перепишет НФ (19) в виде системы

$$\dot{v} = Iv + V(v), \tag{47}$$

причем, как и в системе (11), $V(v) = C^{-1}Y(Cv)$ и координаты $v_1, \ldots, v_n$ вещественны, так как благодаря равенству $\overline{C} = DC$ и условию (43), $\overline{v} = \overline{C^{-1}y} = \overline{C}^{\,-1}\overline{y} = C^{-1}D^{-1}Dy = C^{-1}y = v$.

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\underset{(7)}{\dot{z} = Jz + Z(z)} \arrow[r, "z = y + h(y)", "(18)"'] \arrow[d, "\substack{z = Cu \\ (10)}"] & \underset{(19)}{\dot{y} = Jy + Y^0(y)} \arrow[d, "\substack{y = Cv \\ (46)}"] \\
\underset{(11)}{\dot{u} = Iu + U(u)} \arrow[r, "u = v + C^{-1}h(Cv)", "(48)"'] & \underset{(47)}{\dot{v} = Iv + V(v)}
\end{tikzcd}$$

Замена переменных, преобразующая вещественную систему (11) в систему (47), являясь суперпозиция трех замен: обратной к (10), (18) и (46), имеет вид

$$u = v + C^{-1}h(Cv). \tag{48}$$

Лемма 2. *Пусть для замены (18) выполняется условие (45), тогда замена (48) и система (47) вещественны.*

Доказательство. Справедливы равенства

$$\overline{C^{-1}h(Cv)} = \overline{C^{-1}}\,\overline{h}(\overline{C}\overline{v}) \overset{(9)}{=} (DC)^{-1}\overline{h}(DCv) \overset{(46)}{=}$$

$$\overset{(46)}{=} C^{-1}D^{-1}\overline{h}(Dy) \overset{(45)}{=} C^{-1}h(y) = C^{-1}h(Cv),$$

т. е. замена переменных (48) вещественна. Но система (11) также вещественна, поскольку получена из вещественной системы (1) при помощи вещественной замены переменных (12) $x = Ru$. Поэтому система (47) вещественна, в ней $\overline{V(v)} = V(v)$. □

Из леммы 2 вытекает условие вещественности (44). В самом деле

$$D^{-1}\overline{Y}(Dy) \overset{(43)}{=} D^{-1}\overline{Y(y)} \overset{(46)}{=} D^{-1}\overline{CC^{-1}Y(Cv)} \overset{(47)}{=} D^{-1}\overline{C}\overline{V(v)} \overset{(9)}{=}$$

$$\overset{\text{л.2}}{=} D^{-1}DCV(v) \overset{(47)}{=} CC^{-1}Y(Cv) \overset{(46)}{=} Y(y).$$

2⁰. Остается выяснить, когда для нормализующей замены (18) будет выполняться условие вещественности (45)?

Теорема 6. *Пусть для системы (7) выполняются условия вещественности (13) и (14), тогда ее нормализующая замена (18) удовлетворяет условию (45), если произвольно выбираемый в ней резонансный ряд* h^0 *удовлетворяет аналогичному условию*

$$D^{-1}\overline{h}^0(Dy) = h^0(y). \tag{45^0}$$

Теперь все вопросы, касающиеся сохранения вещественности нормализованной системы, снимает следующее утверждение.

Следствие 2. *Стандартное нормализующее преобразование вещественной системы вещественно.*

Действительно, условие (45^0) выполняется, если $h^0 \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6 разобьем на три части.

I) Применим к НФ (19) системы (7) линейную обратимую замену

$$y = D\widetilde{y}. \tag{49}$$

В полученной системе

$$\dot{\widetilde{y}} = \widetilde{J}\widetilde{y} + \widetilde{Y}(\widetilde{y}) \tag{$\widetilde{19}$}$$

$\widetilde{Y}(\widetilde{y}) = D^{-1}Y(D\widetilde{y})$ и $\widetilde{J} = D^{-1}JD = \overline{J}$ согласно (9).

Аналогичная замена

$$z = D\widetilde{z}, \tag{50}$$

в которой $\widetilde{z} = \overline{z}$ согласно (13), преобразует систему (7) в систему

$$\dot{\widetilde{z}} = \widetilde{J}\widetilde{z} + \widetilde{Z}(\widetilde{z}) \qquad (\widetilde{J} = \overline{J},\ \widetilde{Z}(\widetilde{z}) = D^{-1}Z(D\widetilde{z}),\ \widetilde{z} = \overline{z}). \tag{$\widetilde{7}$}$$

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\underset{(\widetilde{7})}{\dot{\widetilde{z}} = J\widetilde{z} + \widetilde{Z}(\widetilde{z})} \arrow[r, "\widetilde{z} = \widetilde{y} + \widetilde{h}(\widetilde{y})", "(\widetilde{18})"'] & \underset{(\widetilde{19})}{\dot{\widetilde{y}} = \widetilde{J}\widetilde{y} + \widetilde{Y}(\widetilde{y})} \\
\underset{(7)}{\dot{z} = Jz + Z(z)} \arrow[u, "\substack{z = D\widetilde{z} \\ (50)}"'] \arrow[r, "z = y + h(y)", "(18)"'] & \underset{(19)}{\dot{y} = Jy + Y^0(y)} \arrow[u, "\substack{y = D\widetilde{y} \\ (49)}"']
\end{tikzcd}$$

Суперпозицию замен обратной к (50), (18) и (49), переводящую систему $(\widetilde{7})$ в систему $(\widetilde{19})$, обозначим

$$\widetilde{z} = \widetilde{y} + \widetilde{h}(\widetilde{y}), \tag{$\widetilde{18}$}$$

тогда $\widetilde{h}(\widetilde{y}) = D^{-1}h(D\widetilde{y})$.

Дифференцируя по t замену $(\widetilde{18})$ в силу систем $(\widetilde{7})$ и $(\widetilde{19})$, получаем связывающее ряды $\widetilde{h}, \widetilde{Z}, \widetilde{Y}$ тождество

$$\widetilde{J}\widetilde{h}(\widetilde{y}) + \widetilde{Z}(\widetilde{y} + \widetilde{h}(\widetilde{y})) = \widetilde{Y}(\widetilde{y}) + \frac{d\widetilde{h}(\widetilde{y})}{d\widetilde{y}}\,(\widetilde{J}\widetilde{y} + \widetilde{Y}(\widetilde{y})). \qquad (\widetilde{51})$$

II) Согласно введенному в § 2 разбиению векторов жорданова матрица J из системы (7), подобная вещественной матрице A из системы (1), имеет вектор собственных чисел $\lambda = (\lambda', \lambda'', \lambda^*)$, причем $\lambda'' = \overline{\lambda}'$ и $\lambda^* = \overline{\lambda}^*$, а жорданова матрица $\widetilde{J}$ из системы $(\widetilde{7})$, подобная J, имеет вектор собственных чисел $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}', \widetilde{\lambda}'', \widetilde{\lambda}^*)$, причем $\widetilde{J} = \overline{J}$, откуда $\widetilde{\lambda} = (\overline{\lambda}', \overline{\lambda}'', \overline{\lambda}^*)$ или $\widetilde{\lambda}' = \lambda''$, $\widetilde{\lambda}'' = \lambda'$, $\widetilde{\lambda}^* = \lambda^*$.

В системе $(\widetilde{19})$ $\widetilde{Y}(\widetilde{y}) = D^{-1}Y(D\widetilde{y})$, а $D\widetilde{y} = (\widetilde{y}'', \widetilde{y}', \widetilde{y}^*)$, поэтому $\widetilde{Y}'(\widetilde{y}) = Y''(\widetilde{y}'', \widetilde{y}', \widetilde{y}^*), \widetilde{Y}''(\widetilde{y}) = Y'(\widetilde{y}'', \widetilde{y}', \widetilde{y}^*), \widetilde{Y}^*(\widetilde{y}) = Y^*(\widetilde{y}'', \widetilde{y}', \widetilde{y}^*)$ или $\widetilde{Y}_i^{(p',p'',p^*)} = Y_{i+l}^{(p'',p',p^*)}$ $(i = 1, \ldots, l)$, $\widetilde{Y}_i^{(p',p'',p^*)} = Y_{i-l}^{(p'',p',p^*)}$ $(i = l+1, \ldots, 2l)$, $\widetilde{Y}_i^{(p',p'',p^*)} = Y_i^{(p'',p',p^*)}$ $(i = 2l+1, \ldots, n)$.

Пусть $\widetilde{Y}_i^{(p',p'',p^*)}$ — резонансный коэффициент ряда $\widetilde{Y}_i^0(\widetilde{y})$ при $i = 1, \ldots, l$, тогда согласно (22) $\delta_{i,p}(\widetilde{\lambda}) = (p, \widetilde{\lambda}) - \widetilde{\lambda}_i = 0 \Leftrightarrow (p', \lambda'') + (p'', \lambda') + (p^*, \lambda^*) - \lambda_{i+l} = 0$, т.е. $\delta_{i+l,(p'',p',p^*)}(\lambda) = 0$ и $Y_{i+l}^{(p'',p',p^*)}$ — резонансный коэффициент ряда $Y_{i+l}^0(y)$. Аналогичные рассуждения верны при $i = l+1, \ldots, 2l$ и при $i = 2l+1, \ldots, n$.

В результате

$$\widetilde{Y}_{\widetilde{\lambda}}^0(\widetilde{y}) = D^{-1}Y_\lambda^0(y). \qquad (52)$$

Но $D^{-1}Y_\lambda^0(y) \overset{\text{НФ}}{=} D^{-1}Y(y) \overset{(49)}{=} D^{-1}Y(D\widetilde{y}) \overset{(\widetilde{19})}{=} \widetilde{Y}(\widetilde{y})$, поэтому

$$\widetilde{Y}_{\widetilde{\lambda}}^0(\widetilde{y}) = \widetilde{Y}(\widetilde{y}), \qquad (53)$$

а значит, система $(\widetilde{19})$ — НФ и $(\widetilde{18})$ — нормализующая замена.

Кроме того, поскольку в $(\widetilde{18})$ $\widetilde{h}(\widetilde{y}) = D^{-1}h(D\widetilde{y})$, то для резонансных частей рядов $h(y)$ и $\widetilde{h}(\widetilde{y})$ верна аналогичная (52) формула

$$\widetilde{h}_{\widetilde{\lambda}}^0(\widetilde{y}) = D^{-1}h_\lambda^0(y). \qquad (54)$$

III) Заменяя в системе $(\widetilde{7})$ все коэффициенты на комплексно-сопряженные, получаем систему

$$\dot{\widetilde{z}} = \overline{\widetilde{J}}\widetilde{z} + \overline{\widetilde{Z}}(\widetilde{z}). \qquad (\overline{7})$$

В системе $(\overline{7})$ $\overline{\widetilde{J}} \overset{(\widetilde{19})}{=} J$, $\overline{\widetilde{Z}}(\widetilde{z}) \overset{(\widetilde{7})}{=} \overline{D^{-1}Z}(D\widetilde{z}) \overset{(9)}{=} D^{-1}\overline{Z}(D\widetilde{z}) \overset{(14)}{=} Z(\widetilde{z})$.

Последнее равенство справедливо, так как единственным ограничением на переменную z в условии вещественности (14) является условие (13), которому переменная $\widetilde{z}$ удовлетворяет, поскольку в замене (50) $\overline{\widetilde{z}} = z = D^{-1}\widetilde{z} = D\widetilde{z}$. Поэтому система $(\overline{7})$ совпадает с системой (7), имеющей переменную $\widetilde{z}$ вместо переменной z.

Из тождества $(\widetilde{51})$, в котором все коэффициенты заменены на комплексно-сопряженные, вытекает, что система $(\overline{7})$ заменой

$$\widetilde{z} = \widetilde{y} + \overline{\widetilde{h}}(\widetilde{y}), \tag{$\overline{18}$}$$

в которой $\overline{\widetilde{h}}(\widetilde{y}) = D^{-1}\overline{h}(D\widetilde{y})$ согласно $(\widetilde{18})$, преобразуется в систему

$$\dot{\widetilde{y}} = \overline{\widetilde{J}}\widetilde{y} + \overline{\widetilde{Y}}(\widetilde{y}), \tag{$\overline{19}$}$$

в которой $\overline{\widetilde{Y}}(\widetilde{y}) = D^{-1}\overline{Y}(D\widetilde{y})$ согласно $(\widetilde{19})$.

Поскольку в системе $(\widetilde{18})$ $\widetilde{J} = \overline{J}$, то $\overline{\widetilde{\lambda}} = \lambda$. Поэтому множества целочисленных решений p уравнений $\delta_{ip}(\widetilde{\lambda}) = 0$ и $\delta_{ip}(\lambda) = 0$ при любом $i = \overline{1, n}$ совпадают, т. е. у любого векторного ряда f

$$f^0_\lambda = f^0_{\widetilde{\lambda}}. \tag{55}$$

Указанное свойство рядов позволяет сделать два важных вывода:

во-первых,

$$\overline{\widetilde{Y}}{}^0_\lambda(\widetilde{y}) \overset{(55)}{=} \overline{\widetilde{Y}}{}^0_{\widetilde{\lambda}}(\widetilde{y}) \overset{(53)}{=} \overline{\widetilde{Y}}(\widetilde{y}),$$

а значит, $(\overline{19})$ — НФ и $(\overline{18})$ — нормализующая замена;

во-вторых,

$$\overline{\widetilde{h}}{}^0_\lambda(\widetilde{y}) \overset{(55)}{=} \overline{\widetilde{h}}{}^0_{\widetilde{\lambda}}(\widetilde{y}) \overset{(54)}{=} \overline{D^{-1}h^0_\lambda}(y) \overset{(9),(49)}{=} D^{-1}\overline{h^0_\lambda}(D\widetilde{y}) \overset{(45^0)}{=} h^0_\lambda(\widetilde{y}),$$

а значит, в нормализующих заменах (18) и $(\overline{18})$ системы (7), совпадающей с $(\overline{7})$, совпадают резонансные члены.

Следовательно, по теореме 2 замены (18), $(\overline{18})$ и полученные в результате их применения нормальные формы (19), $(\overline{19})$ также совпадают. Другими словами, $\overline{\widetilde{h}}(\widetilde{y}) = h(\widetilde{y})$ и $\overline{\widetilde{Y}}(\widetilde{y}) = Y(\widetilde{y})$.

Тогда в замене $(\overline{18})$ $h(\widetilde{y}) = D^{-1}\overline{h}(D\widetilde{y})$, а это тождество означает выполнение требуемого в теореме условия вещественности (45).

Отметим, что (45), как было доказано выше, влечет для НФ (19) выполнение двух условий вещественности: (43) $\overline{y} = Dy$, которое вместе с (49) дает равенство $\widetilde{y} = \overline{y}$, и (44) $D^{-1}\overline{Y}(Dy) = Y(y)$, полученное еще раз для НФ $(\overline{19})$ с переменной $\widetilde{y}$. $\square$

§ 7. КЛАССИФИКАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Рассмотрим НФ (19) $\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + Y_i(y)$, где $Y_i = Y_i^0 \in \Phi_2$ $(i = \overline{1,n})$, и изобразим собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ жордановой матрицы J ее линейной части точками на комплексной плоскости.

Будем различать два случая их различного расположения:

1) Существует такая проходящая через нуль прямая L, что по одну сторону от нее нет точек λ_i, а на ней лежит ровно l точек $(0 \le l \le n)$ с учетом их кратностей. Сменив при необходимости нумерацию, считаем, что на прямой L лежат точки $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$;

2) По обе стороны от любой проходящей через нуль прямой лежат точки λ_i.

Для теории нормальных форм наибольший интерес представляет случай 1) как с точки зрения максимального упрощения исходной системы при сведении ее к НФ, так и с точки зрения различных приложений.

Разобьем случай 1) с учетом возможной неединственности прямой L на четыре иерархических подслучая:

1а) $l = 0$, т. е. все λ_i лежат по одну сторону от L и не на ней;

1б) $0 < l < n$ и $\lambda_1 = \ldots = \lambda_l = 0$;

1в) $0 < l < n$ и существует индекс i_0 $(1 \le i_0 \le l)$, что $\lambda_{i_0} \ne 0$;

1г) $l = n$, т. е. все точки λ_i лежат на прямой L.

Например, если $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, то имеет место случай 1а) с вертикальной прямой L, а не случай 1г) с горизонтальной.

Пусть в случае 1) число $\tau \in \mathbb{C}$ таково, что $|\tau| = 1$, τ лежит с той же стороны от L, что и числа $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n$ (в случае 1г) — это не важно), и вектор $\vec{\tau} = (\operatorname{Re}\tau, \operatorname{Im}\tau)$ ортогонален L.

Положим $\mu_i = \operatorname{Re}(\vec{\tau}\lambda_i)$, $\nu_i = \operatorname{Im}(\vec{\tau}\lambda_i)$ $(i = \overline{1,n})$. Тогда μ_j — это расстояние от λ_j до L. При этом, не уменьшая общности, считаем что переменные $y_1, \ldots, y_n$ занумерованы так, что

$$0 = \mu_1 = \ldots = \mu_l < \mu_{l+1} \le \ldots \le \mu_n.$$

В дальнейшем будем рассматривать важнейший частный случай, когда прямая L совпадает с мнимой осью, а числа $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n$ имеют отрицательные вещественные части и занумерованы в порядке убывания, т. е.

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = \ldots = \operatorname{Re}\lambda_l = 0, \qquad 0 > \operatorname{Re}\lambda_{l+1} \ge \ldots \ge \operatorname{Re}\lambda_n. \tag{56}$$

В этом случае, очевидно, $\tau = -1$ и $\mu_i = -\operatorname{Re}\lambda_i \quad (i = \overline{1,n})$.

Разумеется полученные далее результаты будут справедливы и могут быть сформулированы для произвольной проходящей через нуль прямой L.

В случае 1) вектор $z = (z_1, \ldots, z_n)$ бывает удобно записывать в виде $z = (z', z'')$, где $z' = (z_1, \ldots, z_l)$, а $z'' = (z_{l+1}, \ldots, z_n)$. Тогда, к примеру, формула $\operatorname{Re}\lambda' = 0$ означает, что l первых собственных чисел лежат на мнимой оси.

Резонансное уравнение (22) $\delta_{ip} = 0$, задающее резонансные пары, благодаря вещественности векторов p и первому из условий (56) в случае 1) равносильно уравнениям

$$(p'', \operatorname{Re}\lambda'') - \operatorname{Re}\lambda_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{57}$$

$$(p, \operatorname{Im}\lambda) - \operatorname{Im}\lambda_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{58}$$

Рассмотрим подробнее, какие векторы p'' могут удовлетворять уравнению (57).

Пусть вектор $\operatorname{Re}\lambda'' = (\operatorname{Re}\lambda_{l+1}, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_n)$ имеет s различных компонент с кратностями $\nu_1, \ldots, \nu_s$, где $0 \le s \le n-l$, $\nu_1 + \ldots + \nu_s = n-l$. Разобьем $n-l$ индексов $l+1, \ldots, n$ на s непересекающихся семейств $i_1, \ldots, i_s$, содержащих номера одинаковых $\operatorname{Re}\lambda_i$:

$$i_k = \{l + \nu_1 + \ldots + \nu_{k-1} + j \mid j = 1, \ldots, \nu_k\} \qquad (k = 1, \ldots, s). \tag{59}$$

Тогда равенство $\operatorname{Re}\lambda_{j_1} = \operatorname{Re}\lambda_{j_2}$ равносильно тому, что найдется k_0, при котором $j_1, j_2 \in i_{k_0}$. Положим

$$\ell = \ell(k) = l + \nu_1 + \ldots + \nu_{k-1}, \quad z''_{(\ell)} = (z_{l+1}, \ldots, z_\ell, 0, \ldots, 0). \tag{60}$$

Лемма 3. *Если вектор собственных чисел λ относится к случаю 1) и $l < n$, то уравнение (57) имеет только такие решения p, в которых при $i = 1, \ldots, l$ вектор $p'' = 0$, а при $i \in i_k$ $(1 \le k \le s$, $1 \le s \le n-l)$ либо $p'' = e''_j$, когда $j \in i_k$, либо $|p''| \ge 2$ и $p'' = \sum_{j=l+1}^{\ell} p_j e''_j$, т. е. $p_j = 0$, когда $j \in i_k + \ldots + i_s$.*

Доказательство. Согласно (56) $\operatorname{Re}\lambda' = 0$, а $\operatorname{Re}\lambda'' < 0$. Поэтому при $i = 1, \ldots, l$ в (57) $(p'', \operatorname{Re}\lambda'') = 0$, что возможно только когда $p'' = 0$. При $i \in i_k$ согласно (59) $\operatorname{Re}\lambda_j \ne \operatorname{Re}\lambda_i$, если $j \notin i_k$ и $\operatorname{Re}\lambda_{j-1} \ge \operatorname{Re}\lambda_j$, поэтому уравнение (57) может иметь решения только двух типов: $p'' = e''_j$, когда $\operatorname{Re}\lambda_j = \operatorname{Re}\lambda_i$, или p'' с $|p''| \ge 2$ и компонентами $p_j = 0$ для $j \in i_k + \cdots + i_s$. $\square$

Из леммы 3 вытекает теорема о структуре НФ в случае 1).

Теорема 7. *Если вектор собственных чисел λ относится к случаю 1), то НФ (19) имеет следующую структуру:*

$$\dot y_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + Y_i(y') \quad (i = 1, \dots, l), \tag{61$'$}$$

$$\dot y_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + \sum_{j \in i_k} Y_{ij}(y') y_j + \sum_{p''_{(\ell)}} Y_{ip''_{(\ell)}}(y') {y''_{(\ell)}}^{p''_{(\ell)}} \quad (i \in i_k), \tag{61$''$}$$

где $1 \le k \le s \le n$, а семейства i_k определены в (59), и в последнем слагаемом суммирование ведется по тем $p''_{(\ell)}$ из (60), которые удовлетворяют уравнению (57): $\sum_{j=l+1}^{\ell} p_j \mathrm{Re}\,\lambda_j = \mathrm{Re}\,\lambda_i$.

Замечания: 1. Система (61) — НФ, поэтому зависящие от y' ряды из ее правой части содержат только те слагаемые, которые вместе с соответствующими компонентами вектора y'' образуют резонансные члены в нелинейностях, т. е. в них векторы (p', p'') удовлетворяют уравнениям (57) и (58).

2. Система $(61')$ является самостоятельной НФ порядка l.

3. В НФ (19) $Y(y) \in \Phi_2$, т. е. разложение векторного ряда начинается не ниже, чем со второго порядка, поэтому в $(61')$ $Y'(y') \in \Phi_2$, в $(61'')$ ряды $Y_{ij}(y')$ могут начинаться с первого порядка, а ряды $Y_{ip''_{(\ell)}}(y')$ — с нулевого.

Пример 2. Посмотрим, какой вид имеет НФ, когда $l = 0$. В этом случае вектор y', а с ним вместе и подсистема $(61')$ отсутствуют, т. е. $y'' = y$, $p'' = p$. Кроме того, по замечанию 3 первой суммы в правой части $(61'')$ нет, а во-второй сумме коэффициенты $Y_{ip_{(\ell)}}$ — константы. Таким образом, в случае 1а) НФ (19) имеет вид

$$\dot y_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + \sum_{p_{(\ell)}} Y_{ip_{(\ell)}} y_1^{p_1} \cdots y_\ell^{p_\ell} \quad (i \in i_k), \tag{61$_{\mathrm{a}}$}$$

где суммирование ведется по тем векторам $p_{(\ell)}$, у которых

$$p_1\lambda_1 + \ldots + p_\ell\lambda_\ell = \lambda_i, \quad p_1 + \ldots + p_\ell \ge 2, \quad p_{\ell+1}, \dots, p_n = 0 \tag{62}$$

при $l = 0$, $1 \le k \le s \le n$, i_k из (59) и $p_{(\ell)}$ из (60).

Очевидно, что резонансные уравнения (62) имеют лишь конечное число решений в целых неотрицательных числах, так как $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Следовательно, НФ (61_{a}) — полиномиальная. $\square$

При исследовании вопросов сходимости нормализующих замен будет использоваться еще одно разбиение случая 1) расположения собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на комплексной плоскости:

1^*) $\exists\, \upsilon \neq 0:\ \upsilon\lambda_1, \ldots, \upsilon\lambda_l$ — рациональные вещественные числа;

1_*) $\forall\, \upsilon \neq 0$, если все числа $\upsilon\lambda_1, \ldots, \upsilon\lambda_l$ вещественные, то среди них есть как иррациональные, так и рациональные.

Замечания: 4. Если проходящая через нуль прямая L совпадает с мнимой осью, то число υ — чисто-мнимое.

5. Случай 1_*) может возникнуть только в подслучаях 1в) и 1г).

6. В случае 1^*) существует $\min\{|\delta_{ip}|\}$, взятый по всем $i = \overline{1,n}$ и целочисленным векторам p с неотрицательными компонентами, при которых $\delta_{ip} \neq 0$. А в случае 1_*) найдется индекс i_0 и возрастающая по модулю последовательность векторов p_k, при которых $|\delta_{i_0 p_k}|$ с той или иной скоростью стремится к нулю.

§ 8. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

1^0. Во введении отмечалось, что исходную систему при определенных обстоятельствах бывает достаточно упростить лишь частично, сведя ее к некой промежуточной нормальной форме.

Как правило, переменные при этом бывает удобно разделять на части, как это было сделано для случая 1) в предыдущем параграфе.

Для произвольного вектора $z = (z_1, \ldots, z_n)$ и любого векторного ряда $f(z)$ положим $z = (z', z'')$, $z' = (z_1, \ldots, z_m)$ $\quad (0 < m < n)$, $f(z) = \widehat{f}(z') + \breve{f}(z)$, где $\breve{f}(z', 0) \equiv 0$.

Исходная система (8) в новых обозначениях примет вид

$$\dot{x}' = J'x' + \widehat{X}'(x') + \breve{X}'(x), \quad \dot{x}'' = J''x'' + \widehat{X}''(x') + \breve{X}''(x), \tag{63}$$

где J', J'' — жордановы матрицы размерности m и $n - m$.

Пусть замена

$$x' = y' + h'(y), \quad x'' = y'' + h''(y) \tag{64}$$

преобразует систему (63) в систему

$$\dot{y}' = J'y' + \widehat{Y}'(y') + \breve{Y}'(y), \quad \dot{y}'' = J''y'' + \widehat{Y}''(y') + \breve{Y}''(y). \tag{65}$$

Рассмотрим различные промежуточные нормальные формы.

$\mathbf{2^0}$. *Нормальная форма на инвариантной поверхности.*

Определение 7. Система (65) называется нормальной формой на инвариантной поверхности (НФИП) или на интегральном многообразии, если ряд $\widehat{Y}'(y')$ содержит только резонансные члены, а $\widehat{Y}''(y') \equiv 0$. Преобразование (64) системы (63) к НФИП (65) называется стандартным, если в нем $\widehat{h}'^0(y') \equiv 0$ и $\check{h}(y) \equiv 0$.

Таким образом, в НФИП (65) $\widehat{Y}'(y') = \widehat{Y}'^0(y')$ и $Y''(y) = \check{Y}''(y)$.

Если в НФИП (65) положить $y'' = 0$, то $\check{Y}'(y', 0) = \check{Y}''(y', 0) = 0$ и остается система

$$\dot{y}' = J'y' + \widehat{Y}'^0(y'), \tag{66}$$

по определению сама являющаяся нормальной формой.

Поэтому в НФИП (65) гиперплоскость $y'' = 0$ образует инвариантную поверхность, заполненную траекториями НФ (66), если система (66) — сходящаяся, а система (63), формально или аналитически эквивалентная НФИП (65), имеет формальное или аналитическое интегральное многообразие $x' = y' + \widehat{h}'(y')$, $x'' = \widehat{h}''(y')$.

Для того чтобы у системы (63) интегральное многообразие существовало и было единственно, на собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ приходится накладывать следующее ограничение:

$$(p', \lambda') - \lambda_j \neq 0 \qquad (j = m+1, \ldots, n) \tag{67}$$

при всех p' с целыми неотрицательными компонентами и $|p'| \geq 2$.

Теорема 8. *Пусть собственные числа системы (63) удовлетворяют условию (67), тогда существует единственное стандартное преобразование, переводящее (63) в НФИП.*

Условие (67) позволяет во втором уравнении системы (63) аннулировать члены, зависящие только от x', поскольку они не могут быть резонансными. Следует особо отметить, что как само определение 7, так и условие (67) не гарантируют отсутствия резонансных членов у ряда $\check{Y}'$ в НФИП (65).

Пусть, как и раньше, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ изображены точками на комплексной плоскости, а M — прямая, проходящая через нуль. Приведем два важных случая, когда (67) автоматически выполняется:

1. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ лежат по одну сторону от M, а $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ лежат по другую сторону от M и на прямой;

2. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ лежат на прямой M и по одну сторону от нее, а $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ — по другую сторону.

Стандартное преобразование (64) системы (63) к НФИП (65) всегда можно записать в виде суперпозиции двух преобразований:

$$x'' = y'' + \widehat{H}''(x'), \qquad (68'')$$

$$x' = y' + \widehat{h}'(y') \qquad (\widehat{h}'^0 \equiv 0), \qquad (68')$$

так что в (64) $h''(y) = \widehat{h}''(y') = \widehat{H}''(y' + \widehat{h}'(y'))$.

Преобразование $(68'')$ выпрямляет инвариантную поверхность $x'' = \widehat{H}''(x')$ системы (63), где $\widehat{H}''$ определяется из уравнения

$$\frac{d\,\widehat{H}''(x')}{d\,x'}J'x' - J''\widehat{H}''(x') = X''(x', \widehat{H}''(x')) - \frac{d\,\widehat{H}''(x')}{d\,x'}X'(x', \widehat{H}''(x')),$$

в гиперплоскость $y'' = 0$, индуцируя на ней систему

$$\dot{x}' = J'x' + \widehat{X}'(x') + \check{X}'(x', \widehat{H}''(x')).$$

А замена $(68')$ преобразует полученную подсистему в НФ (66) на инвариантной гиперплоскости $y'' = 0$, а всю систему — в НФИП.

Понятие нормальная формы на инвариантной поверхности было введено Ю. Н. Бибиковым [19, § 3]. НФИП наиболее распространена среди промежуточных нормальных форм. Не касаясь, как и раньше, вопросов сходимости нормализующих замен, заметим, что существование аналитических семейств частных решений и их свойства исследовались еще в классических работах А. М. Ляпунова [1, 20], И. Горна [21], Г. Дюлака [5], а затем И. Г. Малкина [22], Ю. Мозера [23], К. Л. Зигеля [10], В. А. Плисса [24, 25]. В общем виде вопрос о приводимости к НФИП и аналитической эквивалентности системы НФИП исследовал А. Д. Брюно [2, § 10] и уточнил В. В. Басов [26].

3^0. *Псевдонормальная форма.*

Определение 8. Система (65) называется псевдонормальной формой (ПсНФ), если ряд $Y'(y)$ содержит только резонансные члены, т. е. $Y'(y) = Y'^0(y)$. Преобразование (64) системы (63) к ПсНФ (65) называется стандартным, если в нем $\widehat{h}'^0(y) \equiv 0$ и $h''(y) \equiv 0$.

Таким образом, ПсНФ получается, если в исходной системе к нормальной форме приводится только часть уравнений.

Теорема 9. *Существует единственное стандартное преобразование, переводящее (63) в ПсНФ.*

Понятие ПсНФ ввел М. Тврды. В работах [27, 28] он исследовал условия аналитической эквивалентности систем своим ПсНФ.

4⁰. *Квазинормальная форма.*

Определение 9. Система (65) называется квазинормальной формой (КНФ), если ряд Y' содержит только резонансные члены и не зависит от y'', а $\widehat{Y}''(y') \equiv 0$, т. е. $\widehat{Y}'(y') = \widehat{Y}'^0(y')$, $\breve{Y}'(y) \equiv 0$ и $Y''(y) = \breve{Y}''(y)$. Преобразование (64) системы (63) к КНФ (65) называется стандартным, если в нем $\widehat{h}'^0(y) \equiv 0$ и $\breve{h}(y) \equiv 0$.

Можно сказать, что КНФ — это объединение НФИП и ПсНФ. В ней выделена инвариантная гиперплоскость $y'' = 0$ и первые m уравнений приведены к нормальной форме, не содержащей y''.

Ради достижения последнего требования на собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ придется наложить дополнительное ограничение:

$$(p', \lambda') + (p'', \lambda'') - \lambda_j \neq 0, \quad \text{если} \quad p'' \neq 0 \qquad (j = 1, \dots, m), \tag{69}$$

при всех p с $|p| \geq 2$ и целыми неотрицательными компонентами.

Теорема 10. *Пусть собственные числа системы (63) удовлетворяют условиям (67), (69), тогда существует единственное стандартное преобразование, переводящее (63) в КНФ.*

Условие (69) гарантирует отсутствие в первом уравнении системы (63) резонансных членов, зависящих от x'', что позволяет их всегда при желании аннулировать.

Условия (67), (69) заведомо выполняются, если на собственные числа наложить ограничение (56): $\operatorname{Re}\lambda' = 0$, $\operatorname{Re}\lambda'' < 0$, которое означает для (63) наличие какого-либо из критических случаев.

Стандартное преобразование (64) системы (63) к КНФ (65) можно представить в виде суперпозиции трех преобразований: замены ($68''$), замены ($68'$), в которой y' удобно заменить на $\widetilde{y}'$, и замены

$$\widetilde{y}' = y' + \breve{H}'(y', y''), \tag{70}$$

так что в преобразовании (64) $\breve{h}'(y) = \breve{H}'(y) + \widehat{h}'(y' + \breve{H}'(y)) - \widehat{h}'(y')$, $h''(y) = \widehat{H}''(y' + \breve{H}'(y) + \widehat{h}'(y' + \breve{H}'(y)))$.

Замена (70) преобразует полученную после замен ($68''$) и ($68'$) НФИП, аннулируя в ее первом уравнении слагаемые, зависящие от y'' и не затрагивая НФ (66). Таким образом, если $y' = f'(t, c)$ — это общее решение аналитической системы (66), то замена (70) выпрямляет инвариантные поверхности

$$\widetilde{F}_c = \{(\widetilde{y}', y'') \,|\, \widetilde{y}' = f'(t, c) + \breve{H}'(f'(t, c), y'')\},$$

проходящие при $y''=0$ через траектории НФ (66), в цилиндрические поверхности $F_c = \{(y', y'') \,|\, y' = f'(t, c)\}$.

Понятие квазинормальной формы при условии (56) на собственные числа ввел и использовал Ю. Н. Бибиков [29; 19, § 10].

5^0. *Полунормальная форма.*

Пусть выполняется случай 1), введенный в § 6, и прямая L, ради простоты, совпадает с мнимой осью, тогда для системы (63) выполняется условие (56) с $l = m$ и ее НФ имеет структуру (61).

Определение 10. Система (65) при условии (56) называется полунормальной формой (ПНФ), если ряд Y' содержит только резонансные члены, а ряд Y'' — только члены $Y_j^{(p)} y^p$, у которых $(p'', \operatorname{Re}\lambda'') - \operatorname{Re}\lambda_j = 0$ при $j = m+1, \ldots, n$, т. е. $\widehat{Y}'(y') = \widehat{Y}'^0(y')$, $\breve{Y}'(y) \equiv 0$, $\widehat{Y}''(y') \equiv 0$ и $\breve{Y}_j(y) = \sum_{p\colon \operatorname{Re}\delta_{jp}=0} Y_j^{(p)} y^p$. Преобразование (64) системы (63) к ПНФ (65) называется стандартным, если в нем $\widehat{h}'^0(y') \equiv 0$ и равны нулю все коэффициенты $h_j^{(p)}$, у которых $(p'', \operatorname{Re}\lambda'') - \operatorname{Re}\lambda_j = 0$, при $j = m+1, \ldots, n$.

ПНФ является частным случае КНФ, так как в ее втором уравнении помимо $\widehat{Y}''$ аннулируется часть членов из $\breve{Y}''$.

Теорема 11. *Пусть собственные числа системы (63) удовлетворяют условию (56), тогда существует единственное стандартное преобразование, переводящее (63) в ПНФ.*

Полунормальную форму ввел А. Д. Брюно. В работе [2, § 9] он доказал, что в случае 1_*), описанном в предыдущем параграфе, для сходимости преобразования к ПНФ требуются менее жесткие условия, чем для сходимости нормализующего преобразования, хотя ПНФ и НФ наиболее близки друг к другу.

6^0. Отметим, что доказательства теорем 8–11 о существовании формальных преобразований исходной системы (63) к различным промежуточным нормальным формам однотипны и основаны на использовании уравнения (21) с учетом соответствующих ограничений (56), (67) или (69) на собственные числа матрицы линейной части системы (63).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.; Л., 1956. С. 7–264.

2. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. Т. 25. С. 119–262; 1972. Т. 26. С. 199–238.

3. *Брюно А. Д.* Нормальная форма вещественных дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 1975. Т. 18. N^0 2. С. 227–241.

4. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л., 1947.

5. *Dulac H.* Solutions d'un systeme d'equations differentielles dans le voisinage des valeurs singulieres // Bull. Soc. Math. de France. 1912. V. 40. P. 324–383.

6. *Cherry T.* On the solution of Hamiltonian systems of differential equations in the neighborhood of a singular point // Proc. Lond. Math. Soc. 1927. Ser. 1. Vol. 27. N^0 2, 3. P. 151–170.

7. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.; Л., 1941.

8. *Брюно А. Д.* Нормальная форма дифференциальных уравнений // ДАН. 1964. Т. 157. N^0 6. С. 1276–1279.

9. *Зигель К. Л.* О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия // Математика. 1961. Т. 5. N^0 2. С. 119–128.

10. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. М., 1959.

11. *Плисс В. А.* О приведении аналитической системы дифференциальных уравнений к линейной форме // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. N^0 2. С. 153–161.

12. *Басов В. В.* Сходимость нормализующего преобразования в критическом случае двух нулевых корней характеристического уравнения // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. N^0 8. С. 1011–1016.

13. *Зигель К. Л.* О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия // Математика. 1961. Т. 5. N^0 2. С. 129–155.

14. *Horn J.* Über das Verhalten der Integrale einer linearen Diffenzialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle // J. Reine Angew. Math. Bd. 120. S. 1–26; Bd. 122. S. 73–83.

15. *Басов В. В.* Расходимость нормализующих преобразований в случае вещественного негрубого фокуса // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. N^0 4. С. 563–573.

16. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1965.

17. *Брюно А. Д.* О локальных инвариантах дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 1973. Т. 14. N^0 4. С. 499–507.

18. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967.

19. *Bibikov Yu. N.* Local Theory of Nonlinear Analitic Ordinary Differential Equations. Vol. 702. Lect. Notes in Math. Berlin, 1979.

20. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л., 1963.

21. *Horn J.* Ü ber die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichung in der Umgebung gewisser singularer Stellen // J. Reine Angew. Math. Bd. 116. S. 265–306; Bd. 117. S. 104–128.

22. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., 1966.

23. *Moser J.* On the generalisation of a theorem of A. Liapounoff // Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11. N^0 2. P. 257–271.

24. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР: Математика. 1964. Т. 28. N^0 6. С. 1297–1324.

25. *Плисс В. А.* О существовании семейства периодических движений системы дифференциальных уравнений в случае нулевых корней // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. N^0 1. С. 17–24.

26. *Басов В. В.* Сходимость преобразований систем дифференциальных уравнений к нормальной форме на инвариантной поверхности // Деп. в ВИНИТИ N^0 984-78 ДЕП от 21.03.78. 13 с.

27. *Tvrdý M.* The normal form and the stability of solutions of a system of differential equations in the complex domain // Czechoslov. Math. J. 1970. Vol. 20. N^0 95. P. 39–73.

28. *Tvrdý M.* Correction to "The normal form and the stability of solutions ..."// Czechoslov. Math. J. 1971. Vol. 21.

29. *Бибиков Ю. Н.* Об устойчивости периодических движений в трансцендентных критических случаях // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. N^0 11. С. 1927–1945.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Владимир Владимирович Басов

Метод нормальных форм в локальной качественной теории дифференциальных уравнений

Формальная теория нормальных форм

Учебное пособие

Зав. редакцией *Г. Чередниченко*

Редактор *Ф. Бастиан*

Техн. редактор *Л. Иванова*

Компьютерная верстка *В. Басова*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать с оригинала-макета 15.11.2001.

Ф-т $60 \times 84/16$. Усл. печ. л. 2,63.

Уч.-изд. л. 2,25. Тираж 300 экз. Заказ N 638.

РОПИ Издательства С.-Петербургского университета.

199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

ЦОП типографии Издательства СПбГУ.

199034, С.-Петербург, наб. Макарова, 6.