ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2018
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.925

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ДВУМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ОБЩИМ МНОЖИТЕЛЕМ

В. В. Басов, А. С. Чермных

© Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28
vlvlbasov@rambler.ru, achermnykh@yandex.ru

Аннотация

Рассматриваются вещественные двумерные однородные кубические системы ОДУ, многочлены в правой части которых имеют линейный общий множитель. На основании должным образом введенных принципов упорядочивания множество таких систем разбивается на классы линейной эквивалентности, в каждом из которых выделяется структурно простейшая система – нормальная форма третьего порядка. Для матрицы коэффициентов ее правой части, называемой канонической формой (КФ), указывается каноническое множество значений, гарантирующее принадлежность системы к выбранному классу.

Кроме того, для каждой КФ приводятся: a) условия на коэффициенты исходной системы, b) линейные замены, сводящие правую часть системы при имеющихся условиях в выбранную КФ, c) получаемые при этом значения коэффициентов КФ.

В имеющихся Приложениях представлены написанные с использованием пакета Maple программы, позволившие получить большинство практических результатов.

Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

Abstract

Real two-dimensional homogeneous cubic systems of ODE, polynomials in the right-hand part of which have a common linear factor are considered. On the basis of properly introduced ordering principles, the set of these systems is divided into classes of linear equivalence, in each of which the structurally simplest system is distinguished – the normal form of the third order. For the coefficient matrix of its right-hand side, called the canonical form (CF), the canonical set of values is specified, which guarantees the system affiliation to the selected class. In addition, for each CF a) conditions on the coefficients of the original system, b) linear substitutions that reduce the right-hand part of the system under these conditions to the chosen CF, c) obtained values of CF coefficients are given.

In existing applications programs written using the Maple software are presented, which allowed us to obtain the majority of practical results. Refs 4.

Keywords: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

Содержание

1. Введение

1.1. Постановка задачи.

Рассмотрим вещественную двумерную однородную кубическую систему ОДУ

$$\dot{x} = P(x), \tag{1.1}$$

в которой $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \end{pmatrix}$, $P_1, P_2 \not\equiv 0$.

Пусть вещественная линейная неособая замена

$$x = Ly \quad (\det L \neq 0) \tag{1.2}$$

преобразует (1.1) в систему

$$\dot{y} = \widetilde{P}(y), \tag{1.3}$$

в которой $\widetilde{P}_i = \tilde{a}_iy_1^3 + \tilde{b}_iy_1^2y_2 + \tilde{c}_iy_1y_2^2 + \tilde{d}_iy_2^3 \ \ (i = 1, 2)$.

В работе [1] была поставлена задача определения и конструктивного построения кубических нормальных форм вида (1.3), которые можно получить из системы (1.1) посредством замен (1.2). Для этого потребовалось осуществить классификацию множества систем (1.1) путем разбиения векторных многочленов $P(x)$ на классы линейной эквивалентности. Основные линейные инварианты были получены [1, p. 2].

В [1, pp. 1.2-1.4] всесторонне изучены проблемы, возникающие при нормализации возмущенных систем с многочленами P в невозмущенной части, и выяснены условия, при которых они минимизируются. На основании проведенных исследований для каждого класса эквивалентности в [2, p. 1] были разработаны структурные и нормировочные принципы, позволяющие вполне упорядочить многочлены $\widetilde{P}$, получаемые в результате замены (1.2), и, тем самым, теоретически выделить в каждом классе образующую – самый простой векторный многочлен $\widetilde{P}$, называемый канонической формой (КФ).

Оказалось, что любую КФ можно отождествить с матрицей коэффициентов многочлена $\widetilde{P}$, расположение нулевых элементов в которой фиксировано, а для ненулевых должны быть указаны канонические множества, описывающие их допустимые значения.

Систему с КФ в правой части естественно называть кубической нормальной формой.

Наряду с задачей практического нахождения всех КФ в [1, 1.1] были поставлены также четыре дополняющие ее технические вычислительные задачи, позволяющие эффективно использовать разработанную классификацию на практике. Они заключаются в том, чтобы для каждой КФ в явном виде выписать:

a) условия на коэффициенты векторного многочлена $P(x)$;

b) замену (1.2), преобразующую $P(x)$ при указанных условиях в выбранную КФ;

c) получаемые при этом значения элементов КФ из канонического множества;

d) минимальное каноническое множество, в котором отсутствуют те значения элементов, от которых можно избавиться заменой (1.2), сохраняющей структуру КФ.

В [2, p. 2] все поставленные задачи решены в случае, когда многочлены P_1 и P_2 пропорциональны, т. е. имеют общий множитель третьей степени.

В работах [3] и [4] задачи эти решены, когда многочлены P_1 и P_2 имеют общий множитель второй степени.

Цель предлагаемой работы заключается в получении аналогичных результатов для случая, когда P_1 и P_2 обладают линейным общим множителем.

Следует иметь в виду, что большое количество символьных вычислений, связанных со всевозможными линейными преобразованиями однородных кубических систем, их нормировкой и выделением общего множителя различных степеней, а также с решением различных алгебраических систем и уравнений, высоких степеней с параметрами невозможно без применения символьной математики. Для этих целей используется аналитический пакет Maple. Авторами был написан набор стандартных процедур, используя которые для доказательства практически каждого утверждения были созданы пакеты программ в Maple.

Формат электронного журнала дает возможность привести имеющиеся пакеты непосредственно в статье в Приложениях, что позволяет при желании контролировать доказательства и использовать написанные программы для решения задач по нормализации возмущенных систем с конкретной однородной кубической невозмущенной частью.

Кроме того, в работе [1, p. 1] можно найти более подробную постановку задачи, которая включает в себя:

1) вывод связующей системы для возмущенных систем, зависящей исключительно от коэффициентом многочлена P, и выделение тех групп коэффициентов P, обнуление которых облегчает решение связующей системы, а значит, позволяет осознанно сформулировать структурные и нормировочные принципы, положенные в основу классификации систем (1.1), и выделить в линейно эквивалентных классах систем простейшие: те, правые части которых образуют канонические формы;

2) описание метода резонансных уравнений, позволяющего для возмущенных систем с какой-либо КФ в невозмущенной части дать конструктивное определение обобщенной нормальной формы с очевидным доказательством ее существования и выписать в явном виде все возможные структуры обобщенных нормальных форм, разумеется только для тех КФ, для которых удается решить связующую систему или хотя бы выписать резонансные уравнения, гарантирующие ее совместность;

3) обсуждение проблем и имеющихся результатов в близких по постановке задачах, когда в системе (1.1) рассматриваются квазиоднородные векторные многочлены $P(x)$ с определенными весами переменных или когда степени многочленов P_1 и P_2 принимают всевозможные значения от единицы до трех.

Остановимся в заключение на структуре предлагаемой работы.

В последующих разделах введения приведены необходимые для дальнейшего определения и результаты, полученные в работах [1, p. 2] и [2, p. 1]. Разумеется их более подробное изложение с приведением большого числа поясняющих примеров следует смотреть в указанных работах.

Основным в настоящей работе является раздел 2, целиком посвященный случаю, когда многочлены P_1, P_2 системы (1.1) имеют вещественный общий множитель степени один.

В 2.1–2.4 предложена удобная форма записи системы при $l = 1$, множество систем разбивается на три линейно неэквивалентных класса, и приведен полный список канонических форм со своими допустимыми и каноническими множествами.

В 2.5–2.6 последовательно рассматривается каждый из трех классов. Доказываются соответствующие им леммы о сведении к каноническим формам.

В 2.7 собраны в единую теорему все полученные для случая $l = 1$ результаты.

В разделе 3 приведены все канонические формы систем, имеющих общий множитель.

Для облегчения чтения и понимания статьи в приложениях, составляющих раздел 4, приведены программы, написанные в Maple, которые подтверждают приведенные в разделе 2 формулы, требующие большого объема символьных вычислений. При этом, в 4.1 собраны стандартные процедуры, используемые в последующих программах, и приведены примеры, поясняющие их использование. А в разделе 2 в соответствующих местах имеются ссылки на сопутствующие программы.

1.2. Линейная эквивалентность однородных кубических систем.

Рассмотрим вещественную двумерную однородную кубическую систему

$$\dot{x} = P(x) \quad \text{или} \quad \dot{x} = A\, q^{[3]}(x), \tag{1.4}$$

в которой $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $x = \mathrm{colon}\,(x_1,\, x_2)$, $q^{[3]}(x) = \mathrm{colon}\,(x_1^3,\, x_1^2x_2,\, x_1x_2^2,\, x_2^3)$, причем строки $A_1, A_2 \neq 0$.

Соглашение 1.1. *В дальнейшем для краткости матрицу коэффициентов A будем отождествлять с системой* (1.4) *или говорить, что A порождает систему* (1.4).

Определение 1.1. *Любой однородный многочлен с вещественными коэффициентами, являющийся общим множителем P_1 и P_2, будем обозначать P_0. Общий множитель P_0 максимальной степени l ($l = 1, 2, 3$) будем обозначать P_0^l. При отсутствии общего множителя будем считать, что $l = 0$.*

Для векторов $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ введем функцию $\delta_{rs} = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} = r_1s_2 - r_2s_1$.

Установить наличие или отсутствие общего множителя у любых двух многочленов позволяет функция $R = R(P_1, P_2)$, называемая результантом:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \delta_{ad}^3 + \delta_{ac}^2\delta_{cd} + \delta_{ab}\delta_{bd}^2 - 2\delta_{ab}\delta_{ad}\delta_{cd} - \delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{ad}\delta_{bd}.$$

Утверждение 1.1. *Многочлены P_1, P_2 имеют вещественный общий множитель P_0 ненулевой степени тогда и только тогда, когда $R(P_1, P_2) = 0$.*

Для упрощения системы (1.4) будем использовать линейные неособые замены

$$\begin{cases} x_1 = r_1y_1 + s_1y_2 \\ x_2 = r_2y_1 + s_2y_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad x = Ly, \quad L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}, \quad \delta = \det L \neq 0. \tag{1.5}$$

Пусть замена (1.5) преобразует систему (1.4) в систему

$$\dot{y} = \widetilde{P}(y) \quad \text{или} \quad \dot{y} = \widetilde{A}\, q^{[3]}(y), \tag{1.6}$$

где $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_1 \\ \widetilde{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1y_1^3 + \tilde{b}_1y_1^2y_2 + \tilde{c}_1y_1y_2^2 + \tilde{d}_1y_2^3 \\ \tilde{a}_2y_1^3 + \tilde{b}_2y_1^2y_2 + \tilde{c}_2y_1y_2^2 + \tilde{d}_2y_2^3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix}$.

Для многочленов $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ по аналогии с R введем результант $\widetilde{R} = R(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)$.

В $[1, \text{p.}\,2.2]$ для системы (1.6) получены следующие формулы

$$\widetilde{P}(y) = L^{-1}P(Ly) = L^{-1}Aq^{[3]}(Ly), \qquad \widetilde{R} = \delta^6 R,$$
$$\widetilde{A} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} \delta_{P(r)s} & s_1\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}s} + s_2\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2}s} & r_1\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1}s} + r_2\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2}s} & \delta_{P(s)s} \\ -\delta_{P(r)r} & -s_1\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}r} - s_2\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2}r} & -r_1\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1}r} - r_2\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2}r} & -\delta_{P(s)r} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Среди замен (1.5), преобразующих (1.4) в (1.6), выделим две специальные замены:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \text{ – нормировка}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_1r_1^2 & b_1r_1s_2 & c_1s_2^2 & d_1s_2^3/r_1 \\ a_2r_1^3/s_2 & b_2r_1^2 & c_2r_1s_2 & d_2s_2^2 \end{pmatrix}; \tag{1.8}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ – перенумерация}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \\ d_1 & c_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Замечание 1.1. Нормировка (1.8) имеет следующие особенности:
1) назовем a_2, b_1, c_2, d_1 элементами нечетного зигзага, a_1, b_2, c_1, d_2 – четного, тогда у всех элементов нечетного зигзага можно одновременно изменить знак, а у любого элемента из четного зигзага знак изменить нельзя;
2) любое из отношений a_1/b_2, b_1/c_2, c_1/d_2 на диагоналях изменить нельзя.

Замечание 1.2. Если в системе, полученной после замены $L = (r, s)$, потребуется перенумерация, то лучше в исходной системе сразу сделать замену $L = (s, r)$.

В то же время перенумерация (1.9) позволяет договориться о следующем.

Соглашение 1.2. *В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что в системе* (1.4) *при* $l = 1, 2, 3$,

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0, \quad \textit{если} \;\; a_1^2 + a_2^2 + d_1^2 + d_2^2 \neq 0. \tag{1.10}$$

1.3. Структурные формы.

Базовым понятием развиваемой теории является понятие структурной формы.

Определение 1.2. *Вещественную матрицу* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ *с ненулевыми строками будем называть объединенной структурной* m*-формой* ($m = \overline{2,8}$) *и обозначать* USF^m *(united structural form), если какие-либо* m *ее элементов отличны от нуля, а остальные равны нулю. Конечное множество, объединяющее все* USF^m*, будем обозначать* $SUSF^m$ *(set of* USF^m*).*

Очевидно, что объединенные структурные m-формы отличаются одна от другой различным расположением мест для ненулевых элементов.

В дальнейшем для краткости любую USF^m можно будет записывать по строкам, указывая в каждой только ненулевые элементы, напр., $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = (a_1, c_1; d_2)$.

Рассмотрим всевозможные расстановки ненулевых элементов в $SUSF^m$ $(m = \overline{2,8})$.

Определение 1.3. *Индексом элемента* a_{ij} $(i = 1,2;\ j = 1,2,3,4)$ *матрицы* A *будем называть число, стоящее на месте* (i,j) *в матрице* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *В свою очередь, индексом* k *матрицы* A *будем называть сумму индексов ненулевых элементов* A *и при необходимости писать* $A_{[k]}$. *Аналогично вводятся индексы строк* A_1 *и* A_2.

В $[2, \text{p.}\, 1.1]$ должным образом введены структурные принципы (СП), позволяющие вполне упорядочить конечное множество $SUSF = \bigcup_{m=2}^{8} SUSF^m$ и, в том числе, все входящие в него пары USF^m, получаемые друг из друга при помощи перенумерации (1.9).

Определение 1.4. *Из двух различных объединенных структурных* m*-форм, получаемых друг из друга перенумерацией, форму, являющуюся согласно* СП *предшествующей, будем называть структурной* m*-формой, при желании добавляя основная, и обозначать* SF^m, *а другую – дополнительной и обозначать* SF^m_a *(additional* SF*).*

Очевидно, что имеется также определенное количество "симметричных" структурных m-форм, т. е. таких SF^m, которые не изменяются в ходе перенумерации (1.9).

Поскольку любая пара, состоящая из основной и дополнительной структурных форм линейно эквивалентна, то "худшая" с точки зрения СП дополнительная форма самостоятельного интереса не представляет, но использовать ее иногда будет удобно.

Соглашение 1.3. *Согласно введенной упорядоченности сопоставим любой основной структурной* m*-форме порядковый номер* i *и будем обозначать ее* SF^m_i, *а дополнительную к ней структурную форму –* $SF^m_{a,i}$.

В $[2, \text{p.}\, 1.1]$ приведен список 1.1, состоящий из 120 упорядоченных структурных форм, входящих в $SUSF$.

Определение 1.5. *Представителем произвольной* SF^m_i *будем называть любую числовую матрицу, расположение нулевых элементов в которой совпадает с расположением нулевых элементов в* SF^m_i.

В результате любую SF^m_i можно трактовать как совокупность всех ее представителей.

Важная характеристика SF^m_i связана с определением всех возможных значений максимальной степени общего множителя P^l_0 (см. опр. 1.1), который можно выносить в правой части порожденной этой структурной формой системы (1.4) при различных значениях ненулевых коэффициентов. Поэтому множество вещественных ненулевых значений элементов любой SF^m_i разобьем на непустые множества $s^{m,l}_i$ $(0 \le l \le 3)$ следующим образом: $s^{m,l}_i$ содержит те и только те значения элементов SF^m_i, при которых в правой части системы (1.4), порожденной этой формой, можно вынести общий множитель P^l_0.

Определение 1.6. *Для любой* SF^m_i, *задаваемой матрицей* A, *запись* $SF^{m,l}_i$ *означает ту же матрицу* A, *но значения ее ненулевых элементов принадлежат непустому множеству* $s^{m,l}_i$.

Иными словами, $SF^{m,l}_i$ объединяет тех и только тех представителей SF^m_i, чьи элементы принадлежат $s^{m,l}_i$, или, что то же самое, $SF^{m,l}_i$ порождает только такие системы, правые части которых имеют общий множитель максимальной степени l.

Из определения (1.6) и теоремы 2.3 $[1, \text{p.}\, 2.6]$ вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.2. SF^{m,l_1}_i *линейно не эквивалентна* SF^{m,l_2}_i *при* $l_1 \ne l_2$, *т. е. любые два представителя* SF^{m,l_1}_i *и* SF^{m,l_2}_i *линейно не эквивалентны.*

Если SF^m_i имеет только одно множество $s^{m,l_0}_i \ne \emptyset$, то, очевидно, $SF^{m,l_0}_i = SF^m_i$.

1.4. Нормированные структурные формы и допустимые множества.

Следующим шагом на пути к определению канонической формы станет введение понятия нормированной структурной формы, основанного на нормировке при помощи замены (1.8) всех представителей $SF_i^{m,l}$ с целью получения на двух, как правило (см. зам. 1.1), должным образом выбранных местах единичных по модулю элементов.

В [2, р. 1.2] приведены нормировочные принципы (НП) выбора нормируемых элементов матрицы A, позволяющие осуществить нормировку любой из 120 SF_i^m, т. е. однозначно выбрать в ней места для нормируемых элементов и значения, которые должны получить элементы на этих местах после нормировки. При этом нормирующая замена (1.8) определяется однозначно для всех SF, кроме $SF_3^{2,2}$ и $SF_4^{2,2}$, для которых элемент s_2 в замене произволен и может быть выбран, например, единицей (см. зам. 1.1).

Итак, представители любой $SF_i^{m,l}$ (числовые матрицы заданной структуры с элементами из $s_i^{m,l}$) разбиваются на классы эквивалентности относительно нормирующих замен (1.8), а в качестве образующих берутся нормированные представители.

Определение 1.7. *$SF_i^{m,l}$ будем называть нормированной структурной формой и обозначать $NSF_i^{m,l}$ (normalized SF), если она объединяет только своих нормированных в соответствии с НП представителей.*

Соглашение 1.4. *Любую нормированную структурную форму A будем записывать в виде σB, где вынесенный из матрицы A множитель σ равен знаку первого нормированного элемента. Оставшиеся ненормированными ненулевые элементы матрицы B, если таковые имеются, будем должным образом выражать через переменные, называемые в дальнейшем параметрами NSF и функции от них. Также при необходимости будем записывать NSF как функцию от своих параметров.*

Тем самым, параметры NSF, обозначаемые $u, v, w, \dots$, всегда предполагаются отличными от нуля. Например, $NSF_7^{5,1} = NSF_7^{5,1}(\sigma, u, v) = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, но при этом $v \neq u$, иначе $m \neq 5$.

Соглашение 1.4 позволяет в матрице B, используемой в дальнейшем для нормализации возмущенных систем, получить максимальное количество единиц, а множитель σ, если он окажется отрицательным, заменой времени можно сделать равным единице.

Так, $SF_2^{2,1} = (a_1; c_2)$ заменой (1.8) может быть сведена к $NSF_2^{2,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\sigma = \operatorname{sign} a_1$. Здесь нормируемые элементы расположены на разных зигзагах, и согласно замечанию 1.1 на знак элемента из четного зигзага повлиять невозможно, поэтому он выносится в виде множителя σ. А знак нормируемого элемента из нечетного зигзага всегда можно сделать равным σ, что и требуется в НП.

Определение 1.8. *Если все ненулевые элементы $SF_i^{m,l}$ расположены только на одном из зигзагов, из-за чего второй нормированный элемент в матрице B при его наличии может равняться как единице, так и минус единице (будем обозначать его κ), то получаемую NSF будем называть двойственной и обозначать $NSF_{i,\kappa}^{m,l}$.*

Отметим, что для $NSF_i^{m,l}$ по сравнению с $SF_i^{m,l}$ существенно облегчается практическое написание условий, фиксирующих максимальную степень l общего множителя.

Так, $NSF_7^5 = \sigma \begin{pmatrix} u & v & w & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть $NSF_7^{5,2}$ при $-v$, $w = u$; $NSF_7^{5,1}$ при $w = v - u$;

$NSF_7^{5,0}$, если не выполняются перечисленные выше ограничения на параметры.

Определение 1.9. *Значения параметров, при которых определена произвольная $NSF_i^{m,l}$, будем называть допустимыми. Объединение допустимых значений параметров для каждой из форм будем называть допустимым множеством и обозначать $ps_i^{m,l}$ (permissible set). Допустимое множество будем называть тривиальным и обозначать $tps_i^{m,l}$ (trivial ps), если входящие в него параметры ограничений не имеют.*

1.5. Канонические множества и канонические формы. Итак, рассмотрим произвольную $NSF_i^{m,l}$ матрицу, имеющую m ненулевых элементов с заданным расположением, фиксирующим i – ее порядковый номер в $SUSF^m$ согласно введенным СП. Наконец, l – это степень общего множителя P_0^l, который выносится из правой части системы, порожденной любым представителем $NSF_i^{m,l}$. Согласно утверждению 1.2 l инвариантна относительно линейных неособых замен.

Отметим, что получение нормированных структурных форм – это формальная работа, требующая только нормировки (1.8), т. е. замены, не затрагивающей структуры порождающей эти формы матрицы A.

Теперь же станем упрощать $NSF_i^{m,l}$, сводя их посредством подходящих линейных неособых замен (1.5) при определенных значениях параметров из $ps_i^{m,l}$ к предшествующим структурным формам, т. е. к $SF_j^{n,l}$ с $n < m$ или с $j < i$ при $n = m$.

В связи с этим следует иметь в виду следующие два соображения.

С одной стороны, практически каждая $NSF_i^{m,l}$ может сводиться к предшествующим $SF_j^{n,l}$, т. е. имеет "лишних" представителей, линейно эквивалентных каким-либо представителям предшествующих форм. Значения параметров, допускающие таких представителей, надо удалять из $ps_i^{m,l}$.

С другой стороны, те $NSF_i^{m,l}$, которые при всех допустимых значениях своих параметров линейно эквивалентны каким-либо предшествующим формам, самостоятельного интереса не представляют, поскольку не могут выступать в роли "простейших".

Определение 1.10. *Непустое множество, содержащее те и только те значения параметров из $ps_i^{m,l}$, при которых $NSF_i^{m,l}$ линейно не эквивалентна никакой предшествующей SF, будем называть каноническим и обозначать $cs_i^{m,l}$ (canonical set).*

Определение 1.11. *Любую $NSF_i^{m,l}$ будем называть канонической формой и обозначать $CF_i^{m,l}$ (canonical form), если ее параметры принадлежат $cs_i^{m,l}$.*

Таким образом, матрицы $CF_i^{m,l}$ и $NSF_i^{m,l}$ выглядят одинаково, но параметры $CF_i^{m,l}$ принадлежат $cs_i^{m,l}$ – это $ps_i^{m,l}$, из которого удалены те значения, параметров при которых представители $NSF_i^{m,l}$ заменами (1.5) сводятся к предшествующим SF.

Утверждение 1.3. *Любые две канонические формы линейно не эквивалентны.*

Это очевидное утверждение означает, что никакие два представителя различных CF или, что то же самое, никакие две системы (1.4), порожденные соответствующими числовыми матрицами, не могут быть связаны линейной неособой заменой.

В ряде случаев канонические множества параметров удается дополнительно ограничить при помощи линейных замен, преобразующих CF в себя.

Определение 1.12. *Каноническое множество любой $CF_i^{m,l}$ будем называть минимальным и обозначать $mcs_i^{m,l}$ (minimal cs), если найдена линейная неособая замена, преобразующая $CF_i^{m,l}$ в себя и позволяющая ограничить значения элементов $cs_i^{m,l}$, а именно,* *если это возможно, то хотя бы один из неединичных элементов получен ограниченным сверху и (или) снизу и (или) зафиксирован знак множителя σ.*

Таким образом, если $CF_i^{m,l}$ не содержит параметров или их невозможно ограничить, то автоматически $cs_i^{m,l} = mcs_i^{m,l}$, т. е. является минимальным.

Определение 1.13. *Множество, содержащее те значения параметров из $cs_i^{m,l}$, от которых удается избавиться при помощи линейных неособых замен, переводящих $CF_i^{m,l}$ в себя, будем называть дополнительным и обозначать $acs_i^{m,l}$ (additional cs).*

Тем самым, $mcs_i^{m,l} = cs_i^{m,l} \backslash acs_i^{m,l}$.

Соглашение 1.5. *В дальнейшем договоримся о следующем:*

1) Запись "$\ldots\ \zeta = [\,\varsigma_1 \vee \upsilon_1\,] \ldots \eta = [\,\varsigma_2 \vee \upsilon_2\,] \ldots$" означает, что или $\zeta = \varsigma_1,\ \eta = \varsigma_2$, или $\zeta = \upsilon_1,\ \eta = \upsilon_2$;

2) Запись "θ_* : некий многочлен от θ" означает, что θ_* — это какой-либо вещественный нуль указанного многочлена, если, конечно, он существует;

3) условие, заключенное в круглые скобки и записанное после другого условия, не является требованием, а приводится в качестве напоминания для лучшего восприятия последующих рассуждений;

4) в формулировках результатов отличие от нуля выражений, стоящих в знаменателе, не является предположением, а устанавливается в ходе доказательства.

2. Однородные кубические системы с линейным общим множителем

2.1. Запись и линейная эквивалентность систем при $\mathbf{l = 1}$.

У системы (1.4) $\dot{x} = P(x)$ при $l = 1$ $\ a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ согласно соглашению 1.2, иначе $P_0 = x_1 x_2$ и $l \geq 2$, поэтому она может быть записана в виде

$$\dot{x} = P_0^1(x)\, G\, q^{[2]}(x), \tag{2.1}$$

где общий множитель $P_0^1 = x_1 + \beta x_2$ ($\beta \in \mathbb{R}^1$), матрица $G = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & t_2 \end{pmatrix}$, $q^{[2]} = \operatorname{colon}(x_1^2,\, x_1x_2,\, x_2^2)$, при этом $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$, $t_1^2 + t_2^2 \neq 0$, иначе $l > 1$, а построенный по многочленам $p_i z^2 + q_i z + t_i$ $(i = 1, 2)$ результант $R_2 = \delta_{pt}^2 - \delta_{pq}\delta_{qt} \neq 0$.

Число β и элементы G системы (2.1) однозначно выражаются через элементы A из равенства $\begin{pmatrix} p_1 & q_1 + \beta p_1 & t_1 + \beta t_1 & \beta t_1 \\ p_2 & q_2 + \beta p_2 & t_2 + \beta q_2 & \beta t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ $\quad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$:

$$\beta = \theta_*, \quad p_i = a_i, \quad q_i = b_i - a_i\theta_*, \quad t_i = c_i - b_i\theta_* + a_i\theta_*^2\, (= d_i\theta_*^{-1}), \tag{2.2}$$

где $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ – общий нуль многочленов $P_i^{(1)}(\theta) = a_i\theta^3 - b_i\theta^2 + c_i\theta - d_i = 0$ $\ (i = 1, 2)$.

Вещественный общий нуль многочленов $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}$ существует и единственен, так как он имеется у P_1, P_2, а любой нуль P_i, взятый с обратным знаком, будет нулем $P_i^{(1)}$.

Теорема 2.1. *При $l = 1$ замена (1.5) $x = Ly$ преобразует систему (1.4) вида (2.1) с $P_0^1 = \alpha x_1 + \beta x_2$ в систему (1.6) $\dot{y} = \widetilde{P}(y)$ вида*

$$\dot{y} = \widetilde{P}_0^1(y)\, \tilde{G} q^{[2]}(y), \tag{2.3}$$

где общий множитель $\widetilde{P}^1_0(y) = \tilde{\alpha} y_1 + \tilde{\beta} y_2$, *матрица* $\widetilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 & \tilde{t}_1 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 & \tilde{t}_2 \end{pmatrix}$ *и результант* $\widetilde{R}_2 = \delta^2_{\tilde{p}\tilde{t}} - \delta_{\tilde{p}\tilde{q}}\delta_{\tilde{q}\tilde{t}}$ *вычисляются по следующим формулам:*

$$(\tilde{\alpha},\, \tilde{\beta}) = (\alpha,\, \beta)L \neq 0, \quad \widetilde{G} = L^{-1}GM, \quad M = \begin{pmatrix} r_1^2 & 2r_1s_1 & s_1^2 \\ r_1r_2 & \delta_* & s_1s_2 \\ r_2^2 & 2r_2s_2 & s_2^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{r} \delta_* = r_1s_2 + r_2s_1, \\ \det M = \delta^3; \end{array}$$

$$\widetilde{R}_2 = \delta^2 R_2 \neq 0 \quad \text{\textit{или}} \quad \tilde{\alpha} = \alpha r_1 + \beta r_2, \quad \tilde{\beta} = \alpha s_1 + \beta s_2, \tag{2.4}$$

$$\delta\, \widetilde{G} = \begin{pmatrix} r_1^2\delta_{ps} + r_1r_2\delta_{qs} + r_2^2\delta_{ts} & 2r_1s_1\delta_{ps} + \delta_*\delta_{qs} + 2r_2s_2\delta_{ts} & s_1^2\delta_{ps} + s_1s_2\delta_{qs} + s_2^2\delta_{ts} \\ r_1^2\delta_{rp} + r_1r_2\delta_{rq} + r_2^2\delta_{rt} & 2r_1s_1\delta_{rp} + \delta_*\delta_{rq} + 2r_2s_2\delta_{rt} & s_1^2\delta_{rp} + s_1s_2\delta_{rq} + s_2^2\delta_{rt} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что справедлива формула

$$q^{[2]}(Ly) = Mq^{[2]}(y). \tag{2.5}$$

Так, $q^{[2]}(Ly) = \begin{pmatrix} (r_1y_1 + s_1y_2)^2 \\ (r_1y_1 + s_1y_2)(r_2y_1 + s_2y_2) \\ (r_2y_1 + s_2y_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^2 & 2r_1s_1 & s_1^2 \\ r_1r_2 & \delta_* & s_1s_2 \\ r_2^2 & 2r_2s_2 & s_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_1y_2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = Mq^{[2]}(y).$

Теперь формула (2.3) вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\widetilde{P}(y) \overset{(1.7)}{=} L^{-1}P(Ly) \overset{(2.1)}{=} L^{-1}((\alpha,\beta)\, Ly)\, Gq^{[2]}(Ly) \overset{(2.5)}{=} ((\alpha,\beta)L\, y)\, L^{-1}GMq^{[2]}(y) \overset{(2.4)}{=}$$
$$\overset{(2.4)}{=} (\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\, y\, \tilde{G}q^{[2]}(y). \qquad \square$$

2.2. Выделение канонических форм и их допустимых множеств. Выделим из списка 1.1 работы [2] структурные формы до $SF_8^{5,1}$ включительно, относящиеся к случаю $l = 1$ (имеется 41 такая форма), нормируем их согласно введенным в [2, p. 1.2] нормировочным принципам (НП) и выясним, какие из полученных нормированных структурных форм являются каноническими формами.

Утверждение 2.1. *Только* $NSF_6^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_{a,15}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & v & u & 0 \end{pmatrix}$, $NSF_{a,20}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} v & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}$ $(uv \neq 1)$, $NSF_{22}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $NSF_{37}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & u & u \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $NSF_1^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_2^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & 0 & u-v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_5^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & v & u+v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *при всех допустимых значениях параметров линейными заменами* (1.5) *сводятся к каким-либо предшествующим согласно СП из* [2, p. 1.1] *структурным формам.*

Доказательство. 1) $NSF_6^{4,1}$ заменой с $s_1 = -s_2$, $r_2 = 0$ сводится к $SF_5^{4,1}$;
2) $NSF_{a,15}^{4,1}$ заменой с $r_1 = -2uv^{-1}r_2$, $s_1 = 0$ сводится к $SF_{a,8}^{3,1}$;
3) $NSF_{a,20}^{4,1}$ $(v \neq u^{-1})$ заменой с $s_1 = 0$, $r_2 = ur_1$ сводится к $SF_{19}^{4,1}$;
4) $NSF_{22}^{4,1}$ заменой с $s_1 = -s_2$, $r_2 = r_1$ сводится к $SF_{a,20}^{4,1}$;
5) $NSF_{37}^{4,1}$ заменой с $s_1 = -s_2$, $r_2 = r_1$ при $u = 1$ сводится к $SF_{9,\kappa}^{3,1}$, при $u = -1$ сводится к $SF_{a,14,\kappa}^{3,1}$, а при $u \neq \pm 1$ заменой с $s_1 = -s_2$, $r_1 = ur_2$ сводится к $SF_{a,27}^{4,1}$;
6) $NSF_1^{5,1}$, $NSF_2^{5,1}$, $NSF_5^{5,1}$ заменой с $s_1 = -s_2$, $r_2 = 0$ сводятся к $SF_5^{4,1}$.

Непосредственной проверкой установлено, что остальные тридцать три $NSF^{m,1}$ являются каноническими формами (см. определения 1.7, 1.11). $\square$

Замечание 2.1. Здесь и в дальнейшем запись "сводится к какой-либо $SF^{m,1}$" означает, что получена указанная форма или форма, ей предшествующая, в которой какие-то элементы $SF^{m,1}$ оказались равными нулю.

Выпишем имеющиеся $CF^{m,1}$, их допустимые множества ps и канонические множества cs из определений 1.9, 1.10 (записи tps, tcs означают отсутствие ограничений на параметры, входящие в форму). Вид канонических форм будет обоснован позднее в утверждениях 2.3, 2.4. Укажем также разложение каждой формы на строку $(1,\beta)$ и матрицу G, как это сделано в системе (2.1) $\dot{x} = (\alpha,\beta)\,x\,G\,q^{[2]}(x)$, и результант $R_2 \neq 0$ матрицы G.

Список 2.1. Все $CF_i^{m,1}$ до $CF_8^{5,1}$ включительно с указанием коэффициента β, матрицы G, результанта R_2, $ps_i^{m,1}$ и $cs_i^{m,1}$ $(\sigma,\kappa = \pm 1,\ u,v,w \neq 0,\ \alpha = 1,\ R_2 \neq 0)$.

I) 24 формы с $\beta = 0$ $(d_1, d_2 = 0,\ G$ – три первых столбца соответствующей $CF_i^{m,1})$:

1) $CF_2^{2,1} = \sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2 = 1$, $tps_2^{2,1}$; $\quad CF_{a,5}^{3,1} = \sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&u&1&0\end{pmatrix}$, $R_2 = 1$, $tps_{a,5}^{3,1}$;

$CF_{a,8}^{3,1} = \sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2 = u^2$, $tps_{a,8}^{3,1}$; $\quad$ 2) $CF_3^{3,1} = \sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2 = 1$, $tps_3^{3,1}$;

$CF_{a,14,\kappa}^{3,1} = \sigma\begin{pmatrix}0&1&0&0\\\kappa&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2 = \kappa u$, $tps_{14,\kappa}^{3,1}$; $\quad CF_7^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}u&v&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$, $R_2 = u(u-v)$, $ps_7^{4,1} = \{v \neq u\}$;

$CF_{a,12}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}1&1&0&0\\v&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2 = u(u+v)$, $ps_{12}^{4,1} = \{v \neq -u\}$; $\quad CF_{a,24}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}0&1&0&0\\v&1&u&0\end{pmatrix}$, $R_2 = uv$, $tps_{24}^{4,1}$;

3) $CF_9^{2,1} = \sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2 = 1$, $tps_9^{2,1}$; $\quad CF_6^{3,1} = \sigma\begin{pmatrix}u&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2 = u^2$, $tps_6^{3,1}$;

$CF_{11,\kappa}^{3,1} = \sigma\begin{pmatrix}u&0&\kappa&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $R_2 = \kappa u$, $tps_{11,\kappa}^{3,1}$; $\quad CF_{17}^{3,1} = \sigma\begin{pmatrix}u&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2 = 1$, $tps_{17}^{3,1}$;

$CF_{a,19}^{3,1} = \sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2 = 1$, $tps_{a,19}^{3,1}$; $\quad CF_{21}^{3,1} = \sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2 = 1$, $tps_{21}^{3,1}$;

$CF_{a,22}^{3,1} = \sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&u&0&0\end{pmatrix}$, $R_2 = 1$, $tps_{a,22}^{3,1}$; $\quad CF_5^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2 = u^2$, $tps_5^{4,1}$;

$CF_{11}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}u&1&v&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $R_2 = uv$, $tps_{11}^{4,1}$; $\quad CF_{a,14}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}v&0&1&0\\0&u&1&0\end{pmatrix}$, $R_2 = v(u^2+v)$, $ps_{14}^{4,1} = \{v \neq -u^2\}$;

$CF_{19}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2 = 1$, $tps_{19}^{4,1}$; $\quad CF_{a,27}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}v&0&1&0\\1&u&0&0\end{pmatrix}$, $R_2 = u^2v+1$, $ps_{27}^{4,1} = \{v \neq -u^2\}$;

$CF_{a,29}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\v&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2 = v(u+v)$, $ps_{29}^{4,1} = \{v \neq -u\}$; $\quad CF_{a,30}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&v&u&0\end{pmatrix}$, $R_2 = 1$, $tps_{30}^{4,1}$;

$CF_{a,33}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\v&u&0&0\end{pmatrix}$, $R_2 = v(v-u)$, $ps_{33}^{4,1} = \{v \neq u\}$; $\quad CF_8^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix}u&v&w&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$, $R_2 = u(u-v+w)$, $ps_8^{5,1} = \{w \neq v-u\}$;

II) 9 форм с $\beta = 1$ и своими G $(R_2 = u^2$ и $ps = tps$ в первых шести формах):

$CF_1^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad CF_3^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma \begin{pmatrix} u & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$CF_{13}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \sigma \begin{pmatrix} u & -u & u \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $CF_{28}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & -u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

$CF_{32}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad CF_{36}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & u \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

$CF_3^{5,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma \begin{pmatrix} u & v-u & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = uv, \ ps_3^{5,1} = \{v \neq u\}$;

$CF_6^{5,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 0 & u-v \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma \begin{pmatrix} u & v-u & u-v \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = u^2, \ ps_6^{5,1} = \{v \neq u\}$;

$CF_7^{5,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma \begin{pmatrix} u & v-u & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = u^2 - uv + v^2, \ ps_7^{5,1} = \{v \neq u\}$;

1) $tcs_2^{2,1}$; $cs_5^{3,1} = \{u \neq 2\}$, $cs_8^{3,1} = \{u > 1/4\}$;

2) $tcs_3^{3,1}$, $cs_{14,\kappa}^{3,1} = \{(\kappa, u) \neq (1, 1/2)\}$; $cs_7^{4,1} = \{v \neq u, \, 2 - u^{-1}, 2u(u+1)^{-1}\}$, $cs_{12}^{4,1} = \{u \neq -v, \, 1/2; \ 4v(u-1) > 1\}$, $cs_{24}^{4,1} = \{u = 1/2, \ v < -1/2\}$;

3) $tcs_9^{2,1}$, $tcs_9^{2,1}$; $tcs_6^{3,1}$, $tcs_{11,\kappa}^{3,1}$, $tcs_{17}^{3,1}$, $tcs_{19}^{3,1}$, $cs_{21}^{3,1} = \{u \neq 2\}$, $tcs_{22}^{3,1}$; $cs_1^{4,1} = \{u \neq \pm 1\}$,
$cs_3^{4,1} = \{u \neq -1/2, -2\}$; $cs_5^{4,1} = \{u \neq v(v-2)/4; \, (u,v) \neq (1,-2), (-1/9, 1)\}$; $cs_{11}^{4,1} =$
$\{v \neq u(2u-1)^{-2}\}$, $cs_{13}^{4,1} = \{u \neq -1/3, \, 2/3\}$, $cs_{14}^{4,1} = \{v \neq u, -u^2; \, v \neq u/2$ при $u > -1/2\}$,
$cs_{27}^{4,1} = \{v \neq -u^{-2}, \, (u^{3/2} \pm 2^{3/2})u^{-1/2}/2; \, (u,v) \neq 4^{-2/3} \cdot (3,1)\}$,
$cs_{19}^{4,1} = \{u \neq v^2/4, \, (v^3 - 8)(4v)^{-1}\}$, $cs_{28}^{4,1} = \{u \neq -3, \, -3/4, \, 3/2, \, 6, \, \vartheta_1\}$,
$cs_{29}^{4,1} = \{u \neq -1/2; \ v \neq -u, \, u^2, \, (1-2u)/8, \, (1-2u)^2/8; \ (u,v) \neq (\vartheta_3, \vartheta_4)\}$,
$cs_{30}^{4,1} = \{u \neq -v^{-1}, \, (v^3-8)(4v)^{-1}; \ (u,v) \neq (2,3), (3,-3)\}$, $cs_{32}^{4,1} = \{u \neq -3, -3/4, \, 3/8, \, 6\}$,
$cs_{33}^{4,1} = \{u \neq 1; \ v \neq u, \, (4u+1)/2, \, (6u + 1 \pm (2u+1)(8u+1)^{1/2})/16\}$,
$cs_{36}^{4,1} = \{u \neq -2, \, -1/8, \, 1 \pm 3\sqrt{2}/4, \, 1/4, \, 4\}$; $cs_3^{5,1} = \{v \neq u, \ 2.4_1\}$,
$cs_6^{5,1} = \{v \neq u, \ 2.4_2\}$, $cs_7^{5,1} = \{v \neq u, \ 2.4_3\}$, $cs_8^{5,1} = \{w \neq v - u, \ 2.4_4\}$.

Здесь запись $\{\ldots, \ 2.4_i\}$ означает, что значения параметров не удовлетворяют условиям из пункта i) ниже следующего утверждения 2.4.

Поскольку в список 2.1 входят $CF^{m,1}$ только с $\beta = 0$ или с $\beta = \alpha$, выясним при каких условиях формы с такими β могут быть преобразованы друг в друга.

Утверждение 2.2. *Пусть система* (2.1) *с* $P_0^1 = \alpha x_1 + \beta x_2$ *линейной неособой заменой сводится к системе* (2.3) $\dot{y} = \widetilde{P}_0^1(y)\, \tilde{G}q^{[2]}(y)$, *с* $\widetilde{P}_0^1 = \tilde{\alpha} x_1 + \tilde{\beta} x_2$, *тогда*
1) *при* $\alpha = 1 : \tilde{\beta} = 0 \Leftrightarrow s_1 = -\beta s_2$, $\quad$ 2) *при* $\beta = 0 : \tilde{\beta} = 0 \Leftrightarrow s_1 = 0$,
3) *при* $\beta = 0 : \tilde{\alpha} = \tilde{\beta} \Leftrightarrow r_1 = s_1 \neq 0$, $\ $ 4) *при* $\alpha = \beta : \tilde{\beta} = 0 \Leftrightarrow s_2 = -s_1 \neq 0$.

Доказательство. По теореме 2.1 $\tilde{\alpha} = \alpha r_1 + \beta r_2$, $\tilde{\beta} = \alpha s_1 + \beta s_2$. □

Набор 2.1. Числовые константы, используемые в дальнейшем:
$\vartheta_1 = \rho + 20\rho^{-1} + 5$, $\vartheta_2 = ((\sqrt{29} + 27)\rho^2 - (10\sqrt{29} - 130)\rho + 1000)/600$, $\rho = (4\sqrt{29} + 92)^{1/3}$;
$\vartheta_3 = ((3\sqrt{29} - 17)\rho^2 + (4\sqrt{29} - 24)\rho - 16)/24$, $\vartheta_4 = ((72 - 13\sqrt{29})\rho^2 - (9\sqrt{29} - 59)\rho + 72)/36$,
$\vartheta_5 = (\rho + 4\rho^{-1})/6$, $\vartheta_6 = 2(2\rho^2 + 9\rho + 8)/(\rho^2 - 18\rho + 4)$, $\rho = (20\sqrt{29} + 108)^{1/3}$;
$\vartheta_7 = (8\rho^2 + (3\sqrt{57} - 1)\rho + 68)/12$, $\vartheta_8 = ((\sqrt{57} + 85)\rho^2 + 32(\sqrt{57} - 1)\rho + 640)/96$,
$\vartheta_9 = (8\rho^{-1} - \rho - 1)/3$, $\vartheta_{10} = ((11 - \sqrt{57})\rho^2 + 4(\sqrt{57} + 5)\rho + 32)/96$, $\rho = (3\sqrt{57} + 1)^{1/3}$;
$\vartheta_{11} = ((\sqrt{17} - 9)\rho^2 - 4(\sqrt{17} + 1)\rho - 40)/8$, $\vartheta_{12} = -\rho + 4\rho^{-1}$, $\rho = (2\sqrt{17} + 2)^{1/3}$;
$\vartheta_{13} = (\rho^2 - (\sqrt{77} - 9)\rho - 16)/4$, $\vartheta_{14} = -3((\sqrt{77} - 9)\rho^2 - 4\rho + 24)/8$,
$\vartheta_{15} = \rho/6 + 2(3\rho)^{-1}$, $\vartheta_{16} = ((3\sqrt{77} - 25)\rho^2 - (2\sqrt{77} - 6)\rho - 8)/24$, $\rho = (4\sqrt{77} + 36)^{1/3}$.

2.3. Выделение канонических и минимальных множеств для $\mathbf{CF^{m,1}}$.

Утверждение 2.3. *Только следующие формы с $m \le 4$ из списка 2.1 при указанных значениях параметров сводятся к предшествующим структурным формам:*

1) $NSF_5^{3,1}$ *при* $u = 2$ *заменой с* $r_1 = -r_2,\ s_2 = 0$ *сводится к* $SF_2^{2,1}$;

2) $NSF_8^{3,1}$ *при* $u \le 1/4$ *заменой с* $s_2 = (1 + (1 - 4u)^{1/2})s_1/2,\ r_2 = 0$ *сводится к* $SF_5^{3,1}$;

3) $NSF_{14,\kappa}^{3,1}$ *при* $\kappa = 1,\ u = 1/2$ *заменой с* $r_1 = 2^{1/2} r_2,\ s_2 = 0$ *сводится к* $SF_3^{3,1}$;

4) $NSF_{21}^{3,1}$ *при* $u = 2$ *заменой с* $s_1 = 0,\ r_2 = -r_1$ *сводится к* $SF_6^{3,1}$;

5) $NSF_1^{4,1}$: *a) при* $u = -1$ *заменой с* $r_2 = 0,\ s_2 = -s_1$ *сводится к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $u = 1$ *заменой с* $r_1 = r_2,\ s_2 = -s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{3,1}$;

6) $NSF_3^{4,1}$: *a) при* $u = -1/2$ *заменой с* $r_2 = 0,\ s_2 = -s_1$ *сводится к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $u = -2$ *заменой с* $r_2 = 0,\ s_2 = 2s_1$ *сводится к* $SF_1^{4,1}$;

7) $NSF_5^{4,1}$: *a) при* $u = 1,\ v = -2$ *заменой с* $r_1 = 0,\ s_2 = s_1$ *сводится к* $SF_{22}^{3,1}$;
b) при $u = v(v-2)/4$ *заменой с* $r_2 = 0,\ s_2 = (1 - v/2)s_1$ *сводится к* $SF_1^{4,1}$;
c) при $u = v(2v-3)/9$, *заменой* $r_2 = 0,\ s_2 = (3 - 2v)s_1/3$ *сводится к* $SF_3^{4,1}$;

8) $NSF_7^{4,1}$ $(v \ne u)$: *a) при* $v = 2 - u^{-1}$ *заменой с* $r_1 = -u^{-1} r_2,\ s_1 = 0$ *сводится к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $v = 2u(u+1)^{-1}$ *заменой с* $r_1 = 0,\ s_1 = 2(u+1)^{-1}s_2$ *сводится к* $SF_{14,\kappa}^{3,1}$;

9) $NSF_{11}^{4,1}$ *при* $v = u(2u-1)^{-2}$ *заменой с* $s_1 = 0,\ r_2 = (1 - 2u)r_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;

10) $NSF_{12}^{4,1}$ $(v \ne -u)$: *a) при* $u = 1/2$ *заменой с* $s_1 = -s_2,\ r_2 = 0$ *сводится к* $SF_{14,\kappa}^{3,1}$;
b) при $4v(u-1) \le 1$ *заменой с* $r_2 = (1 + (1 - 4v(u-1))^{1/2})(2v)^{-1} r_1,\ s_2 = 0$ *сводится к* $SF_7^{4,1}$;

11) $NSF_{13}^{4,1}$: *a) при* $u = 2/3$ *заменой с* $r_1 = 2r_2,\ s_2 = -s_1$ *сводится к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $u = -1/3$ *заменой с* $r_1 = r_2/2,\ s_2 = -s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;

12) $NSF_{14}^{4,1}$ $(v \ne -u^2)$: *a) при* $v = u/2,\ u > -1/2$ *заменой с* $r_1 = (1 - (2u+1)^{1/2})r_2/2$, $s_1 = (1 + (2u+1)^{1/2})s_2/2$ *сводится к* $SF_1^{4,1}$;
b) при $v = u$ *заменой с* $r_2 = r_1,\ s_2 = 0$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
c) при $u = -1/4,\ v = -1/12$ *заменой с* $r_1 = 0,\ s_2 = 2s_1$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;

13) $NSF_{19}^{4,1}$: *a) при* $u = v^2/4$ *заменой с* $r_1 = 0,\ s_2 = -vs_1/2$ *сводится к* $SF_{19}^{3,1}$;
b) при $u = (v^3 - 8)(4v)^{-1}$ *заменой с* $s_1 = 0,\ r_2 = -vr_1/2$ *сводится к* $SF_6^{3,1}$;

14) $NSF_{24}^{4,1}$: *a) при* $u \ne 1/2$ *заменой с* $r_2 = 0,\ s_2 = (1 - 2u)s_1$ *сводится к* $SF_{12}^{4,1}$;
b) при $u = 1/2,\ v \ge -1/2$ *заменой с* $r_1 = (1 + (2v+1)^{1/2})r_2,\ s_2 = 0$ *сводится к* $SF_7^{4,1}$;

15) $NSF_{27}^{4,1}$ $(v \ne -u^{-2})$: *a) при* $v = u/2 \pm (u/2)^{-1/2}$ *заменой с* $r_1 = \pm(u/2)^{1/2} r_2, s_2 = 0$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
b) при $u = 3 \cdot 4^{-2/3},\ v = 4^{-2/3}$ *заменой с* $r_1 = 2^{1/3} r_2,\ s_1 = -3 \cdot 2^{-2/3} s_2$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;

16) $NSF_{28}^{4,1}$: *a) при* $u = -3$ *заменой с* $s_1 = 2s_2,\ r_2 = -r_1$ *сводится к* $SF_{22}^{3,1}$;
b) при $u = 6$ *заменой с* $r_1 = 2r_2,\ s_2 = -s_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $u = -3/4$ *заменой с* $r_1 = r_2/2,\ s_2 = -s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
d) при $u = 3/2$ *заменой с* $s_1 = 3s_2/2,\ r_2 = -r_1$ *сводится к* $SF_{12}^{4,1}$;
e) при $u = \vartheta_1$ *заменой с* $s_1 = \vartheta_2 s_2,\ r_2 = -r_1$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;

17) $NSF_{29}^{4,1}$ $(v \ne -u)$: *a) при* $v = u^2$ *заменой с* $r_1 = ur_2,\ s_2 = 0$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
b) при $v = (1-2u)^2/8$ *заменой с* $r_1 = (u - 1/2)r_2,\ s_2 = 0$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $v = (1-2u)/8$ *заменой с* $r_2 = 0,\ s_2 = -2s_1$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;
d) при $u = \vartheta_3,\ v = \vartheta_4$ *заменой с* $r_1 = \vartheta_5 r_2,\ s_1 = \vartheta_6 s_2$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;
e) при $u = -1/2$ *заменой с* $s_1 = -s_2/2,\ r_2 = 0$ *сводится к* $SF_{27}^{4,1}$;

18) $NSF_{30}^{4,1}$: *a) при* $u = -v^{-1}$ *заменой с* $r_1 = -v^{-1} r_2,\ s_2 = 0$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
b) при $u = (v^3 - 8)(4v)^{-1}$ *заменой с* $r_2 = -vr_1/2,\ s_2 = 0$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;

c) при $u=3,\ v=-3$ *заменой с* $r_1=r_2,\ s_1=0$ *сводится к* $SF^{4,1}_{13}$;
d) при $u=2,\ v=3$ *заменой с* $r_1=-r_2,\ s_1=0$ *сводится к* $SF^{4,1}_{28}$;

19) $NSF^{4,1}_{32}$: *a) при* $u=-3$ *заменой с* $s_1=2s_1,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF^{3,1}_{14}$;
b) при $u=3/8$ *заменой с* $r_2=2r_1,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{5}$;
c) при $u=6$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{11}$;
d) при $u=-3/4$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=2s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{30}$;

20) $NSF^{4,1}_{33}$ $(v\neq u)$: *a) при* $u=1$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{29}$;
b) при $v=(4u+1)/8$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-2s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{14}$;
c) при $v=(6u+1\pm(2u+1)(8u+1)^{1/2})/16$ *заменой с* $r_1=-(1\pm(8u+1)^{1/2})r_2/4,\ s_2=0$ *сводится к* $SF^{4,1}_{5}$;

21) $NSF^{4,1}_{36}$: *a) при* $u=-1/8$ *заменой с* $r_2=2r_1,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{5}$;
b) при $u=4$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{11}$;
c) при $u=-2$ *заменой с* $s_1=4s_2/3,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{12}$;
d) при $u=1\pm 3\sqrt{2}/4$ *заменой с* $s_1=(1\pm 1/\sqrt{2})s_2,\ r_2=-r_1$, *сводится к* $SF^{4,1}_{14}$;
e) при $u=1/4$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=2s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{30}$.

Доказательство см. в приложении 4.2.

Отметим, что с учетом утверждения 2.2 при сведении $NSF^{m,1}_i$ из списка 2.1_{I} к предшествующим формам из того же 2.1_{I} использовались только замены с $s_1=0$, а при сведении к 2.1_{II} – с $r_1=s_1\neq 0$. В свою очередь, при сведении $NSF^{m,1}_i$ из списка 2.1_{II} к предшествующим из 2.1_{I} использовались замены с $s_2=-s_1\neq 0$.

Утверждение 2.4. *Только при указанных значениях параметров* $NSF^{5,1}_i$ *из списка* 2.1 *сводятся к предшествующим согласно одному из СП структурным формам:*

1) $NSF^{5,1}_3$ $(u\neq v)$: *a) при* $v=[\,u-3\vee 3u-1\vee u+1,\ u\neq 3\,]$ *заменой с* $r_2=-r_1$, $[\,s_1=0\vee s_2=0\vee s_2=(1-u)s_1/2\,]$ *сводится к* $SF^{4,1}_{14}$;
b) при $v=(u-1)^2u^{-1},\ u\neq -1$ *заменой с* $s_1=-s_2,\ r_2=ur_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{5}$;
c) при $v=2(u-1)$ *заменой с* $r_1=0,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{7}$;
d) $[\,u=-1, v\neq -4\vee v=2u\,]$ *заменой с* $r_1=[\,(v/2+1)r_2\vee 0\,],\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{11}$;
e) при $u=\vartheta_7,\ v=\vartheta_8$ *заменой с* $r_1=\vartheta_9 r_2,\ s_1=\vartheta_{10}s_2$ *сводится к* $SF^{4,1}_{13}$;
f) при $v=4u,\ u\neq -1$ *заменой с* $r_1=ur_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{19}$;
g) при $v=3(u+1),\ u\neq -5$ *заменой с* $s_1=(u+3)s_2/2,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{27}$;
h) при $v=(2u^2+1\pm(2u+1)(5-4u)^{1/2})(2u+2)^{-1},\ (u,v)\neq(-5,-12)$ *заменой с* $r_2=-r_1$, $s_2=(3\pm(5-4u)^{1/2})s_1/2$ *сводится к* $SF^{4,1}_{29}$;
i) $v=u-1\pm 2\sqrt{-u},\ u\neq -1$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=\pm\sqrt{-u}s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{30}$;
j) при $u=-(352\theta_*^5+396\theta_*^4+839\theta_*^3+1005\theta_*^2-1297\theta_*-105)/46,\ v=-(328\theta_*^5+438\theta_*^4+844\theta_*^3+1098\theta_*^2-1046\theta_*-366)/23$ *заменой с* $r_1=\theta_* r_2,\ s_2=-(4\theta_*^5+39\theta_*^4+49\theta_*^3+111\theta_*^2+31\theta_*-60)s_1/138$ *сводится к* $SF^{4,1}_{28}$, $\theta_*\colon 4\theta^6+7\theta^5+13\theta^4+18\theta^3-6\theta^2-9\theta-3$;
k) при $2u=\theta_*^2-2\theta_*+3,\ 2v=-3\theta_*^3+6\theta_*^2-11\theta_*$ *заменой с* $r_1=\theta_* r_2,\ s_1=-(\theta_*^3-\theta_*^2+3\theta_*+3)s_2/2$ *сводится к* $SF^{4,1}_{32}$, $\theta_*\colon \theta^4-\theta^3+2\theta^2+3\theta+3$;
l) $v=2(u+1)^2(u+2)^{-1},\ u\neq -3$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=(u+2)s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{33}$;
m) при $6u=-2\theta_*^3-\theta_*^2+4\theta_*-15,\ 3v=-4\theta_*^3-3\theta_*^2+8\theta_*-21$ *заменой с* $r_1=\theta_* r_2$, $s_1=-(2\theta_*^3+3\theta_*^2+9)s_2/6$ *сводится к* $SF^{4,1}_{36}$, $\theta_*\colon 2\theta^4+3\theta^3-3\theta^2+9\theta+9$;

2) $NSF^{5,1}_6(u\neq v)$: *a) при* $v=2-3u$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{5}$;
b) при $v=(3u-2)/2$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{7}$;
c) при $v=(3u+1)/2$ *заменой с* $r_2=2r_1,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF^{4,1}_{11}$;
d) при $v=[\,3u-1\vee 1-u\pm 2(u^2-u+1)^{1/2},\ (u,v)\neq(8/3,3)\,]$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ [\,s_2=0\vee s_1=(u-2\mp(u^2-u+1)^{1/2})(u-1)^{-1}s_2\,]$ *сводится к* $SF^{4,1}_{14}$;

e) при $v=3u+3,\ u\neq-8/3$ *заменой с* $s_1=3(u+2)s_2/2,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{27}^{4,1}$;
f) при $v=(-u^2-2u\pm(2u+1)(u^2+u+1)^{1/2})(u+1)^{-1},\ (u,v)\neq(-8/3,-5)$ *заменой с* $r_2=-r_1$, $s_2=(u+2\pm(u^2+u+1)^{1/2})s_1/3$ *сводится к* $SF_{29}^{4,1}$;
g) при $v=[\,u-1\vee-3u-1\,]$ *заменой с* $s_1=[\,0\vee 2s_2\,],\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{30}^{4,1}$;
h) при $v=(3u^2+4u+2)(2u+2)^{-1},\ u\neq-4/3$ *заменой с* $s_1=(u+2)(2u+2)^{-1}s_2,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{33}^{4,1}$;
i) при $v=[\,(-1\mp\sqrt{3})(3u-1)\vee 1-u\pm(4u^2-3u+3)^{1/2},\ (u,v)\neq((14\pm4\sqrt{10})/9,(4\pm2\sqrt{10})/3)\vee (2\theta_*^3-4\theta_*^2+4\theta_*+1)((\theta_*-2)(2\theta_*-1)\theta_*)^{-1},\ \theta_*\neq-1\,]$ *заменой с* $r_1=[\,(1\pm\sqrt{3})r_2/2\vee-r_2\vee\theta_*r_2\,]$, $s_2=\langle\,0\vee-(4u^2-9u+1\pm2u(4u^2-3u+3)^{1/2})(15u-3)^{-1}s_1\vee(2\theta_*^2-2\theta_*-1)(3\theta_*)^{-1}s_1\,]$ *сводится к* $SF_3^{5,1}$, $\theta_*\colon 2(u-1)\theta^3-(5u-7)\theta^2+2(u-2)\theta-1$;
j) при $u=35/3,\ v=12$ *заменой с* $s_1=2s_2,\ r_2=-4r_1$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;
k) при $u=-35/3,\ v=-41/4$ *заменой с* $s_1=2s_2,\ r_2=-4r_1$ *сводится к* $SF_{28}^{4,1}$;
l) при $u=-7/12,\ v=3/2$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-4s_1$ *сводится к* $SF_{32}^{4,1}$;
m) при $u=-5/9,\ v=17/12$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-4s_1$ *сводится к* $SF_{36}^{4,1}$;

3) $NSF_7^{5,1}$ $(u\neq v)$: *a) при* $v=2u+3$ *заменой с* $r_1=0,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_7^{4,1}$;
b) при $u=(v-1)(v-3)(v-2)^{-1}$ *заменой с* $r_2=(2-v)r_1,\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $v=[2u\vee 3-u]$ *заменой с* $r_1=[\,0\vee(u-1)r_2],\ s_2=-s_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
d) при $u=\vartheta_{11},\ v=\vartheta_{11}-3$ *заменой с* $r_1=\vartheta_{12}r_2,\ s_1=-(\vartheta_{11}+3)s_2/6$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;
e) при $v=[\,u+3\vee 2u+2\pm(u^2+6u+1)^{1/2},\ (u,v)\neq(-6,-9)]$ *заменой с* $r_2=-r_1$, $s_1=[\,0\vee(u+3\pm(u^2+6u+1)^{1/2})s_2/2\,]$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;
f) при $v=3(u-1),\ u\neq6$ *заменой с* $s_1=(3-u)s_2/3,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF_{27}^{4,1}$;
g) при $u=-18\theta_*^4-24\theta_*^3+25\theta_*^2-16\theta_*+4,\ v=-(261\theta_*^4+456\theta_*^3-187\theta_*^2+148\theta_*+23)/5$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=(9\theta_*^4+39\theta_*^3+37\theta_*^2+2\theta_*+7)s_1/15$ *сводится к* $SF_{28}^{4,1}$, $\theta_*\colon 9\theta_*^5+21\theta^4+4\theta^3+3\theta^2+3\theta+1$;
h) при $v=(2u^2-2u+5\mp(2u-1)(1+4u)^{1/2})(2u-4)^{-1},\ (u,v)\neq(6,15)$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=(3\pm(1+4u)^{1/2})s_1/2$ *сводится к* $SF_{29}^{4,1}$;
i) при $v=u+1\mp2(u+1)^{1/2}$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=\pm(u+1)^{1/2}s_1$ *сводится к* $SF_{30}^{4,1}$;
j) при $u=\vartheta_{13},\ v=\vartheta_{14}$ *заменой с* $r_1=\vartheta_{15}r_2,\ s_1=\vartheta_{16}s_2$ *сводится к* $SF_{32}^{4,1}$;
k) $v=(2u^2-4u+3)(u-2)^{-1},\ u\neq3$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=-(u-2)s_1$ *сводится к* $SF_{33}^{4,1}$;
l) при $u=-\theta_*^3-\theta_*+2,\ v=-6\theta_*^3-2\theta_*^2-5\theta_*+8$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=-\theta_*^2s_1$ *сводится к* $SF_{36}^{4,1}$, $\theta_*\colon \theta^4+\theta^3+\theta^2-\theta-1$;
m) при $u=[\,v(3v-10\pm(v^2+12v-12)^{1/2})(4v-8)^{-1}\vee(-4\theta_*^2+2(v-1)\theta_*+2v-7)/3\,]$ *заменой с* $r_1=[\,0\vee(-2\theta_*^2+v\theta_*-2)r_2\,],\ s_2=\langle(v+2\pm(v^2+12v-12)^{1/2})s_1/4\vee\theta_*s_1\,]$, *где* $\theta_*\in\mathbb{R}^1-\forall$ *нуль многочлена* $2\theta^3-(v+2)\theta^2+2(v+1)\theta-3$, *сводится к* $SF_3^{5,1}$;
n) при $u=(\theta_*^2-\theta_*-v+1)(\theta_*-1)^{-1}$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=((2v-3)\theta_*+v)(\theta_*^2-(v-2)\theta_*-2)^{-1}s_1$ *сводится к* $SF_6^{5,1}$, $\theta_*\colon \theta^4-(2v-3)\theta^3+(v-3)(v+1)\theta^2+(3v^2-6v+4)\theta+v^2$;

4) $NSF_8^{5,1}$ $(w\neq v-u)$: *a) при* $v=-2$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=ws_2$ *сводится к* $SF_{27}^{4,1}$;
b) при $v=[\,(2u-1)/2\vee(2u-1)(3u-1)^{-1}\,],\ w=[\,(u-2)/4\vee-(2u-1)(3u-1)^{-2}\,]$ *заменой с* $r_1=[\,-r_2/2\vee-(3u-1)^{-1}r_2\,],\ s_2=[\,0\vee(3u-1)(u-1)(2u-1)^{-1}s_1\,]$ *сводится к* $SF_3^{4,1}$;
c) $w=v(uv-2u+1)(2u-1)^{-2}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=(1-2u)v^{-1}r_1$ *сводится к* $SF_5^{4,1}$;
d) при $w=-v(u-1)^{-1}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=-(u-1)v^{-1}r_1$ *сводится к* $SF_{11}^{4,1}$;
e) при $[\,v=(3u-1)/2,\ w=(3u-2)/4\vee u=(w^{3/2}\pm1)(w^{1/2}\mp2)^{-2}w^{-1/2},\ v=(2w+1)(\mp w^{1/2}+2)^{-1}\,]$ *заменой с* $s_1=[\,-s_2/2\vee\mp w^{1/2}s_2\,],\ r_2=[\,0\vee(-1\pm2w^{1/2})w^{-1/2}(w^{1/2}\mp2)^{-1}r_1\,]$ *сводится к* $SF_{13}^{4,1}$;
f) при $w=v(v-2)(4u-4)^{-1}$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=(2-v)(2u-2)^{-1}s_2$ *сводится к* $SF_{14}^{4,1}$;
g) при $w=v$ *заменой с* $r_1=vr_2,\ s_1=0$ *сводится к* $SF_{19}^{4,1}$;

h) при $u = -((16w+18)\theta_*^2 + (4w^2-2w)\theta_* + w^3 + 14w^2 + 30w + 9)w^{-1}(w+6)^{-2}$, $v = (w\theta_*^2 - 2w\theta_* + w^2 + 4w - 3)(w+6)^{-1}$ *заменой с* $s_1 = \theta_* s_2$, $r_2 = (6\theta_*^2 + 2w\theta_* + 2w + 3)(w(w+6))^{-1} r_1$ *сводится к* $SF_{28}^{4,1}$, $\theta_*\colon 2\theta^3 + (2w+1)\theta + w$;
i) при $w = (v+2)(uv+v-2u)(2u+1)^{-2}$ *заменой с* $r_1 = 0$, $s_1 = -(v+2)(2u+1)^{-1}s_2$ *сводится к* $SF_{29}^{4,1}$;
j) при $w = v^2(4u)^{-1}$ *заменой с* $r_1 = 0$, $s_1 = -v(2u)^{-1}s_2$ *сводится к* $SF_{30}^{4,1}$;
k) при $u = (v^2 + 2 \mp (v+1)\varrho)(3v-6)^{-1}$, $w = -(v+1)(v \pm \varrho)$ *заменой с* $r_1 = (v \pm \varrho)r_2$, $s_1 = (-v - 2 \mp 2\varrho)s_2/3$, *где* $\varrho = (v^2+v-2)^{1/2}$, *сводится к* $SF_{32}^{4,1}$;
l) при $w = -(v+1)u^{-1}$ *заменой с* $r_1 = 0$, $s_1 = -(v+1)u^{-1}s_2$ *сводится к* $SF_{33}^{4,1}$;
m) при $v = -(2u^2+4u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}$, $w = -(5u^2+4u+1)(3u+1)^{-2}(u+1)^{-1}$ *заменой с* $s_1 = -(2u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}s_2$, $r_2 = (3u+1)r_1$ *сводится к* $SF_{36}^{4,1}$;
n) при $[\,v = -(w\theta_*^2 - \theta_* + u - 1)\theta_*^{-1} \vee w = v(2uv-3u+1)(3u-1)^{-2} \vee w = (2v-u-1)/4\,]$ *заменой с* $r_2 = [\,\theta_* r_1 \vee (1-3u)v^{-1}r_1 \vee 0\,]$, $s_2 = [\,(u-1)(w\theta_*)^{-1}s_1 \vee 0 \vee -2s_1\,]$ *сводится к* $SF_3^{5,1}$, $\theta_*\colon w^2\theta^3 - w\theta^2 - w(u+1)\theta - u + 1$;
o) при $w = [\,v - 3u/4 \vee -((v-1)\theta_* + u - 1)\theta_*^{-2}\,]$ *заменой с* $r_2 = [\,0 \vee \theta_* r_1\,]$, $s_2 = [\,-2s_1 \vee -\theta_*(v\theta_* + 3u - 1)(v\theta_* + u - 1)^{-1}s_1\,]$ *сводится к* $SF_6^{5,1}$, $\theta_*\colon v^2\theta^3 + (v^2+2uv-2v)\theta^2 + (6uv - 2v - 3u^2 - 2u + 1)\theta + 5u^2 - 6u + 1$;
p) при $[\,w = v(3uv-3u+1)(3u-1)^{-2} \vee u = (v^2-v+7)/9,\ w = 2 \vee u = ((13v-16w-6)\theta_*^2 + (4vw - v^2 - 2w + 2v - 3)\theta_* + 8w^2 - 2vw + 3w)(3\theta_*)^{-2}\,]$ *заменой с* $r_1 = [\,-v(3u-1)^{-1}r_2 \vee -r_2 \vee \theta_* r_2\,]$, $s_2 = [\,0 \vee (v-2)s_1/3 \vee -(\theta_*^2 + (2v-1)\theta_* + w)(3w\theta_*)^{-1}s_1\,]$ *сводится к* $SF_7^{5,1}$, $\theta_*\colon \theta^3 + (2v-4w-1)\theta^2 + w(v-1)\theta + 2w^2$.

Доказательство см. в приложении 4.3.

Утверждение 2.5. *Только в следующих* $CF^{m,1}$ *из списка* 2.1 *удается ограничить значения параметров в* $cs^{m,1}$, *а именно:*

1) *в* $CF_3^{3,1}$ *при* $u = 2$ *замена с* $r_1 = -1$, $s_1 = 0$, $r_2, s_2 = 1$, *а в* $CF_{14,\kappa}^{3,1}$ *замена с* $r_1, -s_2 = 1$, s_1, $r_2 = 0$ *изменяют знак* σ;

2) *в* $CF_5^{3,1}$ *при* $u_* = u < 1$ *замена с* $r_1 = 1$, $s_1 = 1 - u_*$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ *дает* $u = 2 - u_*$ $(u > 1,\ u \neq 2)$;

3) *в* $CF_1^{4,1}$ *при* $\sigma_* = \sigma$, $u_* = u$ *замена с* r_1, $s_2 = 0$, s_1, $r_2 = |u_*|^{-1/2}$ *дает* $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} u_*$, $u = u_*^{-1}$ $(|u| < 1)$;

4) *в* $CF_7^{4,1}$ $(v \neq 2 - u^{-1})$ *при* $\sigma_* = \sigma$, $u_* = u$ *замена с* $r_1 = |v-1|^{1/2}|u_*v - 2u_* + 1|^{-1/2}$, $s_1 = 0$, $r_2 = (1-u_*)(v-1)^{-1}r_1$, $s_2 = (v-1)^{-1}(u_*v - 2u_* + 1)r_1$ *дает* $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign}((v-1)(u_*v - 2u_* + 1))$, $u = (v - u_*)(u_*v - 2u_* + 1)^{-1}$ *и тем же* v; *а значит, для* $\forall\, v \neq 1$, *если* $u^* \le 1$, *то* $u \ge 1$, *так как* $u'(u_*) = -(v-1)^2(u_*v - 2u_* + 1)^{-2} < 0$ *и* $u(1) = 1$.

Следствие 2.1. *В силу определения* 1.13 *из* [2] *имеем:* $acs_3^{3,1} = \{\sigma = -1$ *при* $u = 2\}$, $acs_5^{3,1} = \{u < 1\}$, $acs_{14,\kappa}^{3,1} = \{\sigma = -1\}$, $acs_1^{4,1} = \{|u| > 1\}$, $acs_7^{4,1} = \{u < 1$ *при* $v \neq 1\}$, *у остальных канонических форм из списка 2.1* $mcs^{m,1} = cs^{m,1}$.

Набор 2.2. Константы, многочлены и замены, используемые в дальнейшем:

1) $\varkappa_1 = \tilde p_1^2 - 4\tilde p_2$, $\varkappa_2 = \tilde p_1(1 + |\tilde p_1^{-1}|\varkappa_1^{1/2})$;

2) $\varkappa_3 = \tilde p_2(\tilde q_1 - 2)^2 - \tilde q_2^2$, $\varkappa_4 = \tilde q_2^2 + 4\tilde p_2$, $\varkappa_5 = \tilde q_2(1 + |\tilde q_2|^{-1}\varkappa_4^{1/2})$,
$\varkappa_6 = \tilde q_2^2 + 4\tilde p_2(\tilde q_1 - 1)$, $\varkappa_7 = -\tilde q_2(1 + |\tilde q_2|^{-1}\varkappa_6^{1/2})(2\tilde p_2)^{-1}$, $\varkappa_8 = \tilde q_1 - (\varkappa_6 + |\tilde q_2|\varkappa_6^{1/2})(2\tilde p_2)^{-1}$;

3_{I}) $\varkappa_9 = \tilde t_2^2 + \tilde p_1\tilde t_1 + \tilde q_1\tilde t_2$, $\varkappa_{10} = \tilde q_1 + 2\tilde t_2$, $\varkappa_{11} = \tilde q_2\tilde t_1 - \tilde p_1\tilde t_1 - \tilde q_1\tilde t_2$, $\varkappa_{12} = \tilde q_2\tilde t_1 - \tilde q_1\tilde t_2$,
$\varkappa_{13} = \tilde p_1\tilde t_1 - \tilde t_2^2$, $\varkappa_{14} = 2\tilde t_2^2 + \tilde q_2\tilde t_1 - \tilde p_1\tilde t_1$, $\varkappa_{15} = 2\tilde t_2^2 + \tilde q_2\tilde t_1$, $\varkappa_{16} = \tilde t_2^2 + \tilde q_2\tilde t_1$, $\varkappa_{17} = \tilde q_1^2 - 4\tilde p_1\tilde t_1$,
$\varkappa_{18} = 4\tilde p_1\tilde t_1 - \tilde q_1^2 + 2\tilde q_1\tilde t_2 - 4\tilde q_2\tilde t_1$, $\varkappa_{19} = 4\tilde p_1\tilde t_1 - \tilde q_1^2 - 2\tilde q_1\tilde t_2$, $\varkappa_{20} = \tilde q_1\tilde t_2 - 2\tilde q_2\tilde t_1$,

$\varkappa_{21}^{\pm}=-\tilde q_1\pm\varkappa_{17}^{1/2},\ \ \varkappa_{22}^{\pm}=\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2\pm(\tilde q_1+\tilde t_2)\varkappa_{17}^{1/2},\ \ \varkappa_{23}^{\pm}=\varkappa_{10}\pm\varkappa_{17}^{1/2},$
$\varkappa_{24}^{\pm}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2-2\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde q_2\tilde t_1\pm\varkappa_{10}\varkappa_{17}^{1/2},\ \ \varkappa_{25}=(2\tilde t_2-\tilde q_1)^2+8\tilde q_2\tilde t_1,$
$\varkappa_{26}^{\pm}=\varkappa_{10}\pm\varkappa_{25}^{1/2},\ \ \varkappa_{27}^{\pm}=2\tilde t_2-\tilde q_1\pm\varkappa_{25}^{1/2},\ \ \varkappa_{28}^{\pm}=8\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1\pm\tilde q_1\varkappa_{25}^{1/2},$
$\varkappa_{29}^{\pm}=8\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+4\tilde q_2\tilde t_1+4\tilde t_2^2\pm\varkappa_{10}\varkappa_{25}^{1/2},\ \ \varkappa_{30}^{\pm}=4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2\pm\tilde t_2\varkappa_{25}^{1/2};$

3_{II}) $\varkappa_{31}=\tilde t_2^2+4\tilde p_1\tilde t_1,\ \varkappa_{32}^{\pm}=\tilde t_2\pm\varkappa_{31}^{1/2},\ \ \varkappa_{33}^{\pm}=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm2\tilde t_2,\ \varkappa_{34}^{\pm}=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm\tilde t_2,$
$\varkappa_{35}^{\pm}=\tilde q_2\tilde t_1\pm(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\tilde t_2+\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{36}=9\theta_*-2\tilde q_1^2+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{37}=3\theta_*-\tilde q_1^2-\tilde q_1\tilde t_2-\tilde t_2^2,$
$\varkappa_{38}=9\theta_*^2-3(\tilde q_1^2-2\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2)\theta_*-\tilde t_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)(2\tilde q_1^2+4\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)+\tilde q_2\tilde t_1\varkappa_{10}^2,$
$\varkappa_{39}=\theta_*+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{40}=\tilde q_1^2+\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{41}^{\pm}=(2\tilde q_1+\tilde t_2\pm\varkappa_{40}^{1/2})(\tilde q_1+\tilde t_2)/3,$
$\varkappa_{42}^{\pm}=\varkappa_{41}^{\pm}+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{43}^{\pm}=3\varkappa_{41}^{\pm}-\tilde q_1^2-\tilde q_1\tilde t_2-\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{44}=\tilde q_1^2+3\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2,$
$\varkappa_{45}^{\pm}=(\tilde q_1+\tilde t_2\pm\varkappa_{44}^{1/2})(2\tilde q_1+3\tilde t_2),\ \varkappa_{46}^{\pm}=\varkappa_{45}^{\pm}+2\tilde q_1^2+9\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2),\ \varkappa_{47}^{\pm}=\varkappa_{45}^{\pm}+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2;$
$\varkappa_{48}=\tilde q_1\tilde q_2+\tilde t_2(\tilde q_2-3\tilde p_1),\ \ \varkappa_{49}=3\tilde p_1\tilde t_2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2),\ \ \varkappa_{50}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+\tilde t_2^2,$
$\varkappa_{51}=\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{52}=\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_1^2,\ \ \varkappa_{53}=\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_2\tilde t_1,\ \ \varkappa_{54}=2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2,$
$\varkappa_{55}=\tilde t_1^2\theta_*^4+\tilde t_1(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*^3+(5\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2-7\tilde q_2\tilde t_1-2\tilde q_1^2)\theta_*^2+\tilde q_2(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*+\tilde q_2^2,$
$\varkappa_{56}=4\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2,\ \ \varkappa_{57}=\tilde t_1\tilde t_2\theta_*^2+(2\tilde q_1\tilde t_2-3\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2)\theta_*+\tilde q_2\tilde t_2,$
$\varkappa_{58}=2\tilde t_1^2\theta_*^3+\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*^2+(2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2)\theta_*+\tilde q_2\tilde t_2,$
$\varkappa_{59}=2\tilde t_1^2\theta_*^4+5\tilde t_1(\tilde q_1+\tilde t_2)\theta_*^3+(2\tilde q_1^2+10\tilde q_2\tilde t_1-5\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2)\theta_*^2-\tilde q_2(\tilde q_1+\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2^2,$
$\varkappa_{60}=3\tilde p_1\tilde q_1+(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde t_2,\ \ \varkappa_{61}=\tilde q_1\tilde q_2+(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde t_2,$
$\varkappa_{62}=\tilde t_1\tilde t_2\theta_*^3+(5\tilde t_1\tilde q_2+2\tilde t_2^2-4\tilde q_1\tilde t_2)\theta_*^2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2^2,\ \ \varkappa_{63}=2\tilde t_1\theta_*^2+(\tilde q_1-2\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2;$

$S_1(\theta)=27\theta^3-3(7\tilde q_1+5\tilde t_2)(\tilde q_1-\tilde t_2)\theta^2+(\tilde q_1^2-4\tilde q_1\tilde t_2-3\tilde t_2^2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)^2\theta+\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2)(\tilde q_1^2+\tilde q_1t_2+\tilde t_2^2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)^2;\quad S_2(\theta)=\tilde t_1\tilde t_2\theta^3+(5\tilde q_2\tilde t_1-4\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2)\theta^2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)\theta-\tilde q_2^2,$
$S_3(\theta)=2\tilde t_1^2\theta^3+(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1\theta^2+(2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2)\theta+\tilde t_2\tilde q_2;$

$J_0^1=\{r_1=1,\,s_1=-\beta,\,r_2=0,\,s_2=1\},\ J_1^1=\{r_1=1,\,s_1=0,\,r_2=-\hat q_2(2\hat t_2)^{-1},\,s_2=\hat t_2^{-1}\},$
$J_2^1=\{r_1=1,\,s_1=0,\,r_2=-\hat p_1\hat q_1^{-1},\,s_2=\hat t_2^{-1}\},\quad J_3^1=\{r_1=1,\,s_1=0,\,r_2=\theta_*,\,s_2=1\};$

1) $L_2^{2,1}=\{r_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=\tilde p_1r_1\};$
$L_5^{3,1}=\{r_1=0,\ s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=\tilde p_1s_1,\ s_2=\varkappa_2s_1/2\};$
$L_8^{3,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=\tilde p_2\tilde p_1^{-1}s_1\};$

2) $L1_3^{3,1}=\{r_1=(\tilde q_1-2)(\tilde q_1\tilde q_2)^{-1}s_2,\ s_1=0,\ r_2=\tilde q_1^{-1}s_2,\ s_2=|\tilde q_1\tilde q_2|^{1/2}|\tilde q_1-2|^{-1/2}\},$
$L2_3^{3,1}=\{r_1=(4\tilde p_2)^{-1/4},\ s_1=0,\ r_2=\tilde p_2^{1/2}r_1,\ s_2=(4\tilde p_2)^{1/4}\};$
$L_{14,\kappa}^{3,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=|\tilde p_2|^{-1/4}|\tilde q_1|^{3/4}\tilde q_1^{-1},\ r_2=|\tilde p_2|^{1/4}|\tilde q_1|^{-3/4}\},$
$L1_7^{4,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=\varkappa_5r_1/2,\ s_2=\tilde q_2r_1\},$
$L2_7^{4,1}=\{r_1=\varkappa_7r_2,\ s_1=0,\ r_2=|\varkappa_7\varkappa_8|^{-1/2},\ s_2=\varkappa_8r_2\},$
$L_{12}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=|\tilde q_1-2|^{1/2}|\tilde q_1\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2,s_2=\tilde q_2(\tilde q_1-2)^{-1}s_1\},$
$L_{24}^{4,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2=\tilde q_2s_1/2\},$

3_{I}) $L_9^{2,1}=\{r_1=-\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\},$
$L1_6^{3,1}=\{r_1=2\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\},$
$L2_6^{3,1}=\{r_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1},\ s_1,r_2=0,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\},$
$L1_{11,\kappa}^{3,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\},$
$L2_{11,\kappa}^{3,1}=\{r_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\};$
$L_{17}^{3,1}=\{r_1=-(\tilde p_1\tilde t_2)^{-1/3}|\tilde t_1|^{1/6},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\};$
$L_{19}^{3,1}=\{r_1=0,\ s_1=-2^{2/3}|\tilde t_1|^{5/6}(\tilde q_1^2\tilde t_1\tilde t_2)^{-1/3},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}s_1\};$
$L_{21}^{3,1}=\{r_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}(\tilde t_2^2(\tilde q_1+\tilde t_2))^{-1/3},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\};$
$L_{22}^{3,1}=\{r_1=0,\ s_1=\tilde t_1(\varkappa_{16}\tilde t_2)^{-1/3}|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2s_1\};$
$L1_5^{4,1}=\{r_1=4(\varkappa_{26}^{\mp})^{-1}\tilde t_1^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=\varkappa_{27}^{\pm}(4\tilde t_1)^{-1}r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\},$
$L2_5^{4,1}=\{r_1=\tilde t_1\tilde t_2^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\};$

$L1_{11}^{4,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=\tilde q_1^{-1}\tilde q_2|\tilde q_2|^{-1/2}\}$,
$L2_{11}^{4,1}=\{r_1=|\varkappa_{12}|^{-1/2}|\tilde t_1|^{1/2},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2 r_1,\ s_2=\varkappa_{12}\tilde t_1^{-1}\varkappa_{10}^{-1}r_1\}$;
$L1_{14}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=2\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L2_{14}^{4,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{19}^{4,1}=\{r_1=-|\tilde t_1|^{1/6}(\tilde p_1\tilde t_2)^{-1/3},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2 r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{27}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=|\tilde t_1|^{5/6}(\varkappa_{14}\tilde t_1\tilde t_2)^{-1/3},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2 s_1\}$;
$L_{29}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=\pm\varkappa_{17}^{-1/2}\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=\varkappa_{21}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$;
$L_{30}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=2|\tilde t_1|^{5/6}(2\varkappa_{20}\tilde t_1\tilde q_1)^{-1/3},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$;
$L_{33}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2 s_1\}$;
$L_8^{5,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=\tilde q_2|\tilde q_2|^{-1/2}\tilde t_2^{-1}\}$;

3_{II}) $L1_1^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=\varkappa_{31}^{-1/4}|2\tilde t_1(\varkappa_{32}^{\pm})^{-1}|^{1/2},\ r_2=\varkappa_{32}^{\mp}(2\tilde t_1)^{-1}s_1,\ s_2=\varkappa_{32}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L2_1^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=\varkappa_{32}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}s_1,\ s_2=0\}$;
$L1_3^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=|(3\tilde q_1-\tilde t_2)(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=\tilde q_1\tilde t_1^{-1}s_1,\ s_2=(\tilde t_2-2\tilde q_1)\tilde t_1^{-1}s_1\}$,
$L2_3^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=\sqrt3\,|(2\tilde q_1-3\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=0,\ s_2=-(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(3\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L3_3^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=4|(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=-(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(4\tilde t_1)^{-1}s_1,\ s_2=0\}$;
$L1_{13}^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=2\,|(2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=0,\ s_2=-(2\tilde q_1-\tilde t_2)(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L2_{13}^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=\pm(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\tilde q_2^{-1}s_2,\ r_2=-(2(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm\tilde t_2)(\varkappa_{33}^{\pm})^{-1}s_2,$
$s_2=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/4}\varkappa_{33}^{\pm}(3\varkappa_{35}^{\pm})^{-1/2}|\varkappa_{34}^{\pm}\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{28}^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=\varkappa_{10}|\varkappa_{39}\varkappa_{36}\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=-(3\theta_*+2\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1,$
$s_2=(6\theta_*-\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde q_1^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1\}$;
$L_{32}^{4,1}=\{r_1=s_1,s_1=|\tilde t_1|^{1/2}|\varkappa_{42}^{\pm}|^{-1/2},\ r_2=-(\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}s_1,\ s_2=(3\varkappa_{41}^{\pm}-\tilde q_1^2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1\}$;
$L_{36}^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=|\tilde t_1|^{1/2}|\varkappa_{46}^{\pm}|^{-1/2},\ r_2=-(2\tilde q_1+3\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}s_1,$
$s_2=(\varkappa_{45}^{\pm}+2\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1\}$;
$L1_3^{5,1}=\{r_1,s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde q_1^{-1}s_1,\ s_2=0\}$,
$L2_3^{5,1}=\{r_1,s_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2=0,\ s_2=-2\tilde q_2\tilde t_2^{-1}s_1\}$,
$L3_3^{5,1}=\{r_1,s_1=(\tilde q_1-\tilde t_2)|\varkappa_{50}\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=-(2\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2))^{-1}s_1,$
$s_2=(2\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_1^2)(\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2))^{-1}s_1\}$;
$L1_6^{5,1}=\{r_1,s_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2=0,\ s_2=-2\tilde q_2\tilde t_2^{-1}s_1\}$,
$L2_6^{5,1}=\{r_1,s_1=3\theta_*|\varkappa_{59}\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=-(\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1,\ s_2=\theta_*s_1\}$;
$L1_7^{5,1}=\{r_1,s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde q_1^{-1}s_1,\ s_2=0\}$,
$L2_7^{5,1}=\{r_1,s_1=\sqrt3|\varkappa_{63}|^{-1/2},\ r_2=\theta_*s_1,\ s_2=-(\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1\}$.

2.4. Три класса линейной эквивалентности систем при $\mathbf{l=1}$. Система (1.4) $\dot x=A\,q^{[3]}(x)$ при $l=1$ согласно (2.2) однозначно представима в виде (2.1):

$$\dot x=(x_1+\beta x_2)\begin{pmatrix}p_1x_1^2+q_1x_1x_2+t_1x_2^2\\ p_2x_1^2+q_2x_1x_2+t_2x_2^2\end{pmatrix}=P_0^1(x)\,G\,q^{[2]}(x),\quad G=\begin{pmatrix}p_1&q_1&t_1\\ p_2&q_2&t_2\end{pmatrix},\tag{2.6}$$

причем у нее $R_2=\delta_{pt}^2-\delta_{pq}\delta_{qt}\neq0$, так как $l=1$, а значит, $p_1^2+p_2^2\neq0$ и $t_1^2+t_2^2\neq0$.

По теореме 2.1 любая замена (1.5) $x=Ly$ с $\det L=\delta\neq0$ преобразует систему (2.6) в систему (1.6) $\dot y=\widehat A\,q^{[3]}(y)$ вида (2.3), в которой символ $\tilde{}$ заменен на символ $\hat{}$, т. е. в систему

$$\dot y=(\hat\alpha y_1+\hat\beta y_2)\begin{pmatrix}\hat p_1y_1^2+\hat q_1y_1y_2+\hat t_1y_2^2\\ \hat p_2y_1^2+\hat q_2y_1y_2+\hat t_2y_2^2\end{pmatrix}=\widehat P_0^1(y)\,\widehat G\,q^{[2]}(y)\tag{2.7}$$

или $\widehat A=\begin{pmatrix}\hat a_1&\hat b_1&\hat c_1&\hat d_1\\ \hat a_2&\hat b_2&\hat c_2&\hat d_2\end{pmatrix}$, где согласно (2.4) матрица $\widehat G=\begin{pmatrix}\hat p_1&\hat q_1&\hat t_1\\ \hat p_2&\hat q_2&\hat t_2\end{pmatrix}=L^{-1}GM$, $\widehat R_2=$

$\delta^2_{\hat p\hat t}-\delta_{\hat p\hat q}\delta_{\hat q\hat t}=\delta^2 R_2\neq 0,\ \ \hat\alpha=r_1+\beta r_2,\ \hat\beta=s_1+\beta s_2\ \ (\hat\alpha^2+\hat\beta^2\neq 0)$, матрица $\widehat A$ из (1.7).

Матрица $\widehat A$ упростится, если в замене (1.5) положить $s_1=-\beta s_2$, получая $\hat\beta=0$. В частности, замена J^1_0 преобразует систему (2.6) в систему

$$\widehat A=\begin{pmatrix}\hat a_1&\hat b_1&\hat c_1&\hat d_1\\ \hat a_2&\hat b_2&\hat c_2&\hat d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat p_1&\hat q_1&\hat t_1&0\\ \hat p_2&\hat q_2&\hat t_2&0\end{pmatrix},\ (\hat\alpha,\hat\beta)=(1,0),\ \widehat G=\begin{pmatrix}\hat p_1&\hat q_1&\hat t_1\\ \hat p_2&\hat q_2&\hat t_2\end{pmatrix},\tag{2.8}$$

в которой $\hat p_1=p_1+\beta p_2,\ \hat q_1=q_1+\beta(q_2-2p_1)-2\beta^2p_2,\ \hat t_1=t_1+\beta(t_2-q_1)-\beta^2q_2+\beta^3p_2$, $\hat p_2=p_2,\ \hat q_2=q_2-2\beta p_2,\ \hat t_2=t_2-\beta q_2+\beta^2p_2\ \ (\hat p_1^2+\hat p_2^2\neq 0,\ \hat t_1^2+\hat t_2^2\neq 0,\ \widehat R_2=R_2\neq 0)$.

Очевидным достоинством системы (2.8) помимо равенства нулю элементов $\hat d_1$ и $\hat d_2$, связанного с равенством нулю числа $\hat\beta$, является совпадение первых трех столбцов матрицы $\widehat A$ с матрицей $\widehat G$. Именно такой структурой обладают двадцать четыре CF из первой части списка 2.1. У остальных девяти CF из этого списка $\breve\alpha=\breve\beta$.

Сделав в (2.8) произвольную замену (1.5) с $s_1=0\ \ (r_1,s_2\neq 0)$, получаем систему

$$\widetilde A=\begin{pmatrix}\hat p_1r_1^2+\hat q_1r_1r_2+\hat t_1r_2^2&(\hat q_1r_1+2\hat t_1r_2)s_2&\hat t_1s_2^2&0\\ -S_0(r_1^{-1}r_2)r_1^3s_2^{-1}&\hat q_2r_1^2-(\hat q_1-2\hat t_2)r_1r_2-2\hat t_1r_2^2&(\hat t_2r_1-\hat t_1r_2)s_2&0\end{pmatrix},\tag{2.9}$$

где $S_0(\theta)=\hat t_1\theta^3+(\hat q_1-\hat t_2)\theta^2+(\hat p_1-\hat q_2)\theta-\hat p_2,\ \ \hat p_1^2+\hat p_2^2,\ \hat t_1^2+\hat t_2^2\neq 0,\ \ \tilde a_1^2+\tilde a_2^2,\ \tilde c_1^2+\tilde c_2^2\neq 0$.

Вид системы (2.9) демонстрирует целесообразность разбиения множества систем (2.8) на три непересекающихся класса:

1) $\hat t_1=0,\ \hat q_1=0$; 2) $\hat t_1=0,\ \hat q_1\neq 0$; 3) $\hat t_1\neq 0$.

Выделенные классы линейно неэквивалентны, так как если произвольная замена связывает две системы вида (2.8), то в ней $s_1=0$ по утверждению 2.2 п. 2, и тогда инвариантность условий 1)–3) вытекает из вида системы (2.9).

Посмотрим, какую наиболее простую систему (2.9) всегда можно получить в каждом из этих классов, имея в виду, что при $\hat t_1=0\ \ (\hat t_2\neq 0)$ система (2.9) имеет вид

$$\begin{pmatrix}(\hat p_1r_1+\hat q_1r_2)r_1&\hat q_1r_1s_2&0&0\\ (\hat p_2r_1^2-(\hat p_1-\hat q_2)r_1r_2-(\hat q_1-\hat t_2)r_2^2)r_1s_2^{-1}&(\hat q_2r_1+(2\hat t_2-\hat q_1)r_2)r_1&\hat t_2r_1s_2&0\end{pmatrix}.\tag{2.10}$$

1) $\hat t_1=0,\ \hat q_1=0\ \ (\hat p_1\neq 0,\ \hat t_2\neq 0)$. Тогда система (2.10) примет вид $\begin{pmatrix}\hat p_1r_1^2&0&0&0\\ (\hat p_2r_1^2+(\hat q_2-\hat p_1)r_1r_2+\hat t_2r_2^2)r_1s_2^{-1}&(\hat q_2r_1+2\hat t_2r_2)r_1&\hat t_2r_1s_2&0\end{pmatrix}$ и в ней всегда можно получить $\tilde b_2=0,\ \tilde c_2=1$. В частности, замена J^1_1 преобразует систему (2.8) в систему

$$\widetilde A_1=\begin{pmatrix}\tilde p_1&0&0&0\\ \tilde p_2&0&1&0\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l}\tilde p_1=\hat p_1\,(\neq 0),\\ \tilde p_2=(2\hat p_1\hat q_2+4\hat p_2\hat t_2-\hat q_2^2)/4.\end{array}\tag{2.11}$$

При $\tilde p_2\neq 0$ система $\widetilde A_1$ является $SF^{3,1}_{a,8}$.

2) $\hat t_1=0,\ \hat q_1\neq 0\ \ (\hat t_2\neq 0)$. Тогда в (2.10) всегда можно получить $\tilde a_1=0,\ \tilde c_2=1$. В частности, замена J^1_2 преобразует систему (2.8) в систему

$$\widetilde A_2=\begin{pmatrix}0&\tilde q_1&0&0\\ \tilde p_2&\tilde q_2&1&0\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l}\tilde q_1=\hat q_1\hat t_2^{-1}\,(\neq 0),\quad \tilde q_2=\hat p_1+\hat q_2-2\hat p_1\hat q_1^{-1}\hat t_2,\\ \tilde p_2=\hat q_1^{-2}\hat t_2(\hat t_2\hat p_1^2-\hat q_2\hat q_1\hat p_1+\hat p_2\hat q_1^2)\,(\neq 0).\end{array}\tag{2.12}$$

При $\tilde{q}_2 \neq 0$ система $\widetilde{A}_2$ является $SF^{4,1}_{a,24}$.

3) $\hat{t}_1 \neq 0$. Тогда в (2.9) можно получить $\tilde{a}_2 = 0$. В частности, замена J^1_3, где $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ – нуль $S_0(\theta)$, преобразует (2.8) в систему (2.9)

$$\widetilde{A}_3 = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 & \tilde{t}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2 & \tilde{t}_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \tilde{p}_1 = \hat{p}_1 + \hat{q}_1\theta_* + \hat{t}_1\theta_*^2\,(\neq 0), \quad \tilde{q}_1 = \hat{q}_1 + 2\hat{t}_1\theta_*, \quad \tilde{t}_1 = \hat{t}_1\,(\neq 0), \\ \tilde{q}_2 = \hat{q}_2 - (\hat{q}_1 - 2\hat{t}_2)\theta_* - 2\hat{t}_1\theta_*^2, \quad \tilde{t}_2 = \hat{t}_2 - \hat{t}_1\theta_*. \end{array} \tag{2.13}$$

При $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{t}_2 \neq 0$ система $\widetilde{A}_3$ является $SF^{5,1}_8$. В свою очередь, при $\tilde{q}_2 = 0$ – это $SF^{4,1}_5$, при $\tilde{t}_2 = 0$ – это $SF^{4,1}_{11}$, при $\tilde{q}_1 = 0$ – это $SF^{4,1}_{a,14}$.

Ниже для каждой из систем (2.11), (2.12), (2.13) в соответствующей лемме будут найдены условия на коэффициенты и замены (1.5), сводящие выбранную систему при этих условиях ко всем возможным CF из списка 2.1, записываемым в виде

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} \breve{a}_1 & \breve{b}_1 & \breve{c}_1 & \breve{d}_1 \\ \breve{a}_2 & \breve{b}_2 & \breve{c}_2 & \breve{d}_2 \end{pmatrix}, \quad (\breve{\alpha}, \breve{\beta}). \tag{2.14}$$

Их элементы вычисляются по тем же формулам, что выписаны для системы (2.7).

Рассуждения каждый раз будут разделены на два этапа.

На этапе I будут рассматриваться произвольные замены (1.5) с $s_1 = 0$, сводящие исходные системы согласно утверждению 2.2, п. 2 к системам (2.14) с $\breve{\beta} = 0$.

Основываясь на полном переборе допустимых значений элементов исходной системы, будут найдены те из них, при которых явно выписанными заменами будут получены CF из первой части списка 2.1 и значения их элементов из cs.

На этапе II непосредственно для каждой CF из второй части списка 2.1, предшествующей исходной системе, будут устанавливаться замена с $r_1 = s_1 \neq 0$, согласно утверждению 2.2, п. 3 гарантирующая равенство $\breve{\alpha} = \breve{\beta}$, и условия для попадания из исходной системы в выбранную CF.

При этом в формулировках последующих утверждений: a) с учетом замечания 1.2 столбцы r и s замены (1.5) будут меняться местами, если получаемые CF окажутся дополнительными; b) ссылкой на соответствующий пункт утверждения 2.3 из множества значений элементов исходной системы будут удаляться те, которые принадлежат допустимым множествам, но не принадлежат каноническим множествам.

2.5. Сведение систем из первых двух классов к $\mathbf{CF^{m,1}}$ $(\mathbf{m = 2, 3, 4})$.

Лемма 2.1. *Любая система* (2.8) *с* $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 = 0$ *линейно эквивалентна какой-либо* $CF^{m,1}_i$ *из списка* 2.1_1. *Ниже для каждой из трех таких* $CF^{m,1}_i$ *приведены: a) условия на коэффициенты* $\tilde{p}_1(\neq 0)$, $\tilde{p}_2$ *системы* (2.11), *полученной из* (2.8) *заменой* J^1_1, *b) замена* (1.5), *преобразующая правую часть* (2.11) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения* σ *и параметров из* $cs^{m,1}_i$:

$CF^{2,1}_2$: *a)* $\tilde{p}_2 = 0$, *b)* $L^{2,1}_2$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$;
$CF^{3,1}_5$: *a)* $\tilde{p}_2 \neq 0$, $\varkappa_1 \geq 0$, *b)* $L^{3,1}_5$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = \varkappa_2\tilde{p}_1^{-1}$;
$CF^{3,1}_8$: *a)* $\tilde{p}_2 \neq 0$, $\varkappa_1 < 0$, *b)* $L^{3,1}_8$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = \tilde{p}_2\tilde{p}_1^{-2}$.

Доказательство. В случае 1), когда в (2.8) $\hat{t}_1 = 0, \hat{q}_1 = 0$ $(\hat{p}_1 \neq 0,\ \hat{t}_2 \neq 0)$, из системы (2.11) заменой (1.5) с $s_1 = 0$ (см. приложение 4.4) получаем систему (2.14) вида

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ (\tilde{p}_2 r_1^2 - \tilde{p}_1 r_1 r_2 + r_2^2) r_1 s_2^{-1} & 2r_1 r_2 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\tilde{p}_1 \neq 0). \tag{2.15}$$

1) $\breve{b}_2=0 \Leftrightarrow r_2=0$. Тогда система (2.15) принимает вид $\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{p}_2 r_1^3 s_2^{-1} & 0 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$.

1_1) $\breve{a}_2=0 \Leftrightarrow \tilde{p}_2=0$. Тогда при $r_1=|\tilde{p}_1|^{-1/2}$, $s_2=\tilde{p}_1 r_1$ – это $CF_2^{2,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{p}_1$.

1_2) $\breve{a}_2\neq 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_2\neq 0$. Тогда при $r_1=|\tilde{p}_1|^{-1/2}$, $s_2=\tilde{p}_2\tilde{p}_1^{-1}r_1$ полученная система – это $NSF_{a,8}^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u=\tilde{p}_2\tilde{p}_1^{-2}$.

2) $\breve{a}_2=0 \Leftrightarrow \{\varkappa_1=\tilde{p}_1^2-4\tilde{p}_2\geq 0,\ 2r_2=\varkappa_2 r_1\}$ ($r_2\neq 0$, так как $\varkappa_2\neq 0$). Тогда система (2.15) принимает вид $\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 r_1^2 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1=|\tilde{p}_1|^{-1/2}$, $s_2=\tilde{p}_1 r_1$ – это $CF_{a,5}^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u=\varkappa_2\tilde{p}_1^{-1}$ $(=1+|\tilde{p}_1|^{-1}\varkappa_1^{1/2})$ при условии, что $u\neq 2$ (см. утверждение 2.3, п. 1) $\Leftrightarrow |\tilde{p}_1|\neq \varkappa_1^{1/2} \Leftrightarrow \tilde{p}_2\neq 0$.

Поскольку $SF_{a,5}^{3,1}$ предшествует $SF_{a,8}^{3,1}$, в 1_2) попадаем, если $\varkappa_1=\tilde{p}_1^2-4\tilde{p}_2<0$, т. е. минуем 2). Тогда $NSF_{a,8}^{3,1}=CF_{a,8}^{3,1}$, так как $u=\tilde{p}_2\tilde{p}_1^{-2}>1/4$. (см. утверждение 2.3, п. 2).

II. Система (2.11) предшествует всем девяти CF из второй части списка 2.1. □

Лемма 2.2. *Любая система* (2.8) *с* $\hat{t}_1=0$, $\hat{q}_1\neq 0$ *линейно эквивалентна какой-либо* $CF_i^{m,1}$ *из списка* 2.1_2. *Ниже для каждой из пяти таких* $CF_i^{m,1}$ *приведены: a) условия на коэффициенты* $\tilde{q}_1(\neq 0)$, $\tilde{p}_2(\neq 0)$, $\tilde{q}_2$ *системы* (2.12), *полученной из* (2.8) *заменой* J_2^1, *b) замена* (1.5), *преобразующая правую часть* (2.12) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения* σ *и параметров из* $cs_i^{m,1}$:

$CF_3^{3,1}$: 1) *a)* $\tilde{q}_1\neq 2$, $\varkappa_3=0$, *b)* $L1_3^{3,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}((\tilde{q}_1-2)\tilde{q}_1\tilde{q}_2)$, $u=\tilde{q}_1$;
2) *a)* $\tilde{p}_2>0$, $\tilde{q}_1=2$, $\tilde{q}_2=0$, *b)* $L2_3^{3,1}$, *c)* $\sigma=1$, $u=2$;

$CF_{14,\kappa}^{3,1}$: *a)* $\tilde{p}_2<0$, *если* $\tilde{q}_1=2$, $\tilde{q}_2=0$, *b)* $L_{14,\kappa}^{3,1}$ *c)* $\kappa=\operatorname{sign}(\tilde{p}_2\tilde{q}_1)$, $u=\tilde{q}_1^{-1}$;

$CF_7^{4,1}$: 1) *a)* $\tilde{q}_1=2$, $\varkappa_4\geq 0$, $\tilde{q}_2\neq 0$, *b)* $L1_7^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u=\varkappa_5\tilde{q}_2^{-1}$, $v=2$;
2) *a)* $\tilde{q}_1\neq 2$, $\tilde{q}_2\neq 0$, $\varkappa_6\geq 0$, $\varkappa_8\neq 0$, *b)* $L2_7^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_7\varkappa_8)$, $u=\varkappa_8^{-1}\tilde{q}_1$, $v=\tilde{q}_1$;

$CF_{12}^{4,1}$: *a)* $\tilde{q}_1\neq 2$, $\tilde{q}_2\neq 0$, $4\varkappa_3(1-\tilde{q}_1)>\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2$, *b)* $L_{12}^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde{q}_1\tilde{q}_2(\tilde{q}_1-2))$, $u=\tilde{q}_1^{-1}$, $v=\varkappa_3\tilde{q}_1^{-1}\tilde{q}_2^{-2}$;

$CF_{24}^{4,1}$: *a)* $\tilde{q}_1=2$, $\varkappa_4<0$, $\tilde{q}_2\neq 0$, *b)* $L_{24}^{4,1}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u=1/2$, $v=2\tilde{p}_2\tilde{q}_2^{-2}$.

Доказательство. I. В случае 2), когда в (2.8) $\hat{t}_1=0$, $\hat{q}_1\neq 0$ $(\hat{t}_2\neq 0)$, из системы (2.12) заменой (1.5) с $s_1=0$ $(r_1,s_2\neq 0)$ (см. приложение 4.5) получаем систему (2.14) вида

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 r_1 r_2 & \tilde{q}_1 r_1 s_2 & 0 & 0 \\ (\tilde{p}_2 r_1^2+\tilde{q}_2 r_1 r_2-(\tilde{q}_1-1)r_2^2)r_1 s_2^{-1} & \tilde{q}_2 r_1^2-(\tilde{q}_1-2)r_1 r_2 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\tilde{p}_2,\ \tilde{q}_1\neq 0). \tag{2.16}$$

1) $\breve{a}_1=0 \Leftrightarrow r_2=0$. Тогда (2.16) принимает вид $\begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}_1 r_1 s_2 & 0 & 0 \\ \tilde{p}_2 r_1^3 s_2^{-1} & \tilde{q}_2 r_1^2 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$.

1_1) $\breve{b}_2=0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2=0$. Тогда при $r_1=|\tilde{p}_2|^{-1/4}|\tilde{q}_1|^{3/4}\tilde{q}_1^{-1}$, $s_2=|\tilde{p}_2|^{1/4}|\tilde{q}_1|^{-3/4}$ – это $NSF_{a,14,\kappa}^{3,1}$ с $\kappa=\operatorname{sign}(\tilde{p}_2\tilde{q}_1)$, $u=\tilde{q}_1^{-1}$.

1_2) $\breve{b}_2\neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2\neq 0$. Тогда при $r_1=|\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2=\tilde{q}_1^{-1}\tilde{q}_2 r_1$ – это $NSF_{a,24}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u=\tilde{q}_1^{-1}$, $v=\tilde{p}_2\tilde{q}_1\tilde{q}_2^{-2}$. И системы, которым она предшествует, не интересны.

2) $\breve{a}_1\neq 0 \Leftrightarrow r_2\neq 0$.

2_1) $\tilde{q}_1=2$. Тогда система (2.16) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 2r_1 r_2 & 2r_1 s_2 & 0 & 0 \\ (\tilde{p}_2 r_1^2+\tilde{q}_2 r_1 r_2-r_2^2)r_1 s_2^{-1} & \tilde{q}_2 r_1^2 & r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

$2_1^{1)}$) $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 = 0$. Тогда система (2.17) имеет вид $\begin{pmatrix} 2r_1r_2 & 2r_1s_2 & 0 & 0 \\ (\tilde{p}_2r_1^2 - r_2^2)r_1s_2^{-1} & 0 & r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}$.

2_1^{1a}) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\tilde{p}_2 > 0,\ r_2 = \tilde{p}_2^{1/2}r_1\}$. При $r_1 = s_2^{-1}$, $s_2 = (4\tilde{p}_2)^{1/4}$ – это $CF_3^{3,1}$ с $\sigma = 1$, $u = 2$.

Поскольку $SF_3^{3,1}$ предшествует $SF_{14,\kappa}^{3,1}$, в 1_1) попадаем при $\tilde{q}_1 = 2$, если $\tilde{p}_2 < 0$. Тогда $NSF_{a,14,\kappa}^{3,1} = CF_{a,14,\kappa}^{3,1}$, так как $\kappa = \mathrm{sign}(\tilde{p}_2\tilde{q}_1) = -1$ при $u = \tilde{q}_1^{-1} = 1/2$ (см. утверждение 2.3, п. 3).

2_1^{1b}) $\tilde{p}_2 < 0$. Тогда случай $\breve{a}_2 \neq 0$ с попаданием в $SF_{a,12}^{4,1}$ можно не рассматривать, так как при $r_2 = 0$ всегда попадаем в 1_1) с $SF_{a,14,\kappa}^{3,1}$.

$2_1^{2)}$) $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq 0$. Если при этом и $\breve{a}_2 \neq 0$, то получаем $SF_{a,10}^{5,1}$.

2_1^{2a}) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\varkappa_4 = \tilde{q}_2^2 + 4\tilde{p}_2 \geq 0,\ 2r_2 = \varkappa_5 r_1\}$ ($\varkappa_5 = \tilde{q}_2(1 + |\tilde{q}_2|^{-1}\varkappa_4^{1/2}) \neq 0$). Тогда (2.17) имеет вид $\begin{pmatrix} \varkappa_5r_1^2 & 2r_1s_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2r_1^2 & r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = |\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{q}_2r_1$ – это $CF_7^{4,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}\tilde{q}_2$, $v = 2$, $u = \varkappa_5\tilde{q}_2^{-1}$, так как $2 - u^{-1}, 2u(u+1)^{-1} \neq 2 = v$ (см. утверждение 2.3, п. 8).

2_2) $\tilde{q}_1 \neq 2$ в системе (2.16).

$2_2^{1)}$) $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow r_2 = \tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2)^{-1}r_1$. Тогда система (2.16) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1\tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2)^{-1}r_1^2 & \tilde{q}_1r_1s_2 & 0 & 0 \\ \varkappa_3(\tilde{q}_1 - 2)^{-2}r_1^3s_2^{-1} & 0 & r_1s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\tilde{p}_2,\ \tilde{q}_1 \neq 0). \tag{2.18}$$

2_2^{1a}) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \varkappa_3 = \tilde{p}_2(\tilde{q}_1 - 2)^2 - \tilde{q}_2^2 = 0$ ($\tilde{q}_2 \neq 0$). Тогда при $r_1 = |\tilde{q}_1 - 2|^{1/2}|\tilde{q}_1\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{q}_1\tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2)^{-1}r_1$ система (2.18) – это $CF_3^{3,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\tilde{q}_1\tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2))$, $u = \tilde{q}_1$.

2_2^{1b}) $\breve{a}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_3 \neq 0$, $\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq 0$. При $r_1 = |\tilde{q}_1 - 2|^{1/2}|\tilde{q}_1\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2)^{-1}r_1$ система (2.18) – это $CF_{a,12}^{4,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\tilde{q}_1\tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2))$, $u = \tilde{q}_1^{-1}(\neq 1/2)$, $v = \varkappa_3\tilde{q}_1^{-1}\tilde{q}_2^{-2}$, если по утверждению 2.3, п. 10 $4v(u-1) > 1 \Leftrightarrow 4\varkappa_3(1 - \tilde{q}_1) > \tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2$.

$2_2^{2)}$) $\breve{b}_2 \neq 0$. Если при этом и $\breve{a}_2 \neq 0$, то получаем $SF_{a,10}^{5,1}$.

2_2^{2a}) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\varkappa_6 = \tilde{q}_2^2 + 4\tilde{p}_2(\tilde{q}_1 - 1) \geq 0,\ \varkappa_7 = -\tilde{q}_2(1 + |\tilde{q}_2|^{-1}\varkappa_6^{1/2})(2\tilde{p}_2)^{-1} \neq 0,$ $r_1 = \varkappa_7 r_2\}$, $\varkappa_7 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq 0$. Тогда система (2.16) имеет вид $\varkappa_7\begin{pmatrix} \tilde{q}_1r_2^2 & \tilde{q}_1r_2s_2 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_8r_2^2 & r_2s_2 & 0 \end{pmatrix}$.
Теперь $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_8 = (2\tilde{p}_2\tilde{q}_1 - \varkappa_6 - |\tilde{q}_2|\varkappa_6^{1/2})(2\tilde{p}_2)^{-1} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2^2 \neq \tilde{p}_2(\tilde{q}_1 - 2)^2 \Leftrightarrow \varkappa_3 \neq 0$. При $s_2 = \varkappa_8r_2$, $r_2 = |\varkappa_7\varkappa_8|^{-1/2}$ – это $NSF_7^{4,1}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\varkappa_7\varkappa_8)$, $u = \varkappa_8^{-1}\tilde{q}_1$, $v = \tilde{q}_1$ ($v - u = -\tilde{q}_1\varkappa_8^{-1}(\tilde{q}_2^2 + \varkappa_6 + 2|\tilde{q}_2|\varkappa_6^{1/2})(4\tilde{p}_2)^{-1} \neq 0$). Согласно утверждению 2.3, п. 8 $NSF_7^{4,1} = CF_7^{4,1}$, если $v \neq (2u-1)u^{-1} \Leftrightarrow 2\tilde{p}_2\tilde{q}_1(1 - \tilde{q}_1) + \varkappa_6 + |\tilde{q}_2|\varkappa_6^{1/2} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2^2 \neq \tilde{p}_2(\tilde{q}_1 - 2)^2 \Leftrightarrow \varkappa_8 \neq 0$, что верно, и если $v \neq 2u(u+1)^{-1} \Leftrightarrow \tilde{q}_1(\tilde{q}_2^2 + |\tilde{q}_2|\varkappa_6^{1/2}) \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq 0$.

Вернемся к $NSF_{a,24}^{4,1}$ из 1_2), когда $\tilde{q}_2 \neq 0$. Согласно $2_2^{1)}$) при $\tilde{q}_1 \neq 2$ можно перейти к $NSF_3^{3,1}$ или $NSF_{a,12}^{4,1}$. А при $\tilde{q}_1 = 2$ и $\varkappa_4 = \tilde{q}_2^2 + 4\tilde{p}_2 \geq 0$ согласно 2_1^{2a}) можно перейти к $NSF_7^{4,1}$. Поэтому $NSF_{a,24}^{4,1} = CF_{a,24}^{4,1}$ при $\tilde{q}_1 = 2$ и $\varkappa_4 < 0$, так как тогда $u = \tilde{q}_1^{-1} = 1/2$ и $v = 2\tilde{p}_2\tilde{q}_2^{-2} < -1/2$ (см. утверждение 2.3, п. 14).

II. Итак, система (2.12) сводится к $SF_{24}^{4,1}$ при $\tilde{q}_2 \neq 0$ и к $SF_{14}^{3,1}$ при $\tilde{q}_2 = 0$ (или предшествующим). Поэтому ее имеет смысл сводить только к $CF_1^{4,1}, CF_3^{4,1}, CF_{13}^{4,1}$ из списка 2.1_{II} при $\tilde{q}_2 \neq 0$, причем по утверждению 2.2, п. 3 заменой (1.5) с $r_1 = s_1 \neq 0$.

$CF^{4,1}_1$. Система уравнений $\breve{c}_1, \breve{d}_1, \breve{a}_2, \breve{b}_2 = 0$ совместна только при условиях $\tilde{q}_2 = 0$, $\tilde{p}_2 = s_2^2 s_1^{-2}$, $\tilde{q}_1 = 2$, что превращает (2.12) в $SF^{3,1}_3$, предшествующую $CF^{4,1}_1$.

$CF^{4,1}_3$. Система уравнений $\breve{b}_1, \breve{d}_1, \breve{a}_2, \breve{b}_2 = 0$ только при условиях $\tilde{p}_2 = 4\tilde{q}_2^2$, $\tilde{q}_1 = 3/2$ заменой с $r_1 = s_1$, $s_1 = (6|\tilde{q}_2|)^{-1/2}$, $r_2 = -2\tilde{q}_2 s_1$, $s_2 = 4\tilde{q}_2 s_1$ сводится к $NSF^{4,1}_3$ с $u = -1/2$, которая, в свою очередь, по утверждению 2.3, п. 6 сводится к $SF^{3,1}_3$.

$CF^{4,1}_{13}$. Система уравнений $\breve{b}_1, \breve{c}_1, \breve{a}_2, \breve{c}_2 = 0$ только при условиях $\tilde{p}_2 = 4\tilde{q}_2^2/9$, $\tilde{q}_1 = 1/2$ заменой с $r_1 = s_1$, $s_1 = |q_2|^{-1/2}$, $r_2 = -4q_2 s_1/3$, $s_2 = 2q_2 s_1/3$ сводится к $NSF^{4,1}_{13}$ с $u = 2/3$, которая согласно утверждению 2.3, п. 11 сводится к $SF^{3,1}_3$.

В итоге, замены, сводящие (2.12) к $CF^{4,1}_1$, $CF^{4,1}_3$, $CF^{4,1}_{13}$ отсутствуют. □

2.6. Сведение систем из третьего класса к $\mathbf{CF^{m,1}}$.

Договоримся, что приводимые ниже условия на коэффициенты исходной системы, имеющие вид $\xi_1^{\pm} = 0$, $\xi_2^{\mp} \neq 0$, означают, что $\xi_1^+ = 0$, $\xi_2^- \neq 0$ или $\xi_1^- = 0$, $\xi_2^+ \neq 0$, и выбор их первого или второго верхнего знака влечет за собой такой же выбор в приведенных далее коэффициентах замены и получаемых значениях параметров канонической формы.

Лемма 2.3. *Любая система* (2.8) *с* $\hat{t}_1 \neq 0$ *линейно эквивалентна какой-либо канонической форме из списков* $2.1_3, 2.1_{\text{II}}$. *Ниже для каждой из двадцати пяти таких* $CF^{m,1}_i$ *приведены: a) условия на коэффициенты* $\tilde{p}_1\,(\neq 0)$, $\tilde{t}_1\,(\neq 0)$, $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{t}_2$ $(\tilde{q}_2^2 + \tilde{t}_2^2 \neq 0)$ *системы* (2.13), *полученной из* (2.8) *заменой* J^1_3, *b) замена* (1.5), *преобразующая правую часть* (2.13) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения* σ *и параметров из* $cs^{m,1}_i$:

$CF^{2,1}_9$: *a)* $\varkappa_{10} = 0,\ \varkappa_{13} = 0,\ \varkappa_{15} = 0$, *b)* $L^{2,1}_9$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$;

$CF^{3,1}_{22}$: *a)* $\varkappa_{10} = 0,\ \varkappa_{13} = 0,\ \varkappa_{15} \neq 0$, *b)* $L^{3,1}_{22}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{15}(\varkappa_{16}\tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF^{3,1}_{17}$: *a)* $\varkappa_{10} = 0,\ \varkappa_{15} = 0,\ \varkappa_{13} \neq 0$, *b)* $L^{3,1}_{17}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{13}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF^{3,1}_{11,\kappa}$: 1) *a)* $\tilde{q}_1 = 0,\ \tilde{t}_2 = 0$, *b)* $L1^{3,1}_{11,\kappa}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{t}_1\tilde{q}_2)$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$;
2) *a)* $\varkappa_{10} = 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{14} = 0$, *b)* $L2^{3,1}_{11,\kappa}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)$, $u = \varkappa_{13}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$;

$CF^{4,1}_{27}$: *a)* $\varkappa_{10} = 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{13} \neq 0,\ \varkappa_{14} \neq 0,\ \varkappa_{15} \neq 0,\ 2.3_{15}$, *b)* $L^{4,1}_{27}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{15}(\varkappa_{14}\tilde{t}_2)^{-2/3}$, $v = \varkappa_{13}(\varkappa_{14}\tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF^{3,1}_{21}$: *a)* $\varkappa_{10} \neq 0,\ \tilde{q}_1 \neq 0,\ \varkappa_{12} = 0,\ \varkappa_9 = 0$, *b)* $L^{3,1}_{21}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{10}(\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)^{-1/3}\tilde{t}_2^{-2/3}$;

$CF^{4,1}_{19}$: *a)* $\varkappa_{10} \neq 0,\ \tilde{q}_1 \neq 0,\ \varkappa_{12} = 0,\ \varkappa_9 \neq 0,\ \varkappa_{17} \neq 0,\ \varkappa_{19} \neq 0$, *b)* $L^{4,1}_{19}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_9(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-2/3}$, $v = -(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-1/3}$;

$CF^{4,1}_{33}$: *a)* $\varkappa_{10} \neq 0,\ \varkappa_{12} \neq 0,\ \varkappa_9 = 0,\ 2.3_{20}$, *b)* $L^{4,1}_{33}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v = \varkappa_{16}\tilde{t}_2\varkappa_{10}^{-3}$;

$CF^{4,1}_{11}$: 1) *a)* $\tilde{t}_2 = 0,\ \tilde{q}_1 \neq 0,\ 2.3_9$, *b)* $L1^{4,1}_{11}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$, $v = \tilde{q}_1^{-2}\tilde{q}_2\tilde{t}_1$;
2) *a)* $\varkappa_{10} \neq 0, \tilde{t}_2 \neq 0, \varkappa_{11} = 0, 2.3_9$, *b)* $L2^{4,1}_{11}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}(\varkappa_{12}\tilde{t}_1)$, $u = \varkappa_{16}\varkappa_{12}^{-1}$, $v = \varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF^{3,1}_{19}$: *a)* $\varkappa_{10} \neq 0, \varkappa_{12}, \varkappa_{17} = 0$, *b)* $L^{3,1}_{19}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\,\tilde{t}_1$, $u = -\varkappa_{10}(2\tilde{q}_1^2\tilde{t}_2)^{-1/3}$;

$CF^{3,1}_6$: 1) *a)* $\varkappa_{12} = 0, \varkappa_{19} = 0$, *b)* $L1^{3,1}_6$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2\varkappa_{10}^{-2}$;
2) *a)* $\tilde{q}_1 = 0,\ \tilde{q}_2 = 0$, *b)* $L2^{3,1}_6$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$;

$CF^{4,1}_{30}$: *a)* $\varkappa_{10} \neq 0,\ \varkappa_{12} \neq 0,\ \varkappa_{17} = 0,\ 2.3_{18}$, *b)* $L^{4,1}_{30}$, *c)* $u = \varkappa_{10}(2\varkappa_{20}\tilde{q}_1)^{-1/3}$, $v = 4\varkappa_{12}(2\varkappa_{20}\tilde{q}_1)^{-2/3}$, $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$;

$CF^{4,1}_{14}$: 1) *a)* $\varkappa_{10} \neq 0,\ \tilde{q}_1 \neq 0,\ \varkappa_{12} \neq 0,\ \varkappa_{18} = 0,\ 2.3_{12}$, *b)* $L1^{4,1}_{14}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = 4\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v = -2\varkappa_{20}\varkappa_{10}^{-2}$;
2) *a)* $\tilde{q}_1 = 0,\ \tilde{q}_2 \neq 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ 2.3_{12}$, *b)* $L2^{4,1}_{14}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \tilde{q}_2\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$, $v = \tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$;

$CF_{29}^{4,1}:$ *a)* $\varkappa_{17}>0,\ \varkappa_{24}^{\pm}=0,\ \varkappa_{23}^{\mp}\neq 0,\ 2.3_{17},$ *b)* $L_{29}^{4,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=\pm\varkappa_{23}^{\mp}\varkappa_{17}^{-1/2}/2,$ $v=\pm\varkappa_{21}^{\pm}\varkappa_{22}^{\mp}\varkappa_{17}^{-3/2}/4;$

$CF_{5}^{4,1}:$ 1) *a)* $\tilde q_2\neq 0,\ \varkappa_{25}\geq 0,\ \varkappa_{28}^{\pm}=0,\ 2.3_7,$ *b)* $L1_5^{4,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=4\varkappa_{30}^{\pm}(\varkappa_{26}^{\mp})^{-2},$ $v=2\varkappa_{26}^{\pm}(\varkappa_{26}^{\mp})^{-1};$
2) *a) при* $\tilde q_1\neq 0,\ \tilde q_2=0,\ 2.3_7,$ *b)* $L2_5^{4,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2^{-2},\ v=\tilde q_1\tilde t_2^{-1};$

$CF_{8}^{5,1}:$ *a)* $\tilde q_1\neq 0,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ 2.4_4,$ *b) нормировка* $L_8^{5,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2,\ u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1},$ $v=\tilde q_1\tilde t_2^{-1},\ w=\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-2};$

$CF_{1}^{4,1}:$ 1) *a)* $\tilde q_1=0,\tilde q_2=2\tilde p_1,\tilde t_2\neq 0,\varkappa_{31}>0,2.3_5,$ *b)* $L1_1^{4,1},$ *c)* $\sigma=\pm\operatorname{sign}(\varkappa_{32}^{\pm}\tilde t_1),$ $u=-\varkappa_{32}^{\mp}(\varkappa_{32}^{\pm})^{-1};$
2) *a)* $\tilde q_2=0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{31}\geq 0,\ \tilde q_1=\varkappa_{32}^{\mp},\ 2.3_5,$ *b)* $L2_1^{4,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1,\ u=\varkappa_{32}^{\pm}\tilde t_2(2\tilde p_1\tilde t_1)^{-1};$

$CF_{3}^{4,1}:$ 1) *a)* $\tilde p_1=\tilde q_1(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1^{-1},\ \tilde q_2=\tilde q_1(3\tilde q_1-2\tilde t_2)\tilde t_1^{-1},\ \tilde t_2\neq 3\tilde q_1,\ \tilde q_2^2+\tilde t_2^2\neq 0,\ 2.3_6,$ *b)* $L1_3^{4,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde t_1(3\tilde q_1-\tilde t_2)(\tilde q_1-\tilde t_2)),\ u=\tilde q_1(\tilde q_1-\tilde t_2)^{-1};$
2) *a)* $\tilde p_1=\tilde q_1(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(9\tilde t_1)^{-1},\ \tilde q_2=0,\ \tilde t_2\neq 0,\ 2.3_6,$ *b)* $L2_3^{4,1},$ *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}(\tilde t_1\tilde t_2(2\tilde q_1-3\tilde t_2)),$ $u=-\tilde q_1(3\tilde t_2)^{-1};$
3) *a)* $\tilde p_1=(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)(16\tilde t_1)^{-1},\ \tilde q_2=\tilde t_2(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(8\tilde t_1)^{-1},\ \tilde t_2\neq 0,2.3_6,$ *b)* $L3_3^{4,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}((2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1),\ u=-2\tilde t_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)^{-1};$

$CF_{13}^{4,1}:$ 1) *a)* $\tilde p_1=(4\tilde q_1^2-\tilde t_2^2)(12\tilde t_1)^{-1},\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde q_2=(2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2(4\tilde t_1)^{-1},\ 2.3_{11},$ *b)* $L1_{13}^{4,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}((2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1),\ u=(2\tilde q_1+\tilde t_2)(3\tilde t_2)^{-1};$
2) *a)* $\tilde t_2\neq 0,\ \tilde q_2\tilde t_1>0,\ \tilde p_1=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{35}^{\pm}(\varkappa_{33}^{\pm})^{-2}\tilde t_1^{-1},$ *если* $\varkappa_{33}^{\pm}\neq 0,\ \tilde q_1=\pm(2\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)(\varkappa_{33}^{\pm})^{-1},$ $\varkappa_{34}^{\pm}\neq 0,\ 2.3_{11},$ *b)* $L2_{13}^{4,1},$ *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}(\varkappa_{34}^{\pm}\tilde t_1),\ u=-\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{33}^{\pm}(3\varkappa_{35}^{\pm})^{-1};$

$CF_{28}^{4,1}:$ *a)* $\tilde q_1\neq 0,-\tilde t_2,-2\tilde t_2,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde p_1=\theta_*\tilde t_1^{-1},\ \varkappa_{38}=0,\ \varkappa_{36},\varkappa_{37},\varkappa_{39}\neq 0,\ \theta_*:$ $S_1(\theta),\ 2.3_{16},$ *b)* $L_{28}^{4,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{36}\varkappa_{39}\tilde t_1),\ u=-\varkappa_{37}\varkappa_{39}^{-1};$

$CF_{32}^{4,1}:$ *a)* $\tilde q_1\neq 0,-\tilde t_2,-2\tilde t_2,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{40}\geq 0,\ \varkappa_{41}^{\pm}\neq 0,\ \tilde p_1=\varkappa_{41}^{\pm}\tilde t_1^{-1},\ \tilde q_2=$ $((\tilde q_1+\tilde t_2)^2-3\varkappa_{41}^{\pm})\tilde t_1^{-1},\ \varkappa_{42}^{\pm}\neq 0,\ \varkappa_{43}^{\pm}\neq 0,\ 2.3_{19},$ *b)* $L_{32}^{4,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{42}^{\pm}\tilde t_1),\ u=3\varkappa_{43}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2};$

$CF_{36}^{4,1}:$ *a)* $\tilde q_1\neq 0,-\tilde t_2,-3\tilde t_2/2,-2\tilde t_2,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{44}\geq 0,\ \varkappa_{45}^{\pm}\neq 0,\ \tilde p_1=\varkappa_{45}^{\pm}\tilde t_1^{-1},$ $\tilde q_2=-(3\varkappa_{45}^{\pm}+2\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)\tilde t_1^{-1},\ \varkappa_{46}^{\pm}\neq 0,\ \varkappa_{47}^{\pm}\neq 0,\ 2.3_{21},$ *b)* $L_{36}^{4,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{46}^{\pm}\tilde t_1),\ u=\varkappa_{47}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2};$

$CF_{3}^{5,1}:$ 1) *a)* $\tilde q_2\neq 0,3\tilde p_1,\ \tilde t_1=\tilde q_1(2\tilde p_1\tilde q_1+\tilde t_2\tilde q_2-3\tilde t_2\tilde p_1)(\tilde q_2-3\tilde p_1)^{-2},\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{48}\neq$ $0,-\tilde q_1\tilde q_2,\ 2.4_1,$ *b)* $L1_3^{5,1},$ *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}\tilde p_1,\ u=-\varkappa_{48}(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1},\ v=-(\tilde q_1\tilde q_2+\varkappa_{48})(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1};$
2) *a)* $\tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_1=-\tilde t_2(\tilde p_1\tilde t_2-2\tilde q_1\tilde q_2+\tilde q_2\tilde t_2)(2\tilde q_2)^{-2},\ \tilde q_1\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{49}\neq 0,\tilde p_1\tilde t_2,\ 2.4_1,$ *b)* $L2_3^{5,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2,\ u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1},\ v=\varkappa_{49}(\tilde q_2\tilde t_2)^{-1};$
3) *a)* $\tilde q_1\neq 0,\tilde t_2,\ \tilde q_2=(\tilde t_2\tilde q_1^3-(\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde t_2^2)\tilde q_1^2-\tilde t_2(2\tilde p_1\tilde t_1-\tilde t_2^2)\tilde q_1+\tilde p_1\tilde t_1(4\tilde p_1\tilde t_1+3\tilde t_2^2))\tilde t_1^{-1}(\tilde q_1-\tilde t_2)^{-2}\neq 0,$ $\tilde t_2\neq 0,\ \varkappa_{50}\neq 0,\ \varkappa_{51}\neq 0,\ \varkappa_{52}\neq 0,\ 2.4_1,$ *b)* $L3_3^{5,1},$ *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}(\varkappa_{50}\tilde p_1),\ u=-\varkappa_{51}(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1},$ $v=-(\tilde q_1-\tilde t_2)^2(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1};$

$CF_{6}^{5,1}:$ 1) *a)* $\tilde q_1\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde p_1=4\varkappa_{53}\tilde q_2\tilde t_2^{-2}/3,\ \varkappa_{54}\neq 0,\ 4\varkappa_{53}\neq 3\varkappa_{54},\ 2.4_2,$ *b)* $L1_6^{5,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2,\ u=4\varkappa_{53}(3\tilde t_2^2)^{-1},\ v=\varkappa_{54}\tilde t_2^{-2};$
2) *a)* $\tilde q_1\neq 0,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde p_1=-\varkappa_{55}(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1},\ \varkappa_{56}\neq 0,\ \varkappa_{57}\neq 0,\ \varkappa_{58}\neq 0,\ \varkappa_{59}\neq 0,$ $\varkappa_{57}\neq\varkappa_{58},\ \theta_*\colon S_2(\theta),\ 2.4_2,$ *b)* $L2_6^{5,1},$ *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}(\varkappa_{59}\tilde t_1),\ u=3\varkappa_{57}\theta_*\varkappa_{59}^{-1},\ v=3\varkappa_{58}\theta_*\varkappa_{59}^{-1};$

$CF_{7}^{5,1}:$ 1) *a)* $\tilde q_2\neq 0,3\tilde p_1,\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde t_1=\varkappa_{60}\tilde q_1(\tilde q_2-3\tilde p_1)^{-2},\ \varkappa_{61}\neq 0,-\tilde q_1\tilde q_2,\ 2.4_3,$ *b)* $L1_7^{5,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1,\ u=\varkappa_{61}(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1},\ v=(\varkappa_{61}+\tilde q_1\tilde q_2)(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1};$
2) *a)* $\tilde q_1\neq 0,\ \tilde q_2\neq 0,\ \tilde t_2\neq 0,\ \tilde p_1=-\varkappa_{55}(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1},\ \varkappa_{56}\neq 0,\ \varkappa_{59}\neq 0,3\varkappa_{62},\ \varkappa_{62}\neq 0,\ \varkappa_{63}\neq 0,\ \theta_*:$ $S_3(\theta),\ 2.4_3,$ *b)* $L2_7^{5,1},$ *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\varkappa_{63},\ u=\varkappa_{59}(3\varkappa_{63}\tilde t_1\theta_*^2)^{-1},\ v=\varkappa_{62}(\varkappa_{63}\tilde t_1\theta_*^2)^{-1}.$

Здесь запись 2.3_i *означает, что элементы системы* (2.13) *таковы, что значения параметров, входящих в ее каноническую форму, не удовлетворяют условиями из пункта* i*) утверждения* 2.3. *Запись* 2.4_j *понимается аналогично.*

Доказательство. I. В случае 3), когда в (2.8) $\hat{t}_1 \neq 0$, из системы (2.13) заменой (1.5) с $s_1 = 0$ $(r_1, s_2 \neq 0)$ (см. приложение 4.6) получаем систему (2.14) с $\tilde{t}_1, \tilde{p}_1 \neq 0$ $(\breve{a}_1^2 + \breve{a}_2^2, \breve{c}_1 \neq 0)$ вида

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 + \tilde{q}_1 r_1 r_2 + \tilde{t}_1 r_2^2 & (\tilde{q}_1 r_1 + 2\tilde{t}_1 r_2) s_2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ ((\tilde{q}_2 - \tilde{p}_1) r_1^2 + (\tilde{t}_2 - \tilde{q}_1) r_1 r_2 - \tilde{t}_1 r_2^2) r_2 s_2^{-1} & \tilde{q}_2 r_1^2 - (\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2) r_1 r_2 - 2\tilde{t}_1 r_2^2 & (\tilde{t}_2 r_1 - \tilde{t}_1 r_2) s_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

1) $\breve{c}_2 = 0 \Leftrightarrow r_2 = \tilde{t}_1^{-1} \tilde{t}_2 r_1$. Тогда система (2.19) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_9 \tilde{t}_1^{-1} r_1^2 & \varkappa_{10} r_1 s_2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ \varkappa_{11} \tilde{t}_2 \tilde{t}_1^{-2} r_1^3 s_2^{-1} & \varkappa_{12} \tilde{t}_1^{-1} r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

1_1) $\breve{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \varkappa_{10} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_1 = -2\tilde{t}_2$. Тогда система (2.20) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_{13} \tilde{t}_1^{-1} r_1^2 & 0 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ \varkappa_{14} \tilde{t}_2 \tilde{t}_1^{-2} r_1^3 s_2^{-1} & \varkappa_{15} \tilde{t}_1^{-1} r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

1_1^1) $\breve{a}_1 = 0 \Leftrightarrow \varkappa_{13} = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = \tilde{t}_1^{-1} \tilde{t}_2^2$ $(\breve{a}_2 \neq 0)$. Тогда система (2.21) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ \varkappa_{16} \tilde{t}_2 \tilde{t}_1^{-2} r_1^3 s_2^{-1} & \varkappa_{15} \tilde{t}_1^{-1} r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1_1^{1a}) $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \varkappa_{15} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 = -2\tilde{t}_2^2 \tilde{t}_1^{-1}$. При $r_1 = -\tilde{t}_1 |\tilde{t}_1|^{-1/2} \tilde{t}_2^{-1}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $CF_9^{2,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$.

1_1^{1b}) $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{15} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq -2\tilde{t}_2^2 \tilde{t}_1^{-1}$. При $r_1 = \tilde{t}_1 (\varkappa_{16} \tilde{t}_2)^{-1/3} |\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $CF_{a,22}^{3,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{15} (\varkappa_{16} \tilde{t}_2)^{-2/3}$.

1_1^2) $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \varkappa_{15} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 = -2\tilde{t}_2^2 \tilde{t}_1^{-1}$ $(\breve{a}_2 \neq 0)$. Тогда система (2.21) имеет вид $\begin{pmatrix} \varkappa_{13} \tilde{t}_1^{-1} r_1^2 & 0 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ -\tilde{p}_1 \tilde{t}_2 \tilde{t}_1^{-1} r_1^3 s_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{13} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 \neq \tilde{t}_1^{-1} \tilde{t}_2^2$. При $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $r_1 = -(\tilde{p}_1 \tilde{t}_2)^{-1/3} |\tilde{t}_1|^{1/6}$ – это $CF_{17}^{3,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{13} (\tilde{p}_1 \tilde{t}_1 \tilde{t}_2)^{-2/3}$.

1_1^3) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\tilde{t}_2 = 0$ или $\tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{14} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 = (\tilde{p}_1 \tilde{t}_1 - 2\tilde{t}_2^2) \tilde{t}_1^{-1}\}$ $(\breve{a}_1, \breve{b}_2 \neq 0)$.

1_1^{3a}) $\tilde{t}_2 = 0$. Тогда система (2.21) $= \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & 0 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2 r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\tilde{q}_2 \neq 0)$. При $r_1 = |\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $CF_{11,\kappa}^{3,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{q}_2$, $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{t}_1 \tilde{q}_2)$, $u = \tilde{p}_1 \tilde{q}_2^{-1}$.

1_1^{3b}) $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{14} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 = (\tilde{p}_1 \tilde{t}_1 - 2\tilde{t}_2^2) \tilde{t}_1^{-1}$. Тогда система (2.21) имеет вид $\begin{pmatrix} \varkappa_{13} \tilde{t}_1^{-1} r_1^2 & 0 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & \tilde{p}_1 r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\varkappa_{13} = \tilde{p}_1 \tilde{t}_1 - \tilde{t}_2^2 \neq 0)$. При $r_1 = |\tilde{p}_1|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $CF_{11,\kappa}^{3,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{p}_1$, $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{p}_1 \tilde{t}_1)$, $u = \varkappa_{13} (\tilde{p}_1 \tilde{t}_1)^{-1}$.

1_1^4) $\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{13} \neq 0$, $\breve{a}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{14} \tilde{t}_2 \neq 0$, $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{15} \neq 0$. Тогда система (2.21) при $r_1 = |\tilde{t}_1|^{5/6} (\varkappa_{14} \tilde{t}_1 \tilde{t}_2)^{-1/3}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{a,27}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{15} (\varkappa_{14} \tilde{t}_2)^{-2/3}$, $v = \varkappa_{13} (\varkappa_{14} \tilde{t}_2)^{-2/3}$. Теперь $NSF_{a,27}^{4,1} = CF_{a,27}^{4,1}$, если не выполняются условия утверждения 2.3, п. 15.

1_2) $\breve{b}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_1 \neq -2\tilde{t}_2$.

1_2^1) $\breve{b}_2=0 \Leftrightarrow \varkappa_{12}=0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2=\tilde{q}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}$ $(\breve{a}_2\neq 0)$. Тогда система (2.20) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_9\tilde{t}_1^{-1}r_1^2 & \varkappa_{10}r_1s_2 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0\\ -\tilde{p}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}r_1^3s_2^{-1} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad (\tilde{p}_1,\tilde{t}_1,\tilde{t}_2\neq 0). \tag{2.22}$$

1_2^{1a}) $\breve{a}_1=0 \Leftrightarrow \varkappa_9=0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1=-(\tilde{q}_1+\tilde{t}_2)\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}\,(\neq 0)$. Тогда система (2.22) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \varkappa_{10}r_1s_2 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0\\ (\tilde{q}_1+\tilde{t}_2)\tilde{t}_2^2\tilde{t}_1^{-2}r_1^3s_2^{-1} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=\tilde{t}_1|\tilde{t}_1|^{-1/2}(\tilde{t}_2^2(\tilde{q}_1+\tilde{t}_2))^{-1/3}$, $s_2=|\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{21}^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u=\varkappa_{10}(\tilde{q}_1+\tilde{t}_2)^{-1/3}\tilde{t}_2^{-2/3}$.

$NSF_{21}^{3,1}=CF_{21}^{3,1}$ при $\tilde{q}_1\neq 0$ согласно утверждению 2.3, п. 4, так как $\tilde{q}_1=0\Leftrightarrow u=2$.

1_2^{1b}) $\breve{a}_1\neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_9\neq 0$. Тогда при $r_1=-|\tilde{t}_1|^{1/6}(\tilde{p}_1\tilde{t}_2)^{-1/3}$, $s_2=|\tilde{t}_1|^{-1/2}$ система (2.22) – это $NSF_{19}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u=\varkappa_9(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-2/3}$, $v=-\varkappa_{10}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-1/3}$.

Теперь $NSF_{19}^{4,1}=CF_{19}^{4,1}$ при $\varkappa_{17}\neq 0$ и $\varkappa_{19}\tilde{q}_1\neq 0$ согласно утверждению 2.3, п. 13, так как $\varkappa_{17}=4\tilde{p}_1\tilde{t}_1-\tilde{q}_1^2=0\Leftrightarrow 4u=v^2$, а $4uv=v^3-8\Leftrightarrow \varkappa_{19}\tilde{q}_1=0$.

1_2^2) $\breve{a}_1=0 \Leftrightarrow \varkappa_9=0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1=-(\tilde{q}_1+\tilde{t}_2)\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}$ $(\breve{a}_2\neq 0)$. Тогда система (2.20) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \varkappa_{10}r_1s_2 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0\\ \varkappa_{16}\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-2}r_1^3s_2^{-1} & \varkappa_{12}\tilde{t}_1^{-1}r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Если $\breve{b}_2\neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{12}\neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2\neq\tilde{q}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}$, то при $r_1=\tilde{t}_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde{t}_1|^{-1/2}$ получаем $NSF_{a,33}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u=\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v=\varkappa_{16}\tilde{t}_2\varkappa_{10}^{-3}$. И $NSF_{a,33}^{4,1}=CF_{a,33}^{4,1}$, если не выполняются условия утверждения 2.3, п. 20.

1_2^3) $\breve{a}_2=0\Leftrightarrow\{\tilde{t}_2=0$ или $\tilde{t}_2\neq 0,\ \varkappa_{11}=0\Leftrightarrow\varkappa_{12}-\tilde{p}_1\tilde{t}_1=0\}$ $(\breve{a}_1,\breve{b}_2\neq 0)$.

1_2^{3a}) $\tilde{t}_2=0$ $(\tilde{q}_2\neq 0)$. Тогда (2.20) $=\begin{pmatrix}\tilde{p}_1r_1^2 & \tilde{q}_1r_1s_2 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0\\ 0 & \tilde{q}_2r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ и $\breve{b}_1\neq 0\Leftrightarrow\tilde{q}_1\neq 0$. При $r_1=|\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2=\tilde{q}_1^{-1}\tilde{q}_2|\tilde{q}_2|^{-1/2}$ – это $NSF_{11}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u=\tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$, $v=\tilde{q}_1^{-2}\tilde{q}_2\tilde{t}_1$.

1_2^{3b}) $\tilde{t}_2\neq 0$, $\varkappa_{11}=0\Leftrightarrow\tilde{p}_1=\varkappa_{12}\tilde{t}_1^{-1}$. Тогда (2.20) $=\begin{pmatrix}\varkappa_{16}\tilde{t}_1^{-1}r_1^2 & \varkappa_{10}r_1s_2 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0\\ 0 & \varkappa_{12}\tilde{t}_1^{-1}r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $(\varkappa_{12}=\tilde{q}_2\tilde{t}_1-\tilde{q}_1\tilde{t}_2\neq 0,\ \varkappa_{16}=\tilde{t}_2^2+\tilde{q}_2\tilde{t}_1\neq 0)$. При $r_1=|\varkappa_{12}|^{-1/2}|\tilde{t}_1|^{1/2}$, $s_2=\varkappa_{12}\tilde{t}_1^{-1}\varkappa_{10}^{-1}r_1$ система (2.20) – это $NSF_{11}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde{t}_1\varkappa_{12})$, $u=\varkappa_{16}\varkappa_{12}^{-1}$, $v=\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$.

В обоих случаях $NSF_{11}^{4,1}=CF_{11}^{4,1}$ при невыполнении условий утверждения 2.3, п. 9.

1_2^4) $\breve{a}_1,\breve{a}_2,\breve{b}_1,\breve{b}_2\neq 0$. Тогда система (2.20) – это не представляющая интереса $SF_{a,20}^{5,1}$.

2) $\breve{c}_2\neq 0$, $\breve{b}_1=0\Leftrightarrow r_2=-\tilde{q}_1(2\tilde{t}_1)^{-1}r_1$. Тогда система (2.19) примет вид:

$$\begin{pmatrix}-\varkappa_{17}(4\tilde{t}_1)^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0\\ \varkappa_{18}\tilde{q}_1(8\tilde{t}_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1} & \varkappa_{12}\tilde{t}_1^{-1}r_1^2 & \varkappa_{10}r_1s_2/2 & 0\end{pmatrix} \ (\tilde{p}_1,\tilde{t}_1\neq 0),\quad \varkappa_{10}=\tilde{q}_1+2\tilde{t}_2\neq 0. \tag{2.23}$$

2_1) $\breve{b}_2=0\Leftrightarrow\varkappa_{12}=0\Leftrightarrow\tilde{q}_2=\tilde{q}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}$. Тогда система (2.23) примет вид:

$$\begin{pmatrix}-\varkappa_{17}(4\tilde{t}_1)^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0\\ \varkappa_{19}\tilde{q}_1(8\tilde{t}_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1} & 0 & \varkappa_{10}r_1s_2/2 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

2_1^1) $\breve{a}_1=0\Leftrightarrow\varkappa_{17}=0\Leftrightarrow\tilde{p}_1=\tilde{q}_1^2(4\tilde{t}_1)^{-1}$ $(\breve{a}_2\neq 0)$. Тогда система (2.24) имеет вид $\begin{pmatrix}0 & 0 & \tilde{t}_1s_2^2 & 0\\ -\tilde{q}_1^2\tilde{t}_2(4\tilde{t}_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1} & 0 & \varkappa_{10}r_1s_2/2 & 0\end{pmatrix}$ $(\tilde{q}_1,\tilde{t}_2\neq 0)$. При $r_1=-2^{2/3}|\tilde{t}_1|^{5/6}(\tilde{q}_1^2\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-1/3}$, $s_2=|\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $CF_{a,19}^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u=-\varkappa_{10}(2\tilde{q}_1^2\tilde{t}_2)^{-1/3}$.

2_1^2) $\breve a_2=0\Leftrightarrow\{\tilde q_1=0$ или $\varkappa_{19}=0\Leftrightarrow\tilde p_1=\tilde q_1(\tilde q_1+2\tilde t_2)(4\tilde t_1)^{-1}$ $(\tilde q_1\neq 0)\}$ $(\breve a_1,\breve c_2\neq 0)$.

2_1^{2a}) $\tilde q_1=0$. Тогда (2.24) $=\begin{pmatrix}\tilde p_1r_1^2&0&\tilde t_1s_2^2&0\\0&0&\tilde t_2r_1s_2&0\end{pmatrix}$ и $\varkappa_{10}\neq0\Leftrightarrow\tilde t_2\neq0$, $\varkappa_{12}=0\Leftrightarrow\tilde q_2=0$. При $r_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $CF_6^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2^{-2}$.

2_1^{2b}) $\varkappa_{19}=0\Leftrightarrow\tilde p_1=\tilde q_1\varkappa_{10}(4\tilde t_1)^{-1}$. Тогда (2.24) $=\begin{pmatrix}\tilde q_1\tilde t_2(2\tilde t_1)^{-1}r_1^2&0&\tilde t_1s_2^2&0\\0&0&\varkappa_{10}r_1s_2/2&0\end{pmatrix}$ $(\tilde q_1,\tilde t_2,\varkappa_{10}\neq0)$. При $r_1=2\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}s_2$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $CF_6^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=2\tilde q_1\tilde t_2\varkappa_{10}^{-2}$.

2_1^3) $\breve c_2\neq0\Leftrightarrow\varkappa_{10}\neq0$, $\breve a_1\neq0\Leftrightarrow\varkappa_{17}\neq0$, $\breve a_2\neq0\Leftrightarrow\tilde q_1\varkappa_{19}\neq0$. Тогда система (2.24) при $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$, $r_1=2\tilde t_1(q_1\varkappa_{19})^{-1/3}s_2$, $r_2=-\tilde q_1(\tilde q_1\varkappa_{19})^{-1/3}s_2$ – это $NSF_{a,20}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}v_*&0&1&0\\1&0&u_*&0\end{pmatrix}$ с $\sigma=\operatorname{sign}t_1$, $u_*=\varkappa_{10}(\tilde q_1\varkappa_{19})^{-1/3}$, $v_*=-\varkappa_{17}(\tilde q_1\varkappa_{19})^{-2/3}$ $(v_*\neq u_*^{-1})$. Но $NSF_{a,20}^{4,1}$ при $v_*\neq-u_*^2$ заменой (1.5) с $r_1=(1-u_*v_*)^{-1/3}$, $s_1=0$, $r_2=u_*r_1$, $s_2=1$ сводится к $CF_{19}^{4,1}$ с $u=(u_*^2+v_*)(1-u_*v_*)^{-2/3}$, $v=2u_*(1-u_*v_*)^{-1/3}$, а при $v_*=-u_*^2$ $(u_*\neq-1)$ – сводится к $CF_{21}^{3,1}$ с $u=2u_*(1+u_*^3)^{-1/3}$. Поскольку $v_*=-u_*^2\Leftrightarrow\varkappa_9=0$, условия сведения $NSF_{a,20}^{4,1}$ к $CF_{19}^{4,1}$ совпадают с уже приведенными в 1_2^{1b}), а к $CF_{21}^{3,1}$ – такие же, как в 1_2^{1a}).

2_2) $\breve a_1=0\Leftrightarrow\varkappa_{17}=0\Leftrightarrow\tilde p_1=\tilde q_1^2(4\tilde t_1)^{-1}$ $(\breve a_2\neq0)$. Тогда система (2.23) имеет вид $\begin{pmatrix}0&0&\tilde t_1s_2^2&0\\\varkappa_{20}\tilde q_1(4\tilde t_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1}&\varkappa_{12}\tilde t_1^{-1}r_1^2&\varkappa_{10}r_1s_2/2&0\end{pmatrix}$ $(\tilde q_1,\varkappa_{20}\neq0)$. Теперь $\breve c_2\neq0\Leftrightarrow\varkappa_{10}\neq0$, $\breve b_2\neq0\Leftrightarrow\varkappa_{12}\neq0$. Тогда при $r_1=2|\tilde t_1|^{5/6}(2\varkappa_{20}\tilde t_1\tilde q_1)^{-1/3}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{a,30}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{10}(2\varkappa_{20}\tilde q_1)^{-1/3}$, $v=4\varkappa_{12}(2\varkappa_{20}\tilde q_1)^{-2/3}$. Теперь $NSF_{a,30}^{4,1}=CF_{a,30}^{4,1}$, если не выполняются условия утверждения 2.3, п. 18.

2_3) $\breve a_2=0\Leftrightarrow\{\tilde q_1=0$ или $\tilde q_1\neq0,\ \varkappa_{18}=0\Leftrightarrow\tilde p_1=\tilde q_1(\tilde q_1-2\tilde t_2)(4\tilde t_1)^{-1}+\tilde q_2\}$ $(\breve a_1\neq0)$.

2_3^1) $\tilde q_1=0$. Тогда система (2.23) $=\begin{pmatrix}\tilde p_1r_1^2&0&\tilde t_1s_2^2&0\\0&\tilde q_2r_1^2&\tilde t_2r_1s_2&0\end{pmatrix}$. Теперь $\breve b_2\neq0\Leftrightarrow\tilde q_2\neq0$, $\breve c_2\neq0\Leftrightarrow\tilde t_2\neq0$. Тогда при $r_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{a,14}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-2}$, $v=\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2^{-2}$. И $NSF_{a,14}^{4,1}=CF_{a,14}^{4,1}$ при невыполнении утверждения 2.3, п. 12.

2_3^2) $\tilde q_1\neq0$, $\varkappa_{18}=0\Leftrightarrow\tilde p_1=\tilde q_1(\tilde q_1-2\tilde t_2)(4\tilde t_1)^{-1}+\tilde q_2$. Тогда система (2.23) имеет вид $\begin{pmatrix}-\varkappa_{20}(2\tilde t_1)^{-1}r_1^2&0&\tilde t_1s_2^2&0\\0&\varkappa_{12}\tilde t_1^{-1}r_1^2&\varkappa_{10}r_1s_2/2&0\end{pmatrix}$. Теперь $\breve b_2\neq0\Leftrightarrow\varkappa_{12}\neq0$, $\breve c_2\neq0\Leftrightarrow\varkappa_{10}\neq0$. Тогда при $r_1=2\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{a,14}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=4\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v=-2\varkappa_{20}\varkappa_{10}^{-2}$. И $NSF_{a,14}^{4,1}=CF_{a,14}^{4,1}$, если не выполняются условия утверждения 2.3, п. 12.

2_4) $\breve a_1,\breve a_2,\breve b_2,\breve c_2\neq0$. Тогда система (2.23) – это не представляющая интереса $SF_{a,16}^{5,1}$.

3) $\breve a_1=0\Leftrightarrow\{\varkappa_{17}=\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1\geq0,\ r_2=\varkappa_{21}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}r_1\}$ $(\breve a_2\neq0)$. Тогда система (2.19) примет вид:

$$\begin{pmatrix}0&\pm\varkappa_{17}^{1/2}r_1s_2&\tilde t_1s_2^2&0\\\varkappa_{21}^{\pm}(-\varkappa_{20}\pm\tilde t_2\varkappa_{17}^{1/2})(4\tilde t_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1}&\varkappa_{24}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}r_1^2&\varkappa_{23}^{\mp}r_1s_2/2&0\end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

3_1) $\breve b_2=0\Leftrightarrow\varkappa_{24}^{\pm}=0\Leftrightarrow\tilde q_2=(\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde q_1\tilde t_2\mp(\tilde q_1+2\tilde t_2)\varkappa_{17}^{1/2})(2\tilde t_1)^{-1}$. Тогда система (2.25) имеет вид $\begin{pmatrix}0&\pm\varkappa_{17}^{1/2}r_1s_2&\tilde t_1s_2^2&0\\\varkappa_{21}^{\pm}\varkappa_{22}^{\mp}(4\tilde t_1^2)^{-1}r_1^3s_2^{-1}&0&\varkappa_{23}^{\mp}r_1s_2/2&0\end{pmatrix}$ $(\varkappa_{21}^{\pm},\varkappa_{22}^{\mp}\neq0)$. Теперь

$\breve{b}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{17} \neq 0$, $\breve{c}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{23}^{\mp} \neq 0$. При $r_1 = \pm\varkappa_{17}^{-1/2}\tilde{t}_1|\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{a,29}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \pm\varkappa_{23}^{\mp}\varkappa_{17}^{-1/2}/2$, $v = \pm\varkappa_{21}^{\pm}\varkappa_{22}^{\mp}\varkappa_{17}^{-3/2}/4$. И $NSF_{a,29}^{4,1} = CF_{a,29}^{4,1}$, если не выполняются условия утверждения 2.3, п. 17.

3_2) $\breve{b}_1, \breve{b}_2, \breve{c}_2, \breve{a}_2 \neq 0$. Тогда система (2.25) – это $SF_{a,23}^{5,1}$.

4) Случай $\breve{b}_2 = 0$ удобно рассматривать отдельно для $\tilde{q}_2 = 0$ и $\tilde{q}_2 \neq 0$.

4_1) $\tilde{q}_2 = 0$. Тогда $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \{r_2 = 0$ или $r_2 = (2\tilde{t}_2 - \tilde{q}_1)(2\tilde{t}_1)^{-1}r_1 \neq 0\}$.

4_1^1) $r_2 = 0$. Тогда система (2.19) принимает вид $\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & \tilde{q}_1 r_1 s_2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{t}_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь $\breve{b}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_1 \neq 0$. При $r_1 = \tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-1}|\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_5^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$, $v = \tilde{q}_1\tilde{t}_2^{-1}$. И $NSF_5^{4,1} = CF_5^{4,1}$ если не выполняются условия утверждения 2.3, п.7.

4_1^2) $r_2 = -(\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)(2\tilde{t}_1)^{-1}r_1 \neq 0$. Тогда система (2.19) принимает вид
$\begin{pmatrix} (4\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2 + 4\tilde{t}_2^2)(4\tilde{t}_1)^{-1}r_1^2 & 2\tilde{t}_2 r_1 s_2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ (4\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2 + 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2)(\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)(8\tilde{t}_1^2)^{-1}r_1^3 s_2^{-1} & 0 & \tilde{q}_1 r_1 s_2/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Теперь, если $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = \tilde{q}_1(\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)(4\tilde{t}_1)^{-1}$ $(\tilde{q}_1 \neq 0, 2\tilde{t}_2)$, получаем систему $\begin{pmatrix} -\tilde{t}_2(\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)(2\tilde{t}_1)^{-1}r_1^2 & 2\tilde{t}_2 r_1 s_2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{q}_1 r_1 s_2/2 & 0 \end{pmatrix}$ $(\tilde{t}_2 \neq 0)$. При $r_1 = 2\tilde{q}_1^{-1}\tilde{t}_1|\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_5^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = -2(\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)\tilde{q}_1^{-2}\tilde{t}_2$, $v = 4\tilde{q}_1^{-1}\tilde{t}_2$. В результате снова получена $NSF_5^{4,1}$, но с дополнительным ограничением $\tilde{q}_1 \neq 2\tilde{t}_2$ на элементы (2.19).

4_2) $\tilde{q}_2 \neq 0$. Тогда $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \{\varkappa_{25} = (2\tilde{t}_2 - \tilde{q}_1)^2 + 8\tilde{q}_2\tilde{t}_1 \geq 0,\ r_2 = \varkappa_{27}^{\pm}(4\tilde{t}_1)^{-1}r_1\}$, причем $\varkappa_{27}^{+}\varkappa_{27}^{-} \neq 0$, и система (2.19) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_{29}^{\pm}(8\tilde{t}_1)^{-1}r_1^2 & \varkappa_{26}^{\pm} r_1 s_2/2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ -\varkappa_{27}^{\pm}\varkappa_{28}^{\pm}(32\tilde{t}_1^2)^{-1}r_1^3 s_2^{-1} & 0 & \varkappa_{26}^{\mp} r_1 s_2/4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

4_2^1) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = (\tilde{q}_1^2 - 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2 + 4\tilde{t}_1\tilde{q}_2 \mp \tilde{q}_1\varkappa_{25}^{1/2})(8\tilde{t}_1)^{-1} \Leftrightarrow \varkappa_{28}^{\pm} = 0$. Тогда система (2.26) $= \begin{pmatrix} \varkappa_{30}^{\pm}(4\tilde{t}_1)^{-1}r_1^2 & \varkappa_{26}^{\pm} r_1 s_2/2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_{26}^{\mp} r_1 s_2/4 & 0 \end{pmatrix}$ $(\varkappa_{30}^{\pm}, \varkappa_{26}^{\mp} \neq 0)$. При $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $r_1 = 4(\varkappa_{26}^{\mp})^{-1}\tilde{t}_1^{-1}|\tilde{t}_1|^{-1/2}$ – это $NSF_5^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = 4\varkappa_{30}^{\pm}(\varkappa_{26}^{\mp})^{-2}$, $v = 2\varkappa_{26}^{\pm}(\varkappa_{26}^{\mp})^{-1}$. И $NSF_5^{4,1} = CF_5^{4,1}$ если не выполняются условия утверждения 2.3, п.7.

4_2^2) $\breve{a}_2, \breve{a}_1, \breve{b}_1, \breve{c}_2 \neq 0$. Тогда система (2.26) – это не представляющая интереса $SF_{14}^{5,1}$.

5) $\breve{a}_2 = 0$. Тогда при $r_2 = 0$ система (2.19) имеет вид $\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 r_1^2 & \tilde{q}_1 r_1 s_2 & \tilde{t}_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2 r_1^2 & \tilde{t}_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому при $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$ и $r_1 = |\tilde{q}_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{q}_2|\tilde{q}_2|^{-1/2}\tilde{t}_2^{-1}$ – это $NSF_8^{5,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$, $v = \tilde{q}_1\tilde{t}_2^{-1}$, $w = \tilde{q}_2\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$.

II. Будем сводить систему (2.13) $(\tilde{p}_1, \tilde{t}_1 \neq 0)$ заменой (1.5) с $r_1 = s_1 \neq 0$ к каждой из шести $NSF^{4,1}$ вида (2.14) из второй части списка 2.1.

$NSF_1^{4,1}$. Система уравнений $\breve{c}_1, \breve{d}_1, \breve{a}_2, \breve{b}_2 = 0$ совместна в двух случаях.

1) $\tilde{q}_1 = 0$, $\tilde{q}_2 = 2\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_1 = -\tilde{t}_1 r_2 s_2 s_1^{-2}$, $\tilde{t}_2 = \tilde{t}_1(r_2 + s_2)s_1^{-1}$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, иначе (2.13) – это $SF^{3,1}$. Два последних условия разрешимы относительно $r_2, s_2 : r_2 = \varkappa_{32}^{\mp}(2\tilde{t}_1)^{-1}s_1$, $s_2 = \varkappa_{32}^{\pm}(2\tilde{t}_1)^{-1}s_1$ с $\varkappa_{32}^{\pm} = t_2 \pm \varkappa_{31}^{1/2}$ $(\varkappa_{32}^{-}\varkappa_{32}^{+} \neq 0)$, причем $\varkappa_{31} = \tilde{t}_2^2 + 4\tilde{p}_1\tilde{t}_1 > 0$, иначе $\delta = 0$. Тогда система (2.14) имеет вид $\dfrac{\pm\,\varkappa_{31}^{1/2}}{2\tilde{t}_1}s_1^2 \begin{pmatrix} -\varkappa_{32}^{\mp} & -\varkappa_{32}^{\mp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_{32}^{\pm} & \varkappa_{32}^{\pm} \end{pmatrix}$. При $s_1 = \varkappa_{31}^{-1/4}|2\tilde{t}_1(\varkappa_{32}^{\pm})^{-1}|^{1/2}$ – это $NSF_1^{4,1}$

с $\sigma=\pm\mathrm{sign}(\varkappa_{32}^{\pm}\tilde t_1)$, $u=-\varkappa_{32}^{\mp}(\varkappa_{32}^{\pm})^{-1}$.

2) $\tilde q_2=0$, $\tilde t_2\ne 0$, иначе (2.13) – это $SF^{3,1}$. При $\varkappa_{31}\ge 0$, $\tilde q_1=\varkappa_{32}^{\mp}$, $s_2=0$, $r_2=\varkappa_{32}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}s_1$ $(\varkappa_{32}^{-}\varkappa_{32}^{+}\ne 0)$ система (2.14) $=s_1^2\begin{pmatrix}\varkappa_{32}^{\pm}\tilde t_2(2\tilde t_1)^{-1} & \varkappa_{32}^{\pm}\tilde t_2(2\tilde t_1)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \tilde p_1 & \tilde p_1\end{pmatrix}$. При $s_1=|\tilde p_1|^{-1/2}$ – это $NSF_1^{4,1}$ с $\sigma=\mathrm{sign}\,\tilde p_1$, $u=\varkappa_{32}^{\pm}\tilde t_2(2\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$.

$NSF_3^{4,1}$. Система уравнений $\breve b_1,\breve d_1,\breve a_2,\breve b_2=0$ совместна в трех случаях.

1) $\tilde p_1=\tilde q_1(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}$ $(\ne 0)$ $\tilde q_2=\tilde q_1(3\tilde q_1-2\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}$, $s_2=(\tilde t_2-2\tilde q_1)\tilde t_1^{-1}s_1$, $r_2=\tilde q_1\tilde t_1^{-1}s_1$, причем $3\tilde q_1-\tilde t_2\ne 0$, иначе $\delta=0$ и $\tilde q_2^2+\tilde t_2^2\ne 0$, иначе (2.13) – это $SF^{3,1}$. Тогда система (2.14) имеет вид $\dfrac{3\tilde q_1-\tilde t_2}{\tilde t_1}s_1^2\begin{pmatrix}\tilde q_1 & 0 & -\tilde q_1 & 0\\ 0 & 0 & \tilde q_1-\tilde t_2 & \tilde q_1-\tilde t_2\end{pmatrix}$. При $s_1=|\tilde t_1^{-1}(3\tilde q_1-\tilde t_2)(\tilde q_1-\tilde t_2)|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{4,1}$ с $\sigma=\mathrm{sign}(\tilde t_1(3\tilde q_1-\tilde t_2)(\tilde q_1-\tilde t_2))$, $u=\tilde q_1(\tilde q_1-\tilde t_2)^{-1}$.

2) $\tilde p_1=\tilde q_1(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(9\tilde t_1)^{-1}(\ne 0)$, $\tilde q_2=0$, $r_2=0$, $s_2=-(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(3\tilde t_1)^{-1}s_1$, причем $\tilde t_2\ne 0$, иначе (2.13) – $SF^{3,1}$. Тогда система (2.14) $=\dfrac{2\tilde q_1-3\tilde t_2}{9\tilde t_1}s_1^2\begin{pmatrix}\tilde q_1 & 0 & -\tilde q_1 & 0\\ 0 & 0 & -3\tilde t_2 & -3\tilde t_2\end{pmatrix}$. При $s_1=\sqrt{3}\,|(2\tilde q_1-3\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1^{-1}|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{4,1}$ с $\sigma=-\mathrm{sign}(\tilde t_1\tilde t_2(2\tilde q_1-3\tilde t_2))$, $u=-\tilde q_1(3\tilde t_2)^{-1}$.

3) $\tilde p_1=(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)(16\tilde t_1)^{-1}(\ne 0)$, $\tilde q_2=(2\tilde q_1-3\tilde t_2)\tilde t_2(8\tilde t_1)^{-1}$, $s_2=0$, $r_2=-(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(4\tilde t_1)^{-1}s_1$, причем $\tilde t_2\ne 0$, иначе $\tilde q_2=0$ и (2.13) – это $SF^{3,1}$. Тогда система (2.14) имеет вид $\dfrac{2\tilde q_1-3\tilde t_2}{16\tilde t_1}s_1^2\begin{pmatrix}-2\tilde t_2 & 0 & 2\tilde t_2 & 0\\ 0 & 0 & 2\tilde q_1+\tilde t_2 & 2\tilde q_1+\tilde t_2\end{pmatrix}$. При $s_1=4|\tilde t_1^{-1}(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{4,1}$ с $\sigma=\mathrm{sign}(\tilde t_1(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2))$, $u=-2\tilde t_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)^{-1}$.

$NSF_{13}^{4,1}$. Система уравнений $\breve b_1,\breve c_1,\breve a_2,\breve c_2=0$ совместна в трех случаях.

1) $\tilde p_1=(4\tilde q_1^2-\tilde t_2^2)(12\tilde t_1)^{-1}(\ne 0)$, $\tilde t_2\ne 0$, $\tilde q_2=(2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2(4\tilde t_1)^{-1}$ $(\tilde q_2\ne 0)$, $r_2=0$, $s_2=-(2\tilde q_1-\tilde t_2)(2\tilde t_1)^{-1}s_1$, тогда система (2.14) $=\dfrac{2\tilde q_1-\tilde t_2}{12\tilde t_1}s_1^2\begin{pmatrix}2\tilde q_1+\tilde t_2 & 0 & 0 & 2\tilde q_1+\tilde t_2\\ 0 & 3\tilde t_2 & 0 & -3\tilde t_2\end{pmatrix}$. При $s_1=2\,|(2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1^{-1}|^{-1/2}$ – это $NSF_{13}^{4,1}$ с $\sigma=\mathrm{sign}((2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1)$, $u=(2\tilde q_1+\tilde t_2)(3\tilde t_2)^{-1}$.

2) $s_1=-\tilde t_2\tilde q_2^{-1}(2r_2+s_2)(r_2+2s_2)^{-1}s_2\,(\ne 0)$, $\tilde p_1=\tilde q_2(r_2+s_2)(r_2^2+r_2s_2+s_2^2)(2r_2+s_2)^{-1}s_2^{-2}$, $\tilde q_1=\tilde t_2(3r_2^2+4r_2s_2+2s_2^2)((r_2+2s_2)s_2)^{-1}$, $\tilde t_1=\tilde t_2^2\tilde q_2^{-1}(2r_2+s_2)^2(r_2+2s_2)^{-2}$.

В последнем равенстве $\tilde t_2\ne 0$, $\tilde q_2\tilde t_1>0$ и оно разрешимо относительно r_2 хотя бы одним из двух способов: $r_2=-(2(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm\tilde t_2)(\varkappa_{33}^{\pm})^{-1}s_2$, так как $(\varkappa_{33}^{-})^2+(\varkappa_{33}^{+})^2\ne 0$. Тогда $s_1=\pm(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\tilde q_2^{-1}s_2$, $\tilde p_1=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{35}^{\pm}(\varkappa_{33}^{\pm})^{-2}\tilde t_1^{-1}$, $\tilde q_1=\pm(2\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)(\varkappa_{33}^{\pm})^{-1}$, где $\varkappa_{34}^{\pm}\ne 0$, иначе $\delta=0$. Поэтому (2.14) $=\dfrac{\varkappa_{34}^{\pm}\tilde t_1\,s_2^2}{(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}(\varkappa_{33}^{\pm})^2}\begin{pmatrix}\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{33}^{\pm} & 0 & 0 & \varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{33}^{\pm}\\ 0 & -3\varkappa_{35}^{\pm} & 0 & 3\varkappa_{35}^{\pm}\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{33}^{\pm}=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm 2\tilde t_2$, $\varkappa_{34}^{\pm}=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm\tilde t_2$, $\varkappa_{35}^{\pm}=\tilde q_2\tilde t_1\pm(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\tilde t_2+\tilde t_2^2>0$. При $s_2=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/4}\varkappa_{33}^{\pm}(3\varkappa_{35}^{\pm})^{-1/2}|\varkappa_{34}^{\pm}\tilde t_1|^{-1/2}$ – это $NSF_{13}^{4,1}$ с $\sigma=-\mathrm{sign}(\varkappa_{34}^{\pm}\tilde t_1)$, $u=-\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{33}^{\pm}(3\varkappa_{35}^{\pm})^{-1}$.

3) $r_2=-2s_2$, $\tilde t_2=0$, $\tilde p_1=\tilde q_2$, $\tilde q_1=2\tilde q_2s_1s_2^{-1}$, $\tilde t_1=\tilde q_2s_1^2s_2^{-2}$, т.е. (2.13) – это $SF_{11}^{4,1}$.

К остальным шести $NSF^{m,1}$ из списка 2.1_{II} систему (2.13) имеет смысл сводить только при условиях $\tilde q_1\ne 0$, $\tilde q_2\ne 0$, $\tilde t_2\ne 0$, иначе (2.13) им предшествует.

$NSF_{28}^{4,1}$. 1) $\varkappa_{10}=\tilde q_1+2\tilde t_2\ne 0$. Система уравнений $\breve a_1,\breve c_1,\breve b_2,\breve c_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde p_2,\tilde q_2,r_2,s_2$. Имеем: $\tilde p_2=S_1(\tilde p_1\tilde t_1)\,\tilde t_1^{-2}\varkappa_{10}^{-3}$, $\tilde q_2=-(9(\tilde p_1\tilde t_1)^2-3(\tilde q_1^2-2\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2)\tilde p_1\tilde t_1-\tilde t_2(\tilde t_2+2\tilde q_1)(2\tilde q_1^2+4\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2))\tilde t_1^{-1}\varkappa_{10}^{-2}$, $r_2=-(3\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1$, $s_2=(6\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde q_1^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1$.

Условие $\tilde p_2=0$ достигается, когда $S_1(\theta)$ имеет вещественный нуль $\theta_*\neq 0 \Leftrightarrow \tilde q_1\neq -\tilde t_2$, так как при $\tilde q_1=-\tilde t_2$ многочлен $S_1(\theta)=(27\theta^2-12\tilde t_2^2\theta+2\tilde t_2^4)\theta$ и ненулевых корней не имеет. Поэтому $\forall\,\theta_*$ положим $\tilde p_1=\theta_*\tilde t_1^{-1}$. Заменим также $\tilde p_1\tilde t_1$ на θ_* в $\tilde q_2, r_2, s_2$. Тогда система $(2.14)=\dfrac{\varkappa_{36}s_1^2}{\tilde t_1\varkappa_{10}^2}\begin{pmatrix}0 & -\varkappa_{37} & 0 & \varkappa_{37}\\ \varkappa_{39} & 0 & 0 & \varkappa_{39}\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{36}=9\theta_*-2\tilde q_1^2+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2\neq 0 \Leftrightarrow r_2\neq s_2$, $\varkappa_{37}=3\theta_*-\tilde q_1^2-\tilde q_1\tilde t_2-\tilde t_2^2\neq 0$, $\varkappa_{39}=\theta_*+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2\neq 0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=\varkappa_{10}|\varkappa_{39}\varkappa_{36}\tilde t_1^{-1}|^{-1/2}$ – это $NSF_{28}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{39}\varkappa_{36}\tilde t_1)$, $u=-\varkappa_{39}^{-1}\varkappa_{37}$ $(u\neq -3)$.

2) $\tilde q_1=-2\tilde t_2$. Система уравнений $\breve a_1,\breve c_1,\breve b_2,\breve c_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde p_1,\tilde p_2,\tilde q_2,s_2$. Имеем: $\tilde p_1=\tilde t_2^2\tilde t_1^{-1}$, $\tilde p_2=-((r_2\tilde t_1)^3-4s_1\tilde t_2(r_2\tilde t_1)^2+5(s_1\tilde t_2)^2r_2\tilde t_1-3(s_1\tilde t_2)^3)\tilde t_1^{-2}s_1^{-3}$, $\tilde q_2=-((r_2\tilde t_1)^2-2s_1\tilde t_2r_2\tilde t_1+3(s_1\tilde t_2)^2)\tilde t_1^{-1}s_1^{-2}$, $s_2=-(2r_2\tilde t_1-3s_1\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}$.

Пусть x_0 – вещественный корень уравнения $x^3-4x^2+5x-3=0$, тогда $\tilde p_2=0\Leftrightarrow r_2=x_0\tilde t_2\tilde t_1^{-1}s_1$. Но и без этого условия система $(2.14)=\dfrac{(\tilde t_2s_1-\tilde t_1r_2)^2}{\tilde t_1}\begin{pmatrix}0 & -3 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и в получаемой $NSF_{28}^{4,1}$ будет $u=-3$, при котором она сводится к $SF_{22}^{3,1}$.

$NSF_{32}^{4,1}$. Система уравнений $\breve a_1,\breve b_1,\breve b_2,\breve c_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde p_2$, $\tilde q_2,r_2,s_2$ при $\varkappa_{10}=\tilde q_1+2\tilde t_2\neq 0$. Имеем: $\tilde p_2=S_*(\tilde p_1\tilde t_1)\,\tilde t_1^{-2}\varkappa_{10}^{-1}$, $\tilde q_2=((\tilde q_1+\tilde t_2)^2-3\tilde p_1\tilde t_1)\tilde t_1^{-1}$, $r_2=-(\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}s_1$, $s_2=(3\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1$, где $S_*(\theta)=3\theta^2-2(2\tilde q_1+\tilde t_2)(\tilde q_1+\tilde t_2)\theta+(\tilde q_1^2+\tilde q_1t_2+\tilde t_2^2)(\tilde q_1+\tilde t_2)^2$.

Условие $\tilde p_2=0$ достигается, когда $S_*(\theta)$ имеет вещественный нуль $\theta_*\neq 0\Leftrightarrow \tilde q_1\neq -\tilde t_2$, $\varkappa_{40}=\tilde q_1^2+\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2\geq 0$. Тогда $\theta_*=\varkappa_{41}^{\pm}=(2\tilde q_1+\tilde t_2\pm\varkappa_{40}^{1/2})(\tilde q_1+\tilde t_2)/3\neq 0$, $\tilde p_1=\varkappa_{41}^{\pm}\tilde t_1^{-1}$, в $\tilde q_2,s_2$ заменим $\tilde p_1\tilde t_1$ на $\varkappa_{41}^{\pm}$, и система $(2.14)=\dfrac{\varkappa_{42}^{\pm}s_1^2}{\tilde t_1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\varkappa_{43}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2} & 3\varkappa_{43}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{42}^{\pm}=\varkappa_{41}^{\pm}+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2\neq 0 \;\Leftrightarrow\; r_2\neq s_2$, $\varkappa_{43}^{\pm}=3\varkappa_{41}^{\pm}-\tilde q_1^2-\tilde q_1\tilde t_2-\tilde t_2^2\neq 0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=|\tilde t_1|^{1/2}|\varkappa_{42}^{\pm}|^{-1/2}$ – это $NSF_{32}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{42}^{\pm}\tilde t_1)$, $u=3\varkappa_{43}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}$.

$NSF_{36}^{4,1}$. Система уравнений $\breve a_1,\breve b_1,\breve b_2,\breve d_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde p_2,\tilde q_2,r_2,s_2$ при $\varkappa_{10}=\tilde q_1+2\tilde t_2\neq 0$. Имеем: $\tilde q_2=-(3\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)\tilde t_1^{-1}$, $r_2=-(2\tilde q_1+3\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}s_1$, $s_2=(\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1$, $\tilde p_2=S_*(\tilde p_1\tilde t_1)\,\tilde t_1^{-2}\varkappa_{10}^{-1}$, где $S_*(\theta)=\theta^2-2(\tilde q_1+\tilde t_2)(2\tilde q_1+3\tilde t_2)\theta-\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2)(2\tilde q_1+3\tilde t_2)^2$.

Условие $\tilde p_2=0$ достигается, когда $S_*(\theta)$ имеет вещественный нуль $\theta_*\neq 0\Leftrightarrow\tilde q_1\neq -\tilde t_2$, $\tilde q_1\neq -3\tilde t_2/2$, $\varkappa_{44}=\tilde q_1^2+3\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2\geq 0$. Тогда $\theta_*=\varkappa_{45}^{\pm}=(\tilde q_1+\tilde t_2\pm\varkappa_{44}^{1/2})(2\tilde q_1+3\tilde t_2)\neq 0$, $\tilde p_1=\varkappa_{45}^{\pm}\tilde t_1^{-1}$, в $\tilde q_2,s_2$ вместо $\tilde p_1\tilde t_1$ стоит $\varkappa_{45}^{\pm}$ и система (2.14) имеет вид $\dfrac{\varkappa_{46}^{\pm}s_1^2}{\tilde t_1\varkappa_{10}^2}\begin{pmatrix}0 & 0 & \varkappa_{47}^{\pm} & \varkappa_{47}^{\pm}\\ \varkappa_{10}^2 & 0 & -\varkappa_{10}^2 & 0\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{46}^{\pm}=\varkappa_{45}^{\pm}+2\tilde q_1^2+9\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2)\neq 0\Leftrightarrow r_2\neq s_2$, $\varkappa_{47}^{\pm}=\varkappa_{45}^{\pm}+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2\neq 0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=|\tilde t_1|^{1/2}|\varkappa_{46}^{\pm}|^{-1/2}$ – это $NSF_{36}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{46}^{\pm}\tilde t_1)$, $u=\varkappa_{47}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}$.

$NSF_3^{5,1}$. Система уравнений $\breve d_1,\breve a_2,\breve c_2=0$ совместна в трех случаях.

1) $s_2=0$, $r_2=(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde q_1^{-1}s_1$, $\tilde q_2\neq 3\tilde p_1$, иначе $r_2=s_2$, $\tilde t_1=\tilde q_1(2\tilde p_1\tilde q_1+\tilde t_2\tilde q_2-3\tilde t_2\tilde p_1)(\tilde q_2-3\tilde p_1)^{-2}\neq 0$. Тогда система $(2.14)=s_1^2\begin{pmatrix}\varkappa_{48}\tilde q_1^{-1} & (\tilde q_1\tilde q_2+\varkappa_{48})\tilde q_1^{-1} & \tilde q_2 & 0\\ 0 & -\tilde p_1 & 0 & \tilde p_1\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{48}=\tilde q_1\tilde q_2+\tilde t_2(\tilde q_2-3\tilde p_1)$, при этом $\varkappa_{48}\neq 0$ и $\tilde q_1\tilde q_2+\varkappa_{48}\neq 0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=|\tilde p_1|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{5,1}$ с $\sigma=-\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=-\varkappa_{48}(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1}$, $v=-(\tilde q_1\tilde q_2+\varkappa_{48})(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1}$ $(\breve c_1=-\tilde q_2\tilde p_1^{-1}\neq 0)$.

2) $r_2=0$, $s_2=-2\tilde q_2\tilde t_2^{-1}s_1$, $\tilde t_1=-\tilde t_2(\tilde p_1\tilde t_2-2\tilde q_1\tilde q_2+\tilde q_2\tilde t_2)(2\tilde q_2)^{-2}\neq 0$. Тогда система

(2.14) имеет вид $s_1^2\begin{pmatrix}\tilde p_1 & \varkappa_{49}\tilde t_2^{-1} & (\varkappa_{49}-\tilde p_1\tilde t_2)\tilde t_2^{-1} & 0\\ 0 & \tilde q_2 & 0 & -\tilde q_2\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{49}=3\tilde p_1\tilde t_2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)\neq 0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=|\tilde q_2|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{5,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2$, $u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1}$, $v=\varkappa_{49}(\tilde q_2\tilde t_2)^{-1}$, $\breve c_1=v-u=(\varkappa_{49}-\tilde p_1\tilde t_2)(\tilde q_2\tilde t_2)^{-1}\neq 0\Leftrightarrow \varkappa_{49}-\tilde p_1\tilde t_2\neq 0$.

3) $\tilde p_1=(\tilde t_1r_2-\tilde t_2s_1)(r_2+s_2)s_1^{-2}/2$ $(r_2+s_2\neq 0)$, $\tilde q_1=-(\tilde t_1(r_2+s_2)-\tilde t_2s_1)s_1^{-1}$, $\tilde q_2=(\tilde t_1(r_2-s_2)r_2-\tilde t_2(r_2+s_2)s_1)s_1^{-2}/2$, поэтому $-\tilde t_1(r_2+s_2)s_1^{-1}=\tilde q_1-\tilde t_2\neq 0$. Два первых равенства разрешимы относительно $r_2,s_2:$ $r_2=-(2\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2))^{-1}s_1$, $s_2=(2\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_1^2)(\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2))^{-1}s_1$. Тогда $\tilde q_2=(\tilde t_2\tilde q_1^3-(\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde t_2^2)\tilde q_1^2-\tilde t_2(2\tilde p_1\tilde t_1-\tilde t_2^2)\tilde q_1+\tilde p_1\tilde t_1(4\tilde p_1\tilde t_1+3\tilde t_2^2))\tilde t_1^{-1}(\tilde q_1-\tilde t_2)^{-2}$, система (2.14) $=\dfrac{\varkappa_{50}s_1^2}{\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2)^2}\begin{pmatrix}\varkappa_{51} & (\tilde q_1-\tilde t_2)^2 & -\varkappa_{52} & 0\\ 0 & -\tilde p_1 & 0 & \tilde p_1\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{50}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+\tilde t_2^2\neq 0\Leftrightarrow r_2\neq s_2$, $\varkappa_{52}=\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_1^2$, $\varkappa_{51}=\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2\neq 0$, иначе $R_2=0$. При $s_1=(\tilde q_1-\tilde t_2)|\varkappa_{50}\tilde p_1|^{-1/2}$ – это $NSF_3^{5,1}$ с $\sigma=-\operatorname{sign}(\varkappa_{50}\tilde p_1)$, $u=-\varkappa_{51}(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$, $v=-(\tilde q_1-\tilde t_2)^2(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$, $\breve c_1=v-u=\varkappa_{52}(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{52}\neq 0$.

$NSF_6^{5,1}$. Для системы (2.14) будем решать систему уравнений $\breve c_1,\breve a_2,\breve c_2=0$.

Элемент $\breve a_2=0$ в двух случаях.

1) $r_2=0$. Тогда система уравнений $\breve c_1,\breve c_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde p_1,s_2:$ $\tilde p_1=4\varkappa_{53}\tilde q_2\tilde t_2^{-2}/3\neq 0$ $(\varkappa_{53}=\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_2\tilde t_1\neq 0)$, $s_2=-2\tilde q_2\tilde t_2^{-1}s_1$, и (2.14) имеет вид $\dfrac{\tilde q_2}{3\tilde t_2^2}s_1^2\begin{pmatrix}4\varkappa_{53} & 3\varkappa_{54} & 0 & 4\varkappa_{53}-3\varkappa_{54}\\ 0 & 3\tilde t_2^2 & 0 & -3\tilde t_2^2\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{54}=2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2\neq 0$. При $s_1=|\tilde q_2|^{-1/2}$ – это $NSF_6^{5,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2$, $u=4\varkappa_{53}(3\tilde t_2^2)^{-1}$, $v=\varkappa_{54}\tilde t_2^{-2}$, $\breve d_1\neq 0\Leftrightarrow 4\varkappa_{53}\neq 3\varkappa_{54}$.

2) $\tilde p_1=-(\tilde t_1r_2^2+(\tilde q_1-\tilde t_2)s_1r_2-\tilde q_2s_1^2)s_1^{-2}$. Положим в замене (1.5) $r_2=\eta s_1$, $s_2=\theta s_1$ $(\eta\neq\theta)$. Тогда в системе (2.14) $\breve a_2=0$ при $\tilde p_1=-(\tilde t_1\eta^2+(\tilde q_1-\tilde t_2)\eta-\tilde q_2)$. Теперь $\breve c_1=0\Leftrightarrow$ $\eta=-(\tilde t_1\theta^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta)^{-1}$, поэтому $\breve c_2=S_2(\theta)$.

Положим $\theta=\theta_*$, где $\theta_*\in\mathbb R^1$ – любой корень уравнения $S_2(\theta)=0$ $(\theta_*\neq 0)$, тогда $\tilde p_1=-\varkappa_{55}(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1}\neq 0$, и при $r_2=-(\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1$, $s_2=\theta_*s_1$, $\varkappa_{56}=4\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2\neq 0\Leftrightarrow r_2\neq s_2$, имеем: $\breve c_2=0$, $\breve b_2+\breve d_2=S_2(\theta_*)=0$. Поэтому система (2.14) имеет вид $-\dfrac{s_1^2}{9\tilde t_1\theta_*^2}\begin{pmatrix}3\varkappa_{57}\theta_* & 3\varkappa_{58}\theta_* & 0 & 3(\varkappa_{57}-\varkappa_{58})\theta_*\\ 0 & \varkappa_{59} & 0 & -\varkappa_{59}\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{57}\neq 0$, $\varkappa_{58}\neq 0$, $\varkappa_{59}\neq 0$. Теперь при $s_1=3\theta_*|\varkappa_{59}\tilde t_1^{-1}|^{-1/2}$ – это $NSF_6^{5,1}$ с $\sigma=-\operatorname{sign}(\varkappa_{59}\tilde t_1)$, $u=3\varkappa_{57}\theta_*\varkappa_{59}^{-1}$, $v=3\varkappa_{58}\theta_*\varkappa_{59}^{-1}$, $\breve d_1\neq 0\Leftrightarrow\varkappa_{57}\neq\varkappa_{58}$.

$NSF_7^{5,1}$. Для системы (2.14) будем решать систему уравнений $\breve d_1,\breve b_2,\breve c_2=0$.

Элемент $\breve d_1=0$ в двух случаях.

1) $s_2=0$. Тогда система уравнений $\breve b_2,\breve c_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde t_1,r_2:$ $r_2=(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde q_1^{-1}s_1$, $\tilde t_1=\varkappa_{60}\tilde q_1(\tilde q_2-3\tilde p_1)^{-2}\neq 0$ $(\varkappa_{60}=3\tilde p_1\tilde q_1+(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde t_2\neq 0)$, и система (2.14) принимает вид $s_1^2\begin{pmatrix}\varkappa_{61}\tilde q_1^{-1} & (\varkappa_{61}+\tilde q_1\tilde q_2)\tilde q_1^{-1} & \tilde q_2 & 0\\ \tilde p_1 & 0 & 0 & \tilde p_1\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{61}=\tilde q_1\tilde q_2+(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde t_2\neq 0,\varkappa_{61}+\tilde q_1\tilde q_2\neq 0$. При $s_1=|\tilde p_1|^{-1/2}$ – это $NSF_7^{5,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=\varkappa_{61}(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1}$, $v=(\varkappa_{61}+\tilde q_1\tilde q_2)(\tilde p_1\tilde q_1)^{-1}$.

2) $\tilde p_1=-(\tilde t_1s_2^2+(\tilde q_1-\tilde t_2)s_1s_2-\tilde q_2s_1^2)s_1^{-2}$. Положим в замене (1.5) $r_2=\theta s_1$, $s_2=\eta s_1$ $(\theta\neq\eta)$. Тогда в получаемой системе (2.14) $\breve d_1=0\Leftrightarrow\tilde p_1=-\tilde t_1\eta^2-(\tilde q_1-\tilde t_2)\eta+\tilde q_2$. Теперь $\breve b_2=0\Leftrightarrow\eta=-(\tilde t_1\theta^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta)^{-1}$, поэтому $\breve c_2=S_3(\theta)$.

Положим $\theta = \theta_*$, где $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ – любой корень уравнения $S_3(\theta) = 0$ ($\theta_* \neq 0$), тогда $\tilde{p}_1 = -\varkappa_{55}(9\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1} \neq 0$, и при $r_2 = \theta_* s_1$, $s_2 = -(\tilde{t}_1\theta_*^2 + (2\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)\theta_* + \tilde{q}_2)(3\tilde{t}_1\theta_*)^{-1}s_1$, $\varkappa_{56} = 4\tilde{t}_1\theta_*^2 + (2\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)\theta_* + \tilde{q}_2 \neq 0 \Leftrightarrow r_2 \neq s_2$ имеем: $\breve{c}_2 = 0$, $\breve{a}_2 - \breve{d}_2 = S_3(\theta_*) = 0$. Тогда система $(2.14) = s_1^2\begin{pmatrix}\varkappa_{59}(9\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1} & \varkappa_{62}(3\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1} & (3\varkappa_{62} - \varkappa_{59})(9\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1} & 0\\ \varkappa_{63}/3 & 0 & 0 & \varkappa_{63}/3\end{pmatrix}$ с $\varkappa_{59} \neq 0$, $\varkappa_{62} \neq 0$, $\varkappa_{63} = 2\tilde{t}_1\theta_*^2 + (\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)\theta_* - \tilde{q}_2 \neq 0$, иначе $R_2 = 0$. При $s_1 = \sqrt{3}|\varkappa_{63}|^{-1/2}$ – это $NSF_7^{5,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\varkappa_{63}$, $u = \varkappa_{59}(3\varkappa_{63}\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$, $v = \varkappa_{62}(\varkappa_{63}\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$, $\breve{c}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \varkappa_{59} \neq 3\varkappa_{62}$.

2.7. Обобщение результатов для случая $\mathbf{l = 1}$.

Сформулируем теорему, обобщающую результаты, полученные в леммах 2.1, 2.2, 2.3.

Теорема 2.2. *При $l = 1$ любая система (1.4), записанная в виде (2.6) согласно (2.2), линейно эквивалентна какой-либо $CF_i^{m,1}$ из списка 2.1. Ниже для каждой $CF_i^{m,1}$ приведены: a) условия на коэффициенты β, p_i, q_i, t_i $(i = 1, 2)$ системы (2.6) с $R_2 = \delta_{pt}^2 - \delta_{pq}\delta_{qt} \neq 0$, b) замены (1.5), преобразующие (2.6) при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения σ и параметров из $cs_i^{m,1}$:*

$CF_2^{2,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 = 0$ *с* $\hat{t}_1, \hat{q}_1$ *из* (2.8), *в* (2.11) $\tilde{p}_2 = 0$ *заменами* J_0^1, J_1^1, $L_2^{2,1}$ *сводится к* $CF_2^{2,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$;

$CF_5^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 = 0$ *с* $\hat{t}_1, \hat{q}_1$ *из* (2.8), *в* (2.11) $\tilde{p}_2 \neq 0$, $\varkappa_1 \geq 0$ *заменами* J_0^1, J_1^1, $L_5^{3,1}$ *сводится к* $CF_5^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = \varkappa_2\tilde{p}_1^{-1}$;

$CF_8^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 = 0$ *с* $\hat{t}_1, \hat{q}_1$ *из* (2.8), *в* (2.11) $\tilde{p}_2 \neq 0$, $\varkappa_1 < 0$ *заменами* J_0^1, J_1^1, $L_8^{3,1}$ *сводится к* $CF_8^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = \tilde{p}_2\tilde{p}_1^{-2}$;

$CF_3^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 \neq 0$ *с* $\hat{t}_1, \hat{q}_1$ *из* (2.8), *в* (2.12): 1) $\tilde{q}_1 \neq 2$, $\varkappa_3 = 0$ *заменами* J_0^1, J_2^1, $L1_3^{3,1}$ *сводится к* $CF_3^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}((\tilde{q}_1 - 2)\tilde{q}_1\tilde{q}_2)$, $u = \tilde{q}_1$;
2) $\tilde{p}_2 > 0$, $\tilde{q}_1 = 2$, $\tilde{q}_2 = 0$ *заменами* J_0^1, J_2^1, $L2_3^{3,1}$ *сводится к* $CF_3^{3,1}$ *с* $\sigma = 1$, $u = 2$;

$CF_{14,\kappa}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 \neq 0$ *с* $\hat{t}_1, \hat{q}_1$ *из* (2.8), *в* (2.12) $\tilde{p}_2 < 0$, *если* $\tilde{q}_1 = 2$, $\tilde{q}_2 = 0$ *заменами* J_0^1, J_2^1, $L_{14,\kappa}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{14,\kappa}^{3,1}$ *с* $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{p}_2\tilde{q}_1)$, $u = \tilde{q}_1^{-1}$;

$CF_7^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 \neq 0$ *с* $\hat{t}_1, \hat{q}_1$ *из* (2.8), *в* (2.12): 1) $\tilde{q}_1 = 2$, $\varkappa_4 \geq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$ *заменами* J_0^1, J_2^1, $L1_7^{4,1}$ *сводится к* $CF_7^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u = \varkappa_5\tilde{q}_2^{-1}$, $v = 2$;
2) $\tilde{q}_1 \neq 2$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\varkappa_6 \geq 0$ *заменами* J_0^1, J_2^1, $L2_7^{4,1}$ *сводится к* $CF_7^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\varkappa_7\varkappa_8)$, $u = \varkappa_8^{-1}\tilde{q}_1$, $v = \tilde{q}_1$;

$CF_{12}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 \neq 0$ *с* $\hat{t}_1, \hat{q}_1$ *из* (2.8), *в* (2.12) $\tilde{q}_1 \neq 2$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $4\varkappa_3(1 - \tilde{q}_1) > \tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2$, *заменами* J_0^1, J_2^1, $L_{12}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{12}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde{q}_1\tilde{q}_2(\tilde{q}_1 - 2))$, $u = \tilde{q}_1^{-1}$, $v = \varkappa_3\tilde{q}_1^{-1}\tilde{q}_2^{-2}$;

$CF_{24}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 \neq 0$ *с* $\hat{t}_1, \hat{q}_1$ *из* (2.8), *в* (2.12) $\tilde{q}_1 = 2$, $\varkappa_4 < 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$ *заменами* J_0^1, J_2^1, $L_{24}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{24}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u = 1/2$, $v = 2\tilde{p}_2\tilde{q}_2^{-2}$;

$CF_9^{2,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10}, \varkappa_{13}, \varkappa_{15} = 0$ *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_9^{2,1}$ *сводится к* $CF_9^{2,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$;

$CF_{22}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10}, \varkappa_{13} = 0$, $\varkappa_{15} \neq 0$ *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{22}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{22}^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{15}(\varkappa_{16}\tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF_{17}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10}, \varkappa_{15} = 0$, $\varkappa_{13} \neq 0$ *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{17}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{17}^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{13}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF_{11,\kappa}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde{q}_1 = 0$, $\tilde{t}_2 = 0$ *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_{11,\kappa}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{11,\kappa}^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{t}_1\tilde{q}_2)$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$;
2) $\varkappa_{10} = 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{14} = 0$ *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_{11,\kappa}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{11,\kappa}^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)$, $u = \varkappa_{13}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$;

$CF_{27}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10} = 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{13}, \varkappa_{14}, \varkappa_{15} \neq 0$, 2.3_{15} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{27}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{27}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{15}(\varkappa_{14}\tilde{t}_2)^{-2/3}$, $v = \varkappa_{13}(\varkappa_{14}\tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF_{21}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10} \neq 0$, $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\varkappa_{12} = 0$, $\varkappa_9 = 0$ *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{21}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{21}^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{10}(\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)^{-1/3}\tilde{t}_2^{-2/3}$;

$CF_{19}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10} \neq 0$, $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\varkappa_{12} = 0$, $\varkappa_9 \neq 0$, $\varkappa_{17} \neq 0$, $\varkappa_{19} \neq 0$, 2.3_{13} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{19}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{19}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \varkappa_9(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-2/3}$, $v = -(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)(\tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2)^{-1/3}$;

$CF_{33}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10} \neq 0$, $\varkappa_{12} \neq 0$, $\varkappa_9 = 0$, 2.3_{20} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{33}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{33}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v = \varkappa_{16}\tilde{t}_2\varkappa_{10}^{-3}$;

$CF_{11}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde{t}_2 = 0$, $\tilde{q}_1 \neq 0$, 2.3_9 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_{11}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{11}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$, $v = \tilde{q}_1^{-2}\tilde{q}_2\tilde{t}_1$;
2) $\varkappa_{10} \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{11} = 0$, 2.3_9 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_{11}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{11}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\varkappa_{12}\tilde{t}_1)$, $u = \varkappa_{16}\varkappa_{12}^{-1}$, $v = \varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF_{19}^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10} \neq 0$, $\varkappa_{12}, \varkappa_{17} = 0$ *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{19}^{3,1}$ *сводится к* $CF_{19}^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = -\varkappa_{10}(2\tilde{q}_1^2\tilde{t}_2)^{-1/3}$;

$CF_6^{3,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\varkappa_{12}, \varkappa_{19} = 0$, *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_6^{3,1}$ *сводится к* $CF_6^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2\varkappa_{10}^{-2}$;
2) $\tilde{q}_1 = 0$, $\tilde{q}_2 = 0$, *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_6^{3,1}$ *сводится к* $CF_6^{3,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$;

$CF_{30}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{10} \neq 0$, $\varkappa_{12} \neq 0$, $\varkappa_{17} = 0$, 2.3_{18} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{30}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{30}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{10}(2\varkappa_{20}\tilde{q}_1)^{-1/3}$, $v = 4\varkappa_{12}(2\varkappa_{20}\tilde{q}_1)^{-2/3}$;

$CF_{14}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\varkappa_{10} \neq 0$, $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\varkappa_{12} \neq 0$, $\varkappa_{18} = 0$, 2.3_{12} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_{14}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{14}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = 4\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v = -2\varkappa_{20}\varkappa_{10}^{-2}$;
2) $\tilde{q}_1 = 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, 2.3_{12} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_{14}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{14}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \tilde{q}_2\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$, $v = \tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$;

$CF_{29}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\varkappa_{17} > 0$, $\varkappa_{24}^{\pm} = 0$, $\varkappa_{23}^{\mp} \neq 0$, 2.3_{17} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{29}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{29}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \pm\varkappa_{23}^{\mp}\varkappa_{17}^{-1/2}/2$, $v = \pm\varkappa_{21}^{\pm}\varkappa_{22}^{\mp}\varkappa_{17}^{-3/2}/4$;

$CF_5^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\varkappa_{25} \geq 0$, $\varkappa_{28}^{\pm} = 0$, 2.3_7 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_5^{4,1}$ *сводится к* $CF_5^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = 4\varkappa_{30}^{\pm}(\varkappa_{26}^{\mp})^{-2}$, $v = 2\varkappa_{26}^{\pm}(\varkappa_{26}^{\mp})^{-1}$;
2) $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 = 0$, 2.3_7 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_5^{4,1}$ *сводится к* $CF_5^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \tilde{p}_1\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$, $v = \tilde{q}_1\tilde{t}_2^{-1}$;

$CF_1^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) *при* $\tilde{q}_1 = 0$, $\tilde{q}_2 = 2\tilde{p}_1$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{31} > 0$, 2.3_5 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_1^{4,1}$ *сводится к* $CF_1^{4,1}$ $\sigma = \pm\operatorname{sign}(\varkappa_{32}^{\pm}\tilde{t}_1)$, $u = -\varkappa_{32}^{\mp}(\varkappa_{32}^{\pm})^{-1}$;
2) $\tilde{q}_2 = 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{31} \geq 0$, $\tilde{q}_1 = \varkappa_{32}^{\mp}$, 2.3_5 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_1^{4,1}$ *сводится к* $CF_1^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{p}_1$, $u = \varkappa_{32}^{\pm}\tilde{t}_2(2\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$;

$CF_3^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde{p}_1 = \tilde{q}_1(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)\tilde{t}_1^{-1}$, $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1(3\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)\tilde{t}_1^{-1}$, $\tilde{t}_2 \neq 3\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2^2 + \tilde{t}_2^2 \neq 0$, 2.3_6 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_3^{4,1}$ *сводится к* $CF_3^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde{t}_1(3\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2))$, $u = \tilde{q}_1(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)^{-1}$;
2) $\tilde{p}_1 = \tilde{q}_1(2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)(9\tilde{t}_1)^{-1}$, $\tilde{q}_2 = 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, 2.3_6 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_3^{4,1}$ *сводится к* $CF_3^{4,1}$ *с* $\sigma = -\operatorname{sign}(\tilde{t}_1\tilde{t}_2(2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2))$, $u = -\tilde{q}_1(3\tilde{t}_2)^{-1}$;
3) $\tilde{p}_1 = (2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)(2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)(16\tilde{t}_1)^{-1}$, $\tilde{q}_2 = \tilde{t}_2(2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)(8\tilde{t}_1)^{-1}$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, 2.3_6 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L3_3^{4,1}$ *сводится к* $CF_3^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}((2\tilde{q}_1 - 3\tilde{t}_2)(2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)\tilde{t}_1)$, $u = -2\tilde{t}_2(2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)^{-1}$;

$CF_{13}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde{p}_1 = (4\tilde{q}_1^2 - \tilde{t}_2^2)(12\tilde{t}_1)^{-1}$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{q}_2 = (2\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)\tilde{t}_2(4\tilde{t}_1)^{-1}$, 2.3_{11} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_{13}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{13}^{4,1}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}((2\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)\tilde{t}_2\tilde{t}_1)$, $u = (2\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)(3\tilde{t}_2)^{-1}$;
2) $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{q}_2\tilde{t}_1 > 0$, $\tilde{p}_1 = (\tilde{q}_2\tilde{t}_1)^{1/2}\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{35}^{\pm}(\varkappa_{33}^{\pm})^{-2}\tilde{t}_1^{-1}$, *если* $\varkappa_{33}^{\pm} \neq 0$, $\tilde{q}_1 = \pm(2\tilde{q}_2\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2^2)(\varkappa_{33}^{\pm})^{-1}$,

$\varkappa_{34}^{\pm} \neq 0$, 2.3_{11} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_{13}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{13}^{4,1}$ *с* $\sigma = -\mathrm{sign}(\varkappa_{34}^{\pm}\tilde{t}_1)$, $u = -\varkappa_{34}^{\mp}\varkappa_{33}^{\pm}(3\varkappa_{35}^{\pm})^{-1}$;

$CF_{28}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\tilde{q}_1 \neq 0, -\tilde{t}_2, -2\tilde{t}_2$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{p}_1 = \theta_*\tilde{t}_1^{-1}$, $\varkappa_{38} = 0$, $\varkappa_{36}, \varkappa_{37}, \varkappa_{39} \neq 0$, *где* $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ – *любой нуль* $S_1(\theta)$, 2.3_{16} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{28}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{28}^{4,1}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}(\varkappa_{36}\varkappa_{39}\tilde{t}_1)$, $u = -\varkappa_{37}\varkappa_{39}^{-1}$;

$CF_{32}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\tilde{q}_1 \neq 0, -\tilde{t}_2, -2\tilde{t}_2$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{40} \geq 0$, $\varkappa_{41}^{\pm} \neq 0$, $\tilde{p}_1 = \varkappa_{41}^{\pm}\tilde{t}_1^{-1}$, $\tilde{q}_2 = ((\tilde{q}_1+\tilde{t}_2)^2 - 3\varkappa_{41}^{\pm})\tilde{t}_1^{-1}$, $\varkappa_{42}^{\pm} \neq 0$, $\varkappa_{43}^{\pm} \neq 0$, 2.3_{19} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{32}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{32}^{4,1}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}(\varkappa_{42}^{\pm}\tilde{t}_1)$, $u = 3\varkappa_{43}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF_{36}^{4,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\tilde{q}_1 \neq 0, -\tilde{t}_2, -3\tilde{t}_2/2, -2\tilde{t}_2$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{44} \geq 0$, $\varkappa_{45}^{\pm} \neq 0$, $\tilde{p}_1 = \varkappa_{45}^{\pm}\tilde{t}_1^{-1}$, $\tilde{q}_2 = -(3\varkappa_{45}^{\pm} + 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2 + 3\tilde{t}_2^2)\tilde{t}_1^{-1}$, $\varkappa_{46}^{\pm} \neq 0$, $\varkappa_{47}^{\pm} \neq 0$, 2.3_{21} *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_{36}^{4,1}$ *сводится к* $CF_{36}^{4,1}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}(\varkappa_{46}^{\pm}\tilde{t}_1)$, $u = \varkappa_{47}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}$.

$CF_3^{5,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde{q}_2 \neq 0, 3\tilde{p}_1$, $\tilde{t}_1 = \tilde{q}_1(2\tilde{p}_1\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2\tilde{q}_2 - 3\tilde{t}_2\tilde{p}_1)(\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1)^{-2}$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{48} \neq 0, -\tilde{q}_1\tilde{q}_2$, 2.4_1 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_3^{5,1}$ *сводится к* $CF_3^{5,1}$ *с* $\sigma = -\mathrm{sign}\,\tilde{p}_1$, $u = -\varkappa_{48}(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1}$, $v = -(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \varkappa_{48})(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1}$;
2) $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_1 = -\tilde{t}_2(\tilde{p}_1\tilde{t}_2 - 2\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \tilde{q}_2\tilde{t}_2)(2\tilde{q}_2)^{-2}$, $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{49} \neq 0, \tilde{p}_1\tilde{t}_2$, 2.4_1 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_3^{5,1}$ *сводится к* $CF_3^{5,1}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,\tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$, $v = \varkappa_{49}(\tilde{q}_2\tilde{t}_2)^{-1}$;
3) $\tilde{q}_1 \neq 0, \tilde{t}_2$, $\tilde{q}_2 = (\tilde{t}_2\tilde{q}_1^3 - (\tilde{p}_1\tilde{t}_1 + 2\tilde{t}_2^2)\tilde{q}_1^2 - \tilde{t}_2(2\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2^2)\tilde{q}_1 + \tilde{p}_1\tilde{t}_1(4\tilde{p}_1\tilde{t}_1 + 3\tilde{t}_2^2))\tilde{t}_1^{-1}(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)^{-2} \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{50} \neq 0$, $\varkappa_{51} \neq 0$, $\varkappa_{52} \neq 0$, 2.4_1 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L3_3^{5,1}$ *сводится к* $CF_3^{5,1}$ *с* $\sigma = -\mathrm{sign}(\varkappa_{50}\tilde{p}_1)$, $u = -\varkappa_{51}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$, $v = -(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)^2(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$;

$CF_6^{5,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{p}_1 = 4\varkappa_{53}\tilde{q}_2\tilde{t}_2^{-1}/3$, $\varkappa_{54} \neq 0$, $4\varkappa_{53} \neq 3\varkappa_{54}$, 2.4_2 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_6^{5,1}$ *сводится к* $CF_6^{5,1}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,\tilde{q}_2$, $u = 4\varkappa_{53}(3\tilde{t}_2^2)^{-1}$, $v = \varkappa_{54}\tilde{t}_2^{-2}$;
2) $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{p}_1 = -\varkappa_{55}(9\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$, $\varkappa_{56} \neq 0$, $\varkappa_{57} \neq 0, \varkappa_{58}$, $\varkappa_{58} \neq 0$, $\varkappa_{59} \neq 0$, *где* $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ – *любой нуль* $S_2(\theta)$, 2.4_2 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_6^{5,1}$ *сводится к* $CF_6^{5,1}$ *с* $\sigma = -\mathrm{sign}(\varkappa_{59}\tilde{t}_1)$, $u = 3\varkappa_{57}\theta_*\varkappa_{59}^{-1}$, $v = 3\varkappa_{58}\theta_*\varkappa_{59}^{-1}$;

$CF_7^{5,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13): 1) $\tilde{q}_2 \neq 0, 3\tilde{p}_1$, $\tilde{t}_1 = \varkappa_{60}\tilde{q}_1(\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1)^{-2}$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\varkappa_{61} \neq 0, -\tilde{q}_1\tilde{q}_2$, 2.4_3 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L1_7^{5,1}$ *сводится к* $CF_7^{5,1}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,\tilde{p}_1$, $u = \varkappa_{61}(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1}$, $v = (\varkappa_{61} + \tilde{q}_1\tilde{q}_2)(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1}$;
2) $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, $\tilde{p}_1 = -\varkappa_{55}(9\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$, $\varkappa_{56} \neq 0$, $\varkappa_{59} \neq 0, 3\varkappa_{62}$, $\varkappa_{62} \neq 0$, $\varkappa_{63} \neq 0$, *где* $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ – *любой нуль* $S_3(\theta)$, 2.4_3 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L2_7^{5,1}$ *сводится к* $CF_7^{5,1}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,\varkappa_{63}$, $u = \varkappa_{59}(3\varkappa_{63}\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$, $v = \varkappa_{62}(\varkappa_{63}\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$;

$CF_8^{5,1}$: (2.6) *при* $\hat{t}_1 \neq 0$ *из* (2.8), *в* (2.13) $\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\tilde{t}_2 \neq 0$, 2.4_4 *заменами* J_0^1, J_3^1, $L_8^{5,1}$ *сводится к* $CF_8^{5,1}$ *с* $\sigma = \mathrm{sign}\,\tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$, $v = \tilde{q}_1\tilde{t}_2^{-1}$, $w = \tilde{q}_2\tilde{t}_1\tilde{t}_2^{-2}$.

Здесь запись 2.3_i *означает, что элементы системы* (2.13) *таковы, что параметры, полученные для ее* $CF_k^{m,1}$ $(m = 3, 4)$, *не удовлетворяют условиями из пункта i) утверждения* 2.3; *аналогично – запись* 2.4_j *для* $CF_k^{5,1}$; *константы* ϑ, $\varkappa$, *многочлены* $S(\theta)$ *и линейные замены* J, L *приведены в наборах* 2.1 *и* 2.2.

3. Канонические формы однородных кубических систем, имеющих общий множитель

Подводя итоги, приведем все канонические формы $CF^{m,l}$ двумерных однородных кубических систем (1.1), многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ которых имеют общий множитель l ($l = 1,\, 2,\, 3$) для различных значений m, задающих число ненулевых элементов формы.

Представленные ниже списки объединяют результаты работ [2], [3], [4] и текущей работы. В них параметры $u, v, w \neq 0$, а $\sigma, \kappa = \pm 1$.

Список 3.1. Восемь $CF^{2,l}$ из имеющихся десяти SF^2 :

$$CF_2^{2,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[3]}; \qquad CF_3^{2,2,=} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[4]},\ tcs_3^{2,2,=};$$

$$CF_4^{2,2,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[4]},\ tcs_4^{2,2,>}; \quad CF_5^{2,3,=,>} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[5]};$$

$$CF_6^{2,3,=,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[5]}; \qquad CF_{7,\kappa}^{2,2,=} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[6]},\ tcs_{7,\kappa}^{2,2,=};$$

$$CF_{8,\kappa}^{2,2,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[4]},\ tcs_{8,\kappa}^{2,2,>}; \quad CF_9^{2,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[7]};$$

Список 3.2. Пятнадцать $CF^{3,l}$ из имеющихся двадцати четырех SF^2 :

$$CF_3^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[5]},\ tcs_3^{3,1}; \qquad CF_5^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[6]},\ cs_5^{3,1} = \{u \neq 2\};$$

$$CF_6^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[6]},\ tcs_6^{3,1}; \qquad CF_7^{3,2,=} = \sigma \begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[6]},\ cs_7^{3,2,=} = \{u \neq -1\};$$

$$CF_8^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[7]},\ cs_8^{3,1} = \{u > 1/4\}; \quad CF_{10}^{3,2,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[7]},\ tcs_{10}^{3,2,>};$$

$$CF_{11,\kappa}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[7]},\ tcs_{11,\kappa}^{3,1}; \qquad CF_{12}^{3,2,=} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[7]},\ cs_{12}^{3,2,=} = \{u < -1/4\};$$

$$CF_{14,\kappa}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[8]},\ cs_{14,\kappa}^{3,1} = \{(\kappa, u) \neq (1, 1/2)\};$$

$$CF_{13}^{3,2,=} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[8]}; \qquad CF_{16}^{3,2,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[8]},\ tcs_{16}^{3,2,>};$$

$$CF_{17}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[8]},\ tcs_{17}^{3,1}; \qquad CF_{19}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[9]},\ tcs_{19}^{3,1};$$

$$CF_{21}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[9]},\ cs_{21}^{3,1} = \{u \neq 2\}; \quad CF_{22}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[10]},\ tcs_{22}^{3,1}.$$

Список 3.3. Двадцать три $CF^{4,l}$ из имеющихся тридцати семи SF^4 :

$$CF_1^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{[6]},\ cs_1^{4,1} = \{u \neq \pm 1\};$$

$$CF_3^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{[7]},\ cs_3^{4,1} = \{u \neq -1/2, -2\};$$

$$CF_5^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u & v & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}_{[8]},\ cs_5^{4,1}=\{u\neq v(v-2)/4;\ (u,v)\neq(1,-2),(-1/9,1)\};$$

$$CF_7^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u & v & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}_{[8]},\ cs_7^{4,1}=\{v\neq u,\ 2-u^{-1},2u(u+1)^{-1}\};$$

$$CF_{8,\kappa}^{4,2,\gtrless}=\sigma\begin{pmatrix}u & 0 & \kappa u & 0\\ 0 & 1 & 0 & \kappa\end{pmatrix}_{[8]},\ \begin{matrix}cs_{8,-1}^{4,2,>}=\{u\neq\pm1\},\\ tcs_{8,+1}^{4,2,<}\end{matrix}$$

$$CF_{11}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u & 1 & v & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}_{[9]},\ cs_{11}^{4,1}=\{v\neq u(2u-1)^{-2}\};$$

$$CF_{12}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0 & u & 0 & v\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}_{[9]},\ cs_{12}^{4,1}=\{u\neq -v,\ 1/2;\ 4v(u-1)>1\};$$

$$CF_{13}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u & 0 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{[9]},\ cs_{13}^{4,1}=\{u\neq -1/3,\ 2/3\};$$

$$CF_{14}^{4,l}=\sigma\begin{pmatrix}0 & b_1 & u & 0\\ 0 & 1 & 0 & v\end{pmatrix}_{[9]},\ \begin{matrix}cs_{14}^{4,1}=\{b_1=1,\ v\neq u,-u^2;\ v\neq u/2 \text{ при } u>-1/2\},\\ cs_{14,-1}^{4,2,>}=\{b_1=u,\ v=-1,\ u\neq -1,-2,-3\};\end{matrix}$$

$$CF_{18,-1}^{4,3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}_{[10]};$$

$$CF_{19}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u & v & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{[10]},\ cs_{19}^{4,1}=\{u\neq v^2/4,\ (v^3-8)(4v)^{-1}\};$$

$$CF_{20}^{4,3,\gtrless}=\sigma\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & u\\ 0 & 1 & 0 & u\end{pmatrix}_{[10]},\ \begin{matrix}cs_{20}^{4,3,>}=\{u<0\},\\ cs_{20}^{4,3,<}=\{u>0\};\end{matrix}$$

$$CF_{21,\kappa}^{4,3,<}=\sigma\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \kappa\\ 1 & 0 & 0 & \kappa\end{pmatrix}_{[10]},\ tcs_{21,\kappa}^{4,3,<};$$

$$CF_{23}^{4,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0 & u & v & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}_{[10]},\ cs_{23}^{4,2,>}=\{u\neq\pm1,\ v\neq u,(2u-1)/4,u(2-u)/4\};$$

$$CF_{24}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1 & v\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}_{[11]},\ cs_{24}^{4,1}=\{v<-1/2\};$$

$$CF_{27}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0 & 0 & u & 1\\ 0 & 1 & 0 & v\end{pmatrix}_{[11]},\ cs_{27}^{4,1}=\{v\neq -u^{-2},\ (u^{3/2}\pm 2^{3/2})u^{-1/2}/2;\ (u,v)\neq 4^{-2/3}\cdot(3,1)\};$$

$$CF_{28}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0 & u & 0 & -u\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{[11]},\ cs_{28}^{4,1}=\{u\neq -3,\ -3/4,\ 3/2,\ 6,\ \vartheta_1\};$$

$$CF_{29}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0 & u & 0 & v\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}_{[11]},\ \begin{matrix}cs_{29}^{4,1}=\{u\neq -1/2;\ v\neq -u,\ u^2,\ (1-2u)/8,\ (1-2u)^2/8;\\ (u,v)\neq(((3\sqrt{29}-17)\rho^2+(4\sqrt{29}-24)\rho-16)/24,\\ ((72-13\sqrt{29})\rho^2-(9\sqrt{29}-59)\rho+72)/36) \text{ с } \rho=(20\sqrt{29}+108)^{1/3}\};\end{matrix}$$

$$CF_{30}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0 & u & v & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}_{[12]},\ cs_{30}^{4,1}=\{u\neq -v^{-1},\ (v^3-8)(4v)^{-1};\ (u,v)\neq(2,3),(3,-3)\};$$

$$CF_{32}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0 & 0 & u & u\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{[12]},\ cs_{32}^{4,1}=\{u\neq -3,-3/4,\ 3/8,\ 6\};$$

$$CF^{4,1}_{33} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[12]}, \ cs^{4,1}_{33} = \{u \neq 1;\ v \neq u,\ (4u+1)/2,\ (6u+1 \pm (2u+1)(8u+1)^{1/2})/16\};$$

$$CF^{4,2,<}_{34,+1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{[12]}, \ cs^{4,2,<}_{34,+1} = \{u \neq 1\}$$

$$CF^{4,1}_{36} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & u \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{[13]}, \ cs^{4,1}_{36} = \{u \neq -2,\ -1/8,\ 1 \pm 3\sqrt{2}/4,\ 1/4,\ 4\}.$$

Список 3.4. Пять $CF^{5,l}$ из имеющихся двадцати восьми SF^5 :

$$CF^{5,1}_{3} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{[10]}, \ \begin{matrix} cs^{5,1}_{3} = \{v \neq u,\ u-3,\ 3u-1,\ 2(u-1),\ 2u;\ v \neq u+1 \text{ при } u \neq 3; \\ v \neq (u-1)^2u^{-1},\ 4u,\ u-1 \pm 2\sqrt{-u} \text{ при } u \neq -1; \\ v = -4 \text{ при } u = -1;\ v \neq 3(u+1) \text{ при } u \neq -5; \end{matrix}$$

$v \neq 2(u+1)^2(u+2)^{-1}$ при $u \neq -3$; $v \neq (2u^2+1 \pm (2u+1)(5-4u)^{1/2})(2u+2)^{-1}$ при $(u,v) \neq (-5,-12)$; $(u,v) \neq ((8\rho^2+(3\sqrt{57}-1)\rho+68)/12, ((\sqrt{57}+85)\rho^2+32(\sqrt{57}-1)\rho+640)/96)$ с $\rho = (3\sqrt{57}+1)^{1/3}$, $(-(352\theta_*^5+396\theta_*^4+839\theta_*^3+1005\theta_*^2-1297\theta_*-105)/46, -(328\theta_*^5+438\theta_*^4+844\theta_*^3+1098\theta_*^2-1046\theta_*-366)/23)$, $\theta_*\colon 4\theta^6+7\theta^5+13\theta^4+18\theta^3-6\theta^2-9\theta-3$, $((\theta_*^2-2\theta_*+3)/2, (-3\theta_*^3+6\theta_*^2-11\theta_*)/2)$, $\theta_*\colon \theta^4-\theta^3+2\theta^2+3\theta+3$, $((-2\theta_*^3-\theta_*^2+4\theta_*-15)/6, (-4\theta_*^3-3\theta_*^2+8\theta_*-21)/3)$, $\theta_*\colon 2\theta^4+3\theta^3-3\theta^2+9\theta+9\}$;

$$CF^{5,1}_{6} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 0 & u-v \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{[11]}, \ \begin{matrix} cs^{5,1}_{6} = \{v \neq 1-u \pm 2(u^2-u+1)^{1/2} \text{ при } (u,v) \neq (8/3,3); \\ v \neq u,\ 2-3u,\ (3u-2)/2,\ (3u+1)/2,\ 3u-1,\ u-1,\ -3u-1, \\ (-1 \pm \sqrt{3})(3u-1);\ v \neq 3u+3 \text{ при } u \neq -8/3; \end{matrix}$$

$v \neq (-u^2-2u \pm (2u+1)(u^2+u+1)^{1/2})(u+1)^{-1}$ при $(u,v) \neq (-8/3,-5)$; $v \neq (3u^2+4u+2)(2u+2)^{-1}$ при $u \neq -4/3$; $v \neq 1-u \pm (4u^2-3u+3)^{1/2}$ при $(u,v) \neq ((14 \pm 4\sqrt{10})/9, (4 \pm 2\sqrt{10})/3)$; $v \neq (2\theta_*^3-4\theta_*^2+4\theta_*+1)((\theta_*-2)(2\theta_*-1)\theta_*)^{-1}$ при $\theta_* \neq -1$, $\theta_*\colon$ нуль многочлена $2(u-1)\theta^3-(5u-7)\theta^2+2(u-2)\theta-1$; $(u,v) \neq (-5/9,17/12), (-7/12,3/2), (35/3,12), (-35/3,-41/4)\}$;

$$CF^{5,l}_{7} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[11]}, \ \begin{matrix} cs^{5,1}_{7} = \{c_1 = v-u;\ v \neq u,\ 2u,\ 2u+3, u+1 \pm 2(u+1)^{1/2},\ 3 \pm u; \\ v \neq 2u+2 \pm (u^2+6u+1)^{1/2} \text{ при } (u,v) \neq (-6,-9); \\ v \neq 3u-3 \text{ при } u \neq 6;\ v \neq (2u^2-4u+3)(u-2)^{-1} \text{ при } u \neq 3; \end{matrix}$$

$v \neq (2u^2-2u+5 \pm (2u-1)(1+4u)^{1/2})(2u-4)^{-1}$ при $(u,v) \neq (6,15)$; $u \neq (v-1)(v-3)(v-2)^{-1}$, $v(3v-10 \pm (v^2+12v-12)^{1/2})(4v-8)^{-1}$; $u \neq (-4\theta_*^2+2(v-1)\theta_*+2v-7)/3$, $\theta_*\colon 2\theta^3-(v+2)\theta^2+2(v+1)\theta-3$, $u \neq (\theta_*^2-\theta_*-v+1)(\theta_*-1)^{-1}$, $\theta_*\colon \theta^4-(2v-3)\theta^3+(v-3)(v+1)\theta^2+(3v^2-6v+4)\theta+v^2$; $(u,v) \neq ((\rho^2-(\sqrt{77}-9)\rho-16)/4, -3((\sqrt{77}-9)\rho^2-4\rho+24)/8)$ с $\rho = (4\sqrt{77}+36)^{1/3}$, $(((\sqrt{17}-9)\rho^2-4(\sqrt{17}+1)\rho-40)/8, ((\sqrt{17}-9)\rho^2-4(\sqrt{17}+1)\rho-40)/8-3)$ с $\rho = (2\sqrt{17}+2)^{1/3}$, $(-18\theta_*^4-24\theta_*^3+25\theta_*^2-16\theta_*+4, -(261\theta_*^4+456\theta_*^3-187\theta_*^2+148\theta_*+23)/5)$, $\theta_*\colon 9\theta_*^5+21\theta^4+4\theta^3+3\theta^2+3\theta+1$, $(-\theta_*^3-\theta_*+2, -6\theta_*^3-2\theta_*^2-5\theta_*+8)$, $\theta_*\colon \theta^4+\theta^3+\theta^2-\theta-1\}$;

$$cs^{5,2,<}_{7} = \{c_1 = u,\ v = -u;\ u \neq -1,3\};$$

$$CF^{5,1}_{8} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & w & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[11]}, \ \begin{matrix} cs^{5,1}_{8} = \{v \neq -2,\ w \neq v,\ v-u,\ v(uv-2u+1)(2u-1)^{-2},\ v(1-u)^{-1}, \\ -(v+1)u^{-1},\ (v^2-2v)(4u-4)^{-1},\ (v+2)(uv+v-2u)(2u+1)^{-2}, \\ v^2(4u)^{-1},\ (2v-u-1)/4,\ v-3u/4,\ v(3uv-3u+1)(3u-1)^{-2}, \end{matrix}$$

$v(2uv-3u+1)(3u-1)^{-2}$, $-((v-1)\theta_*+u-1)\theta_*^{-2}$, $\theta_*\colon v^2\theta^3+(v^2+2uv-2v)\theta^2+(6uv-2v-3u^2-2u+1)\theta+5u^2-6u+1$; $(u,v) \neq ((w^{3/2} \mp 1)(w^{1/2} \pm 2)^{-2}w^{-1/2}, (2w+1)(\pm w^{1/2}+2)^{-1})$, $(-((16w+18)\theta_*^2+(4w^2-2w)\theta_*+w^3+14w^2+30w+9)w^{-1}(w+6)^{-2}, (w\theta_*^2-2w\theta_*+w^2+4w-3)(w+6)^{-1})$, $\theta_*\ :\ 2\theta^3+(2w+1)\theta+w$; $(v,w) \neq ((2u-1)/2,(u-2)/4)$, $((2u-1)(3u-1)^{-1}, -(2u-1)(3u-1)^{-2})$, $((3u-1)/2,(3u-2)/4)$, $(-(2u^2+4u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}, -(5u^2+4u+1)(3u+1)^{-2}(u+1)^{-1})$; $(u,w) \neq ((v^2+2 \mp (v+1)(v^2+v-2)^{1/2})(3v-6)^{-1}, -(v+1)(v \pm (v^2+v-2)^{1/2}))$, $((v^2-v+7)/9,2)$; $v \neq -(w\theta_*^2-\theta_*+u-1)\theta_*^{-1}$, $\theta_*\colon w^2\theta^3-w\theta^2-w(u+1)\theta-u+1$; $u \neq ((13v-16w-6)\theta_*^2+(4vw-v^2-2w+2v-3)\theta_*+8w^2-2vw+3w)(3\theta_*)^{-2}$, $\theta_*\colon \theta^3+(2v-4w-1)\theta^2+w(v-1)\theta+2w^2\}$;

$CF_{22}^{5,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[14]}$, $cs_{22}^{5,2,<} = \{u \neq 3/2,\, 6,\, 4 \pm \sqrt{13}\}$.

Список 3.5. Семь $CF^{6,l}$ из имеющихся шестнадцати SF^6 :

$CF_1^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{[12]}$, $cs_1^{6,2,<} = \{v \neq (3u^2 - 3u + 1)(3u - 1)^{-2},\, (u^2 - 3u + 3)(u - 3)^{-2},$ $(u^2 + 3u + 3)(3u^2 + 3u + 1)(3u^2 + 8u + 3)^{-2},\; v > 1/4,\; u \neq \pm 1\}$;

$CF_3^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{[13]}$, $cs_3^{6,2,<} = \{u = 1,\; v > 1/4,\; v \neq 1/3, 1, (49 \mp 7\sqrt{46})/6\}$;

$CF_{4,+1}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}_{[14]}$, $cs_{4,+1}^{6,2,<} = \{u = 1,\; |v| < 1\}$;

$CF_6^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(v^{-2} - v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1} - v^2 & 1 \end{pmatrix}_{[14]}$, $cs_6^{6,2,<} = \{v \in (0,1),\; u \in (\psi^-(v), \psi^+(v)),$ где $\psi^\pm(v) = (v^3 - 2 \pm 2(1 - v^3)^{1/2})v^{-2},$ $u \neq -v,\, (u,v) \neq (-2^{-5/3}(3 \pm \sqrt{5}),\, 2^{-2/3})\}$;

$CF_7^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[15]}$, $cs_7^{6,2,<} = \{4v < -(u+1)^2,\; u \neq -1,$ $v \neq -u,\, -3(u+1),\, 3(u+1)(u+2)^{-1},$ $3(u^3 - 3u^2 + 6u + 1)(u^2 - u + 1)((u-2)(2u-1)(u+1))^{-1}\}$;

$CF_9^{6,3,=} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{[15]}$;

$CF_{11,+1}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{[16]}$, $cs_{11,+1}^{6,2,<} = \{4v < -u^2,\; v \neq u(3u \pm \sqrt{3})(2 \pm \sqrt{3}u)^{-1},$ $3(u^2+5)(u^2+1)(2(u^2-3))^{-1}\}$.

Список 3.6. Одна $CF^{7,l}$ из имеющихся четырех SF^7 и единственная SF^8 :

$CF_2^{7,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1} - v(uv + w) & u + wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1} - v^2 & 1 \end{pmatrix}_{[17]}$, $cs_2^{7,2,<} = \{v \in (0, \sqrt[3]{4});\; 4w < -(u+v)^2,$ $w \neq -uv, -u(v - v^{-2});$
$v \neq 1, -u, 2u, \theta_*,\, \theta_*\colon 2\theta^3 + u\theta^2 - u^2\theta - 9;\; 4v^2w^2 - 4vw(2v^3 - 3uv^2 - 2) + (v^3 - 3uv^2 + 2)^2 < 0;\; w \neq 3(uv^6 - 2u^2v^5 + (4u^3 - 1)v^4 - u(4u^3 + 1)v^3 + u^2(u^3 - 6)v^2 + (6u^3 + 2)v + 5u)(v(2u - v)(v^3 - uv^2 + u^2v - 3))^{-1};$
$(u, w) \neq ([-4v \vee \psi^\mp(v)],\, [3v(4v + \psi^-(v))/2 \vee 3(v\psi^\pm(v) - 2v^{-1})])$ с $\psi^\pm(v) = (v^2 \pm (12v - 3v^4)^{1/2})(2v)^{-1};$
$(v, w) \neq ([7^{-1/3} \vee \theta_*],\, [3(7^{-1/3}u + 7^{-2/3}) \vee (u + \theta_*)(\theta_* - 2u)]),\, \theta_* > 0\colon \theta^3 - u\theta^2 + u^2\theta - 3\}$;

$CF_1^{8,3,=} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{[20]}$.

Таким образом, в том случае, когда правая часть системы (1.1) имеет общий множитель (его максимальная степень $l = 1, 2, 3$), среди ста двадцати существующих структурных форм шестьдесят, т. е. ровно половина, являются каноническими формами. При этом только $SF_{14}^{4,l}$ и $SF_7^{5,l}$ имеют своих канонических представителей при различных l — это канонические формы $CF_{14}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & v \end{pmatrix}$ и $CF_{14,-1}^{4,2,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, а также $CF_7^{5,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $CF_7^{5,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Их канонические множества приведены в списках 3.3 и 3.4 соответственно.

Список литературы

[1] *Basov V. V.* Two-Dimensional Homogeneous Cubic Systems: Classification and Normal Forms. I // *Vestnik St.Petersburg University. Mathematics* **49**(2), 99–110 (2016) (http://link.springer.com/article/10.3103/S1063454116020023).

Original Russian Text © *В. В. Басов,* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.— 2016. Т. 3 (61). Вып. 2.— С. 181–195 (http://elibrary.ru/item.asp?id=26421300).

[2] *Basov V. V.* Two-Dimensional Homogeneous Cubic Systems: Classification and Normal Forms. II // *Vestnik St.Petersburg University. Mathematics* **49**(3), 204–218 (2016) (https://link.springer.com/article/10.3103/S1063454116030031).

Original Russian Text © *В. В. Басов,* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.— 2016. Т. 3 (61). Вып. 3.— С. 355-371 (https://elibrary.ru/item.asp?id=26674443).

[3] *Basov V. V., Chermnykh A. S.* Two-Dimensional Homogeneous Cubic Systems: Classification and Normal Forms – III // *Vestnik St.Petersburg University. Mathematics* **50**(2), 97–110 (2017) (https://link.springer.com/article/10.3103/S1063454117020029).

Original Russian Text © *В. В. Басов, А. С. Чермных* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – III // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.— 2017. Т. 4 (62). Вып. 2.— С. 179-192 (https://elibrary.ru/item.asp?id=29857554).

[4] *Basov V. V., Chermnykh A. S.* Two-Dimensional Homogeneous Cubic Systems: Classification and Normal Forms – IV // *Vestnik St.Petersburg University. Mathematics* **50**(3), 217–234 (2017) (https://link.springer.com/article/10.3103/S1063454117030049).

Original Russian Text © *В. В. Басов, А. С. Чермных* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – IV // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.— 2017. Т. 4 (62). Вып. 3.— С. 370-386 (https://elibrary.ru/item.asp?id=29987081).

4. Приложения, выполненные в пакете Maple.

4.1. Стандартные процедуры

```
> restart; with(LinearAlgebra): mylib := table():
```

4.1.1. Вспомогательные процедуры (используются только в стандартных).

pprintf

Функция, аналогичная по синтаксису printf, но выводящая алгебраические выражения в формате prettyprint
(используется только в стандартных процедурах).

```
> mylib[pprintf] := proc(S::string)
  uses StringTools, Typesetting;  local X,L,r,n,i,j,k;
  L := [RegSplit("%a",S)]; X := [_passed[2..-1]]; r := NULL;  j := 1;
  for i from 1 to nops(L) do
    n := CountCharacterOccurrences(L[i],"%");
    r := r, mi(sprintf(L[i],seq(X[k],k=j..j+n-1)));  j := j+n;
    if j <= nops(X) then  r := r, op(map(Typeset,[X[j]]));  j := j+1; end if; end do;
  print(mrow(r)); end proc:
```

P

Кубический многочлен с коэффициентами a,b,c,d от переменных x,y.

```
> mylib[P] := (a,b,c,d,x,y) -> a*x^3+b*x^2*y+c*x*y^2+d*y^3:
```

delta

Определитель матрицы $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$.

```
> mylib[delta] := (x1,y1,x2,y2) -> x1*y2-x2*y1:
```

R

Результант системы с матрицей $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$.

```
> mylib[R] := proc(a1,b1,c1,d1,a2,b2,c2,d2)
  local dab,dac,dad,dbc,dbd,dcd,Rez;
  dab := factor(a1*b2-a2*b1); dac := factor(a1*c2-a2*c1);
  dad := factor(a1*d2-a2*d1); dbc := factor(b1*c2-b2*c1);
  dbd := factor(b1*d2-b2*d1); dcd := factor(c1*d2-c2*d1);
  Rez := factor(dad^3-2*dab*dad*dcd+dac^2*dcd+dab*dbd^2-dab*dbc*dcd-dac*dad*dbd);
  mylib[pprintf]("Resultant:   %a", Rez);
  end proc:
```

4.1.2. Процедуры для однородных кубических систем с примерами их действия.

zamproc

Производит линейную замену $\begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix}$ в системе с матрицей $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$.

Результат --- матрица 2x4 получаемой системы.
При написании full = true будет дополнительно выписана матрица исходной системы, замена и ее определитель.
При написании res = true будет дополнительно выписан результант исходной системы.
При написании lbl = true элементы матрицы получаемой системы будут выписаны построчно.

```
> mylib[zamproc] := proc(a1,b1,c1,d1,a2,b2,c2,d2, r1,s1,r2,s2, {full::boolean := false,
                         res::boolean := false, lbl::boolean := false}) :: Matrix;
  local a1nn,b1nn,c1nn,d1nn,a2nn,b2nn,c2nn,d2nn,a1n,b1n,c1n,d1n,a2n,b2n,c2n,d2n,Delta,
        i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8,ix,m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,mx,M; Delta := r1*s2 - s1*r2:
  a1n := (s2*mylib[P](a1,b1,c1,d1,r1,r2)-s1*mylib[P](a2,b2,c2,d2,r1,r2))/Delta:
  b1n := (3*a1*r1^2*s1*s2+2*b1*r1*s1*r2*s2+b1*r1^2*s2^2+2*c1*r1*r2*s2^2+c1*s1*r2^2*s2
          +3*d1*r2^2*s2^2-3*a2*r1^2*s1^2-2*b2*r1*s1^2*r2-b2*r1^2*s1*s2-2*c2*r1*s1*r2*s2
          -c2*s1^2*r2^2-3*d2*s1*r2^2*s2)/Delta:
  c1n := (3*a1*r1*s1^2*s2+2*b1*r1*s1*s2^2+b1*s1^2*r2*s2+2*c1*s1*r2*s2^2+c1*r1*s2^3
          +3*d1*r2*s2^3-3*a2*r1*s1^3-2*b2*r1*s1^2*s2-b2*s1^3*r2-2*c2*s1^2*r2*s2
          -c2*r1*s1*s2^2-3*d2*s1*r2*s2^2)/Delta:
  d1n := (s2*mylib[P](a1,b1,c1,d1,s1,s2)-s1*mylib[P](a2,b2,c2,d2,s1,s2))/Delta:
  a2n := (-r2*mylib[P](a1,b1,c1,d1,r1,r2)+r1*mylib[P](a2,b2,c2,d2,r1,r2))/Delta:
  b2n := (3*a2*r1^3*s1+2*b2*r1^2*s1*r2+b2*r1^3*s2+2*c2*r1^2*r2*s2+c2*r1*s1*r2^2
          +3*d2*r1*r2^2*s2-3*a1*r1^2*s1*r2-2*b1*r1*s1*r2^2-b1*r1^2*r2*s2-2*c1*r1*r2^2*s2
          -c1*s1*r2^3-3*d1*r2^3*s2)/Delta:
  c2n := (3*a2*r1^2*s1^2+2*b2*r1^2*s1*s2+b2*r1*s1^2*r2+2*c2*r1*s1*r2*s2+c2*r1^2*s2^2
          +3*d2*r1*r2*s2^2-3*a1*r1*s1^2*r2-2*b1*r1*s1*r2*s2-b1*s1^2*r2^2-2*c1*s1*r2^2*s2
```

```
        -c1*r1*r2*s2^2-3*d1*r2^2*s2^2)/Delta:
  d2n := (-r2*mylib[P](a1,b1,c1,d1,s1,s2)+r1*mylib[P](a2,b2,c2,d2,s1,s2))/Delta:
  a1nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(a1n))))):
  b1nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(b1n))))):
  c1nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(c1n))))):
  d1nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(d1n))))):
  a2nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(a2n))))):
  b2nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(b2n))))):
  c2nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(c2n))))):
  d2nn := simplify(factor(simplify(normal(simplify(d2n))))):
  a1n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(a1))))):
  b1n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(b1))))):
  c1n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(c1))))):
  d1n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(d1))))):
  a2n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(a2))))):
  b2n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(b2))))):
  c2n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(c2))))):
  d2n := simplify(factor(simplify(normal(simplify(d2))))):
  M := Matrix(2, 4); M(1,1) := a1nn; M(1,2) := b1nn; M(1,3) := c1nn; M(1,4) := d1nn;
                     M(2,1) := a2nn; M(2,2) := b2nn; M(2,3) := c2nn; M(2,4) := d2nn;
  if full then mylib[pprintf]("Initial system:"); print(a1n,b1n,c1n,d1n); print(a2n,b2n,c2n,d2n); fi;
  if res then mylib[R](a1, b1, c1, d1, a2, b2, c2, d2); end if;
  if full then mylib[pprintf]("substitution:  %a, %a; %a, %a",
                              simplify(factor(simplify(r1))),simplify(factor(simplify(s1))),
                              simplify(factor(simplify(r2))),simplify(factor(simplify(s2))));
    mylib[pprintf]("det:  %a", simplify(factor(simplify(mylib[delta](r1,s1,r2,s2)))));
    mylib[pprintf]("system after substitution:"); end if:
  if lbl then print(a1nn); print(b1nn); print(c1nn); print(d1nn);
              print(a2nn); print(b2nn); print(c2nn); print(d2nn);
  else print(a1nn,b1nn,c1nn,d1nn); print(a2nn,b2nn,c2nn,d2nn); end if;
  return M; end proc:
```

```
> mylib[zamproc](u,0,0,v,0,1,0,1, r1,1,0,s2):
```

$$u\, r1^2,\ 3\, r1\, u - r1,\ 3\, u - 2,\ \frac{v\, s2^3 - s2^2 + u - 1}{r1}$$

$$0,\ r1^2,\ 2\, r1,\ s2^2 + 1$$

Вызов процедуры с включением всех дополнительных опций:
вывод исходной системы и замены с ее определителем (full = true), вывод результанта исходной системы (res = true),
построчный вывод элементов матрицы получаемой системы (lbl = true).

```
> mylib[zamproc](u,0,0,v,0,1,0,1, r1,1,0,s2, full = true, res = true, lbl = true):
```

Initial system:

$$u,\ 0,\ 0,\ v$$

$$0,\ 1,\ 0,\ 1$$

Resultant: $u\,(u^2 + v^2)$

substitution: $r1,\ 1;\ 0,\ s2$

det: $r1\, s2$

system after substitution:

$$u\, r1^2$$

$$3\, r1\, u - r1$$

$$3\, u - 2$$

$$\frac{v\, s2^3 - s2^2 + u - 1}{r1}$$

$$0$$

$$r1^2$$

$$2\, r1$$

$$s2^2 + 1$$

zamprocl1

Замена $\begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix}$ в системе с $1 = 1$, записанной в виде (α, β), $\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & t_2 \end{bmatrix}$.

Результат -- матрица 2x4 полученной системы.
При написании full = true будет дополнительно выписана матрица исходной системы, замена и ее определитель.
При написании res = true будет дополнительно выписан результант исходной матрицы 2x3.
При написании lbl = true элементы матрицы получаемой системы будут выписаны построчно.

```
> mylib[zamprocl1] := proc(alp,beta,p1,q1,t1,p2,q2,t2,r1,s1,r2,s2, {full::boolean := false,
                          res::boolean := false, lbl::boolean := false}) :: Matrix;
  local a1n,b1n,c1n,d1n,a2n,b2n,c2n,d2n,rezult,p1n,q1n,t1n,p2n,q2n,t2n,res2,M,G;
  a1n := factor(alp*p1); b1n := factor(alp*q1+beta*p1); c1n := factor(alp*t1+beta*q1);
  d1n := factor(beta*t1); a2n := factor(alp*p2); b2n := factor(alp*q2+beta*p2);
  c2n := factor(alp*t2+beta*q2); d2n := factor(beta*t2);
  p1n := factor((r1^2*s2*p1-r1^2*s1*p2+r2*q1*r1*s2-r1*q2*s1*r2+r2^2*s2*t1-r2^2*s1*t2)/(r1*s2-r2*s1)):
  q1n := factor((2*r1*s1*s2*p1-2*s1^2*r1*p2+s2^2*q1*r1+s1*s2*r2*q1-s1*s2*r1*q2-s1^2*q2*r2+2*s2^2*r2*t1
  -2*r2*s2*s1*t2)/(r1*s2-r2*s1)):
  t1n := factor((s1^2*s2*p1-s1^3*p2+s1*s2^2*q1-s1^2*s2*q2+s2^3*t1-s2^2*s1*t2)/(r1*s2-s1*r2));
  p2n := factor(-(r1^2*r2*p1-r1^3*p2+r1*r2^2*q1-r1^2*r2*q2+r2^3*t1-r2^2*r1*t2)/(r1*s2-r2*s1)):
  q2n := factor(-(2*r1*s1*r2*p1-2*r1^2*s1*p2+r2*q1*r1*s2+r2^2*q1*s1-r1^2*q2*s2-r1*q2*s1*r2+2*r2^2*s2*t1
  -2*r2*s2*r1*t2)/(r1*s2-r2*s1)):
  t2n := factor(-(s1^2*r2*p1-s1^2*r1*p2+s1*s2*r2*q1-s1*s2*r1*q2+s2^2*r2*t1-s2^2*r1*t2)/(r1*s2-r2*s1)):
  res2 := factor((p1n*t2n-p2n*t1n)^2-(p1n*q2n-p2n*q1n)*(q1n*t2n-q2n*t1n));
  if res then G := Matrix([[factor(p1),factor(q1),factor(t1)], [factor(p2),factor(q2),factor(t2)]]);
    rezult := factor((p1*t2-p2*t1)^2-(p1*q2-p2*q1)*(q1*t2-q2*t1)); mylib[pprintf]("G = %a", G);
    mylib[pprintf]("Resultant of G:  %a", rezult); end if;
  M := mylib[zamproc](a1n,b1n,c1n,d1n,a2n,b2n,c2n,d2n,r1,s1,r2,s2,
                    ':-full'=full,':-res'=false,':-lbl'=lbl);  return M; end proc:
```

```
> mylib[zamprocl1](1,-1,2,1,3,0,1,1, r1,0,r2,s2):
```

$$\frac{(r1-r2)\,(2\,r1^2+r1\,r2+3\,r2^2)}{r1},\ -\frac{s2\,(r1^2-4\,r1\,r2+9\,r2^2)}{r1},\ \frac{s2^2\,(2\,r1-9\,r2)}{r1},\ -\frac{3\,s2^3}{r1}$$

$$-\frac{r2\,(r1-r2)\,(r1^2+3\,r2^2)}{r1\,s2},\ \frac{r1^3+r1^2\,r2-7\,r1\,r2^2+9\,r2^3}{r1},\ -\frac{s2\,r2\,(5\,r1-9\,r2)}{r1},\ -\frac{s2^2\,(r1-3\,r2)}{r1}$$

l1pG

Замена $\begin{bmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{bmatrix}$ в системе с $l=1$, записанной в виде (α, β), $\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & t_2 \end{bmatrix}$.

Результат --- вектор коэффициентов общего множителя p_0^1 и матрица G получаемой системы.

При написании full = true будут дополнительно выписаны p_0^1 и G исходной системы, замена и ее определитель.

```
> mylib[l1pG] := proc(alp,beta, p1,q1,t1,p2,q2,t2,r1,s1,r2,s2, {full::boolean := false})
  local alpn,betan,p1n,q1n,t1n,p2n,q2n,t2n,p10,G:
  alpn := factor(alp*r1+beta*r2): betan := factor(alp*s1+beta*s2):
  p1n := factor((r1^2*s2*p1-r1^2*s1*p2+r2*q1*r1*s2-r1*q2*s1*r2+r2^2*s2*t1-r2^2*s1*t2)/(r1*s2-r2*s1)):
  q1n := factor((2*r1*s1*s2*p1-2*s1^2*r1*p2+s2^2*q1*r1+s1*s2*r2*q1-s1*s2*r1*q2-s1^2*q2*r2+2*s2^2*r2*t1
  -2*r2*s2*s1*t2)/(r1*s2-r2*s1)):
  t1n := factor((s1^2*s2*p1-s1^3*p2+s1*s2^2*q1-s1^2*s2*q2+s2^3*t1-s2^2*s1*t2)/(r1*s2-s1*r2));
  p2n := factor(-(r1^2*r2*p1-r1^3*p2+r1*r2^2*q1-r1^2*r2*q2+r2^3*t1-r2^2*r1*t2)/(r1*s2-r2*s1)):
  q2n := factor(-(2*r1*s1*r2*p1-2*r1^2*s1*p2+r2*q1*r1*s2+r2^2*q1*s1-r1^2*q2*s2-r1*q2*s1*r2+2*r2^2*s2*t1
  -2*r2*s2*r1*t2)/(r1*s2-r2*s1)):
  t2n := factor(-(s1^2*r2*p1-s1^2*r1*p2+s1*s2*r2*q1-s1*s2*r1*q2+s2^2*r2*t1-s2^2*r1*t2)/(r1*s2-r2*s1)):
  p10 := convert(Matrix([[alp,beta]]),list);
  G := Matrix([[factor(p1),factor(q1),factor(t1)], [factor(p2),factor(q2),factor(t2)]]);
  if full then mylib[pprintf]("Initial coefficients:  %a = %a", (p[0])^(1.), p10);
    mylib[pprintf]("G = %a", G); mylib[pprintf]("substitution:  %a, %a; %a, %a", r1, s1, r2, s2);
    mylib[pprintf]("det:  %a", simplify(factor(simplify(delta(r1,s1,r2,s2)))));
    mylib[pprintf]("coefficients after substitution:"); end if:
  p10 := convert(Matrix([[alpn,betan]]),list);
  G := Matrix([[factor(p1n),factor(q1n),factor(t1n)], [factor(p2n),factor(q2n),factor(t2n)]]);
  mylib[pprintf]("%a = %a", (p[0])^(1.), p10); mylib[pprintf]("G = %a", G); end proc:
```

```
> mylib[l1pG](1,-1,2,1,3,0,1,1, r1,0,r2,s2):
```

$$p_0^{1.} = [r1-r2,\ -s2]$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{2\,r1^2+r1\,r2+3\,r2^2}{r1} & \frac{s2\,(r1+6\,r2)}{r1} & \frac{3\,s2^2}{r1} \\ -\frac{r2\,(r1^2+3\,r2^2)}{r1\,s2} & \frac{(r1+3\,r2)\,(r1-2\,r2)}{r1} & \frac{s2\,(r1-3\,r2)}{r1} \end{bmatrix}$$

l1syst

Представление системы с $l = 1$, записанной в виде (α, β), $\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & t_2 \end{bmatrix}$, через матрицу 2x4.

При написании lbl = true элементы матрицы 2x4 будут выписаны построчно.

```
> mylib[l1syst] := proc(alp,beta,p1,q1,t1,p2,q2,t2, {res::boolean := false, lbl::boolean := false})
  local a1n,b1n,c1n,d1n,a2n,b2n,c2n,d2n,rezult,i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8,ix,p10,G:
  a1n := alp*p1: b1n := alp*q1+beta*p1: c1n := alp*t1+beta*q1: d1n := beta*t1:
  a2n := alp*p2: b2n := alp*q2+beta*p2: c2n := alp*t2+beta*q2: d2n := beta*t2:
  p10 := convert(Matrix([[alp,beta]]),list);
  G := Matrix([[factor(p1),factor(q1),factor(t1)], [factor(p2),factor(q2),factor(t2)]]);
  mylib[pprintf]("Initial coefficients:  %a = %a", (p[0])^(1.), p10); mylib[pprintf]("G = %a", G);
  if res then rezult := factor((p1*t2-p2*t1)^2-(p1*q2-p2*q1)*(q1*t2-q2*t1));
    mylib[pprintf]("Resultant of G:  %a", rezult); end if;
  mylib[pprintf]("Matrix (2x4):");
  if lbl then  print(a1n); print(b1n); print(c1n); print(d1n);
               print(a2n); print(b2n); print(c2n); print(d2n);
  else print(a1n,b1n,c1n,d1n); print(a2n,b2n,c2n,d2n); end if; end proc:

> mylib[l1syst](1,-1,2,1,3,0,1,1):
```

Initial coefficients: $p_0^{1.} = [1, -1]$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix (2x4):

$2, -1, 2, -3$

$0, 1, 0, -1$

pm1

В системе с $l = 1$ с матрицей $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ выделяются стока p_0^1 и матрица G с ее результантом.

По умолчанию выводится только результант G. При написании full = true выписываются все указанные параметры.

```
> mylib[pm1] := proc(a1,b1,c1,d1,a2,b2,c2,d2, {full::boolean := false})
  local P1n,P2n,rez2n,chis,znam,obw,om,gp,mn;
  P1n := factor(simplify(mylib[P](a1,b1,c1,d1,x1,x2)));
  P2n := factor(simplify(mylib[P](a2,b2,c2,d2,x1,x2)));
  chis := numer(P1n/P2n); znam := denom(P1n/P2n); obw := simplify(P1n/chis);
  if coeff(obw,x1)=1 then om := Matrix([[coeff(obw, x1), coeff(obw, x2)]]);
    gp := Matrix([[factor(simplify(coeff(chis, x1^2))),factor(simplify(coeff(chis, x1)/x2)),
                   factor(simplify(coeff(chis, x2^2)))],[factor(simplify(coeff(znam, x1^2))),
                   factor(simplify(coeff(znam, x1)/x2)),factor(simplify(coeff(znam, x2^2)))]]);
  else mn := coeff(obw,x1); om := Matrix([[coeff(obw, x1)/mn, coeff(obw, x2)/mn]]);
    gp := Matrix([[factor(simplify(coeff(chis, x1^2))*mn),factor(simplify(coeff(chis, x1)/x2)*mn),
                   factor(simplify(coeff(chis, x2^2)*mn))],[factor(simplify(coeff(znam, x1^2))*mn),
                   factor(simplify(coeff(znam, x1)/x2)*mn),factor(simplify(coeff(znam, x2^2)*mn))]]);
    if om[1,1]<0 then om := -om: gp := -gp fi: fi:
  rez2n := factor(simplify(combine((gp[1, 1]*gp[2, 3]-gp[1, 3]*gp[2, 1])^2-(gp[1, 1]*gp[2, 2]-gp[1, 2]*
  gp[2, 1])*(gp[1, 2]*gp[2, 3]-gp[1, 3]*gp[2, 2]))));  om := convert(om,list);
  if full=true then mylib[pprintf]("Initial coefficients:");
    print(a1, b1, c1, d1); print(a2, b2, c2, d2); mylib[pprintf]("Factorization:");
    mylib[pprintf]("%a = %a", (p[0])^(1.), om);  mylib[pprintf]("G = %a", gp); end if:
  mylib[pprintf]("Resultant of G:  %a", rez2n); end proc:

> mylib[pm1](2,1,3,0,0,1,1,0, full=true);
```

Initial coefficients:

$2, 1, 3, 0$

$0, 1, 1, 0$

Factorization:

$p_0^{1.} = [1, 0]$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultant of G: 8

```
> save(mylib, "newlib.m");
```

При компиляции создается файл newlib.m, из которого в дальнейшем подключается список mylib.

4.2. Сведение форм с m ≤ 4 из списка 2.1 к предшествующим (утверждение 2.3).

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

Для любой формы из I части списка достаточно искать замены в предшествующие формы из ее класса (1--3) и из части II.

I, класс 1).

$NSF_5^{3,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,1,u,0,0,0,0,1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r2\,(r1\,r2\,s2\,u+r1^2\,s2-s1\,r2^2)}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{2\,s2\left(\frac{s1\,(u-3)\,r2^2}{2}+r1\,(s2\,u+s1)\,r2+\frac{r1^2\,s2}{2}\right)}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{\left(r1\,s2^2\,u+2\,s1\left(\left(u-\frac{3}{2}\right)r2+r1\right)s2+r2\,s1^2\right)s2}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$\frac{((u-1)\,s2+s1)\,s2^2\,s1}{r1\,s2-s1\,r2}$$

$$-\frac{r1\,((u-1)\,r2+r1)\,r2^2}{r1\,s2-s1\,r2},\ -\frac{2\left(\frac{r2^2\,s1\,u}{2}+\left(\left(u-\frac{3}{2}\right)s2+s1\right)r1\,r2+\frac{r1^2\,s2}{2}\right)r2}{r1\,s2-s1\,r2},\ -\frac{(r1\,(u-3)\,s2^2+2\,s1\,(r2\,u+r1)\,s2+r2\,s1^2)\,r2}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$\frac{s2\,(-r2\,s1\,s2\,u+r1\,s2^2-r2\,s1^2)}{r1\,s2-s1\,r2}$$

Поиск замен к $SF_2^{2,1}$.

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=0,\,u=0\},\ \{r1=-r2,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=0,\,u=2\}$$

```
> zamproc(0,1,2,0,0,0,0,1, r1,s1,-r1,0):
```

$$\begin{matrix} r1^2,\,0,\,0,\,0 \\ 0,\,0,\,-r1\,s1,\,0 \end{matrix}$$

$NSF_8^{3,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,0,1,0,0,0,1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{((-s1+s2)\,r2^2+r1^2\,s2\,u)\,r2}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{((-3\,s1+3\,s2)\,r2^2+2\,u\,r1\,r2\,s1+r1^2\,s2\,u)\,s2}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{s2\,(2\,r1\,s1\,s2\,u+r2\,s1^2\,u-3\,r2\,s1\,s2+3\,r2\,s2^2)}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$\frac{s2^2\,(u\,s1^2-s1\,s2+s2^2)}{r1\,s2-s1\,r2}$$

$$-\frac{r2^2\,(r1^2\,u-r1\,r2+r2^2)}{r1\,s2-s1\,r2},\ -\frac{\left(3\,r2^2\,s2+2\,r1\left(u\,s1-\frac{3\,s2}{2}\right)r2+r1^2\,s2\,u\right)r2}{r1\,s2-s1\,r2},\ -\frac{2\,r2\left(\left(-\frac{3\,r1}{2}+\frac{3\,r2}{2}\right)s2^2+r1\,s1\,s2\,u+\frac{r2\,s1^2\,u}{2}\right)}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$-\frac{((-r1+r2)\,s2^2+r2\,s1^2\,u)\,s2}{r1\,s2-s1\,r2}$$

$SF_2^{2,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r2,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=0,\,u=0\}$$

$SF_5^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\,r2=0,\,s1=s1,\,s2=s2,\,u=\frac{s2\,(s1-s2)}{s1^2}\right\}$$

```
> s1 = solve(u = s2*(s1-s2)/s1^2, s1);
```

$$s1=\left(\frac{\left(1+\sqrt{1-4\,u}\right)s2}{2\,u},\ -\frac{\left(-1+\sqrt{1-4\,u}\right)s2}{2\,u}\right)$$

```
> s11 := (1+sqrt(1-4*u))*s2/(2*u):
  zamproc(0,u,0,1,0,0,0,1, r1,s11,0,s2):
```

$$\begin{matrix} 0,\,r1\,s2\,u,\,\left(1+\sqrt{1-4\,u}\right)s2^2,\,0 \\ 0,\,0,\,0,\,s2^2 \end{matrix}$$

```
> s12 := -(-1+sqrt(1-4*u))*s2/(2*u):
  zamproc(0,u,0,1,0,0,0,1, r1,s11,0,s2):
```

$$\begin{matrix} 0,\,r1\,s2\,u,\,\left(1+\sqrt{1-4\,u}\right)s2^2,\,0 \\ 0,\,0,\,0,\,s2^2 \end{matrix}$$

I, класс 2).

$NSF_{14}^{3,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,0,k,0,0,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r2\,(k\,r2^2\,s2+r1^2\,s2\,u-r1\,r2\,s1)}{r1\,s2-r2\,s1},\ \frac{(3\,k\,s2^2-s1^2)\,r2^2+2\,r1\,s1\,s2\,(u-1)\,r2+u\,r1^2\,s2^2}{r1\,s2-r2\,s1},\ \frac{3\,s2\left(\frac{r2\,(u-2)\,s1^2}{3}+\frac{2\,s2\,r1\left(u-\frac{1}{2}\right)s1}{3}+k\,r2\,s2^2\right)}{r1\,s2-r2\,s1},$$
$$\frac{((u-1)\,s1^2+k\,s2^2)\,s2^2}{r1\,s2-r2\,s1}$$

$$-\frac{r2^2\,((u-1)\,r1^2+k\,r2^2)}{r1\,s2-r2\,s1},\ -\frac{3\,r2\left(\frac{s2\,(u-2)\,r1^2}{3}+\frac{2\,s1\left(u-\frac{1}{2}\right)r2\,r1}{3}+k\,r2^2\,s2\right)}{r1\,s2-r2\,s1},\ \frac{(-3\,k\,s2^2-s1^2\,u)\,r2^2-2\,r1\,s1\,s2\,(u-1)\,r2+r1^2\,s2^2}{r1\,s2-r2\,s1},$$
$$-\frac{s2\,(k\,r2\,s2^2+r2\,s1^2\,u-r1\,s1\,s2)}{r1\,s2-r2\,s1}$$

$SF_3^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,k,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{k=0,r1=0,r2=r2,s1=s1,s2=0,u=u\},\ \left\{k=k,r1=r1,r2=RootOf(2\,\_Z^2\,k-1)\,r1,s1=s1,s2=0,u=\frac{1}{2}\right\},\ \{k=0,r1=r1,r2=0,s1=0,s2=s2,u=u\}$$

```
> r21 := 2^(-1/2)*r1:
  zamproc(0,1/2,0,1,0,0,1,0, r1,s1,r21,0):
```

$$\frac{r1^2\sqrt{2}}{2},\ \frac{s1\,r1\sqrt{2}}{2},\ 0,\ 0$$
$$0,\ 0,\ \frac{s1\,r1\sqrt{2}}{4},\ 0$$

$NSF_7^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,v,0,0,0,1,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{(s2\,r1^2\,u+r2\,(v\,s2-s1)\,r1-s1\,r2^2)\,r1}{s2\,r1-r2\,s1},\ \frac{(s2\,(3\,u-1)\,s1+v\,s2^2)\,r1^2+2\,s1\,r2\,(-s1+s2\,(v-1))\,r1-r2^2\,s1^2}{s2\,r1-r2\,s1},$$
$$\frac{3\,s1\left(-\frac{s1^2\,r2}{3}+s2\left(\left(u-\frac{2}{3}\right)r1+\frac{(v-2)\,r2}{3}\right)s1+\frac{2\left(v-\frac{1}{2}\right)s2^2\,r1}{3}\right)}{s2\,r1-r2\,s1},\ \frac{((u-1)\,s1+s2\,(v-1))\,s1^2\,s2}{s2\,r1-r2\,s1}$$
$$-\frac{r2\,((u-1)\,r1+r2\,(v-1))\,r1^2}{s2\,r1-r2\,s1},\ -\frac{3\,r1\left(-\frac{s2\,r1^2}{3}+r2\left(\left(u-\frac{2}{3}\right)s1+\frac{(v-2)\,s2}{3}\right)r1+\frac{2\left(v-\frac{1}{2}\right)s1\,r2^2}{3}\right)}{s2\,r1-r2\,s1},$$
$$\frac{(2\,s2\,s1+s2^2)\,r1^2-3\,s1\left(\left(u-\frac{1}{3}\right)s1+\frac{2\,s2\,(v-1)}{3}\right)r2\,r1-v\,s1^2\,r2^2}{s2\,r1-r2\,s1},\ -\frac{s1\,(u\,r2\,s1^2+s2\,(v\,r2-r1)\,s1-s2^2\,r1)}{s2\,r1-r2\,s1}$$

$SF_3^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,r2=-r1\,u,s1=0,s2=s2,v=\frac{2\,u-1}{u}\right\}$$

```
> v1 := (2*u-1)/u:
  r21 := -r1*u:
  zamproc(u,v1,0,0,0,1,1,0, r1,0,r21,s2):
```

$$-(u-1)\,r1^2,\ \frac{(2\,u-1)\,r1\,s2}{u},\ 0,\ 0$$
$$0,\ 0,\ s2\,r1,\ 0$$

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,r2=r2,s1=s1,s2=-\frac{1}{2}\,s1\,u-\frac{1}{2}\,s1,v=\frac{2\,u}{u+1}\right\}$$

```
> s21 := -(1/2)*s1*u-(1/2)*s1:
  v1 := 2*u/(u+1):
  zamproc(u,v1,0,0,0,1,1,0, 0,s1,r2,s21):
```

$$0,\ r2\,s1,\ 0,\ \frac{s1^3\,(u^2-1)}{4\,r2}$$
$$0,\ 0,\ \frac{2\,u\,s1\,r2}{u+1},\ 0$$

$SF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,r2=-r1\,u,s1=0,s2=s2,v=\frac{2\,u-1}{u}\right\},\ \left\{r1=0,r2=r2,s1=s1,s2=-s1\,u,v=-\frac{-2\,u+1}{u}\right\}$$

```
> v1 := -(-2*u+1)/u:
  s21 := -u*s1:
  zamproc(u,v1,0,0,0,1,1,0, 0,s1,r2,s21):
```

$$0,\ r2\,s1,\ 0,\ 0$$
$$0,\ 0,\ \frac{(2\,u-1)\,s1\,r2}{u},\ -(u-1)\,s1^2$$

$SF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=-2\,r1,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=2,\ v=\frac{3}{2}\right\},\ \left\{r1=r1,\ r2=-\frac{r1}{2},\ s1=0,\ s2=s2,\ u=\frac{1}{2},\ v=0\right\}$$

```
> r21 := -2*r1:
  zamproc(2,3/2,0,0,0,1,1,0, r1,s1,r21,0):
```

$$\begin{matrix}-r1^2,\ 0,\ s1^2,\ 0\\ 0,\ 0,\ 2\,s1\,r1,\ 2\,s1^2\end{matrix}$$

$NSF_{12}^{4,1}$ ($v \neq -u$). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,0,v,0,0,1,1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r2\,((v\,s2-s1)\,r2^2-r2\,s1\,r1+s2\,r1^2\,u)}{s2\,r1-r2\,s1},\ \frac{(3\,v\,s2^2-s1^2-3\,s2\,s1)\,r2^2+2\,r1\,s1\,s2\,(u-1)\,r2+u\,r1^2\,s2^2}{s2\,r1-r2\,s1},$$

$$\frac{2\left(\frac{r2\,(u-2)\,s1^2}{2}+\left(-\frac{3\,r2}{2}+\left(u-\frac{1}{2}\right)r1\right)s2\,s1+\frac{3\,v\,s2^2\,r2}{2}\right)s2}{s2\,r1-r2\,s1},\ \frac{((u-1)\,s1^2-s2\,s1+v\,s2^2)\,s2^2}{s2\,r1-r2\,s1}$$

$$-\frac{r2^2\,((u-1)\,r1^2-r1\,r2+v\,r2^2)}{s2\,r1-r2\,s1},\ -\frac{\left(s2\,(u-2)\,r1^2+2\,r2\left(-\frac{3\,s2}{2}+\left(u-\frac{1}{2}\right)s1\right)r1+3\,v\,s2\,r2^2\right)r2}{s2\,r1-r2\,s1},$$

$$\frac{(-u\,s1^2-3\,v\,s2^2)\,r2^2-2\left(-\frac{3\,s2}{2}+(u-1)\,s1\right)s2\,r1\,r2+s2^2\,r1^2}{s2\,r1-r2\,s1},\ \frac{s2\,(-u\,r2\,s1^2-v\,s2^2\,r2+s2\,r1\,s1+s2^2\,r1)}{s2\,r1-r2\,s1}$$

$SF_3^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=RootOf(\_Z^2+2\,\_Z-2\,v)\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=\frac{1}{2}\right\}$$

```
> solve(_Z^2+2*_Z-2*v, _Z);
```

$$-1+\sqrt{1+2\,v},\ -1-\sqrt{1+2\,v}$$

```
> r11 := (-1+sqrt(1+2*v))*r2:
  zamproc(0,1/2,0,v,0,0,1,1, r11,s1,r2,0):
```

$$\begin{matrix}r2^2\sqrt{1+2\,v},\ s1\,r2,\ 0,\ 0\\ 0,\ 0,\ \frac{s1\,r2}{2},\ 0\end{matrix}$$

```
> r12 := (-1-sqrt(1+2*v))*r2:
  zamproc(0,1/2,0,v,0,0,1,1, r12,s1,r2,0):
```

$$\begin{matrix}-r2^2\sqrt{1+2\,v},\ s1\,r2,\ 0,\ 0\\ 0,\ 0,\ \frac{s1\,r2}{2},\ 0\end{matrix}$$

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=\frac{1}{2},\ v=v\right\},\ \left\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=\frac{1}{2},\ v=-\frac{1}{2}\right\}$$

```
> zamproc(0,1/2,0,v,0,0,1,1, r1,s1,0,-s1):
```

$$\begin{matrix}0,\ -\frac{s1\,r1}{2},\ 0,\ -\frac{s1^3\,(1+2\,v)}{2\,r1}\\ 0,\ 0,\ -s1\,r1,\ 0\end{matrix}$$

$SF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=RootOf(\_Z^2+2\,\_Z-2\,v)\,s2,\ s2=s2,\ u=\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r1=RootOf(\_Z^2+2\,\_Z-2\,v)\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r1=RootOf(\_Z^2+2\,\_Z-2\,v)\,r2,\ r2=r2,\ s1=-s2\,(RootOf(\_Z^2+2\,\_Z-2\,v)+2),\ s2=s2,\ u=\frac{1}{2}\right\}$$

$SF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-3\,s2,\ s2=s2,\ u=\frac{2}{3},\ v=0\right\},\ \left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=0,\ v=\frac{s1\,(s1+s2)}{s2^2}\right\}$$

$SF_7^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=\frac{-r2^2\,v+r1^2+r2\,r1}{r1^2},\ v=v\right\},\ \left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=\frac{1}{2},\ v=-\frac{1}{2}\right\}$$

```
> solve(u = (-r2^2*v+r1^2+r1*r2)/r1^2, r2);
```

$$\frac{\left(1+\sqrt{-4\,v\,u+4\,v+1}\right)r1}{2\,v},\ -\frac{\left(-1+\sqrt{-4\,v\,u+4\,v+1}\right)r1}{2\,v}$$

```
> r21 := (1+sqrt(-4*u*v+4*v+1))*r1/(2*v):
  zamproc(0,u,0,v,0,0,1,1, r1,s1,r21,0):
```

$$\frac{\left(2v+1+\sqrt{1+(-4u+4)v}\right)\left(1+\sqrt{1+(-4u+4)v}\right)r1^2}{4v^2},\ \frac{s1\left(1+\sqrt{1+(-4u+4)v}\right)r1}{2v},\ 0,\ 0$$
$$0,\ \frac{(2u-1)\left(1+\sqrt{1+(-4u+4)v}\right)r1^2}{2v},\ \frac{u\,s1\left(1+\sqrt{1+(-4u+4)v}\right)r1}{2v},\ 0$$

```
> r22 := -(-1+sqrt(-4*u*v+4*v+1))*r1/(2*v):
  zamproc(0,u,0,v,0,0,1,1, r1,s1,r22,0):
```

$$\frac{\left(-2v-1+\sqrt{1+(-4u+4)v}\right)\left(-1+\sqrt{1+(-4u+4)v}\right)r1^2}{4v^2},\ -\frac{s1\left(-1+\sqrt{1+(-4u+4)v}\right)r1}{2v},\ 0,\ 0$$
$$0,\ -\frac{(2u-1)\left(-1+\sqrt{1+(-4u+4)v}\right)r1^2}{2v},\ -\frac{u\,s1\left(-1+\sqrt{1+(-4u+4)v}\right)r1}{2v},\ 0$$

$NSF_{24}^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,1,v,0,0,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r2\,(v\,s2\,r2^2-r1\,(s1-s2)\,r2+r1^2\,s2\,u)}{-s1\,r2+r1\,s2},\ \frac{(3\,s2^2\,v-s1^2+s1\,s2)\,r2^2+2\,(s2+(u-1)\,s1)\,s2\,r1\,r2+u\,r1^2\,s2^2}{-s1\,r2+r1\,s2},$$
$$\frac{2\left(\left(\frac{3\,r2\,v}{2}+\frac{r1}{2}\right)s2^2+s1\left(r2+\left(u-\frac{1}{2}\right)r1\right)s2+\frac{r2\,(u-2)\,s1^2}{2}\right)s2}{-s1\,r2+r1\,s2},\ \frac{(s2^2\,v+(u-1)\,s1^2+s1\,s2)\,s2^2}{-s1\,r2+r1\,s2}$$
$$-\frac{(v\,r2^2+(u-1)\,r1^2+r1\,r2)\,r2^2}{-s1\,r2+r1\,s2},\ -\frac{r2\left((3\,v\,s2+s1)\,r2^2+2\,r1\left(s2+\left(u-\frac{1}{2}\right)s1\right)r2+s2\,(u-2)\,r1^2\right)}{-s1\,r2+r1\,s2},$$
$$\frac{(-s1^2\,u-3\,s2^2\,v-2\,s1\,s2)\,r2^2-2\left(\frac{s2}{2}+(u-1)\,s1\right)s2\,r1\,r2+r1^2\,s2^2}{-s1\,r2+r1\,s2},\ -\frac{s2\,(v\,s2^2\,r2-s1\,(r1-r2)\,s2+u\,s1^2\,r2)}{-s1\,r2+r1\,s2}$$

$SF_3^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{r2}{2u-1},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ v=\frac{u}{4u^2-4u+1}\right\}$$

```
> r21 := -r1*(2*u-1):
  v1 := u/(4*u^2-4*u+1):
  zamproc(0,u,1,v1,0,0,1,0, r1,s1,r21,0):
```

$$(-2u+1)\,r1^2,\ (-2u+1)\,s1\,r1,\ 0,\ 0$$
$$0,\ 0,\ -u\,s1\,(2u-1)\,r1,\ 0$$

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=-\frac{s2}{2u-1},\ s2=s2,\ v=\frac{u}{4u^2-4u+1}\right\},\ \left\{r1=-\frac{r2}{2u-1},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ v=-\frac{\frac{(u-1)\,r2^2}{(2u-1)^2}-\frac{r2^2}{2u-1}}{r2^2}\right\}$$

```
> simplify(-((u-1)*r2^2/(2*u-1)^2-r2^2/(2*u-1))/r2^2);
```

$$\frac{u}{(2u-1)^2}$$

$SF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-3\,r2,\ r2=r2,\ s1=6\,s2,\ s2=s2,\ u=\frac{2}{3},\ v=6\right\},\ \left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=0,\ v=\frac{s1\,(s1-s2)}{s2^2}\right\}$$

$SF_7^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,4]], {r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=\mathit{RootOf}((u-1)\,\_Z^2+v+\_Z)\,r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0\}$$

```
> solve((u-1)*_Z^2+v+_Z, _Z);
```

$$\frac{-1+\sqrt{-4\,v\,u+4\,v+1}}{2\,(u-1)},\ -\frac{1+\sqrt{-4\,v\,u+4\,v+1}}{2\,(u-1)}$$

```
> u1 := 1/2:
  r11 := -(1+sqrt(-4*u1*v+4*v+1))/(2*(u1-1))*r2;
  zamproc(0,u1,1,v,0,0,1,0, r11,s1,r2,0):
```

$$r11 := \left(1+\sqrt{2v+1}\right)r2$$
$$\left(1+\sqrt{2v+1}\right)r2^2,\ s1\,r2,\ 0,\ 0$$
$$0,\ r2^2,\ \frac{s1\,r2}{2},\ 0$$

$SF_{12}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = r1,\ r2 = 0,\ s1 = -\frac{s2}{2\,u-1},\ s2 = s2,\ v = v\right\}$$

```
> s21 := (1-2*u)*s1:
  zamproc(0,u,1,v,0,0,1,0, r1,s1,0,s21):
```

$$0,\ -u\,s1\,(2\,u-1)\,r1,\ 0,\ -\frac{(4\,u^2\,v-4\,v\,u-u+v)\,s1^3\,(2\,u-1)}{r1}$$
$$0,\ 0,\ (-2\,u+1)\,s1\,r1,\ s1^2\,(-2\,u+1)$$

$SF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = -\frac{2\,r2}{3},\ r2 = r2,\ s1 = \frac{s2}{3},\ s2 = s2,\ u = 2,\ v = \frac{2}{9}\right\}$$

I, класс 3).

$NSF_{6}^{3,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,0,1,0,0,0,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r1\,(s2\,r1^2\,u-r2^2\,(s1-s2))}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{-s1\,(s1-s2)\,r2^2-2\,s2\,r1\,(s1-s2)\,r2+3\,u\,r1^2\,s1\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{3\,s2\left(\left(r1\,u-\frac{2\,r2}{3}\right)s1^2-\frac{s2\,(r1-2\,r2)\,s1}{3}+\frac{s2^2\,r1}{3}\right)}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{s2\,s1\,(s1^2\,u-s1\,s2+s2^2)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$$-\frac{r2\,r1\,(r1^2\,u-r1\,r2+r2^2)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ -\frac{3\left(\left(s1\,u-\frac{2\,s2}{3}\right)r1^2-\frac{r2\,(s1-2\,s2)\,r1}{3}+\frac{r2^2\,s1}{3}\right)r2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{r1^2\,s2^2-3\left(s1^2\,u-\frac{2}{3}\,s1\,s2+\frac{1}{3}\,s2^2\right)r2\,r1-2\,s1\,r2^2\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$-\frac{s1\,(r2\,(s1^2\,u+s2^2)-s2^2\,r1)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$SF_{9}^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$NSF_{11}^{3,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,0,k,0,0,1,0,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r1\,(k\,r2^2\,s2+r1^2\,s2\,u-s1\,r2\,r1)}{s2\,r1-s1\,r2},\ \frac{3\left(u-\frac{1}{3}\right)s1\,s2\,r1^2+2\,r2\,(s2^2\,k-s1^2)\,r1+s2\,s1\,r2^2\,k}{s2\,r1-s1\,r2},\ \frac{-r2\,s1^3+3\left(u-\frac{2}{3}\right)s2\,r1\,s1^2+2\,k\,s1\,r2\,s2^2+k\,r1\,s2^3}{s2\,r1-s1\,r2},$$
$$\frac{s1\,((u-1)\,s1^2+s2^2\,k)\,s2}{s2\,r1-s1\,r2}$$

$$-\frac{r2\,((u-1)\,r1^2+r2^2\,k)\,r1}{s2\,r1-s1\,r2},\ \frac{s2\,r1^3-3\left(u-\frac{2}{3}\right)s1\,r2\,r1^2-2\,s2\,r2^2\,r1\,k-s1\,r2^3\,k}{s2\,r1-s1\,r2},\ \frac{2\,s2\,s1\,r1^2-((3\,u-1)\,s1^2+s2^2\,k)\,r2\,r1-2\,s2\,s1\,r2^2\,k}{s2\,r1-s1\,r2},$$
$$-\frac{s1\,(u\,r2\,s1^2+s2^2\,r2\,k-s2\,r1\,s1)}{s2\,r1-s1\,r2}$$

$SF_{9}^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,k,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{k=0,\ r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$SF_{6}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,k,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{k=0,\ r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$NSF_{17}^{3,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,0,1,0,1,0,0,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r1\,((s2\,u-s1)\,r1^2+r2^2\,s2)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{2\,r1\,r2\,s2^2+(3\,r1^2\,u+r2^2)\,s1\,s2-3\,r1^2\,s1^2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(3\,s1^2\,s2\,u-3\,s1^3+s2^3)\,r1+2\,s1\,r2\,s2^2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{s1\,(s1^2\,s2\,u-s1^3+s2^3)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$
$$-\frac{r1\,(r1^2\,r2\,u-r1^3+r2^3)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(-3\,r1^2\,r2\,u+3\,r1^3-r2^3)\,s1-2\,r2^2\,s2\,r1}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{3\,r1^2\,s1^2+(-3\,s1^2\,u-s2^2)\,r2\,r1-2\,s1\,r2^2\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{s1\,(-s1^2\,r2\,u+s1^2\,r1-r2\,s2^2)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$SF_{9}^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0\}$$

$SF_{6}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$NSF_{19}^{3,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,0,1,0,1,0,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{((s2\,u-s1)\,r1^2+r2^2\,s2)\,r2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{s2\,(s2\,u-s1)\,r1^2+2\,s1\,r2\,(s2\,u-s1)\,r1+3\,r2^2\,s2^2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{-s1^3\,r2+s2\,(u\,r2-2\,r1)\,s1^2+2\,u\,r1\,s1\,s2^2+3\,r2\,s2^3}{-s1\,r2+s2\,r1},$$

$$\frac{s2\,(s1^2\,s2\,u-s1^3+s2^3)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$$-\frac{r2\,(r1^2\,r2\,u-r1^3+r2^3)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{r1^3\,s2-r2\,(s2\,u-2\,s1)\,r1^2-2\,u\,r1\,s1\,r2^2-3\,r2^3\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(-s1^2\,u-3\,s2^2)\,r2^2-2\,s1\,r1\left(s2\,u-\frac{s1}{2}\right)r2+2\,r1^2\,s1\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$-\frac{s2\,(r2\,(s1^2\,u+s2^2)-s1^2\,r1)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$NSF_{21}^{3,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,1,0,1,0,0,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r1\,(r1\,r2\,s2\,u-r1^2\,s1+r2^2\,s2)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(u\,s2^2-3\,s1^2)\,r1^2+2\,r2\,s2\,(s1\,u+s2)\,r1+s1\,r2^2\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{-3\,r1\,s1^3+r2\,s1^2\,s2\,u+2\,s2^2\,(r2+r1\,u)\,s1+r1\,s2^3}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{s1\,(u\,s1\,s2^2-s1^3+s2^3)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$$-\frac{r1\,(r1\,r2^2\,u-r1^3+r2^3)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{3\,s1\,r1^3-u\,r1^2\,r2\,s2-2\,r2^2\,(s1\,u+s2)\,r1-r2^3\,s1}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(-s1^2\,u-2\,s1\,s2)\,r2^2-2\,s2\left(s1\,u+\frac{s2}{2}\right)r1\,r2+3\,r1^2\,s1^2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{s1\,(-r2\,s1\,s2\,u+s1^2\,r1-r2\,s2^2)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0\}$$

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=2\},\ \{r1=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\,r2,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=2\,RootOf(\_Z^2-\_Z+1)-2\}$$

```
> zamproc(0,2,1,0,1,0,0,0, r1,0,-r1,s2):
```

$$-r1^2,\ 0,\ s2^2,\ 0$$
$$0,\ 0,\ r1\,s2,\ 0$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0\}$$

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$NSF_{22}^{3,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,0,u,1,0,1,0,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r2\,(r1\,r2\,s2\,u-r1^2\,s1+r2^2\,s2)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{s2\,(s1\,u+3\,s2)\,r2^2+2\,r1\,(u\,s2^2-s1^2)\,r2-r1^2\,s1\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(r1\,u+3\,r2)\,s2^3+2\,u\,s1\,r2\,s2^2-2\,r1\,s1^2\,s2-s1^3\,r2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{s2\,(u\,s1\,s2^2-s1^3+s2^3)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$$-\frac{r2\,(r1\,r2^2\,u-r1^3+r2^3)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(-s1\,u-3\,s2)\,r2^3-2\,u\,r1\,r2^2\,s2+2\,r1^2\,r2\,s1+r1^3\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(-2\,s1\,s2\,u-3\,s2^2)\,r2^2-r1\,(u\,s2^2-s1^2)\,r2+2\,r1^2\,s1\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{s2\,(-r2\,s1\,s2\,u+s1^2\,r1-r2\,s2^2)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$NSF_5^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,v,1,0,0,0,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{(u\,r1^2\,s2+v\,s2\,r2\,r1-r2^2\,(s1-s2))\,r1}{-s1\,r2+r1\,s2},\ \frac{r1\,(v\,r1+2\,r2)\,s2^2+3\,s1\left(u\,r1^2+\frac{2\,r2\,(v-1)\,r1}{3}+\frac{r2^2}{3}\right)s2-s1^2\,r2^2}{-s1\,r2+r1\,s2},$$

$$\frac{3\left(\left(u\,r1+\frac{(v-2)\,r2}{3}\right)s1^2+\frac{2\left(\left(v-\frac{1}{2}\right)r1+r2\right)s2\,s1}{3}+\frac{r1\,s2^2}{3}\right)s2}{-s1\,r2+r1\,s2},\ \frac{s1\,(u\,s1^2+s2\,(v-1)\,s1+s2^2)\,s2}{-s1\,r2+r1\,s2}$$

$$-\frac{r2\,(u\,r1^2+r2\,(v-1)\,r1+r2^2)\,r1}{-s1\,r2+r1\,s2},\ -\frac{3\,r2\left(\left(u\,s1+\frac{(v-2)\,s2}{3}\right)r1^2+\frac{2\left(\left(v-\frac{1}{2}\right)s1+s2\right)r2\,r1}{3}+\frac{s1\,r2^2}{3}\right)}{-s1\,r2+r1\,s2},$$

$$\frac{(-s1^2\,v-2\,s1\,s2)\,r2^2-3\,r1\left(u\,s1^2+\frac{2\,s2\,(v-1)\,s1}{3}+\frac{s2^2}{3}\right)r2+r1^2\,s2^2}{-s1\,r2+r1\,s2},\ -\frac{s1\,((u\,s1^2+v\,s2\,s1+s2^2)\,r2-r1\,s2^2)}{-s1\,r2+r1\,s2}$$

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=u,\ v=0\}$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r2,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=2,\ v=-2\}$$

```
> zamproc(2,-2,1,0,0,0,1,0, r1,0,r1,s2):
```

$$r1^2,\ 0,\ s2^2,\ 0$$
$$0,\ 2\,r1^2,\ 0,\ 0$$

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=0\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r2,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=-1,\ v=0\}$$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s1,\ u=1,\ v=-2\}$$

```
> zamproc(1,-2,1,0,0,0,1,0, 0,s1,r2,s1):
```

$$0,\ 0,\ 2\,s1^2,\ \frac{s1^3}{r2}$$
$$0,\ r2^2,\ 0,\ 0$$

$SF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{2\,r2}{v-2},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=-\frac{\left(-\frac{2\,r2^2\,(v-1)}{v-2}+r2^2\right)(v-2)^2}{4\,r2^2}\right\},\ \left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=-\frac{2\,s2}{v-2},\ s2=s2,\ u=\frac{1}{4}\,v^2-\frac{1}{2}\,v\right\}$$

```
> simplify(-(-2*r2^2*(v-1)/(v-2)+r2^2)*(v-2)^2/(4*r2^2));
```

$$\frac{v\,(v-2)}{4}$$

```
> s21 := (2-v)*s1/2:
  u1 := v*(v-2)/4:
  zamproc(u1,v,1,0,0,0,1,0, r1,s1,0,s21):
```

$$\frac{v\,(v-2)\,r1^2}{4},\ \frac{(v-2)\,s1\,r1\,v}{4},\ 0,\ 0$$
$$0,\ 0,\ -\frac{r1\,(v-2)\,s1}{2},\ -\frac{s1^2\,(v-2)}{2}$$

$SF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
  solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=-\frac{s2\,(-s2+s1)}{2\,s1^2},\ v=\frac{3\,(-s2+s1)}{2\,s1}\right\},\ \left\{r1=\frac{3\,r2}{2},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=-\frac{s1}{3},\ u=-\frac{2}{9},\ v=\frac{2}{3}\right\},\ \{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=u,\ v=0\}$$

$$\left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=s1,\ s2=-\frac{2}{3}\ s1\ v+s1,\ u=\frac{2}{9}\ v^2-\frac{1}{3}\ v\right\}$$

частный случай ухода в $SF_1^{4,1}$:

```
>  r21 := 2*r1/3:
  s21 := -s1/3:
  zamproc(-2/9,2/3,1,0,0,0,1,0, r1,s1,r21,s21):
```

$$\frac{2\,r1^2}{3},\ 0,\ -\frac{2\,s1^2}{3},\ 0$$
$$0,\ 0,\ -\frac{r1\,s1}{3},\ -\frac{s1^2}{3}$$

```
> s21 := (1-2*v/3)*s1:
  u1 := v*(2*v-3)/9:
  zamproc(u1,v,1,0,0,0,1,0, r1,s1,0,s21):
```

$$\frac{v\,(2\,v-3)\,r1^2}{9},\ 0,\ -\frac{v\,(2\,v-3)\,s1^2}{9},\ 0$$
$$0,\ 0,\ -\frac{r1\,(2\,v-3)\,s1}{3},\ -\frac{2}{3}\ s1^2\,v+s1^2$$

$NSF_{11}^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,1,v,0,0,1,0,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{(v\,r2^2\,s2-r1\,(-s2+s1)\,r2+u\,r1^2\,s2)\,r1}{s2\,r1-s1\,r2},\ \frac{3\,s2\left(\frac{s2}{3}+\left(u-\frac{1}{3}\right)s1\right)r1^2+2\,r2\,(v\,s2^2-s1^2+s2\,s1)\,r1+v\,s2\,s1\,r2^2}{s2\,r1-s1\,r2},$$
$$\frac{-r2\,s1^3+3\,s2\left(\left(u-\frac{2}{3}\right)r1+\frac{r2}{3}\right)s1^2+2\,s2^2\,(r2\,v+r1)\,s1+v\,s2^3\,r1}{s2\,r1-s1\,r2},\ \frac{s1\,(v\,s2^2+(u-1)\,s1^2+s2\,s1)\,s2}{s2\,r1-s1\,r2}$$
$$-\frac{(v\,r2^2+(u-1)\,r1^2+r2\,r1)\,r2\,r1}{s2\,r1-s1\,r2},\ \frac{s2\,r1^3-3\,r2\left(\left(u-\frac{2}{3}\right)s1+\frac{s2}{3}\right)r1^2-2\,r2^2\,(v\,s2+s1)\,r1-v\,s1\,r2^3}{s2\,r1-s1\,r2},$$
$$\frac{(-2\,v\,s2\,s1-s1^2)\,r2^2-3\left(\left(u-\frac{1}{3}\right)s1^2+\frac{2\,s2\,s1}{3}+\frac{v\,s2^2}{3}\right)r1\,r2+2\,s2\,s1\,r1^2}{s2\,r1-s1\,r2},\ -\frac{s1\,(v\,s2^2\,r2-s1\,(-r2+r1)\,s2+u\,s1^2\,r2)}{s2\,r1-s1\,r2}$$

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=0\}$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0,\ v=0\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=r1,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=-1,\ v=0\}$$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s1,\ u=0,\ v=0\},\ \{r1=r1,\ r2=r1,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0,\ v=0\}$$

$SF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1, r2=\frac{r1}{3}, s1=s1, s2=-\frac{2\,s1}{3}, u=\frac{1}{3}, v=3\right\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=u, v=0\}, \left\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=s2, u=\frac{-s2+s1}{s1}, v=0\right\}$$

```
> r21 := r1/3:
  s21 := -2*s1/3:
  zamproc(1/3,1,3,0,0,1,0,0, r1,s1,r21,s21):
```

$$r1^2, 0, -s1^2, 0$$
$$0, 0, s1\,r1, s1^2$$

$SF_5^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{r2}{2\,u-1}, r2=r2, s1=0, s2=s2, v=\frac{u}{4\,u^2-4\,u+1}\right\}$$

```
> r21 := (1-2*u)*r1:
  v1 := u*(2*u-1)^(-2):
  zamproc(u,1,v1,0,0,1,0,0, r1,0,r21,s2):
```

$$r1^2, -\frac{s2\,r1}{2\,u-1}, \frac{u\,s2^2}{(2\,u-1)^2}, 0$$
$$0, 0, \frac{s2\,r1\,u}{2\,u-1}, 0$$

$NSF_{14}^{4,1}$ ($v \neq -u^2$). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,1,u,0,0,1,0,v, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r2\,((s2-s1)\,r1^2+r1\,r2\,s2\,u-v\,r2^2\,s1)}{s2\,r1-r2\,s1}, \frac{(2\,r2\,u\,r1+r1^2)\,s2^2+s1\,(-r1^2+2\,r1\,r2+r2^2\,(u-3\,v))\,s2-2\,s1^2\,r2\,r1}{s2\,r1-r2\,s1},$$
$$\frac{-r2\,s1^3-2\,s2\left(r1-\frac{r2}{2}\right)s1^2+2\left(\left(u-\frac{3\,v}{2}\right)r2+r1\right)s2^2\,s1+u\,r1\,s2^3}{s2\,r1-r2\,s1}, \frac{s1\,s2\,((u-v)\,s2^2+s2\,s1-s1^2)}{s2\,r1-r2\,s1}$$
$$-\frac{r2\,((u-v)\,r2^2+r1\,r2-r1^2)\,r1}{s2\,r1-r2\,s1}, \frac{s2\,r1^3+2\,r2\left(s1-\frac{s2}{2}\right)r1^2-2\,r2^2\left(\left(u-\frac{3\,v}{2}\right)s2+s1\right)r1-u\,s1\,r2^3}{s2\,r1-r2\,s1},$$
$$\frac{(-2\,s2\,s1\,u-s1^2)\,r2^2-(-s1^2+2\,s2\,s1+s2^2\,(u-3\,v))\,r1\,r2+2\,s2\,s1\,r1^2}{s2\,r1-r2\,s1}, -\frac{((r2-r1)\,s1^2+r2\,s1\,s2\,u-v\,r1\,s2^2)\,s2}{s2\,r1-r2\,s1}$$

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=v\}$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=0, s1=0, s2=s2, u=0, v=0\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=-1\}$$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2\,(RootOf(2\,\_Z^2-2\,\_Z-u)-1), r2=r2, s1=RootOf(2\,\_Z^2-2\,\_Z-u)\,s2, s2=s2, v=\frac{u}{2}\right\}$$

```
> solve(2*_Z^2-2*_Z-u, _Z);
```

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2\,u+1}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2\,u+1}}{2}$$

```
> r11 := -(1/2+(1/2)*sqrt(2*u+1)-1)*r2;
  s11 := (1/2+(1/2)*sqrt(2*u+1))*s2;
  v1 := u/2:
  zamproc(0,1,u,0,0,1,0,v1, r11,s11,r2,s2):
```

$$r11 := -\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2\,u+1}}{2}\right)r2$$
$$s11 := \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2\,u+1}}{2}\right)s2$$

$$\frac{r2^2\left(\sqrt{2u+1}-1\right)\sqrt{2u+1}}{2},\ \frac{r2\sqrt{2u+1}\,s2\left(\sqrt{2u+1}-1\right)}{2},\ 0,\ 0$$
$$0,\ 0,\ \frac{\left(1+\sqrt{2u+1}\right)r2\sqrt{2u+1}\,s2}{2},\ \frac{\left(1+\sqrt{2u+1}\right)s2^2\sqrt{2u+1}}{2}$$

$SF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=0, v=0\}, \left\{r1=\frac{3\,r2}{4}, r2=r2, s1=0, s2=s2, u=-\frac{3}{8}, v=-\frac{3}{16}\right\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=v\}$$

$SF_5^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=RootOf(2\_Z^2-2\_Z-u)\,r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, v=\frac{u}{2}\right\}$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=0, s1=0, s2=s2, u=u, v=0\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, u=0, v=0\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=u, v=u\}$$

```
> zamproc(0,1,u,0,0,1,0,u, r1,s1,r1,0):
```

$$r1^2\,(u+1),\ 2\,r1\,s1,\ s1^2,\ 0$$
$$0,\ r1^2\,u,\ 0,\ 0$$

$SF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0, r2=r2, s1=\frac{s2}{2}, s2=s2, u=-\frac{1}{4}, v=-\frac{1}{12}\right\}$$

```
> s21 := 2*s1:
  zamproc(0,1,-1/4,0,0,1,0,-1/12, 0,s1,r2,s21):
```

$$-\frac{r2^2}{12},\ 0,\ 0,\ -\frac{2\,s1^3}{3\,r2}$$
$$0,\ -\frac{r2^2}{4},\ 0,\ s1^2$$

$NSF_{14}^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,v,1,0,1,0,0,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{((u\,s2-s1)\,r1^2+v\,s2\,r1\,r2+s2\,r2^2)\,r1}{s2\,r1-r2\,s1},\ \frac{(3\,s2\,s1\,u+v\,s2^2-3\,s1^2)\,r1^2+2\,r2\,s2\,(s1\,v+s2)\,r1+s1\,s2\,r2^2}{s2\,r1-r2\,s1},$$
$$\frac{-3\,r1\,s1^3+s2\,(3\,r1\,u+r2\,v)\,s1^2+2\,s2^2\,(r1\,v+r2)\,s1+r1\,s2^3}{s2\,r1-r2\,s1},\ \frac{s1\,(u\,s2\,s1^2+s2^2\,s1\,v-s1^3+s2^3)}{s2\,r1-r2\,s1}$$
$$-\frac{r1\,(u\,r2\,r1^2+r2^2\,r1\,v-r1^3+r2^3)}{s2\,r1-r2\,s1},\ \frac{3\,r1^3\,s1+(-3\,s1\,u-v\,s2)\,r2\,r1^2-2\,r2^2\,(s1\,v+s2)\,r1-r2^3\,s1}{s2\,r1-r2\,s1},$$
$$\frac{(-s1^2\,v-2\,s2\,s1)\,r2^2-3\left(s1^2\,u+\frac{2}{3}\,v\,s2\,s1+\frac{1}{3}\,s2^2\right)r1\,r2+3\,r1^2\,s1^2}{s2\,r1-r2\,s1},\ \frac{s1\,(-u\,r2\,s1^2-s2\,r2\,s1\,v-s2^2\,r2+r1\,s1^2)}{s2\,r1-r2\,s1}$$

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=0, s1=0, s2=s2, u=0, v=0\}$$

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1, r2=-\frac{r1\,v}{2}, s1=0, s2=s2, u=\frac{v^3-8}{4\,v}\right\}$$

```
> r21 := -v*r1/2:
  u1 := (v^3-8)/(4*v):
  zamproc(u1,v,1,0,1,0,0,0, r1,0,r21,s2):
```

$$-\frac{2\,r1^2}{v},\ 0,\ s2^2,\ 0$$
$$0,\ 0,\ \frac{s2\,r1\,v}{2},\ 0$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=0, s1=0, s2=s2, u=u, v=0\}$$

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=-\frac{s1\,v}{2}, u=\frac{v^2}{4}\right\}$$

```
> s21 := -s1*v/2:
```

```
u1 := v^2/4:
zamproc(u1,v,1,0,1,0,0,0, 0,s1,r2,s21):
```

$$0,\ \frac{r2\,s1\,v}{2},\ 0,\ \frac{s1^3}{r2}$$
$$0,\ r2^2,\ 0,\ 0$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0,\ v=v\}$$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=0\}$$

$SF_{1}^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{3}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=-\frac{r1\,v}{2},\ s1=0,\ s2=s2,\ u=-\frac{-v^3+8}{4\,v}\right\}$$

$SF_{5}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=-\frac{r1\,v}{2},\ s1=0,\ s2=s2,\ u=\frac{v^3-8}{4\,v}\right\}$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=u,\ v=0\}$$

$SF_{14}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=-\frac{s1\,v}{2},\ u=\frac{v^3-8}{4\,v}\right\}$$

$NSF_{27}^{4,1}$ ($v \neq -u^{-2}$). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,0,u,1,0,1,0,v, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r2\left((-v\,s1+s2)\,r2^2+u\,r1\,r2\,s2-s1\,r1^2\right)}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{(3\,s2+s1\,(-3\,v+u))\,s2\,r2^2+2\,r1\,(u\,s2^2-s1^2)\,r2-r1^2\,s1\,s2}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$\frac{(u\,r1+3\,r2)\,s2^3+2\,s1\,r2\left(u-\frac{3\,v}{2}\right)s2^2-2\,r1\,s1^2\,s2-s1^3\,r2}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{(s2^3+s1\,(-v+u)\,s2^2-s1^3)\,s2}{r1\,s2-s1\,r2}$$
$$-\frac{(r2^3+r1\,(-v+u)\,r2^2-r1^3)\,r2}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{(-u\,s1-3\,s2)\,r2^3-2\,s2\,r1\left(u-\frac{3\,v}{2}\right)r2^2+2\,s1\,r1^2\,r2+r1^3\,s2}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$\frac{(-2\,s2\,s1\,u-3\,s2^2)\,r2^2-r1\,(s2^2\,(-3\,v+u)-s1^2)\,r2+2\,r1^2\,s1\,s2}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{s2\,(v\,r1\,s2^2-u\,s1\,r2\,s2+r1\,s1^2-r2\,s2^2)}{r1\,s2-s1\,r2}$$

$SF_{9}^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=0\}$$

$SF_{6}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=v\}$$

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=0\}$$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=u,\ v=0\}$$

$SF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_5^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = RootOf(2\_Z^2-u)\ r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, v=\frac{RootOf(2\_Z^2-u)\ u+2}{2\ RootOf(2\_Z^2-u)}\right\}$$

```
> r11 := sqrt(u/2)*r2:
  v1 := (sqrt(u/2)*u+2)/(2*sqrt(u/2)):
  zamproc(0,0,u,1,0,1,0,v1, r11,s1,r2,0):
```

$$\frac{r2^2\left(u^{3/2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{u}}, \sqrt{2}\ \sqrt{u}\ r2\ s1, s1^2, 0$$
$$0, 0, -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{u}\ r2\ s1}{2}, 0$$

```
> r12 := -sqrt(u/2)*r2:
  v2 := (-sqrt(u/2)*u+2)/(-2*sqrt(u/2)):
  zamproc(0,0,u,1,0,1,0,v2, r12,s1,r2,0):
```

$$-\frac{r2^2\left(-u^{3/2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{u}}, -\sqrt{2}\ \sqrt{u}\ r2\ s1, s1^2, 0$$
$$0, 0, \frac{\sqrt{2}\ \sqrt{u}\ r2\ s1}{2}, 0$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=0, s1=0, s2=s2, u=0, v=v\}$$

```
> u1 := 3*4^(-2/3):
  v1 := 4^(-2/3):
  r11 := 2^(1/3)*r2:
  s11 := -3*2^(-2/3)*s2:
  zamproc(0,0,u1,1,0,1,0,v1, r11,s11,r2,s2):
```

$$\frac{5\ r2^2\ 2^{2/3}}{4}, 0, 0, \frac{5\ s2^3\ 2^{2/3}}{4\ r2}$$
$$0, -\frac{5\ r2^2\ 2^{2/3}}{4}, 0, \frac{5\ s2^2\ 2^{2/3}}{4}$$

$SF_{14}^{4,1}$

```
> # v = -u^(-2) !
  solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=RootOf(3\_Z^3+4)\ r2, r2=r2, s1=\frac{2\ s2}{RootOf(3\_Z^3+4)^2}, s2=s2, u=\frac{3\ RootOf(3\_Z^3+4)^3+2}{2\ RootOf(3\_Z^3+4)}, v=\frac{9\ RootOf(3\_Z^3+4)^3+20}{6\ RootOf(3\_Z^3+4)}\right\}$$

$SF_{19}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=v\}$$

$NSF_{29}^{4,1}$ ($v \neq -u$). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,0,v,0,1,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r2\left((s2\ u-s1)\ r1^2-r1\ r2\ s1+r2^2\ s2\ v\right)}{r1\ s2-r2\ s1}, \frac{s2\ (s2\ u-s1)\ r1^2+2\ r2\ (-s1+(u-1)\ s2)\ s1\ r1+r2^2\ (3\ s2^2\ v-s1^2)}{r1\ s2-r2\ s1},$$
$$\frac{-s1^3\ r2+((u-2)\ r2-2\ r1)\ s2\ s1^2+2\ r1\left(u-\frac{1}{2}\right)s2^2\ s1+3\ v\ r2\ s2^3}{r1\ s2-r2\ s1}, \frac{(v\ s2^3+s1^2\ (u-1)\ s2-s1^3)\ s2}{r1\ s2-r2\ s1}$$
$$-\frac{r2\ (v\ r2^3+r1^2\ (u-1)\ r2-r1^3)}{r1\ s2-r2\ s1}, \frac{r1^3\ s2-r2\ ((u-2)\ s2-2\ s1)\ r1^2-2\ r2^2\ s1\left(u-\frac{1}{2}\right)r1-3\ v\ r2^3\ s2}{r1\ s2-r2\ s1},$$
$$\frac{(2\ s1\ s2+s2^2)\ r1^2-2\ r2\left(-\frac{s1}{2}+(u-1)\ s2\right)s1\ r1-r2^2\ (s1^2\ u+3\ s2^2\ v)}{r1\ s2-r2\ s1}, \frac{s2\ (-r2\ s1^2\ u-r2\ s2^2\ v+r1\ s1^2+r1\ s1\ s2)}{r1\ s2-r2\ s1}$$

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{r2}{2}, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=\frac{1}{8}\right\}$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{r2}{2}, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=-\frac{1}{2}, v=\frac{1}{4}\right\}$$

```
> r11 := -r2/2:
  zamproc(0,-1/2,0,1/4,0,1,1,0, r11,s1,r2,0):
```

$$-\frac{r2^2}{4}, 0, s1^2, 0$$
$$0, \frac{r2^2}{2}, 0, 0$$

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=-2\,s2, s2=s2, u=0, v=0\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0, v=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=v\}$$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{1}^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{3}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{r2}{2}, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=\frac{1}{8}\right\}$$

$SF_{5}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r2\,u-\frac{1}{2}\,r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, v=\frac{1}{2}\,u^2-\frac{1}{2}\,u+\frac{1}{8}\right\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, v=0\}$$

```
> r11 := (u-1/2)*r2:
  v1 := (2*u-1)^2/8:
  zamproc(0,u,0,v1,0,1,1,0, r11,s1,r2,0):
```

$$r2^2\,u^2-\frac{1}{4}\,r2^2, 2\,r2\,s1\,u, s1^2, 0$$
$$0, 0, \frac{s1\,r2}{2}, 0$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r2\,u, r2=r2, s1=s1, s2=0, v=u^2\}$$

```
> v1 := u^2:
  r11 := u*r2:
  zamproc(0,u,0,v1,0,1,1,0, r11,s1,r2,0):
```

$$r2^2\,u\,(u+1), r2\,s1\,(2\,u+1), s1^2, 0$$
$$0, -r2^2\,u, 0, 0$$

$SF_{13}^{4,1}$

```
> evala([solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1})]);
```

$$\left[\left\{r1=RootOf(3\_Z^3-\_Z-3)\,r2, s1=-\frac{3\,(3\,RootOf(3\_Z^3-\_Z-3)+2+RootOf(3\_Z^3-\_Z-3)^2)\,s2}{5}, u=-\frac{6\,RootOf(3\_Z^3-\_Z-3)^2}{5}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3\,RootOf(3\_Z^3-\_Z-3)}{5}-\frac{2}{5}, v=\frac{9\,RootOf(3\_Z^3-\_Z-3)^2}{5}+\frac{26\,RootOf(3\_Z^3-\_Z-3)}{15}+\frac{8}{5}\right\}\right]$$

```
> solve(3*_Z^3-_Z-3, _Z);
```

$$\frac{\left(108+20\sqrt{29}\right)^{1\backslash 3}}{6}+\frac{2}{3\left(108+20\sqrt{29}\right)^{1\backslash 3}}, -\frac{\left(108+20\sqrt{29}\right)^{1\backslash 3}}{12}-\frac{1}{3\left(108+20\sqrt{29}\right)^{1\backslash 3}}$$
$$+\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{\left(108+20\sqrt{29}\right)^{1\backslash 3}}{6}-\frac{2}{3\left(108+20\sqrt{29}\right)^{1\backslash 3}}\right)}{2}, -\frac{\left(108+20\sqrt{29}\right)^{1\backslash 3}}{12}-\frac{1}{3\left(108+20\sqrt{29}\right)^{1\backslash 3}}$$

$$-\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}}{6}-\frac{2}{3\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}}\right)}{2}$$

$$z := -\frac{\left((108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}+4\right)(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}\left(-27+5\sqrt{29}\right)}{96}$$

```
> z1 := (r+4*r^(-1))/6:
  u1 := simplify(-6*z1^2*(1/5)-3*z1*(1/5)-2/5);
  v1 := simplify(9*z1^2*(1/5)+26*z1*(1/15)+8/5);
  r11 := z1*r2:
  s11 := simplify(-(1/5)*(3*(3*z1+2+z1^2)))*s2;
```

$$u1 := \frac{-r^4-3\,r^3-20\,r^2-12\,r-16}{30\,r^2}$$

$$v1 := \frac{9\,r^4+52\,r^3+360\,r^2+208\,r+144}{180\,r^2}$$

$$s11 := \frac{(-r^4-18\,r^3-80\,r^2-72\,r-16)\,s2}{60\,r^2}$$

```
> ro := (20*sqrt(29)+108)^(1/3):
  u2 := ((3*sqrt(29)-17)*ro^2+(4*sqrt(29)-24)*ro-16)/24:
  v2 := ((72-13*sqrt(29))*ro^2-(9*sqrt(29)-59)*ro+72)/36:
  simplify(u1-u2);
  simplify(v1-v2);
  r12 := (ro+4*ro^(-1))*r2/6:
  s12 := ((9*sqrt(29)-49)*ro^2+(2*sqrt(29)-12)*ro-32)*s2/24:
  zamproc(0,u2,0,v2,0,1,1,0, r12,s12,r2,s2):
  simplify(r11 - r12);
  rationalize(simplify(s11 - s12));
```

$$0$$

$$0$$

$$-\frac{\left(15\,(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}\sqrt{29}+10\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}\sqrt{29}-83\,(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}-66\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}-16\right)r2^2}{72},$$

$$\frac{\left((108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}+3\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}+4\right)r2\,s2}{12},\ \frac{(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}\,s2^2}{16},$$

$$-\frac{\left(30\,(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}\sqrt{29}+20\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}\sqrt{29}-163\,(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}-96\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}+16\right)s2^3}{144\,r2}$$

$$0,\ \frac{\left(39\,(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}\sqrt{29}+32\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}\sqrt{29}-217\,(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}-204\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}-224\right)r2^2}{72},$$

$$\frac{r2\left((\sqrt{29}-7)\,(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}-4\sqrt{29}-4\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}-28\right)s2}{24},\ -\frac{4\,(\sqrt{29}-6)\,s2^2\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}}{9}$$

$$-\frac{\left(9\,(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}\sqrt{29}+3\sqrt{29}-49\,(108+20\sqrt{29})^{2\backslash 3}-35\right)s2^2}{18}$$

$$0$$

$$-\frac{s2\,(108+20\sqrt{29})^{1\backslash 3}}{4}$$

$SF_{14}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=-\frac{s2}{2},\ s2=s2,\ u=u,\ v=-\frac{u}{4}+\frac{1}{8}\right\},\ \left\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=RootOf(\_Z^2-3\,\_Z+1)\,s2,\ s2=s2,\ u=-\frac{RootOf(\_Z^2-3\,\_Z+1)-1}{RootOf(\_Z^2-3\,\_Z+1)-3},\ v=\frac{RootOf(\_Z^2-3\,\_Z+1)-1}{RootOf(\_Z^2-3\,\_Z+1)-3}\right\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=0\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=0,\ v=0\},\ \{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=-1,\ v=1\}$$

```
> s11 := -s2/2:
  v1 := (1-2*u)/8:
  zamproc(0,u,0,v1,0,1,1,0, r1,s11,0,s2):
```

$$0,\ \frac{s2\,r1\,(2\,u+1)}{2},\ -u\,s2^2,\ 0$$

$$0,\ r1^2,\ 0,\ -\frac{s2^2}{4}$$

$SF_{19}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=v\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=0,\ v=0\}$$

$SF_{27}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=2\,s2,\ s2=s2,\ u=1,\ v=-1\},\ \left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=-\frac{s2}{2},\ s2=s2,\ u=-\frac{1}{2},\ v=v\right\}$$

```
> s11 := -s2/2:
  zamproc(0,-1/2,0,v,0,1,1,0, r1,s11,0,s2):
```

$$0,\, 0,\, \frac{s2^2}{2},\, \frac{s2^3\,(4\,v-1)}{4\,r1}$$
$$0,\, r1^2,\, 0,\, -\frac{s2^2}{4}$$

$SF_{28}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\, r2=r2,\, s1=-2\,s2,\, s2=s2,\, u=0,\, v=0\}$$

$NSF_{30}^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,v,1,0,1,0,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{((s2\,u-s1)\,r1^2+r1\,r2\,s2\,v+r2^2\,s2)\,r2}{r1\,s2-s1\,r2},\, \frac{(r1^2\,u+2\,r1\,r2\,v+3\,r2^2)\,s2^2+2\left(u\,r1\,r2+\frac{1}{2}\,v\,r2^2-\frac{1}{2}\,r1^2\right)s1\,s2-2\,r1\,s1^2\,r2}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$\frac{(r1\,v+3\,r2)\,s2^3+2\,s1\,(r1\,u+r2\,v)\,s2^2+s1^2\,(r2\,u-2\,r1)\,s2-s1^3\,r2}{r1\,s2-s1\,r2},\, \frac{s2\,(u\,s1^2\,s2+v\,s1\,s2^2-s1^3+s2^3)}{r1\,s2-s1\,r2}$$
$$-\frac{r2\,(u\,r1^2\,r2+v\,r1\,r2^2-r1^3+r2^3)}{r1\,s2-s1\,r2},\, \frac{(-s1\,v-3\,s2)\,r2^3-2\,r1\,(s1\,u+s2\,v)\,r2^2-r1^2\,(s2\,u-2\,s1)\,r2+r1^3\,s2}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$\frac{(-s1^2\,u-2\,s1\,s2\,v-3\,s2^2)\,r2^2-2\,r1\left(s1\,s2\,u+\frac{1}{2}\,s2^2\,v-\frac{1}{2}\,s1^2\right)r2+2\,r1^2\,s1\,s2}{r1\,s2-s1\,r2},\, -\frac{((s1^2\,u+s1\,s2\,v+s2^2)\,r2-r1\,s1^2)\,s2}{r1\,s2-s1\,r2}$$

$SF_{9}^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=0,\, v=0\}$$

$SF_{6}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=0,\, v=0\}$$

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\, r2=0,\, s1=0,\, s2=s2,\, u=u,\, v=0\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=0,\, v=0\}$$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\, r2=0,\, s1=0,\, s2=s2,\, u=0,\, v=v\}$$

$SF_{1}^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{3}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{5}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{2\,r2}{v},\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=-\frac{\left(-r2^3+\frac{8\,r2^3}{v^3}\right)v^2}{4\,r2^3}\right\}$$

```
> u1 := (v^3-8)/(4*v):
  r21 := -v*r1/2:
  zamproc(0,u1,v,1,0,1,0,0, r1,s1,r21,0):
```

$$r1^2,\, 2\,r1\,s1,\, s1^2,\, 0$$
$$0,\, 0,\, -\frac{r1\,s1\,v^3}{8},\, 0$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{r2}{v},\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=-\frac{1}{v}\right\}$$

```
> u1 := -1/v:
  r21 := -r1*v:
  zamproc(0,u1,v,1,0,1,0,0, r1,s1,r21,0):
```

$$r1^2, 2\, r1\, s1, s1^2, 0$$
$$0, v^3\, r1^2, 0, 0$$

$SF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\left\{r1 = RootOf(\_Z^2+\_Z+1)\, r2, r2 = r2, s1 = 0, s2 = s2, u = -\frac{3}{RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+1}, v = -\frac{3}{RootOf(\_Z^2+\_Z+1)}\right\}, \{r1 = r2, r2 = r2, s1 = 0, s2 = s2, u = 3, v = -3\}, \{r1 = r1, r2 = 0, s1 = 0, s2 = s2, u = 0, v = 0\}, \{r1 = r2, r2 = r2, s1 = -2\, s2, s2 = s2, u = -1, v = 1\}$

```
> zamproc(0,3,-3,1,0,1,0,0, r1,0,r1,s2):
```

$$r1^2, 0, 0, \frac{s2^3}{r1}$$
$$0, r1^2, 0, -s2^2$$

$SF_{14}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = r1, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = \frac{r1}{r2}, v = 0\right\}$$

$SF_{27}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = r1, r2 = 0, s1 = 0, s2 = s2, u = 0, v = v\}$$

$SF_{28}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = 0, s2 = s2, u = 2, v = 3\}, \left\{r1 = RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\, r2, r2 = r2, s1 = 0, s2 = s2, u = \frac{2}{RootOf(\_Z^2-\_Z+1)-1}, v = -\frac{3}{RootOf(\_Z^2-\_Z+1)}\right\}, \{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = 2\, s2, s2 = s2, u = 0, v = -1\}$

```
> zamproc(0,2,3,1,0,1,0,0, r1,0,-r1,s2):
```

$$0, -s2\, r1, 0, \frac{s2^3}{r1}$$
$$-\frac{r1^3}{s2}, 0, 0, s2^2$$

$SF_{29}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = r1, r2 = 0, s1 = 0, s2 = s2, u = u, v = 0\}$$

$NSF_{33}^{4,1}$ ($v \neq u$). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,0,u,v,0,1,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

$\frac{r2\,(r2^2\, s2\, v + r1\,(u\, s2 - s1)\, r2 - s1\, r1^2)}{-s1\, r2 + s2\, r1}, \frac{(s1\, s2\, u + 3\, s2^2\, v - s1^2)\, r2^2 + 2\, r1\,(s2^2\, u - s1^2 - s1\, s2)\, r2 - s2\, r1^2\, s1}{-s1\, r2 + s2\, r1},$
$\frac{(u\, r1 + 3\, v\, r2)\, s2^3 + 2\left(u\, r2 - \frac{r1}{2}\right) s1\, s2^2 - 2\, s1^2\,(r2 + r1)\, s2 - r2\, s1^3}{-s1\, r2 + s2\, r1}, \frac{s2\,(s1\, s2^2\, u + s2^3\, v - s1^3 - s1^2\, s2)}{-s1\, r2 + s2\, r1}$

$\frac{r2\,(-u\, r1\, r2^2 - r2^3\, v + r1^3 + r2\, r1^2)}{-s1\, r2 + s2\, r1}, \frac{(-s1\, u - 3\, s2\, v)\, r2^3 - 2\, r1\left(u\, s2 - \frac{s1}{2}\right) r2^2 + 2\, r1^2\,(s2 + s1)\, r2 + s2\, r1^3}{-s1\, r2 + s2\, r1},$
$\frac{(-u\, r1\, r2 - 3\, v\, r2^2 + r1^2)\, s2^2 - 2\, s1\,(u\, r2^2 - r1^2 - r1\, r2)\, s2 + r2\, r1\, s1^2}{-s1\, r2 + s2\, r1}, -\frac{(r2\, s2^2\, v + s1\,(u\, r2 - r1)\, s2 - r1\, s1^2)\, s2}{-s1\, r2 + s2\, r1}$

$SF_{9}^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{6}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = -\frac{r2}{2}, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0, v = \frac{1}{8}\right\}$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = -2\, s2, s2 = s2, u = 0, v = 0\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = 0, v = 0\}, \{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0, v = v\}$$

$SF^{3,1}_{22}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF^{4,1}_{1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{RootOf(\_Z^2+\_Z+1)\,r2}{2\,(RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+1)},\, r2=r2,\, s1=\frac{RootOf(\_Z^2+\_Z+1)\,s2}{2},\, s2=s2,\, u=-\frac{RootOf(\_Z^2+\_Z+1)}{2\,(RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+1)^2},\, v=\frac{RootOf(\_Z^2+\_Z+1)^3}{8\,(RootOf(\_Z^2+\_Z+1)+1)^3}\right\}$$

$SF^{4,1}_{3}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{r2}{2},\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=0,\, v=\frac{1}{8}\right\}$$

$SF^{4,1}_{5}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=RootOf(2\_Z^2+\_Z-u)\,r2,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, v=-\frac{RootOf(2\_Z^2+\_Z-u)\,u}{2}-\frac{RootOf(2\_Z^2+\_Z-u)}{4}+\frac{u}{4}\right\}$$

```
> solve(2*_Z^2+_Z-u, _Z);
```

$$-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{1+8u}}{4},\ -\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{1+8u}}{4}$$

```
> z1 := -1/4+(1/4)*sqrt(1+8*u):
  v1 := simplify(-(1/2)*z1*u-(1/4)*z1+(1/4)*u);
  r11 := z1*r2:
  zamproc(0,0,u,v1,0,1,1,0, r11,s1,r2,0):
```

$$v1 := \frac{(-2u-1)\sqrt{1+8u}}{16}+\frac{3u}{8}+\frac{1}{16}$$

$$\frac{\left(-1+\sqrt{1+8u}\right) r2^2 \left(3+\sqrt{1+8u}\right)}{16},\ \frac{s1\, r2\left(1+\sqrt{1+8u}\right)}{2},\ s1^2,\ 0$$

$$0,\ 0,\ -\frac{\left(-1+\sqrt{1+8u}\right) r2\, s1}{4},\ 0$$

```
> z2 := -1/4-(1/4)*sqrt(1+8*u):
  v2 := simplify(-(1/2)*z2*u-(1/4)*z2+(1/4)*u);
  r12 := z2*r2:
  zamproc(0,0,u,v2,0,1,1,0, r12,s1,r2,0):
```

$$v2 := \frac{(2u+1)\sqrt{1+8u}}{16}+\frac{3u}{8}+\frac{1}{16}$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{1+8u}\right) r2^2 \left(-3+\sqrt{1+8u}\right)}{16},\ -\frac{\left(-1+\sqrt{1+8u}\right) r2\, s1}{2},\ s1^2,\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{s1\, r2\left(1+\sqrt{1+8u}\right)}{4},\ 0$$

$SF^{4,1}_{11}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=u,\, v=0\},\ \{r1=0,\, r2=r2,\, s1=-s2,\, s2=s2,\, u=0,\, v=0\}$$

$SF^{4,1}_{13}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF^{4,1}_{14}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\, r2=0,\, s1=-\frac{s2}{2},\, s2=s2,\, u=u,\, v=\frac{u}{2}+\frac{1}{8}\right\},\ \{r1=0,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=u,\, v=0\},\ \{r1=0,\, r2=r2,\, s1=-s2,\, s2=s2,\, u=0,\, v=0\},\ \left\{r1=-r2,\, r2=r2,\, s1=\frac{s2}{2},\, s2=s2,\, u=\frac{1}{4},\, v=\frac{1}{4}\right\}$$

```
> v1 := (4*u+1)/8:
  s21 := -2*s1:
  zamproc(0,0,u,v1,0,1,1,0, r1,s1,0,s21):
```

$$0,\ -s1\, r1,\ 4u\, s1^2,\ 0$$

$$0,\ r1^2,\ 0,\ -s1^2$$

$SF^{4,1}_{19}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\, r2=r2,\, s1=-s2,\, s2=s2,\, u=0,\, v=0\},\ \{r1=0,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, u=0,\, v=v\}$$

$SF^{4,1}_{27}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{28}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=-2\,s2, s2=s2, u=0, v=0\}$$

$SF_{29}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=0, s1=-s2, s2=s2, u=1, v=v\}, \{r1=r1, r2=0, s1=0, s2=s2, u=0, v=v\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, u=0, v=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=-2\,s2, s2=s2, u=0, v=0\}$$

```
> zamproc(0,0,1,v,0,1,1,0, r1,s1,0,-s1):
```

$$0,\ -s1\,r1,\ 0,\ -\frac{s1^3\,(v-1)}{r1}$$
$$0,\ r1^2,\ s1\,r1,\ 0$$

$SF_{30}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=s2, u=0, v=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=u, v=0\}$$

$SF_{32}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

II

$NSF_{1}^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,u,0,0,0,0,1,1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{(r1+r2)\,(s2\,r1^2\,u-s1\,r2^2)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{-s1^2\,r2^2+3\left(u\,r1^2+\frac{2\,r2\,(u-1)\,r1}{3}-r2^2\right)s2\,s1+u\,s2^2\,r1^2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{3\left(\left(u\,r1+\frac{r2\,(u-2)}{3}\right)s1+\frac{2\left(\left(u-\frac{1}{2}\right)r1-\frac{3\,r2}{2}\right)s2}{3}\right)s1\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{s1\,s2\,(s1+s2)\,(s1\,u-s2)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$
$$-\frac{r1\,r2\,(r1+r2)\,(u\,r1-r2)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ -\frac{3\,r2\left(\left(\left(\frac{2\,u}{3}-\frac{1}{3}\right)s1-s2\right)r2+\left(s1\,u+\frac{(u-2)\,s2}{3}\right)r1\right)r1}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{s2^2\,r1^2-3\,r2\left(s1^2\,u+\frac{2\,s2\,(u-1)\,s1}{3}-s2^2\right)r1-u\,r2^2\,s1^2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(s1+s2)\,(-u\,r2\,s1^2+s2^2\,r1)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$SF_{2}^{2,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{9}^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{3}^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=-1\}, \{r1=r1, r2=0, s1=-s2, s2=s2, u=-1\}$$

```
> zamproc(-1,-1,0,0,0,0,1,1, r1,s1,0,-s1):
```

$$-r1^2,\ -2\,s1\,r1,\ 0,\ 0$$
$$0,\ 0,\ -s1\,r1,\ 0$$

$SF_{5}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{6}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=0, s1=-s2, s2=s2, u=0\}$$

$SF_{8}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=1\}$$

```
> zamproc(1,1,0,0,0,0,1,1, r1,s1,r1,-s1):
```

$$2\,r1^2,\ 0,\ 2\,s1^2,\ 0$$
$$0,\ 4\,r1^2,\ 0,\ 0$$

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=-1\}$$

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$NSF_{3}^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,0,-u,0,0,0,1,1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{(r1+r2)\,(s2\,r1^2\,u-u\,s2\,r1\,r2-s1\,r2^2)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{-s1\,(s1+s2\,(u+3))\,r2^2-2\,s2\,r1\,(u\,s2+s1)\,r2+3\,u\,r1^2\,s1\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$

$$\frac{3\,s2\left(\left(u\,r1-\frac{2\,r2}{3}\right)s1^2-\frac{2\left(\frac{r1}{2}+\left(u+\frac{3}{2}\right)r2\right)s2\,s1}{3}-\frac{r1\,s2^2\,u}{3}\right)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(s1+s2)\,((-u-1)\,s2+s1\,u)\,s1\,s2}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$$-\frac{r2\,r1\,(r1+r2)\,((-u-1)\,r2+u\,r1)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ -\frac{3\left(\left(s1\,u-\frac{2\,s2}{3}\right)r1^2-\frac{2\,r2\left(\frac{s1}{2}+\left(u+\frac{3}{2}\right)s2\right)r1}{3}-\frac{r2^2\,s1\,u}{3}\right)r2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$

$$\frac{s2^2\,r1^2-3\,r2\left(\left(-\frac{u}{3}-1\right)s2^2-\frac{2\,s1\,s2}{3}+s1^2\,u\right)r1+2\,u\,s1\,s2\,r2^2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(s1+s2)\,(-u\,r2\,s1^2+u\,r2\,s1\,s2+s2^2\,r1)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$SF_{2}^{2,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{9}^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{3}^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=-\frac{1}{2}\right\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

```
> zamproc(-1/2,0,1/2,0,0,0,1,1, r1,s1,0,-s1):
```

$$-\frac{r1^2}{2},\ -\frac{3\,s1\,r1}{2},\ 0,\ 0$$
$$0,\ 0,\ -s1\,r1,\ 0$$

$SF_{5}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{6}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=0\}$$

$SF_{8}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{1}^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=-\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=\frac{s2}{2},\ s2=s2,\ u=-2\right\},\ \left\{r1=\frac{r2}{2},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=-2\right\},\ \left\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1\right.$$

$$= s1, s2 = 0, u = -\frac{1}{2}\Big\}, \{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0\}, \{r1 = r1, r2 = 0, s1 = 0, s2 = s2, u = 0\}$$

```
> s21 := 2*s1:
  zamproc(-2,0,2,0,0,0,1,1, r1,s1,0,s21):
```

$$-2\, r1^2, -6\, s1\, r1, 0, 0$$
$$0, 0, 2\, s1\, r1, 6\, s1^2$$

$NSF_{13}^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,0,0,u,0,1,0,-1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{\left((u\, s2 + s1)\, r2^2 - r1\, (u\, s2 + s1)\, r2 + u\, s2\, r1^2\right)\, (r1 + r2)}{-s1\, r2 + s2\, r1}, \frac{-2\, s1^2\, r1\, r2 + 3\left(\left(u - \frac{1}{3}\right) r1^2 + r2^2\right) s2\, s1 + 3\, u\, s2^2\, r2^2}{-s1\, r2 + s2\, r1},$$
$$\frac{-s1^3\, r2 + 3\left(u - \frac{2}{3}\right) r1\, s2\, s1^2 + 3\, s1\, s2^2\, r2 + 3\, u\, s2^3\, r2}{-s1\, r2 + s2\, r1}, \frac{\left((u-1)\, s1^2 - s2\, (u-1)\, s1 + u\, s2^2\right)\, (s1 + s2)\, s2}{-s1\, r2 + s2\, r1}$$
$$-\frac{r2\left((u-1)\, r1^2 - r2\, (u-1)\, r1 + u\, r2^2\right)\, (r1 + r2)}{-s1\, r2 + s2\, r1}, \frac{s2\, r1^3 - 3\, r2\left(u - \frac{2}{3}\right) s1\, r1^2 - 3\, s2\, r1\, r2^2 - 3\, u\, s2\, r2^3}{-s1\, r2 + s2\, r1},$$
$$\frac{2\, s1\, s2\, r1^2 - 3\, r2\left(\left(u - \frac{1}{3}\right) s1^2 + s2^2\right) r1 - 3\, u\, s2^2\, r2^2}{-s1\, r2 + s2\, r1}, -\frac{(s1 + s2)\left((u\, r2 + r1)\, s2^2 - s1\, (u\, r2 + r1)\, s2 + u\, r2\, s1^2\right)}{-s1\, r2 + s2\, r1}$$

$SF_{2}^{2,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{9}^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{3}^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = 2\, r2, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = \frac{2}{3}\right\}$$

```
> r11 := 2*r2:
  zamproc(2/3,0,0,2/3,0,1,0,-1, r11,s1,r2,-s1):
```

$$3\, r2^2, 3\, s1\, r2, 0, 0$$
$$0, 0, 6\, s1\, r2, 0$$

$SF_{5}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{6}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0\}$$

$SF_{8}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0\}$$

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0\}$$

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{1}^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = 2\, r2, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = \frac{2}{3}\right\}, \left\{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = 2\, s2, s2 = s2, u = \frac{2}{3}\right\}$$

$SF_{3}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0\}$$

$SF_5^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=0\}, \left\{r1=2\,r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=\frac{2}{3}\right\}$

$SF_7^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1, r2=0, s1=-s2, s2=s2, u=\frac{2}{3}\right\}, \left\{r1=2\,r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=\frac{2}{3}\right\}$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$\left\{r1=\frac{r2}{2}, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=-\frac{1}{3}\right\}, \{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0\}$

```
> r21 := 2*r1:
  zamproc(-1/3,0,0,-1/3,0,1,0,-1, r1,s1,r21,-s1):
```

$$-3\,r1^2, 6\,s1\,r1, -3\,s1^2, 0$$
$$0, -3\,r1^2, 0, 0$$

$SF_{12}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=2\,s2, s2=s2, u=\frac{2}{3}\right\}$$

$NSF_{28}^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,u,0,-u,1,0,0,1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{((-u\,s2-s1)\,r2^2+r1\,(u\,s2+s1)\,r2-s1\,r1^2)\,(r1+r2)}{-s1\,r2+s2\,r1}, \frac{u\,(r1^2-3\,r2^2)\,s2^2+2\,r2\,s1\left(u\,r1-\frac{3\,r2}{2}\right)s2-3\,s1^2\,r1^2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{-3\,s1^3\,r1+u\,s1^2\,s2\,r2+2\left(u\,r1-\frac{3\,r2}{2}\right)s2^2\,s1-3\,u\,s2^3\,r2}{-s1\,r2+s2\,r1}, \frac{(s1+s2)\,(-s1^3+s1^2\,s2+s2^2\,(u-1)\,s1-u\,s2^3)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$
$$-\frac{(-r1^3+r1^2\,r2+r2^2\,(u-1)\,r1-u\,r2^3)\,(r1+r2)}{-s1\,r2+s2\,r1}, \frac{3\,s1\,r1^3-u\,s2\,r1^2\,r2-2\,r2^2\left(u\,s1-\frac{3\,s2}{2}\right)r1+3\,u\,s2\,r2^3}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{-u\,(s1^2-3\,s2^2)\,r2^2-2\left(u\,s1-\frac{3\,s2}{2}\right)r1\,s2\,r2+3\,s1^2\,r1^2}{-s1\,r2+s2\,r1}, -\frac{(s1+s2)\,((-u\,r2-r1)\,s2^2+s1\,(u\,r2+r1)\,s2-s1^2\,r1)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$SF_2^{2,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_3^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_5^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_8^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF^{3,1}_{22}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=2\,s2, s2=s2, u=-3\}$$

```
> s11 := 2*s2:
  zamproc(0,-3,0,3,1,0,0,1, r1,s11,-r1,s2):
```

$$0, 0, -9\,s2^2, -\frac{9\,s2^3}{r1}$$
$$0, 9\,r1^2, 0, 0$$

$SF^{4,1}_{1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF^{4,1}_{3}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF^{4,1}_{5}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\,s2, s2=s2, u=0\}, \{r1=2\,r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=6\}$$

```
> r11 := 2*r2:
  zamproc(0,6,0,-6,1,0,0,1, r11,s1,r2,-s1):
```

$$9\,r2^2, 9\,s1\,r2, -9\,s1^2, 0$$
$$0, 0, -18\,s1\,r2, 0$$

$SF^{4,1}_{7}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=RootOf(2\,\_Z^2-4\,\_Z+3)\,r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=\frac{3}{2}\right\}$$

$SF^{4,1}_{11}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=\frac{r2}{2}, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=-\frac{3}{4}\right\}, \{r1=0, r2=r2, s1=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\,s2, s2=s2, u=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0\}$$

```
> r21 := 2*r1:
  zamproc(0,-3/4,0,3/4,1,0,0,1, r1,s1,r21,-s1):
```

$$\frac{9\,r1^2}{2}, -\frac{27\,r1\,s1}{4}, \frac{9\,s1^2}{2}, 0$$
$$0, -\frac{9\,r1^2}{2}, 0, 0$$

$SF^{4,1}_{12}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=\frac{3\,s2}{2}, s2=s2, u=\frac{3}{2}\right\}$$

```
> s11 := 3*s2/2:
  zamproc(0,3/2,0,-3/2,1,0,0,1, r1,s11,-r1,s2):
```

$$0, -\frac{15\,s2\,r1}{2}, 0, -\frac{15\,s2^3}{8\,r1}$$
$$0, 0, \frac{15\,s2\,r1}{4}, \frac{5\,s2^2}{2}$$

$SF^{4,1}_{13}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0\}$$

$SF^{4,1}_{14}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=RootOf(\_Z^3-5\,\_Z^2+6\,\_Z-3)\,s2, s2=s2, u=\frac{3\,(RootOf(\_Z^3-5\,\_Z^2+6\,\_Z-3)-1)}{RootOf(\_Z^3-5\,\_Z^2+6\,\_Z-3)-3}\right\}$$

```
> solve(_Z^3-5*_Z^2+6*_Z-3, _Z);
```

$$\frac{(244+36\sqrt{29})^{1/3}}{6}+\frac{14}{3\,(244+36\sqrt{29})^{1/3}}+\frac{5}{3}, -\frac{(244+36\sqrt{29})^{1/3}}{12}-\frac{7}{3\,(244+36\sqrt{29})^{1/3}}+\frac{5}{3}$$
$$+\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{(244+36\sqrt{29})^{1/3}}{6}-\frac{14}{3\,(244+36\sqrt{29})^{1/3}}\right)}{2}, -\frac{(244+36\sqrt{29})^{1/3}}{12}-\frac{7}{3\,(244+36\sqrt{29})^{1/3}}+\frac{5}{3}$$
$$-\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{(244+36\sqrt{29})^{1/3}}{6}-\frac{14}{3\,(244+36\sqrt{29})^{1/3}}\right)}{2}$$

```
> solve(3*_Z^3-6*_Z^2+5*_Z-1, _Z);
```

$$-\frac{\left(20+4\sqrt{29}\right)^{1/3}}{6}+\frac{2}{3\left(20+4\sqrt{29}\right)^{1/3}}+\frac{2}{3},\ \frac{\left(20+4\sqrt{29}\right)^{1/3}}{12}-\frac{1}{3\left(20+4\sqrt{29}\right)^{1/3}}+\frac{2}{3}$$
$$+\frac{I\sqrt{3}\left(-\frac{\left(20+4\sqrt{29}\right)^{1/3}}{6}-\frac{2}{3\left(20+4\sqrt{29}\right)^{1/3}}\right)}{2},\ \frac{\left(20+4\sqrt{29}\right)^{1/3}}{12}-\frac{1}{3\left(20+4\sqrt{29}\right)^{1/3}}+\frac{2}{3}$$
$$-\frac{I\sqrt{3}\left(-\frac{\left(20+4\sqrt{29}\right)^{1/3}}{6}-\frac{2}{3\left(20+4\sqrt{29}\right)^{1/3}}\right)}{2}$$

```
> r := (244+36*sqrt(29))^(1/3):
  z := (r+28*r^(-1)+10)/6;
  u1 := simplify(expand(rationalize(simplify((3*(z-1))/(z-3)))));
  s11 := z*s2:
  zamproc(0,u1,0,-u1,1,0,0,1, r1,s11,-r1,s2):
```

$$z:=\frac{\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}}{6}+\frac{14}{3\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}}+\frac{5}{3}$$

$$u1:=\frac{\left(-7\sqrt{29}+91\right)\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}}{98}+5+\frac{\left(-2\sqrt{29}+19\right)\left(244+36\sqrt{29}\right)^{2/3}}{98}$$

$$0,\ \frac{\left(-5880-924\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}+56\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}\sqrt{29}+25\left(244+36\sqrt{29}\right)^{2/3}\sqrt{29}-213\left(244+36\sqrt{29}\right)^{2/3}\right)s2\,r1}{392},$$
$$\frac{\left(15\left(244+36\sqrt{29}\right)^{2/3}\sqrt{29}+21\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}\sqrt{29}-118\left(244+36\sqrt{29}\right)^{2/3}-469\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}-1960\right)s2^2}{196},\ 0$$
$$0,\ \frac{\left(2\left(244+36\sqrt{29}\right)^{2/3}\sqrt{29}+7\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}\sqrt{29}-19\left(244+36\sqrt{29}\right)^{2/3}-91\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}-343\right)r1^2}{49},\ 0,$$
$$-\frac{\left(48\left(244+36\sqrt{29}\right)^{2/3}\sqrt{29}+105\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}\sqrt{29}-407\left(244+36\sqrt{29}\right)^{2/3}-1757\left(244+36\sqrt{29}\right)^{1/3}-9212\right)s2^2}{588}$$

```
> # проверка записанного решения
  rho := (4*sqrt(29)+92)^(1/3):
  u2 := rho+20*rho^(-1)+5:
  s12 := ((sqrt(29)+27)*rho^2-(10*sqrt(29)-130)*rho+1000)*s2/600:
  simplify(u1-u2);
  zamproc(0,u2,0,-u2,1,0,0,1, r1,s12,-r1,s2):
```

$$0$$

$$0,\ \frac{\left(3\left(4\sqrt{29}+92\right)^{2/3}\sqrt{29}-119\left(4\sqrt{29}+92\right)^{2/3}-530\left(4\sqrt{29}+92\right)^{1/3}+10\left(4\sqrt{29}+92\right)^{1/3}\sqrt{29}-3000\right)r1\,s2}{200},$$
$$\frac{\left(\left(4\sqrt{29}+92\right)^{2/3}\sqrt{29}+20\left(4\sqrt{29}+92\right)^{1/3}\sqrt{29}-123\left(4\sqrt{29}+92\right)^{2/3}-560\left(4\sqrt{29}+92\right)^{1/3}-2000\right)s2^2}{200},\ 0$$
$$0,\ \frac{r1^2\left(\left(-23+\sqrt{29}\right)\left(4\sqrt{29}+92\right)^{2/3}-100\left(4\sqrt{29}+92\right)^{1/3}-350\right)}{50},\ 0,$$
$$-\frac{\left(11\left(4\sqrt{29}+92\right)^{2/3}\sqrt{29}+40\left(4\sqrt{29}+92\right)^{1/3}\sqrt{29}-453\left(4\sqrt{29}+92\right)^{2/3}-2020\left(4\sqrt{29}+92\right)^{1/3}-9400\right)s2^2}{600}$$

$SF^{4,1}_{19}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0\},\ \{r1=0, r2=r2, s1=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\,s2, s2=s2, u=0\}$$

$SF^{4,1}_{24}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=\frac{s2}{2}, s2=s2, u=\frac{3}{2}\right\}$$

$SF^{4,1}_{27}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=2\,s2, s2=s2, u=-3\}$$

$NSF^{4,1}_{32}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,0,u,u,1,0,0,1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{\left(\left(u\,s2-s1\right)r2^2+s1\,r1\,r2-s1\,r1^2\right)\left(r1+r2\right)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{\left(3\,u\,s2+s1\left(u-3\right)\right)s2\,r2^2+2\,u\,s2^2\,r1\,r2-3\,s1^2\,r1^2}{-s1\,r2+s2\,r1},$$
$$\frac{u\left(r1+3\,r2\right)s2^3+2\,r2\left(u-\frac{3}{2}\right)s1\,s2^2-3\,s1^3\,r1}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{\left(s1+s2\right)\left(u\,s2^3-s1^3+s1^2\,s2-s1\,s2^2\right)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$
$$\frac{\left(r1+r2\right)\left(-u\,r2^3+r1^3-r1^2\,r2+r1\,r2^2\right)}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{-u\left(s1+3\,s2\right)r2^3-2\left(u-\frac{3}{2}\right)r1\,s2\,r2^2+3\,s1\,r1^3}{-s1\,r2+s2\,r1},$$

$$\frac{-2\,u\left(s1+\frac{3\,s2}{2}\right)s2\,r2^2-r1\,s2^2\,(u-3)\,r2+3\,s1^2\,r1^2}{-s1\,r2+s2\,r1},\ \frac{(s1+s2)\,(-u\,r2\,s2^2+s1^2\,r1-r1\,s1\,s2+s2^2\,r1)}{-s1\,r2+s2\,r1}$$

$SF_2^{2,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_3^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_5^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_8^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=2\,s2,\ s2=s2,\ u=-3\}$$

```
> s11 := 2*s2:
  zamproc(0,0,-3,-3,1,0,0,1, r1,s11,-r1,s2):
```

$$0,\ -9\,s2\,r1,\ 0,\ -\frac{9\,s2^3}{r1}$$
$$0,\ 0,\ 9\,s2\,r1,\ 0$$

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_5^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=\frac{r2}{2},\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=\frac{3}{8}\right\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\,s2,\ s2=s2,\ u=0\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=0\}$$

```
> r21 := 2*r1:
  zamproc(0,0,3/8,3/8,1,0,0,1, r1,s1,r21,-s1):
```

$$\frac{9\,r1^2}{2},\ -\frac{9\,s1\,r1}{2},\ \frac{27\,s1^2}{8},\ 0$$
$$0,\ 0,\ -\frac{9\,s1\,r1}{4},\ 0$$

$SF_7^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=RootOf(\_Z^2-2\,\_Z+3)\,r2,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=-3\}$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=0\},\ \{r1=2\,r2,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=6\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\,s2,\ s2=s2,\ u=0\}$$

```
> r11 := 2*r2:
  zamproc(0,0,6,6,1,0,0,1, r11,s1,r2,-s1):
```

$$9\,r2^2,\ -9\,r2\,s1,\ 9\,s1^2,\ 0$$
$$0,\ -18\,r2^2,\ 0,\ 0$$

$SF_{12}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = 2\,s2, s2 = s2, u = -3\}$$

$SF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0\}$$

$SF_{14}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = s2\,\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2+1)+s2, s2 = s2, u = \frac{3\,\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2+1)}{2}\right\}$$

$SF_{19}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = 0\}, \{r1 = 0, r2 = r2, s1 = \mathrm{RootOf}(\_Z^2-\_Z+1)\,s2, s2 = s2, u = 0\}$$

$SF_{24}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = 2\,s2, s2 = s2, u = -3\}$$

$SF_{27}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{28}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = r1, r2 = 0, s1 = 0, s2 = s2, u = 0\}$$

$SF_{29}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = 2\,s2, s2 = s2, u = -3\}$$

$SF_{30}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = \frac{s2}{2}, s2 = s2, u = -\frac{3}{4}\right\}$$

```
> s21 := 2*s1:
  zamproc(0,0,-3/4,-3/4,1,0,0,1, r1,s1,-r1,s21):
```

$$0, -\frac{9\,s1\,r1}{2}, 9\,s1^2, -\frac{9\,s1^3}{r1}$$

$$0, \frac{9\,r1^2}{4}, 0, 0$$

$NSF_{36}^{4,1}$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(0,0,u,u,1,0,-1,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{(r1+r2)\,(u\,r2^2\,s2-s1\,r1^2+s1\,r1\,r2)}{-s1\,r2+r1\,s2}, \frac{(u\,s1\,s2+3\,u\,s2^2+s1^2)\,r2^2+2\,s2\,r1\,(u\,s2+s1)\,r2-3\,s1^2\,r1^2}{-s1\,r2+r1\,s2},$$

$$\frac{u\,(r1+3\,r2)\,s2^3+2\,s1\left(u\,r2+\frac{r1}{2}\right)s2^2+2\,s1^2\,s2\,r2-3\,s1^3\,r1}{-s1\,r2+r1\,s2}, \frac{(s1+s2)\,(u\,s2^3-s1^3+s2\,s1^2)}{-s1\,r2+r1\,s2}$$

$$\frac{(r1+r2)\,(-u\,r2^3+r1^3-r1^2\,r2)}{-s1\,r2+r1\,s2}, \frac{-u\,(s1+3\,s2)\,r2^3-2\left(u\,s2+\frac{s1}{2}\right)r1\,r2^2-2\,s2\,r1^2\,r2+3\,s1\,r1^3}{-s1\,r2+r1\,s2},$$

$$\frac{(-u\,r1\,r2-3\,u\,r2^2-r1^2)\,s2^2-2\,s1\,r2\,(u\,r2+r1)\,s2+3\,s1^2\,r1^2}{-s1\,r2+r1\,s2}, \frac{(s1+s2)\,(-u\,r2\,s2^2+s1^2\,r1-r1\,s1\,s2)}{-s1\,r2+r1\,s2}$$

$SF_{2}^{2,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{9}^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{3}^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{5}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = 0\}, \{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s2, s2 = s2, u = 0\}$$

$SF_{6}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{8}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0\}$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0\}$$

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = 0\}, \{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s2, s2 = s2, u = 0\}$$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{1}^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{3}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{5}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s2, s2 = s2, u = 0\}, \{r1 = 0, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = 0\}, \left\{r1 = \frac{r2}{2}, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = -\frac{1}{8}\right\}$$

```
> r21 := 2*r1:
  zamproc(0,0,-1/8,-1/8,1,0,-1,0, r1,s1,r21,-s1):
```

$$-\frac{3\,r1^2}{2}, \frac{3\,s1\,r1}{2}, \frac{15\,s1^2}{8}, 0$$

$$0, 0, -\frac{9\,s1\,r1}{4}, 0$$

$SF_{7}^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = r2, r2 = r2, s1 = 0, s2 = s2, u = 0\}, \{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = 0, s2 = s2, u = 0\}, \{r1 = RootOf(\_Z^2 - 2\,\_Z + 2)\,r2, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = -2\}$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = 0\}, \{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s2, s2 = s2, u = 0\}, \{r1 = 2\,r2, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = 4\}$$

```
> r11 := 2*r2:
  zamproc(0,0,4,4,1,0,-1,0, r11,s1,r2,-s1):
```

$$6\,r2^2, -3\,r2\,s1, 6\,s1^2, 0$$

$$0, -18\,r2^2, 0, 0$$

$SF_{12}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = 0\}, \left\{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = \frac{4\,s2}{3}, s2 = s2, u = -2\right\}$$

```
> s11 := 4*s2/3:
  zamproc(0,0,-2,-2,1,0,-1,0, r1,s11,-r1,s2):
```

$$0, -\frac{14\,s2\,r1}{3}, 0, -\frac{70\,s2^3}{27\,r1}$$

$$0, 0, 7\,s2\,r1, -\frac{14\,s2^2}{9}$$

$SF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{14}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = \frac{s2\,(RootOf(2\,\_Z^2 - 8\,\_Z - 1) + 1)}{3}, s2 = s2, u = \frac{RootOf(2\,\_Z^2 - 8\,\_Z - 1)}{2}\right\}, \{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s2, s2 = s2, u = 0\}, \{r1 = 0, r2 = r2, s1 = -s2, s2 = s2, u = 0\}$$

```
> solve(2*_Z^2-8*_Z-1, _Z);
```

$$2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

```
> z1 := 2+3*sqrt(2)*(1/2):
  s11 := simplify((1/3)*s2*(z1+1));
```

```
  u1 := z1/2:
  zamproc(0,0,u1,u1,1,0,-1,0, r1,s11,-r1,s2):
```

$$s11 := \frac{s2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$0,\ -\frac{s2\ r1\left(4+\sqrt{2}\right)}{4},\ -4\ s2^2\sqrt{2}-\frac{11\ s2^2}{2},\ 0$$

$$0,\ \frac{3\left(4+\sqrt{2}\right)r1^2}{4},\ 0,\ \frac{\left(6+5\sqrt{2}\right)s2^2}{4}$$

```
> z2 := 2-3*sqrt(2)*(1/2):
  s12 := simplify((1/3)*s2*(z2+1));
  u2 := z2/2:
  zamproc(0,0,u2,u2,1,0,-1,0, r1,s12,-r1,s2):
```

$$s12 := -\frac{s2\left(-2+\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$0,\ \frac{s2\ r1\left(-4+\sqrt{2}\right)}{4},\ \frac{\left(-11+8\sqrt{2}\right)s2^2}{2},\ 0$$

$$0,\ -\frac{3\left(-4+\sqrt{2}\right)r1^2}{4},\ 0,\ -\frac{5\ s2^2\sqrt{2}}{4}+\frac{3\ s2^2}{2}$$

$SF_{19}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=0\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s2,\ s2=s2,\ u=0\}$$

$SF_{24}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=0\},\ \{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=2\ s2,\ s2=s2,\ u=-2\}$$

$SF_{27}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{28}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\}$$

$SF_{29}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0\},\ \{r1=r2,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0\},\ \{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0\}$$

$SF_{30}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ u=0\},\ \left\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=\frac{s2}{2},\ s2=s2,\ u=\frac{1}{4}\right\}$$

```
> s21 := 2*s1:
  zamproc(0,0,1/4,1/4,1,0,-1,0, r1,s1,-r1,s21):
```

$$0,\ -\frac{3\ s1\ r1}{2},\ -3\ s1^2,\ \frac{3\ s1^3}{r1}$$

$$0,\ \frac{9\ r1^2}{4},\ 0,\ 0$$

$SF_{32}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{33}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0\},\ \{r1=r2,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0\}$$

4.3. Сведение форм с m = 5 из списка 2.1 к предшествующим (утверждение 2.4).

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

$NSF_3^{5,1}$ $(v \neq u)$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,v,v-u,0,0,1,0,-1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{(r1+r2)\left(u\,s2\,r1^2-((u-v)\,s2+s1)\,r2\,r1+r2^2\,s1\right)}{r1\,s2-r2\,s1},$$

$$\frac{-2\,r1\left(-\frac{v\,r1}{2}+r2\,(u-v)\right)s2^2+3\,s1\left(\left(u-\frac{1}{3}\right)r1^2+\frac{2\,v\,r1\,r2}{3}-\frac{r2^2\,(u-v-3)}{3}\right)s2-2\,r1\,s1^2\,r2}{r1\,s2-r2\,s1},$$

$$\frac{-r1\,(u-v)\,s2^3-2\,s1\left(-v\,r1+r2\left(u-v-\frac{3}{2}\right)\right)s2^2+3\left(\left(u-\frac{2}{3}\right)r1+\frac{r2\,v}{3}\right)s1^2\,s2-s1^3\,r2}{r1\,s2-r2\,s1},\ \frac{(s1+s2)\,s1\,((-u+v+1)\,s2+(u-1)\,s1)\,s2}{r1\,s2-r2\,s1}$$

$$-\frac{r1\,(r1+r2)\,r2\,((-u+v+1)\,r2+(u-1)\,r1)}{r1\,s2-r2\,s1},\ \frac{s1\,(u-v)\,r2^3+2\,r1\left(-v\,s1+s2\left(u-v-\frac{3}{2}\right)\right)r2^2-3\left(\left(u-\frac{2}{3}\right)s1+\frac{s2\,v}{3}\right)r1^2\,r2+r1^3\,s2}{r1\,s2-r2\,s1},$$

$$\frac{2\,s1\left(-\frac{v\,s1}{2}+(u-v)\,s2\right)r2^2-3\,r1\left(\left(u-\frac{1}{3}\right)s1^2+\frac{2\,s1\,s2\,v}{3}-\frac{s2^2\,(u-v-3)}{3}\right)r2+2\,r1^2\,s1\,s2}{r1\,s2-r2\,s1},$$

$$-\frac{(s1+s2)\left(r2\,u\,s1^2-(r2\,(u-v)+r1)\,s2\,s1+r1\,s2^2\right)}{r1\,s2-r2\,s1}$$

$SF_2^{2,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_3^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=2, v=2\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=1, v=0\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=1, v=0\}$$

$SF_5^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=-1, v=-4\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, u=-1, v=-4\}$$

```
> zamproc(-1,-4,-3,0,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,0):
```

$$0,\ 2\,r1\,s1,\ s1^2,\ 0$$
$$0,\ 0,\ 0,\ -s1^2$$

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=0\}, \left\{r1=3\,r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=\frac{1}{3}, v=\frac{4}{3}\right\}$$

```
> r11 := 3*r2:
  zamproc(1/3,4/3,1,0,0,1,0,-1, r11,s1,r2,-s1):
```

$$8\,r2^2,\ 0,\ -\frac{8\,s1^2}{3},\ 0$$
$$0,\ 0,\ \frac{16\,s1\,r2}{3},\ 0$$

$SF_8^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=3\,s2, s2=s2, u=-1, v=-4\}$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=0\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=-1, v=0\}, \{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=-3, v=-6\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=-1, v=0\}$$

```
> zamproc(-3,-6,-3,0,0,1,0,-1, 0,s1,r2,-s1):
```

$$-r2^2,\ 0,\ -2\,s1^2,\ 0$$
$$0,\ -3\,r2^2,\ 0,\ 0$$

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=1, v=0\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=1, v=0\}$$

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=3\,r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=3, v=12\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=0\}$$

```
> r11 := 3*r2:
  zamproc(3,12,9,0,0,1,0,-1, r11,s1,r2,-s1):
```

$$56\,r2^2, 0, -8\,s1^2, 0$$

$$\frac{48\,r2^3}{s1}, 0, 0, 0$$

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=3\,s2, s2=s2, u=-\frac{1}{9}, v=-\frac{4}{9}\right\}$$

```
> s11 := 3*s2:
  zamproc(-1/9,-4/9,-1/3,0,0,1,0,-1, r1,s11,-r1,s2):
```

$$0, \frac{56\,s2\,r1}{9}, 0, -\frac{8\,s2^3}{r1}$$

$$0, -\frac{16\,r1^2}{9}, 0, 0$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=-1, v=0\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=-1, v=0\}, \left\{r1=-r2, r2=r2, s1=-\frac{s2}{2}, s2=s2, u=-4, v=-9\right\}$$

```
> s21 := -2*s1:
  zamproc(-4,-9,-5,0,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,s21):
```

$$0, 0, -7\,s1^2, -\frac{6\,s1^3}{r1}$$

$$0, -r1^2, 0, 0$$

$SF_{1}^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=2, v=2\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=1, v=0\}, \left\{r1=2\,r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, u=\frac{1}{2}, v=\frac{1}{2}\right\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, u=2, v=2\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=1, v=0\}, \left\{r1=0, r2=r2, s1=2\,s2, s2=s2, u=\frac{1}{2}, v=\frac{1}{2}\right\}$$

$SF_{3}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=v, v=v\}, \left\{r1=RootOf(\_Z^2-3)\,r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, u=\frac{RootOf(\_Z^2-3)^2+RootOf(\_Z^2-3)-4}{RootOf(\_Z^2-3)\,(RootOf(\_Z^2-3)-1)}, v=-\frac{2\,(RootOf(\_Z^2-3)-2)}{RootOf(\_Z^2-3)}\right\}, \left\{r1=3\,r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=\frac{1}{3}, v=\frac{4}{3}\right\}$$

```
> z1 := sqrt(3):
  r11 := z1*r2:
  u1 := (z1^2+z1-4)/(z1*(z1-1));
  v1 := -2*(z1-2)/z1;
  zamproc(u1,v1,v1-u1,0,0,1,0,-1, r11,0,r2,s2):
```

$$u1 := \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$v1 := -\frac{2\left(\sqrt{3}-2\right)\sqrt{3}}{3}$$

$$2\,r2^2, 0, s2^2\left(\sqrt{3}-2\right), 0$$

$$0, 0, -r2\,s2\left(1+\sqrt{3}\right), -s2^2$$

$SF_{5}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=\frac{r2}{u}, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, v=-\frac{\frac{(u-1)\,r2}{u}+(-u+1)\,r2}{r2}\right\}, \{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, v=u\}$$

```
> r21 := u*r1:   # при u = 1/3 уход в 3-6
  v1 := (u-1)^2/u:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, r1,s1,r21,-s1):
```

$$(-u^2+1)\, r1^2,\ \frac{(u+1)\,(3\,u-1)\, r1\, s1}{u},\ \frac{(u^2-1)\, s1^2}{u},\ 0$$
$$0,\ 0,\ (u+1)^2\, r1\, s1,\ 0$$

$SF_7^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```
$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ v=2\,u-2\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ v=2\,u-2\}$$

```
> v1 := 2*(u-1):  # при u = -1 уход в 3-5
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, 0,s1,r21,-s1):
```
$$-r21^2,\ s1\, r21\,(u+1),\ 0,\ 0$$
$$0,\ (u-2)\, r21^2,\ 2\, s1\, r21,\ 0$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```
$$\left\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=\frac{v}{2},\ v=v\right\},\ \{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=s2,\ s2=s2,\ u=-1,\ v=0\},\ \left\{r1=r1,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=-1,\ v=\frac{2\,(r1-r2)}{r2}\right\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s2,\ s2=s2,\ u=0,\ v=0\},\ \{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=0\},\ \{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=-1\}$$

```
> v1 := 2*u:    # при u = -3 уход в 3-11
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, 0,s1,r21,-s1):
```
$$-r21^2,\ s1\, r21\,(u+3),\ -2\, s1^2,\ 0$$
$$0,\ u\, r21^2,\ 0,\ 0$$

```
> u1 := -1:
  r11 := (v/2+1)*r2:
  zamproc(u1,v,v-u1,0,0,1,0,-1, r11,s1,r2,-s1):
```
$$\frac{(v+4)\, v\, r2^2}{4},\ -\frac{(v+4)\, r2\, s1\, v}{2},\ -(v+4)\, s1^2,\ 0$$
$$0,\ -\frac{(v+4)^2\, r2^2}{4},\ 0,\ 0$$

$SF_{12}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2]], {v,r1,s1,r2,s2});
```
$$\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=-s2\, u+2\, s2,\ s2=s2,\ v=2\,u-2\}$$

$SF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
  solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r2,s2});
```
$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=RootOf(\_Z^2-3)\, s2,\ s2=s2,\ u=2\, RootOf(\_Z^2-3)+3,\ v=2\, RootOf(\_Z^2-3)\},\ \{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0,\ v=0\},\ \{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=3\, s2,\ s2=s2,\ u=3,\ v=12\}$$

$$\left\{r2=-r1,\ s2=\frac{s1}{3},\ u=3,\ v=12\right\},\ \left\{r2=RootOf(\_Z^3+3\,\_Z^2+\_Z+1)\, r1,\ s2=-\frac{RootOf(\_Z^3+3\,\_Z^2+\_Z+1)\, s1\,(RootOf(\_Z^3+3\,\_Z^2+\_Z+1)+2)}{2\, RootOf(\_Z^3+3\,\_Z^2+\_Z+1)+1},\ u=-\frac{(2\, RootOf(\_Z^3+3\,\_Z^2+\_Z+1)+1)\, RootOf(\_Z^3+3\,\_Z^2+\_Z+1)}{RootOf(\_Z^3+3\,\_Z^2+\_Z+1)+2},\ v=-\frac{2\left(RootOf(\_Z^3+3\,\_Z^2+\_Z+1)^3-1\right)}{(RootOf(\_Z^3+3\,\_Z^2+\_Z+1)+2)\, RootOf(\_Z^3+3\,\_Z^2+\_Z+1)}\right\}$$

```
> z1 := sqrt(3):
  u1 := 2*z1+3;
  v1 := 2*z1;
  s11 := z1*s2:
  zamproc(u1,v1,v1-u1,0,0,1,0,-1, 0,s11,r2,s2):
```
$$u1 := 2\sqrt{3}+3$$
$$v1 := 2\sqrt{3}$$
$$-r2^2,\ 0,\ 0,\ -\frac{2\, s2^3\left(3\sqrt{3}+5\right)}{r2}$$
$$0,\ -3\, r2^2,\ 0,\ 6\, s2^2\left(2+\sqrt{3}\right)$$

```
> z2 := -sqrt(3):
  u2 := 2*z2+3;
  v2 := 2*z2;
  s12 := z2*s2:
  zamproc(u2,v2,v2-u2,0,0,1,0,-1, 0,s12,r2,s2):
```
$$u2 := -2\sqrt{3}+3$$

$$v2 := -2\sqrt{3}$$

$$-r2^2,\ 0,\ 0,\ \frac{2\,s2^3\left(3\sqrt{3}-5\right)}{r2}$$

$$0,\ -3\,r2^2,\ 0,\ -6\,s2^2\left(\sqrt{3}-2\right)$$

```
> solve(_Z^3+3*_Z^2+_Z+1, _Z);
```

$$-\frac{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}{3}-\frac{2}{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}-1,\ \frac{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}{6}+\frac{1}{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}-1$$
$$+\frac{I\sqrt{3}\left(-\frac{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}{3}+\frac{2}{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}\right)}{2},\ \frac{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}{6}+\frac{1}{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}-1$$
$$-\frac{I\sqrt{3}\left(-\frac{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}{3}+\frac{2}{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}\right)}{2}$$

```
> rho := (27+3*sqrt(57))^(1/3):
  z1 := -(rho/3+2*rho^(-1)+1):
  r21 := z1*r1:
  s21 := -z1*s1*(z1+2)/(2*z1+1):
  u1 := -evala((2*z1+1)*z1/(z1+2));
  v1 := -evala((2*(z1^3-1))/((z1+2)*z1));
  zamproc(u1,v1,v1-u1,0,0,1,0,-1, r1,s1,r21,s21):
```

$$u1 := \frac{17}{3}+\frac{7\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}}{3}-\frac{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}\sqrt{57}}{9}+\frac{11\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}}{9}-\frac{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}\sqrt{57}}{9}$$

$$v1 := \frac{20}{3}+3\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}-\frac{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}\sqrt{57}}{9}+\frac{31\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}}{18}-\frac{\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}\sqrt{57}}{6}$$

$$\frac{\left(\left(\sqrt{57}-21\right)\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}-24+\left(\sqrt{57}-11\right)\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}\right)r1^2}{18},\ 0,\ 0,$$
$$-\frac{\left(\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}\sqrt{57}-19\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}+5\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}\sqrt{57}-57\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}-84\right)s1^3}{81\,r1}$$

$$0,\ \frac{\left(4\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}\sqrt{57}-46\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}+5\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}\sqrt{57}-93\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}-192\right)r1^2}{18},\ 0,$$
$$-\frac{\left(25\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}\sqrt{57}-277\left(27+3\sqrt{57}\right)^{2/3}+26\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}\sqrt{57}-534\left(27+3\sqrt{57}\right)^{1/3}-1344\right)s1^2}{162}$$

```
> # проверка выписанного решения
  rho := (3*sqrt(57)+1)^(1/3):
  u2 := (8*rho^2+(3*sqrt(57)-1)*rho+68)/12;
  v2 := ((sqrt(57)+85)*rho^2+32*(sqrt(57)-1)*rho+640)/96;
  r12 := (8*rho^(-1)-rho-1)*r2/3:
  s12 := ((11-sqrt(57))*rho^2+4*(sqrt(57)+5)*rho+32)*s2/96:
  evala(simplify(u1-u2));
  simplify(v1-v2);
  zamproc(u2,v2,v2-u2,0,0,1,0,-1, r12,s12,r2,s2):
```

$$u2 := \frac{2\left(3\sqrt{57}+1\right)^{2/3}}{3}+\frac{\left(3\sqrt{57}-1\right)\left(3\sqrt{57}+1\right)^{1/3}}{12}+\frac{17}{3}$$

$$v2 := \frac{\left(\sqrt{57}+85\right)\left(3\sqrt{57}+1\right)^{2/3}}{96}+\frac{\left(\sqrt{57}-1\right)\left(3\sqrt{57}+1\right)^{1/3}}{3}+\frac{20}{3}$$

$$0$$

$$0$$

$$-\frac{\left(\sqrt{57}\left(3\sqrt{57}+1\right)^{2/3}-11\left(3\sqrt{57}+1\right)^{2/3}-4\left(3\sqrt{57}+1\right)^{1/3}\sqrt{57}-20\left(3\sqrt{57}+1\right)^{1/3}+256\right)r2^2}{96},\ 0,\ 0,$$
$$\frac{\left(\sqrt{57}\left(3\sqrt{57}+1\right)^{2/3}-203\left(3\sqrt{57}+1\right)^{2/3}-76\left(3\sqrt{57}+1\right)^{1/3}\sqrt{57}+4\left(3\sqrt{57}+1\right)^{1/3}-1664\right)s2^3}{48\,r2}$$

$$0,\ -\frac{\left(\sqrt{57}\left(3\sqrt{57}+1\right)^{2/3}+5\left(3\sqrt{57}+1\right)^{2/3}+2\left(3\sqrt{57}+1\right)^{1/3}\sqrt{57}-22\left(3\sqrt{57}+1\right)^{1/3}+128\right)r2^2}{48},\ 0,$$
$$-\frac{\left(\sqrt{57}\left(3\sqrt{57}+1\right)^{2/3}-427\left(3\sqrt{57}+1\right)^{2/3}-160\left(3\sqrt{57}+1\right)^{1/3}\sqrt{57}+32\left(3\sqrt{57}+1\right)^{1/3}-3328\right)s2^2}{96}$$

$SF_{14}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, v=u-3\}, \left\{r1=-r2, r2=r2, s1=-\frac{2\,s2}{u-1}, s2=s2, v=u+1\right\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, v=3\,u-1\}$$

```
> v1 := u-3:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, r1,0,-r1,s2):
```

$$0,\ r1\ s2\ (u+3),\ -3\ s2^2,\ 0$$

$$0,\ r1^2\ (u+1),\ 0,\ -s2^2$$

```
> v1 := 3*u-1:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,0):
```

$$0,\ 2\ s1\ r1,\ s1^2,\ 0$$

$$0,\ -r1^2\ (u+1),\ 0,\ u\ s1^2$$

```
> v1 := u+1:
  s21 := (1-u)*s1/2:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,s21):
```

$$0,\ -\frac{(u+1)\ (u-3)\ r1\ s1}{2},\ -\frac{(3\,u-1)\ (u-3)\ s1^2}{4},\ 0$$

$$0,\ (u-3)\ r1^2,\ 0,\ -\frac{(u+1)\ (u-3)\ s1^2}{4}$$

$SF_{19}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r2\ u, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, v=4\,u\}$$

```
> v1 := 4*u:
  r11 := u*r2:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, r11,s1,r2,-s1):
```

$$(u+1)\ (u^2+2\,u-1)\ r2^2,\ -(u+1)\ (u-3)\ r2\ s1,\ -2\ (u+1)\ s1^2,\ 0$$

$$\frac{(u+1)^2\ u\ r2^3}{s1},\ 0,\ 0,\ 0$$

$SF_{24}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=\frac{s2}{u}, s2=s2, v=2\,u-2\right\}$$

$SF_{27}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=\frac{1}{2}\ s2\ u+\frac{3}{2}\ s2, s2=s2, v=3\,u+3\right\}$$

```
> v1 := 3*(u+1):
  s11 := (u+3)*s2/2:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, r1,s11,-r1,s2):
```

$$0,\ 0,\ \frac{(5+u)\ (u-3)\ s2^2}{4},\ \frac{(5+u)\ (u+1)\ (u+3)\ s2^3}{4\ r1}$$

$$0,\ -(5+u)\ r1^2,\ 0,\ \frac{(5+u)\ (u+4)\ (u+1)\ s2^2}{4}$$

$SF_{28}^{4,1}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s2})]);
```

$$\Big[\Big\{r1=RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)\ r2, s2=-\frac{1}{138}\big((-60+31\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)+4\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^5+39\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^4+49\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^3+111\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^2)\ s1\big), u=\frac{105}{46}+\frac{1297\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)}{46}-\frac{176\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^5}{23}-\frac{198\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^4}{23}-\frac{839\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^3}{46}-\frac{1005\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^2}{46}, v=\frac{366}{23}+\frac{1046\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)}{23}-\frac{328\ RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^5}{23}$$

$$-\frac{438\, RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^4}{23}-\frac{844\, RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^3}{23}$$
$$-\frac{1098\, RootOf(4\_Z^6+7\_Z^5+13\_Z^4+18\_Z^3-6\_Z^2-9\_Z-3)^2}{23}\Big\}, \Big\{r1=-r2, s2=\frac{s1}{3}, u=-1, v=-4\Big\}\Big]$$

$SF_{29}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,4]], {v,r1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s2=RootOf(\_Z^2-3\_Z+u+1)\,s1, v=\frac{RootOf(\_Z^2-3\_Z+u+1)\,u+2\,RootOf(\_Z^2-3\_Z+u+1)-2u-1}{RootOf(\_Z^2-3\_Z+u+1)}\right\}$$

```
> solve(_Z^2-3*_Z+u+1, _Z);
```

$$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5-4u}}{2},\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5-4u}}{2}$$

```
> z1 := 3/2+(1/2)*sqrt(5-4*u):
  s21 := z1*s1:
  v1 := evala((z1*u+2*z1-2*u-1)/z1);
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,s21):
```

$$v1 := \frac{2u\sqrt{5-4u}+2u^2+\sqrt{5-4u}+1}{2(u+1)}$$

$$0,\ \frac{s1\left((u-2)\sqrt{5-4u}+7u\right)r1}{2},\ 0,\ \frac{\left(3+\sqrt{5-4u}\right)s1^3\left(3\sqrt{5-4u}-2u+5\right)}{4\,r1}$$
$$0,\ \frac{\left(2u^2-2u\sqrt{5-4u}-\sqrt{5-4u}-5\right)r1^2}{2u+2},\ \frac{\left(3u\sqrt{5-4u}+4\sqrt{5-4u}+13u+10\right)s1\,r1}{2u+2},\ 0$$

```
> z2 := 3/2-(1/2)*sqrt(5-4*u):
  s22 := z2*s1:
  v2 := evala((z2*u+2*z2-2*u-1)/z2);
  zamproc(u,v2,v2-u,0,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,s22, full=false):
```

$$v2 := \frac{-2u\sqrt{5-4u}+2u^2-\sqrt{5-4u}+1}{2(u+1)}$$

$$0,\ -\frac{\left((u-2)\sqrt{5-4u}-7u\right)s1\,r1}{2},\ 0,\ \frac{s1^3\left(\sqrt{5-4u}-3\right)\left(2u+3\sqrt{5-4u}-5\right)}{4\,r1}$$
$$0,\ \frac{\left(2u\sqrt{5-4u}+2u^2+\sqrt{5-4u}-5\right)r1^2}{2u+2},\ -\frac{\left(3u\sqrt{5-4u}+4\sqrt{5-4u}-13u-10\right)s1\,r1}{2u+2},\ 0$$

$SF_{30}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=RootOf(u\_Z^2+1)\,s2, s2=s2, v=\frac{3\,RootOf(u\_Z^2+1)\,u-RootOf(u\_Z^2+1)-u+3}{RootOf(u\_Z^2+1)-1}\right\}$$

```
> z1 := sqrt(-1/u):
  s11 := z1*s2:
  v1 := evala((3*z1*u-z1-u+3)/(z1-1));
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, r1,s11,-r1,s2):
```

$$v1 := -2u\sqrt{-\frac{1}{u}}+u-1$$

$$0,\ \frac{s2\left(3u\sqrt{-\frac{1}{u}}+u-2\right)(u+1)\,r1}{u\left(\sqrt{-\frac{1}{u}}+1\right)},\ -\frac{s2^2\left(5u\sqrt{-\frac{1}{u}}+3u+\sqrt{-\frac{1}{u}}-1\right)}{u\left(\sqrt{-\frac{1}{u}}+1\right)},\ \frac{s2^3(u+1)}{u\,r1}$$
$$0,\ \left(2u\sqrt{-\frac{1}{u}}+u-1\right)r1^2,\ 0,\ 0$$

```
> z2 := -sqrt(-1/u):
  s12 := z2*s2:
  v2 := evala((3*z2*u-z2-u+3)/(z2-1));
  zamproc(u,v2,v2-u,0,0,1,0,-1, r1,s12,-r1,s2,full=false):
```

$$v2 := 2u\sqrt{-\frac{1}{u}}+u-1$$

$$0,\ \frac{s2\left(3u\sqrt{-\frac{1}{u}}-u+2\right)(u+1)\,r1}{u\left(\sqrt{-\frac{1}{u}}-1\right)},\ -\frac{s2^2\left(5u\sqrt{-\frac{1}{u}}-3u+\sqrt{-\frac{1}{u}}+1\right)}{u\left(\sqrt{-\frac{1}{u}}-1\right)},\ \frac{s2^3(u+1)}{u\,r1}$$

$$0,\ -\left(2\,u\,\sqrt{-\frac{1}{u}}\ -u+1\right) r1^2,\ 0,\ 0$$

$SF^{4,\,1}_{32}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1})]);
```

$$\left[\left\{r1=\mathit{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3+2\,\_Z^2+3\,\_Z+3)\;r2,\ s1=-\frac{\left(\mathit{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3+2\,\_Z^2+3\,\_Z+3)^3-\mathit{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3+2\,\_Z^2+3\,\_Z+3)^2+3\,\mathit{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3+2\,\_Z^2+3\,\_Z+3)+3\right)s2}{2},\ u=\frac{\mathit{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3+2\,\_Z^2+3\,\_Z+3)^2}{2}+\frac{3}{2}-\mathit{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3+2\,\_Z^2+3\,\_Z+3),\ v=-\frac{3\,\mathit{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3+2\,\_Z^2+3\,\_Z+3)^3}{2}+3\,\mathit{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3+2\,\_Z^2+3\,\_Z+3)^2-\frac{11\,\mathit{RootOf}(\_Z^4-\_Z^3+2\,\_Z^2+3\,\_Z+3)}{2}\right\}\right]$$

$SF^{4,\,1}_{33}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=\frac{s2}{u+2},\ s2=s2,\ v=\frac{2\,(u^2+2\,u+1)}{u+2}\right\}$$

```
> s21 := (u+2)*s1:
  v1 := 2*(u+1)^2/(u+2):
  zamproc(u,v1,v1-u,0,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,s21,full=false):
```

$$0,\ 0,\ s1^2\,(u+3)\,(u^2+2\,u-1),\ \frac{s1^3\,(u+2)\,(u+3)\,(u+1)}{r1}$$

$$0,\ -\frac{2\,(u+3)\,r1^2}{u+2},\ \frac{(u+4)\,(u+3)\,(u+1)\,s1\,r1}{u+2},\ 0$$

$SF^{4,\,1}_{36}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1})]);
```

$$\left[\left\{r1=3\,r2,\ s1=-s2,\ u=-\frac{1}{9},\ v=-\frac{4}{9}\right\},\ \left\{r1=\mathit{RootOf}(2\,\_Z^4+3\,\_Z^3-3\,\_Z^2+9\,\_Z+9)\;r2,\ s1=-\frac{\left(2\,\mathit{RootOf}(2\,\_Z^4+3\,\_Z^3-3\,\_Z^2+9\,\_Z+9)^3+3\,\mathit{RootOf}(2\,\_Z^4+3\,\_Z^3-3\,\_Z^2+9\,\_Z+9)^2+9\right)s2}{6},\ u=\frac{2\,\mathit{RootOf}(2\,\_Z^4+3\,\_Z^3-3\,\_Z^2+9\,\_Z+9)}{3}-\frac{\mathit{RootOf}(2\,\_Z^4+3\,\_Z^3-3\,\_Z^2+9\,\_Z+9)^3}{3}-\frac{\mathit{RootOf}(2\,\_Z^4+3\,\_Z^3-3\,\_Z^2+9\,\_Z+9)^2}{6}-\frac{5}{2},\ v=\frac{8\,\mathit{RootOf}(2\,\_Z^4+3\,\_Z^3-3\,\_Z^2+9\,\_Z+9)}{3}-\frac{4\,\mathit{RootOf}(2\,\_Z^4+3\,\_Z^3-3\,\_Z^2+9\,\_Z+9)^3}{3}-\mathit{RootOf}(2\,\_Z^4+3\,\_Z^3-3\,\_Z^2+9\,\_Z+9)^2-7\right\}\right]$$

$NSF^{5,\,1}_{6}$ $(v \neq u)$. Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,v,0,u-v,0,1,0,-1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{\left(((u-v)\,s2+s1)\,r2^2-r1\,((u-v)\,s2+s1)\,r2+s2\,u\,r1^2\right)(r2+r1)}{r1\,s2-s1\,r2},$$

$$\frac{(v\,r1^2+3\,r2^2\,(u-v))\,s2^2+3\,s1\left(\left(u-\frac{1}{3}\right)r1^2+\frac{2\,v\,r1\,r2}{3}+r2^2\right)s2-2\,r1\,s1^2\,r2}{r1\,s2-s1\,r2},$$

$$\frac{3\,(u-v)\,r2\,s2^3+2\left(r1\,v+\frac{3\,r2}{2}\right)s1\,s2^2+3\,s1^2\left(\frac{v\,r2}{3}+r1\left(u-\frac{2}{3}\right)\right)s2-s1^3\,r2}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{(s2+s1)\,s2\,\left((u-v)\,s2^2-s1\,(u-v-1)\,s2+(u-1)\,s1^2\right)}{r1\,s2-s1\,r2}$$

$$-\frac{r2\,\left(r2^2\,(u-v)-r1\,(u-v-1)\,r2+(u-1)\,r1^2\right)(r2+r1)}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{-3\,(u-v)\,r2^3\,s2-2\,r1\left(v\,s1+\frac{3\,s2}{2}\right)r2^2-3\,r1^2\left(\frac{s2\,v}{3}+s1\left(u-\frac{2}{3}\right)\right)r2+r1^3\,s2}{r1\,s2-s1\,r2},$$

$$\frac{(-v\,s1^2-3\,(u-v)\,s2^2)\,r2^2-3\,r1\left(\left(u-\frac{1}{3}\right)s1^2+\frac{2\,s1\,s2\,v}{3}+s2^2\right)r2+2\,r1^2\,s1\,s2}{r1\,s2-s1\,r2},$$

$$-\frac{\left((r2\,(u-v)+r1)\,s2^2-(r2\,(u-v)+r1)\,s1\,s2+r2\,u\,s1^2\right)(s2+s1)}{r1\,s2-s1\,r2}$$

$SF^{2,\,1}_{2}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF^{2,\,1}_{9}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_3^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=2\ r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=\frac{2}{3}, v=0\right\}, \{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=2, v=2\}$$

$SF_5^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1=r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0, v=1\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=1\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=0, v=-1\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=-1\}$

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1=-3\ r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=0, v=-3\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=0\}, \{r1=3\ r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0, v=3\}$

$SF_8^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=3\ s2, s2=s2, u=0, v=-1\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-3\ s2, s2=s2, u=0, v=1\}$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1=-3\ r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=0, v=-3\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=0\}, \left\{r1=\frac{r2}{2}, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=-\frac{5}{3}, v=-2\right\}, \{r1=3\ r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0, v=3\}$

```
> r21 := 2*r1:
  zamproc(-5/3,-2,0,1/3,0,1,0,-1, r1,s1,r21,-s1):
```

$$-3\ r1^2, 0, -3\ s1^2, 0$$
$$0, -15\ r1^2, 0, 0$$

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1=-r2, r2=r2, s1=3\ s2, s2=s2, u=0, v=-1\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-3\ s2, s2=s2, u=0, v=1\}, \left\{r1=-r2, r2=r2, s1=\frac{s2}{2}, s2=s2, u=\frac{5}{3}, v=\frac{3}{2}\right\}$

```
> s21 := 2*s1:
  zamproc(5/3,3/2,0,1/6,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,s21):
```

$$0, 6\ r1\ s1, 0, \frac{6\ s1^3}{r1}$$
$$0, 0, \frac{15\ r1\ s1}{2}, 0$$

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1=-3\ r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=0, v=-3\}, \{r1=3\ r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0, v=3\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=0\}$

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=3\ s2, s2=s2, u=0, v=-1\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-3\ s2, s2=s2, u=0, v=1\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1=r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=1\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0, v=1\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=-1\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=0, v=-1\}$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=2\ s2, s2=s2, u=-\frac{2}{3}, v=1\right\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, u=-2, v=-3\}$$

```
> s11 := 2*s2:
  zamproc(-2/3,1,0,-5/3,0,1,0,-1, r1,s11,-r1,s2):
```

$$0, 0, -3\ s2^2, -\frac{3\ s2^3}{r1}$$
$$0, -6\ r1^2, 0, 0$$

```
> zamproc(-2,-3,0,1,0,1,0,-1, r1,0,-r1,s2):
```

$$0, 0, -3\ s2^2, \frac{s2^3}{r1}$$
$$0, -2\ r1^2, 0, 0$$

$SF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\left\{r1=2\,r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, u=\frac{1}{2}, v=\frac{1}{2}\right\}, \left\{r1=-r2, r2=r2, s1=2\,s2, s2=s2, u=\frac{2}{3}, v=0\right\}, \left\{r1=0, r2=r2, s1=2\,s2, s2=s2, u=\frac{1}{2}, v=\frac{1}{2}\right\},$

$\{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=2, v=2\}, \left\{r1=2\,r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=\frac{2}{3}, v=0\right\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, u=2, v=2\}$

$SF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\left\{r1=2\,r2, r2=r2, s1=-\frac{s2}{4}, s2=s2, u=\frac{5}{9}, v=\frac{1}{3}\right\}, \{r1=-3\,r2, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=0, v=-3\}, \{r1=3\,r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0, v$

$=3\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=v, v=v\}$

```
> s21 := -4*s1:
  r11 := 2*r2:
  zamproc(5/9,1/3,0,2/9,0,1,0,-1, r11,s1,r2,s21):
```

$$3\,r2^2,\ 0,\ -3\,s1^2,\ 0$$
$$0,\ 0,\ 15\,s1\,r2,\ -15\,s1^2$$

$SF_5^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=2\,r2, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, v=-3\,u+2\}, \{r1=0, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, v=u\}$$

```
> r11 := 2*r2:
  v1 := 2-3*u:
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r11,s1,r2,-s1):
```

$$3\,r2^2,\ 3\,s1\,r2,\ (9\,u-6)\,s1^2,\ 0$$
$$0,\ 0,\ 9\,u\,r2\,s1,\ 0$$

$SF_7^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1, r2=0, s1=-s2, s2=s2, v=\frac{3\,u}{2}-1\right\}, \left\{r1=\frac{r2\,(u-2)}{2\,(u-1)}, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, v=\frac{3\,u}{2}-1\right\}$$

```
> v1 := (3*u-2)/2:
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r1,s1,0,-s1):
```

$$r1^2\,u,\ \frac{3\,r1\,s1\,u}{2},\ 0,\ 0$$
$$0,\ r1^2,\ 2\,s1\,r1,\ 0$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=\frac{r2}{2}, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, v=\frac{3\,u}{2}+\frac{1}{2}\right\}$$

```
> r21 := 2*r1:
  v1 := (3*u+1)/2:
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r1,s1,r21,-s1):
```

$$-3\,r1^2,\ \frac{3\,s1\,r1\,(3\,u+5)}{2},\ -3\,s1^2,\ 0$$
$$0,\ 9\,r1^2\,u,\ 0,\ 0$$

$SF_{12}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=-\frac{3}{2}\,u\,s2+3\,s2, s2=s2, v=\frac{3\,u}{2}-1\right\}$$

$SF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1=-r2, r2=r2, s1=3\,s2, s2=s2, u=0, v=3\}, \{r1=r1, r2=0, s1=0, s2=s2, u=u, v=0\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-3\,s2, s2=s2, u=0, v=-3\}, \Big\{r1=$

$-\frac{r2}{4}, r2=r2, s1=2\,s2, s2=s2, u=\frac{35}{3}, v=12\Big\}$

```
> r21 := -4*r1:
  s11 := 2*s2:
  zamproc(35/3,12,0,-1/3,0,1,0,-1, r1,s11,r21,s2):
```

$$-15\,r1^2,\ 0,\ 0,\ \frac{15\,s2^3}{r1}$$
$$0,\ -63\,r1^2,\ 0,\ 63\,s2^2$$

$SF_{14}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=RootOf((u-1)\_Z^2-3+(-2u+4)\_Z)\,s2, s2=s2, v=\frac{3\,RootOf((u-1)\_Z^2-3+(-2u+4)\_Z)\,u-RootOf((u-1)\_Z^2-3+(-2u+4)\_Z)-3u+3}{RootOf((u-1)\_Z^2-3+(-2u+4)\_Z)-3}\right\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=s1, s2=0, v=3u-1\}$$

```
> solve((u-1)*_Z^2-3+(-2*u+4)*_Z, _Z);
```

$$\frac{u-2+\sqrt{u^2-u+1}}{u-1}, -\frac{-u+2+\sqrt{u^2-u+1}}{u-1}$$

```
> z1 := (u-2+sqrt(u^2-u+1))/(u-1):
  s11 := z1*s2:
  v1 := evala((3*z1*u-z1-3*u+3)/(z1-3));
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r1,s11,-r1,s2, full=false):
```

$$v1 := -u-2\sqrt{u^2-u+1}+1$$

$$0, \frac{\left(4u\sqrt{u^2-u+1}+5u^2-2\sqrt{u^2-u+1}-5u-2\right)r1\,s2}{u-1}, -\frac{s2^2\left(3u^2+2\sqrt{u^2-u+1}-7u+2\right)}{(u-1)^2}, 0$$

$$0, \left(4\sqrt{u^2-u+1}+5u-4\right)r1^2, 0, \frac{\left((2u-4)\sqrt{u^2-u+1}+u^2-3u+4\right)s2^2}{(u-1)^2}$$

```
> solve(2*u-3+sqrt(u^2-u+1), u);
```

$$1$$

```
> z2 := (u-2-sqrt(u^2-u+1))/(u-1):
  s12 := z2*s2:
  v2 := evala((3*z2*u-z2-3*u+3)/(z2-3));
  zamproc(u,v2,0,u-v2,0,1,0,-1, r1,s12,-r1,s2, full=false):
```

$$v2 := -u+2\sqrt{u^2-u+1}+1$$

$$0, \frac{\left(5u^2-4u\sqrt{u^2-u+1}-5u+2\sqrt{u^2-u+1}-2\right)r1\,s2}{u-1}, \frac{\left(-3u^2+2\sqrt{u^2-u+1}+7u-2\right)s2^2}{(u-1)^2}, 0$$

$$0, \left(-4\sqrt{u^2-u+1}+5u-4\right)r1^2, 0, \frac{s2^2\left((-2u+4)\sqrt{u^2-u+1}+u^2-3u+4\right)}{(u-1)^2}$$

```
> solve(2*u-3-sqrt(u^2-u+1), u);
  simplify(subs(u=8/3, v2));
```

$$\frac{8}{3}$$

$$3$$

```
> v1 := 3*u-1:
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,0):
```

$$0, 2\,r1\,s1, s1^2, 0$$

$$0, -3\,u\,r1^2, 0, u\,s1^2$$

$SF_{19}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1, r2=r2, s1=-s2, s2=s2, u=0, v=\frac{r1}{r2}\right\}, \left\{r1=r1, r2=r2, s1=s1, s2=0, u=0, v=\frac{r1}{r2}\right\}, \left\{r1=r1, r2=r2, s1=s2, s2=s2, u=0, v=\frac{r1}{r2}\right\}$$

$SF_{24}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=\frac{s2}{2}, s2=s2, v=\frac{3u}{2}-1\right\}$$

$SF_{27}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2, r2=r2, s1=\frac{3}{2}s2\,u+3\,s2, s2=s2, v=3u+3\right\}$$

```
> s11 := (3*u+6)*s2/2:
  v1 := 3*u+3:
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r1,s11,-r1,s2, full=false):
```

$$0, 0, \frac{3(3u+8)\,u\,s2^2}{4}, \frac{(3u+8)(3u+5)\,u\,s2^3}{4\,r1}$$

$$0, (-3u-8)\,r1^2, 0, \frac{(3u+2)(u+2)(3u+8)\,s2^2}{4}$$

$SF^{4,1}_{28}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=3\,s2, s2=s2, u=0, v=-1\}, \{r1=r2, r2=r2, s1=-3\,s2, s2=s2, u=0, v=1\}, \left\{r1=-\frac{r2}{4}, r2=r2, s1=2\,s2, s2=s2, u=-\frac{35}{3}, v=-\frac{41}{4}\right\}$$

```
> r21 := -4*r1:
  s11 := 2*s2:
  u1 := -35/3:
  v1 := -41/4:
  zamproc(u1,v1,0,u1-v1,0,1,0,-1, r1,s11,r21,s2):
```

$$0, \frac{63\,s2\,r1}{4}, 0, -\frac{63\,s2^3}{4\,r1}$$

$$\frac{60\,r1^3}{s2}, 0, 0, -60\,s2^2$$

$SF^{4,1}_{29}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,4]], {v,r1,r2,s2});
```

$$\Big\{r1=-r2, r2=r2, s2=RootOf(3\_Z^2+u+1+(-2\,u-4)\_Z)\,s1, v$$
$$=(2\,RootOf(3\_Z^2+u+1+(-2\,u-4)\_Z)\,u^2-RootOf(3\_Z^2+u+1+(-2\,u-4)\_Z)\,u-u^2-RootOf(3\_Z^2+u+1+(-2\,u-4)\_Z)$$
$$+3\,u+1)\Big/(2\,RootOf(3\_Z^2+u+1+(-2\,u-4)\_Z)\,u+RootOf(3\_Z^2+u+1+(-2\,u-4)\_Z)-u-1)\Big\}$$

```
> solve(3*_Z^2+u+1+(-2*u-4)*_Z, _Z);
```

$$\frac{u}{3}+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{u^2+u+1}}{3}, \frac{u}{3}+\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{u^2+u+1}}{3}$$

```
> z1 := (1/3)*u+2/3+(1/3)*sqrt(u^2+u+1):
  s21 := z1*s1:
  v1 := evala((2*z1*u^2-z1*u-u^2-z1+3*u+1)/(2*z1*u+z1-u-1));
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,s21, full=false):
```

$$v1 := -\frac{-2\,u\sqrt{u^2+u+1}+u^2-\sqrt{u^2+u+1}+2\,u}{u+1}$$

$$0, \frac{s1\,r1\left((u-4)\sqrt{u^2+u+1}+u^2+10\,u+4\right)}{3}, 0, \frac{s1^3\left(u+2+\sqrt{u^2+u+1}\right)\left(2\,u^2+2\,u\sqrt{u^2+u+1}+5\,u+4\sqrt{u^2+u+1}-4\right)}{27\,r1}$$

$$0, \frac{\left(5\,u^2-4\,u\sqrt{u^2+u+1}+5\,u-2\sqrt{u^2+u+1}-2\right)r1^2}{u+1}, \frac{s1\,r1\left((u+2)\sqrt{u^2+u+1}+u^2+4\,u+2\right)}{u+1}, 0$$

```
> solve(u+5+sqrt(u^2+u+1), u);
> z2 := (1/3)*u+2/3-(1/3)*sqrt(u^2+u+1):
  s22 := z2*s1:
  v2 := evala((2*z2*u^2-z2*u-u^2-z2+3*u+1)/(2*z2*u+z2-u-1));
  zamproc(u,v2,0,u-v2,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,s22, full=false):
```

$$v2 := -\frac{2\,u\sqrt{u^2+u+1}+u^2+\sqrt{u^2+u+1}+2\,u}{u+1}$$

$$0, \frac{s1\left((-u+4)\sqrt{u^2+u+1}+u^2+10\,u+4\right)r1}{3}, 0, \frac{s1^3\left(-u-2+\sqrt{u^2+u+1}\right)\left(-2\,u^2+2\,u\sqrt{u^2+u+1}-5\,u+4\sqrt{u^2+u+1}+4\right)}{27\,r1}$$

$$0, \frac{\left(4\,u\sqrt{u^2+u+1}+5\,u^2+2\sqrt{u^2+u+1}+5\,u-2\right)r1^2}{u+1}, \frac{\left((-u-2)\sqrt{u^2+u+1}+u^2+4\,u+2\right)s1\,r1}{u+1}, 0$$

```
> solve(-u-5+sqrt(u^2+u+1), u);
  simplify(subs(u=-8/3, v2));
```

$$-\frac{8}{3}$$

$$-5$$

$SF^{4,1}_{30}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-r2, r2=r2, s1=2\,s2, s2=s2, v=-3\,u-1\}, \{r1=-r2, r2=r2, s1=0, s2=s2, v=u-1\}$$

```
> s11 := 2*s2:
  v1 := -3*u-1:
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r1,s11,-r1,s2):
```

$$0, (9\,u+6)\,s2\,r1, -3\,s2^2, -\frac{3\,s2^3}{r1}$$

$$0, 9\,r1^2\,u, 0, 0$$

```
> v1 := u-1:
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r1,0,-r1,s2):
```

$$0,\ r1\, s2\, (u+2),\ -3\, s2^2,\ \frac{s2^3}{r1}$$

$$0,\ r1^2\, u,\ 0,\ 0$$

$SF_{32}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=2\, r2,\ r2=r2,\ s1=-\frac{s2}{4},\ s2=s2,\ u=-\frac{7}{12},\ v=\frac{3}{2}\right\}$$

```
> r11 := 2*r2:
  s21 := -4*s1:
  u1 := -7/12:
  v1 := 3/2:
  zamproc(u1,v1,0,u1-v1,0,1,0,-1, r11,s1,r2,s21):
```

$$0,\ 0,\ -63\, s1^2,\ \frac{63\, s1^3}{r2}$$

$$-\frac{3\, r2^3}{4\, s1},\ 0,\ 0,\ \frac{3\, s1^2}{4}$$

$SF_{33}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=\frac{(u+2)\, s2}{2\,(u+1)},\ s2=s2,\ v=\frac{3\,u^2+4\,u+2}{2\,(u+1)}\right\}$$

```
> s11 := (u+2)*s2/(2*u+2):
  v1 := (3*u^2+4*u+2)/(2*(u+1)):
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r1,s11,-r1,s2, full=false):
```

$$0,\ 0,\ \frac{3\, s2^2\, u\,(3\,u+4)}{4\,u+4},\ \frac{(3\,u+4)\, s2^3\, u}{4\, r1\,(u+1)^2}$$

$$0,\ \frac{(-3\,u-4)\, r1^2}{u+1},\ \frac{(3\,u+2)\,(3\,u+4)\,(u+2)\, r1\, s2}{4\,(u+1)^2},\ 0$$

$SF_{36}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=2\, r2,\ r2=r2,\ s1=-\frac{s2}{4},\ s2=s2,\ u=-\frac{5}{9},\ v=\frac{17}{12}\right\},\ \{r1=3\, r2,\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ u=0,\ v=-1\},\ \{r1=-3\, r2,\ r2=r2,\ s1=s2,\ s2=s2,\ u=0,\ v=1\}$$

```
> r11 := 2*r2:
  s21 := -4*s1:
  u1 := -5/9:
  v1 := 17/12:
  zamproc(u1,v1,0,u1-v1,0,1,0,-1, r11,s1,r2,s21):
```

$$0,\ 0,\ -60\, s1^2,\ \frac{60\, s1^3}{r2}$$

$$-\frac{3\, r2^3}{4\, s1},\ 0,\ \frac{3\, s1\, r2}{4},\ 0$$

$SF_{3}^{5,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=0,\ s1=0,\ s2=s2,\ v=u\},\ \{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ v=3\,u-1\},\ \{r1=\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2-2\,\_Z-1)\, r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ v=-\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2-2\,\_Z-1)\,(3\,u-1)\},$$
$$\left\{r1=-r2,\ r2=r2,\ s1=\frac{3\, s2\,(\mathrm{RootOf}(\_Z^2+(2\,u-2)\,\_Z-3\,u^2+2\,u-3)-u+1)}{-3\,u+\mathrm{RootOf}(\_Z^2+(2\,u-2)\,\_Z-3\,u^2+2\,u-3)+1},\ s2=s2,\ v=\mathrm{RootOf}(\_Z^2+(2\,u-2)\,\_Z-3\,u^2+2\,u-3)\right\},$$
$$\left\{r1=\frac{r2}{2},\ r2=r2,\ s1=-s2,\ s2=s2,\ v=\frac{3\,u}{2}+\frac{1}{2}\right\},$$
$$\left\{r1=-\frac{r2\,(\mathrm{RootOf}((3\,u-3)\,\_Z^3-u^2+2\,u-1+(u^2-1)\,\_Z+(2\,u^2-5\,u+5)\,\_Z^2)+u-1)}{(u-1)\,(\mathrm{RootOf}((3\,u-3)\,\_Z^3-u^2+2\,u-1+(u^2-1)\,\_Z+(2\,u^2-5\,u+5)\,\_Z^2)-1)},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=\mathrm{RootOf}((3\,u-3)\,\_Z^3-u^2+2\,u-1+(u^2-1)\,\_Z+(2\,u^2-5\,u+5)\,\_Z^2)\, s1,\right.$$
$$v=\big(\mathrm{RootOf}((3\,u-3)\,\_Z^3-u^2+2\,u-1+(u^2-1)\,\_Z+(2\,u^2-5\,u+5)\,\_Z^2)^2\, u-\mathrm{RootOf}((3\,u-3)\,\_Z^3-u^2+2\,u-1+(u^2-1)\,\_Z+(2\,u^2-5\,u+5)\,\_Z^2)\, u+\mathrm{RootOf}((3\,u-3)\,\_Z^3-u^2+2\,u-1+(u^2-1)\,\_Z+(2\,u^2-5\,u+5)\,\_Z^2)+u-1\big)\Big/$$
$$\left.\big(\mathrm{RootOf}((3\,u-3)\,\_Z^3-u^2+2\,u-1+(u^2-1)\,\_Z+(2\,u^2-5\,u+5)\,\_Z^2)\,(\mathrm{RootOf}((3\,u-3)\,\_Z^3-u^2+2\,u-1+(u^2-1)\,\_Z+(2\,u^2-5\,u+5)\,\_Z^2)-1)\big)\right\}$$

```
> solve(2*_Z^2-2*_Z-1, _Z);
```

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
> z1 := 1/2+(1/2)*sqrt(3):
  r11 := z1*r2:
  v1 := -z1*(3*u-1);
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r11,s1,r2,0):
```

$$v1 := -\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3u-1)$$

$$\frac{r2^2\sqrt{3}}{2},\ \left(1+\sqrt{3}\right) r2\, s1,\ s1^2,\ 0$$

$$0,\ -\frac{3\left(2+\sqrt{3}\right) r2^2 u}{2},\ 0,\ s1^2 u$$

```
> z2 := 1/2-(1/2)*sqrt(3):
  r12 := z2*r2:
  v2 := -z2*(3*u-1);
  zamproc(u,v2,0,u-v2,0,1,0,-1, r12,s1,r2,0):
```

$$v2 := -\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3u-1)$$

$$-\frac{r2^2\sqrt{3}}{2},\ -\left(\sqrt{3}-1\right) r2\, s1,\ s1^2,\ 0$$

$$0,\ \frac{3\left(\sqrt{3}-2\right) r2^2 u}{2},\ 0,\ s1^2 u$$

```
> solve(_Z^2+(2*u-2)*_Z-3*u^2+2*u-3-u+1, _Z);
```

$$-u+1+\sqrt{4u^2-3u+3},\ -u+1-\sqrt{4u^2-3u+3}$$

```
> z1 := -u+1+sqrt(4*u^2-3*u+3):
  evala((-3*u+z1+1)/(3*(z1-u+1)));
  s21 := -(2*u*sqrt(4*u^2-3*u+3)+4*u^2-9*u+1)*s1/(3*(5*u-1));
  v1 := z1;
  zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,s21, full=false):
```

$$-\frac{2u\sqrt{4u^2-3u+3}+4u^2-9u+1}{3(5u-1)}$$

$$s21 := -\frac{\left(2u\sqrt{4u^2-3u+3}+4u^2-9u+1\right)s1}{15u-3}$$

$$v1 := -u+1+\sqrt{4u^2-3u+3}$$

$$0,\ \frac{-2\left(u^2+7u-1\right) r1\, s1\sqrt{4u^2-3u+3}-\left(4u^3-41u^2-19u+4\right) r1\, s1}{15u-3},$$

$$-\frac{4\left(8u^3+4\sqrt{4u^2-3u+3}\,u^2-31u^2-14u\sqrt{4u^2-3u+3}+31u+2\sqrt{4u^2-3u+3}-4\right)u\, s1^2}{3(5u-1)^2},$$

$$\frac{(u-1)\left(8u^3+4\sqrt{4u^2-3u+3}\,u^2-31u^2-14u\sqrt{4u^2-3u+3}+31u+2\sqrt{4u^2-3u+3}-4\right)\left(2u\sqrt{4u^2-3u+3}+4u^2-9u+1\right)s1^3}{27\, r1\,(5u-1)^3}$$

$$0,\ \left(-2\sqrt{4u^2-3u+3}+5u-4\right) r1^2,\ 0,\ -\frac{\left(8u^3+4\sqrt{4u^2-3u+3}\,u^2-23u^2-10u\sqrt{4u^2-3u+3}-17u+2\sqrt{4u^2-3u+3}+4\right)s1^2}{45u-9}$$

```
> solve(u^2+(1/2)*u*sqrt(4*u^2-3*u+3)-6*u+1, u);
  simplify(subs(u=(14+4*sqrt(10))/9, v1));
```

$$\frac{1}{5},\ \frac{14}{9}+\frac{4\sqrt{10}}{9}$$

$$\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

```
> z2 := -u+1-sqrt(4*u^2-3*u+3):
  evala((-3*u+z2+1)/(3*(z2-u+1)));
  s22 := -(-2*u*sqrt(4*u^2-3*u+3)+4*u^2-9*u+1)*s1/(3*(5*u-1));
  v2 := z2;
  zamproc(u,v2,0,u-v2,0,1,0,-1, r1,s1,-r1,s22, full=false):
```

$$-\frac{-2u\sqrt{4u^2-3u+3}+4u^2-9u+1}{3(5u-1)}$$

$$s22 := -\frac{\left(-2u\sqrt{4u^2-3u+3}+4u^2-9u+1\right)s1}{15u-3}$$

$$v2 := -u+1-\sqrt{4u^2-3u+3}$$

$$0, \frac{2\left(u^2+7u-1\right) r1\, s1 \sqrt{4u^2-3u+3} - \left(4u^3-41u^2-19u+4\right) r1\, s1}{15u-3},$$

$$\frac{4\left(-8u^3+4\sqrt{4u^2-3u+3}\,u^2+31u^2-14u\sqrt{4u^2-3u+3}-31u+2\sqrt{4u^2-3u+3}+4\right) u\, s1^2}{3\left(5u-1\right)^2},$$

$$\frac{1}{27\, r1 \left(5u-1\right)^3}\Big(\left(u-1\right)\Big(-8u^3+4\sqrt{4u^2-3u+3}\,u^2+31u^2-14u\sqrt{4u^2-3u+3}-31u+2\sqrt{4u^2-3u+3}$$

$$+4\Big)\Big(2u\sqrt{4u^2-3u+3}-4u^2+9u-1\Big) s1^3\Big)$$

$$0, \left(2\sqrt{4u^2-3u+3}+5u-4\right) r1^2, 0, \frac{\left(-8u^3+4\sqrt{4u^2-3u+3}\,u^2+23u^2-10u\sqrt{4u^2-3u+3}+17u+2\sqrt{4u^2-3u+3}-4\right) s1^2}{45u-9}$$

```
> solve(u^2-(1/2)*u*sqrt(4*u^2-3*u+3)-6*u+1, u);
  simplify(subs(u=(14-4*sqrt(10))/9, v2));
```

$$\frac{14}{9} - \frac{4\sqrt{10}}{9}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

```
> solve((3*u-3)*_Z^3-u^2+2*u-1+(u^2-1)*_Z+(2*u^2-5*u+5)*_Z^2, _Z);
  z1 := (-8*u^6+87*u^5+27*sqrt(-3*u^4+31*u^3-81*u^2+93*u-44)*u^3-183*u^4-54*sqrt(-3*u^4+31*u^3-81*
  u^2+93*u-44)*u^2+47*u^3+27*u*sqrt(-3*u^4+31*u^3-81*u^2+93*u-44)+231*u^2-246*u+64)^(1/3)/(9*(u-1))+(4*
  u^4-29*u^3+54*u^2-41*u+16)/((9*(u-1))*(-8*u^6+87*u^5+27*sqrt(-3*u^4+31*u^3-81*u^2+93*u-44)*u^3-183*
  u^4-54*sqrt(-3*u^4+31*u^3-81*u^2+93*u-44)*u^2+47*u^3+27*u*sqrt(-3*u^4+31*u^3-81*u^2+93*u-44)+231*u^2
  -246*u+64)^(1/3))-(2*u^2-5*u+5)/(9*(u-1)):
```

$$\frac{1}{9\left(u-1\right)}\Big(-8u^6+87u^5+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^3-183u^4-54\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^2+47u^3$$

$$+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u+231u^2-246u+64\Big)^{1/3}+\left(4u^4-29u^3+54u^2-41u+16\right)\Big/\Big(9\left(u-1\right)\Big(-8u^6+87u^5+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81}$$

$${}^{3}\Big)-\frac{2u^2-5u+5}{9\left(u-1\right)}, -\frac{1}{18\left(u-1\right)}\Big(-8u^6+87u^5+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^3-183u^4$$

$$-54\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^2+47u^3+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u+231u^2-246u+64\Big)^{1/3}-\left(4u^4-29u^3\right.$$

$$\left.+54u^2-41u+16\right)\Big/\Big(18\left(u-1\right)\Big(-8u^6+87u^5+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^3-183u^4$$

$$-54\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^2+47u^3+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u+231u^2-246u+64\Big)^{1/3}\Big)$$

$$-\frac{2u^2-5u+5}{9\left(u-1\right)}+\frac{1}{2}\Bigg(\mathrm{I}\sqrt{3}\Bigg(\frac{1}{9\left(u-1\right)}\Big(-8u^6+87u^5+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^3-183u^4$$

$$-54\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^2+47u^3+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u+231u^2-246u+64\Big)^{1/3}-\left(4u^4-29u^3\right.$$

$$\left.+54u^2-41u+16\right)\Big/\Big(9\left(u-1\right)\Big(-8u^6+87u^5+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^3-183u^4$$

$$-54\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^2+47u^3+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u+231u^2-246u+64\Big)^{1/3}\Big)\Bigg)\Bigg),$$

$$-\frac{1}{18\left(u-1\right)}\Big(-8u^6+87u^5+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^3-183u^4-54\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^2+47u^3$$

$$+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u+231u^2-246u+64\Big)^{1/3}-\left(4u^4-29u^3+54u^2-41u+16\right)\Big/\Big(18\left(u-1\right)\Big(-8u^6+87u^5+27\sqrt{-3u^4+31u^3-8}$$

$${}^{3}\Big)-\frac{2u^2-5u+5}{9\left(u-1\right)}-\frac{1}{2}\Bigg(\mathrm{I}\sqrt{3}\Bigg(\frac{1}{9\left(u-1\right)}\Big(-8u^6+87u^5+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^3-183u^4$$

$$-54\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^2+47u^3+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u+231u^2-246u+64\Big)^{1/3}-\left(4u^4-29u^3\right.$$

$$\left.+54u^2-41u+16\right)\Big/\Big(9\left(u-1\right)\Big(-8u^6+87u^5+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^3-183u^4$$

$$-54\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u^2+47u^3+27\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u+231u^2-246u+64\Big)^{1/3}\Big)\Bigg)\Bigg)$$

```
> r11 := -r2*(z1+u-1)/((u-1)*(z1-1)):
  s21 := z1*s1:
  v1 := (z1^2*u-z1*u+z1+u-1)/(z1*(z1-1)):
  #zamproc(u,v1,0,u-v1,0,1,0,-1, r11,s1,r2,s21):
> # проверка записанного решения
  solve(2*(u-1)*_Z^3-(5*u-7)*_Z^2+2*(u-2)*_Z-1, _Z);
  z2 := (35*u^3+18*u*sqrt(-3*u^4+31*u^3-81*u^2+93*u-44)-75*u^2-18*sqrt(-3*u^4+31*u^3-81*u^2+93*u-44)
  +69*u-37)^(1/3)/(6*(u-1))+(13*u^2-34*u+25)/((6*(u-1))*(35*u^3+18*u*sqrt(-3*u^4+31*u^3-81*u^2+93*u-44)
  -75*u^2-18*sqrt(-3*u^4+31*u^3-81*u^2+93*u-44)+69*u-37)^(1/3))+(5*u-7)/(6*(u-1)):
```

$$\frac{\left(35u^3+18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u-75u^2-18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}+69u-37\right)^{1/3}}{6(u-1)}$$
$$+\frac{13u^2-34u+25}{6(u-1)\left(35u^3+18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u-75u^2-18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}+69u-37\right)^{1/3}}+\frac{5u-7}{6(u-1)},$$
$$-\frac{\left(35u^3+18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u-75u^2-18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}+69u-37\right)^{1/3}}{12(u-1)}$$
$$-\frac{13u^2-34u+25}{12(u-1)\left(35u^3+18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u-75u^2-18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}+69u-37\right)^{1/3}}+\frac{5u-7}{6(u-1)}$$
$$+\frac{1}{2}\left(I\sqrt{3}\left(\frac{\left(35u^3+18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u-75u^2-18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}+69u-37\right)^{1/3}}{6(u-1)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{13u^2-34u+25}{6(u-1)\left(35u^3+18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u-75u^2-18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}+69u-37\right)^{1/3}}\right)\right),$$
$$-\frac{\left(35u^3+18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u-75u^2-18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}+69u-37\right)^{1/3}}{12(u-1)}$$
$$-\frac{13u^2-34u+25}{12(u-1)\left(35u^3+18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u-75u^2-18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}+69u-37\right)^{1/3}}+\frac{5u-7}{6(u-1)}$$
$$-\frac{1}{2}\left(I\sqrt{3}\left(\frac{\left(35u^3+18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u-75u^2-18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}+69u-37\right)^{1/3}}{6(u-1)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{13u^2-34u+25}{6(u-1)\left(35u^3+18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}\,u-75u^2-18\sqrt{-3u^4+31u^3-81u^2+93u-44}+69u-37\right)^{1/3}}\right)\right)$$

```
> r12 := z2*r2:
  s22 := (2*z2^2-2*z2-1)*s1/(3*z2):
  v2 := (2*z2^3-4*z2^2+4*z2+1)/((z2-2)*(2*z2-1)*z2):
  #zamproc(u,v2,0,u-v2,0,1,0,-1, r12,s1,r2,s22):
```

$NSF_7^{5,1}$ ($v \neq u$). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,v,v-u,0,1,0,0,1, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{\left((s2\,u-s1)\,r1^2-((u-v)\,s2-s1)\,r2\,r1-r2^2\,s1\right)(r1+r2)}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$\frac{-2\left(-\frac{v\,r1}{2}+r2\,(u-v)\right)r1\,s2^2+3\,s1\left(u\,r1^2+\frac{2\,v\,r1\,r2}{3}-\frac{r2^2\,(u-v+3)}{3}\right)s2-3\,r1^2\,s1^2}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$\frac{-r1\,(u-v)\,s2^3-2\,s1\left(-v\,r1+r2\left(u-v+\frac{3}{2}\right)\right)s2^2+s1^2\,(3\,r1\,u+r2\,v)\,s2-3\,r1\,s1^3}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{(s1+s2)\,s1\left((-u+v-1)\,s2^2+s1\,(u+1)\,s2-s1^2\right)}{r1\,s2-s1\,r2}$$
$$-\frac{\left((-u+v-1)\,r2^2+r1\,(u+1)\,r2-r1^2\right)r1\,(r1+r2)}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{s1\,(u-v)\,r2^3+2\,r1\left(-s1\,v+s2\left(u-v+\frac{3}{2}\right)\right)r2^2+(-3\,s1\,u-s2\,v)\,r1^2\,r2+3\,r1^3\,s1}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$\frac{2\,s1\left(-\frac{s1\,v}{2}+(u-v)\,s2\right)r2^2-3\left(u\,s1^2+\frac{2\,v\,s1\,s2}{3}-\frac{s2^2\,(u-v+3)}{3}\right)r1\,r2+3\,r1^2\,s1^2}{r1\,s2-s1\,r2},$$
$$-\frac{(s1+s2)\left((r2\,u-r1)\,s1^2-s2\,(r2\,(u-v)-r1)\,s1-r1\,s2^2\right)}{r1\,s2-s1\,r2}$$

$SF_2^{2,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$SF_3^{3,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=-s1,\ u=-3,\ v=-3\},\ \left\{r1=r1,\ r2=2\,r1,\ s1=s1,\ s2=-s1,\ u=-\frac{3}{2},\ v=0\right\}$$

$SF_5^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=-r1,\ s1=s1,\ s2=\frac{s1}{2},\ u=0,\ v=3\right\},\ \{r1=r1,\ r2=-r1,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=0,\ v=3\}$$

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=r1, s1=s1, s2=-s1, u=0, v=1\}$$

$SF_8^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=-r1, s1=s2, s2=s2, u=0, v=3\}$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=-s1, u=3, v=6\}, \left\{r1=r1, r2=2\,r1, s1=s1, s2=-s1, u=\frac{3}{2}, v=\frac{3}{2}\right\}$$

```
> zamproc(3,6,3,0,1,0,0,1, 0,s1,r2,-s1):
```

$$r2^2, 0, 3\,s1^2, 0$$

$$0, 3\,r2^2, 0, 0$$

$SF_{14}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1, r2=-r1, s1=\frac{s2\,(RootOf(\_Z^2+2\,\_Z+9)+3)}{6}, s2=s2, u=\frac{RootOf(\_Z^2+2\,\_Z+9)}{2}-\frac{3}{2}, v=RootOf(\_Z^2+2\,\_Z+9)\right\}$$

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r2, r2=r2, s1=s1, s2=-s1, u=0, v=-3\}$$

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=-r1, s1=s2, s2=s2, u=0, v=-1\}$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=\frac{r2}{2}, r2=r2, s1=s1, s2=-s1, u=0, v=-\frac{3}{2}\right\}$$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1});
```

$$\{r1=-r2, s1=RootOf(3\,\_Z^2-\_Z-1)\,s2, u=-3\,RootOf(3\,\_Z^2-\_Z-1)+3, v=-9\,RootOf(3\,\_Z^2-\_Z-1)+6\}$$

```
> solve(3*_Z^2-_Z-1, _Z);
```

$$\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}, \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}$$

```
> # частный случай ухода в 4-27
  z1 := 1/6+(1/6)*sqrt(13):
  s11 := z1*s2:
  u1 := -3*z1+3;
  v1 := -9*z1+6;
  zamproc(u1,v1,v1-u1,0,1,0,0,1, r1,s11,-r1,s2):
```

$$u1 := \frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$v1 := \frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{13}}{2}$$

$$0, 0, -\frac{\left(-11+\sqrt{13}\right)s2^2}{6}, -\frac{2\left(16+\sqrt{13}\right)s2^3}{27\,r1}$$

$$0, \frac{\left(7+\sqrt{13}\right)r1^2}{2}, 0, 0$$

```
> z2 := 1/6-(1/6)*sqrt(13):
  s12 := z2*s2:
  u2 := -3*z2+3:
  v2 := -9*z2+6:
  zamproc(u2,v2,v2-u2,0,1,0,0,1, r1,s12,-r1,s2):
```

$$0, 0, \frac{\left(11+\sqrt{13}\right)s2^2}{6}, \frac{2\left(-16+\sqrt{13}\right)s2^3}{27\,r1}$$

$$0, -\frac{\left(-7+\sqrt{13}\right)r1^2}{2}, 0, 0$$

$SF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1, r2=2\,r1, s1=s1, s2=-s1, u=-\frac{3}{2}, v=0\right\}, \{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=-s1, u=-3, v=-3\}, \left\{r1=r1, r2=\frac{r1}{2}, s1=0, s2=s2, u=\frac{3}{2}, v=\frac{3}{2}\right\},$$
$$\left\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=\frac{s1}{2}, u=\frac{3}{2}, v=\frac{3}{2}\right\}, \left\{r1=r1, r2=-r1, s1=s1, s2=2\,s1, u=-\frac{3}{2}, v=0\right\}, \{r1=r1, r2=-r1, s1=0, s2=s2, u=-3, v=-3\}$$

$SF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=r1, r2=r1, s1=s1, s2=-s1, u=0, v=1\}$$

$SF_5^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=-s1, u=v\}, \left\{r1=r1, r2=-r1\,(v-2), s1=s1, s2=-s1, u=-\frac{-v^2+4\,v-3}{v-2}\right\}$$

```
> r21 := (2-v)*r1:
  u1 := (v-1)*(v-3)/(v-2):
  zamproc(u1,v,v-u1,0,1,0,0,1, r1,s1,r21,-s1):
```

$$\frac{(v-3)\,(v^2-3\,v+3)\,r1^2}{v-2}, \frac{3\,(v-1)\,(v-3)\,r1\,s1}{v-2}, \frac{(v-3)\,s1^2\,v}{v-2}, 0$$
$$0, 0, -s1\,r1\,(v-3)^2, 0$$

$SF_7^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=-s1, v=2\,u+3\}, \left\{r1=r1, r2=\frac{r1}{u+2}, s1=s1, s2=-s1, v=2\,u+3\right\}$$

```
> v1 := 2*u+3:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,1,0,0,1, 0,s1,r2,-s1):
```

$$r2^2, r2\,s1\,u, 0, 0$$
$$0, (u+3)\,r2^2, -3\,r2\,s1, 0$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0, r2=r2, s1=s1, s2=-s1, v=2\,u\}, \left\{r1=r1, r2=\frac{r1}{u-1}, s1=s1, s2=-s1, v=-u+3\right\}$$

```
> v1 := 2*u:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,1,0,0,1, 0,s1,r2,-s1):
```

$$r2^2, r2\,s1\,(u-3), 3\,s1^2, 0$$
$$0, r2^2\,u, 0, 0$$

```
> v1 := 3-u:
  r11 := (u-1)*r2:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,1,0,0,1, r11,s1,r2,-s1):
```

$$r2^2\,u\,(u^2-3\,u+3), 2\,r2\,s1\,u\,(2\,u-3), 3\,s1^2\,u, 0$$
$$0, r2^2\,u^2, 0, 0$$

$SF_{12}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,2]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1, r2=-r1, s1=\frac{1}{3}\,s2\,u+s2, s2=s2, v=2\,u+3\right\}$$

$SF_{13}^{4,1}$

```
> evala([solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1})]);
```

$$\left[\{r1=-r2, s1=s2, u=0, v=-3\}, \left\{r1=RootOf(\_Z^3+12\,\_Z+4)\,r2, s1=\frac{(RootOf(\_Z^3+12\,\_Z+4)^2-RootOf(\_Z^3+12\,\_Z+4)+10)\,s2}{6}, u=\right.\right.$$
$$\left.\left.-RootOf(\_Z^3+12\,\_Z+4)^2+RootOf(\_Z^3+12\,\_Z+4)-13, v=-RootOf(\_Z^3+12\,\_Z+4)^2+RootOf(\_Z^3+12\,\_Z+4)-16\right\}\right]$$

```
> solve(_Z^3+12*_Z+4, _Z);
```

$$-(2+2\sqrt{17})^{1\backslash 3}+\frac{4}{(2+2\sqrt{17})^{1\backslash 3}}, \frac{(2+2\sqrt{17})^{1\backslash 3}}{2}-\frac{2}{(2+2\sqrt{17})^{1\backslash 3}}+\frac{I\sqrt{3}\left(-(2+2\sqrt{17})^{1\backslash 3}-\frac{4}{(2+2\sqrt{17})^{1\backslash 3}}\right)}{2},$$

$$\frac{\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}}{2}-\frac{2}{\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}}-\frac{I\sqrt{3}\left(-\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}-\frac{4}{\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}}\right)}{2}$$

```
> z1 := (-(2+2*sqrt(17))^(1/3)+4/(2+2*sqrt(17))^(1/3)):
  r11 := z1*r2:
  s11 := (1/6)*(z1^2-z1+10)*s2:
  u1 := -z1^2+z1-13:
  v1 := -z1^2+z1-16:
  zamproc(u1,v1,v1-u1,0,1,0,0,1, r11,s11,r2,s2):
```

$$-\frac{3\,r2^2\left(\left(\sqrt{17}-1\right)\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}-8\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}+2\right)}{2},\ 0,\ 0,$$

$$-\frac{\left(11\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}\sqrt{17}-267\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}-128\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}\sqrt{17}+40\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}-1064\right)s2^3}{48\,r2}$$

$$0,\ -\frac{r2^2\left(\left(\sqrt{17}+7\right)\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}-26+\left(-\sqrt{17}+3\right)\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}\right)}{2},\ 0,$$

$$\frac{\left(5\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}\sqrt{17}-123\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}-59\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}\sqrt{17}+19\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}-464\right)s2^2}{24}$$

```
> # проверка записанного решения
  rho := (2+2*sqrt(17))^(1/3):
  u2 := ((sqrt(17)-9)*rho^2-4*(sqrt(17)+1)*rho-40)/8:
  v2 := u2-3:
  r12 := (-rho+4*rho^(-1))*r2:
  s12 := -(u2+3)*s2/6:
  zamproc(u2,v2,v2-u2,0,1,0,0,1, r12,s12,r2,s2):
```

$$-\frac{3\,r2^2\left(\left(\sqrt{17}-1\right)\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}-8\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}+2\right)}{2},\ 0,\ 0,$$

$$-\frac{\left(11\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}\sqrt{17}-267\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}-128\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}\sqrt{17}+40\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}-1064\right)s2^3}{48\,r2}$$

$$0,\ -\frac{r2^2\left(\left(\sqrt{17}+7\right)\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}-26+\left(-\sqrt{17}+3\right)\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}\right)}{2},\ 0,$$

$$\frac{\left(5\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}\sqrt{17}-123\left(2+2\sqrt{17}\right)^{2/3}-59\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}\sqrt{17}+19\left(2+2\sqrt{17}\right)^{1/3}-464\right)s2^2}{24}$$

```
> evala(u1-u2);
  evala(v1-v2);
```

$$0$$
$$0$$

$SF_{14}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {v,r1,s1,r2});
```

$$\{r1=r1,\ r2=-r1,\ s1=RootOf(\_Z^2+2+(-u-3)\,\_Z)\,s2,\ v=2\,RootOf(\_Z^2+2+(-u-3)\,\_Z)+u-1\},\ \{r1=r1,\ r2=-r1,\ s1=0,\ v=u+3\}$$

```
> v1 := u+3:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,1,0,0,1, r1,0,-r1,s2):
```

$$0,\ r1\,s2\,(u-3),\ 3\,s2^2,\ 0$$
$$0,\ r1^2\,u,\ 0,\ s2^2$$

```
> solve(_Z^2+2+(-u-3)*_Z, _Z);
```

$$\frac{u}{2}+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{u^2+6u+1}}{2},\ \frac{u}{2}+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{u^2+6u+1}}{2}$$

```
> z1 := (1/2)*u+3/2+(1/2)*sqrt(u^2+6*u+1):
  s11 := z1*s2:
  v1 := 2*z1+u-1;
  zamproc(u,v1,v1-u,0,1,0,0,1, r1,s11,-r1,s2, full=false):
```

$$v1 := 2u+2+\sqrt{u^2+6u+1}$$

$$0,\ -\frac{\left(5\sqrt{u^2+6u+1}+3u+13\right)r1\,s2}{2},\ -\frac{3\,s2^2\left((u+3)\sqrt{u^2+6u+1}+u^2+6u+3\right)}{2},\ 0$$

$$0,\ -\left(\sqrt{u^2+6u+1}-1\right)r1^2,\ 0,\ \frac{\left((u^2+6u+7)\sqrt{u^2+6u+1}+u^3+9u^2+21u+11\right)s2^2}{2}$$

```
> solve(u+5+sqrt(u^2+6*u+1), u);
  subs(u=-6, v1);
```

$$-6$$
$$-9$$

```
> z2 := (1/2)*u+3/2-(1/2)*sqrt(u^2+6*u+1):
  s12 := z2*s2:
  v2 := 2*z2+u-1;
  zamproc(u,v2,v2-u,0,1,0,0,1, r1,s12,-r1,s2, full=false):
```

$$v2 := 2\,u+2-\sqrt{u^2+6\,u+1}$$

$$0,\ \frac{\left(5\sqrt{u^2+6\,u+1}-3\,u-13\right) r1\,s2}{2},\ -\frac{3\left((-u-3)\sqrt{u^2+6\,u+1}+u^2+6\,u+3\right) s2^2}{2},\ 0$$

$$0,\ \left(\sqrt{u^2+6\,u+1}+1\right) r1^2,\ 0,\ \frac{s2^2\left((-u^2-6\,u-7)\sqrt{u^2+6\,u+1}+u^3+9\,u^2+21\,u+11\right)}{2}$$

```
> solve(-u-5+sqrt(u^2+6*u+1), u);
```

$SF_{19}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=RootOf(\_Z^2-\_Z+1)\ s1,\ u=0,\ v=0\},\ \left\{r1=r1,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=-s1,\ u=0,\ v=-\frac{3\,r1}{r2}\right\}$$

$SF_{24}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=-r1,\ s1=-\frac{s2}{u+1},\ s2=s2,\ v=2\,u+3\right\}$$

$SF_{27}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=-r1,\ s1=-\frac{1}{3}\ s2\,u+s2,\ s2=s2,\ v=3\,u-3\right\}$$

```
> v1 := 3*u-3:
  s11 := (3-u)*s2/3:
  zamproc(u,v1,v1-u,0,1,0,0,1, r1,s11,-r1,s2, full=false):
```

$$0,\ 0,\ -\frac{(u-6)\,u\,s2^2}{3},\ \frac{4\,s2^3\left(u-\frac{3}{2}\right)(u-3)\,(u-6)}{27\,r1}$$

$$0,\ -(u-6)\,r1^2,\ 0,\ \frac{(u-6)\,(u^2-5\,u+3)\,s2^2}{9}$$

$SF_{28}^{4,1}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s2})]);
```

$$\Big[\Big\{r1=RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)\ r2,\ s2=\frac{1}{15}\,\big((39\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)^3+37\,RootOf(9\,\_Z^5$$
$$+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)^2+2\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)+9\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2$$
$$+3\,\_Z+1)^4+7)\ s1\big),\ u=25\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)^2-18\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)^4$$
$$-24\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)^3-16\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)+4,\ v=$$
$$-\frac{148\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)}{5}-\frac{456\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)^3}{5}$$
$$+\frac{187\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)^2}{5}-\frac{261\,RootOf(9\,\_Z^5+21\,\_Z^4+4\,\_Z^3+3\,\_Z^2+3\,\_Z+1)^4}{5}-\frac{23}{5}\Big\},\ \{r1=-r2,\ s2$$
$$=s1,\ u=0,\ v=3\}\Big]$$

$SF_{29}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,4]], {v,r2,s2});
```

$$\left\{r2=-r1,\ s2=RootOf(\_Z^2-3\,\_Z-u+2)\ s1,\ v=\frac{RootOf(\_Z^2-3\,\_Z-u+2)\,u-2\,RootOf(\_Z^2-3\,\_Z-u+2)-2\,u+1}{RootOf(\_Z^2-3\,\_Z-u+2)}\right\}$$

```
> solve(_Z^2-3*_Z-u+2, _Z);
```

$$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{1+4\,u}}{2},\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{1+4\,u}}{2}$$

```
> z1 := 3/2+(1/2)*sqrt(1+4*u):
  s21 := z1*s1:
  v1 := evala((z1*u-2*z1-2*u+1)/z1);
```

```
  zamproc(u,v1,v1-u,0,1,0,0,1, r1,s1,-r1,s21, full=false):
```

$$v1 := \frac{-2\,u\sqrt{1+4\,u}+2\,u^2+\sqrt{1+4\,u}-2\,u+5}{2\,(u-2)}$$

$$0,\ \frac{s1\,r1\left((u+2)\sqrt{1+4\,u}+7\,u-2\right)}{2},\ 0,\ -\frac{s1^3\left((u+7)\sqrt{1+4\,u}+9\,u+11\right)}{2\,r1}$$

$$0,\ \frac{\left(2\,u\sqrt{1+4\,u}+2\,u^2-\sqrt{1+4\,u}-17\right)r1^2}{2\,u-4},\ -\frac{3\left((u-3)\sqrt{1+4\,u}+3\,u-3\right)s1\,r1}{2\,u-4},\ 0$$

```
> z2 := 3/2-(1/2)*sqrt(1+4*u):
  s22 := z2*s1:
  v2 := evala((z2*u-2*z2-2*u+1)/z2);
  zamproc(u,v2,v2-u,0,1,0,0,1, r1,s1,-r1,s22, full=false):
```

$$v2 := \frac{2\,u\sqrt{1+4\,u}+2\,u^2-\sqrt{1+4\,u}-2\,u+5}{2\,(u-2)}$$

$$0,\ -\frac{s1\left((u+2)\sqrt{1+4\,u}-7\,u+2\right)r1}{2},\ 0,\ \frac{s1^3\left((u+7)\sqrt{1+4\,u}-9\,u-11\right)}{2\,r1}$$

$$0,\ \frac{\left(2\,u^2-2\,u\sqrt{1+4\,u}+\sqrt{1+4\,u}-17\right)r1^2}{2\,u-4},\ \frac{3\,s1\left((u-3)\sqrt{1+4\,u}-3\,u+3\right)r1}{2\,u-4},\ 0$$

```
> solve(-5+sqrt(1+4*u), u);
  simplify(subs(u=6, v2));
```

$$6$$

$$15$$

$SF_{30}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {v,r1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=-r1,\ s2=RootOf(\_Z^2-u-1)\,s1,\ v=\frac{RootOf(\_Z^2-u-1)\,u+RootOf(\_Z^2-u-1)-2\,u-2}{RootOf(\_Z^2-u-1)}\right\}$$

```
> solve(_Z^2-u-1, _Z);
```

$$\sqrt{u+1},\ -\sqrt{u+1}$$

```
> z1 := sqrt(u+1):
  s21 := z1*s1:
  v1 := evala((z1*u+z1-2*u-2)/z1);
  zamproc(u,v1,v1-u,0,1,0,0,1, r1,s1,-r1,s21, full=false):
```

$$v1 := u-2\sqrt{u+1}+1$$

$$0,\ \frac{s1\left((3\,u-2)\sqrt{u+1}+u^2+2\,u-2\right)r1}{\sqrt{u+1}+1},\ 3\,s1^2\,u,\ -\frac{\left((u+2)\sqrt{u+1}+u^2+2\,u+2\right)s1^3}{r1\left(\sqrt{u+1}+1\right)}$$

$$0,\ \left(2\sqrt{u+1}+u+2\right)r1^2,\ 0,\ 0$$

```
> z2 := -sqrt(u+1):
  s22 := z2*s1:
  v2 := evala((z2*u+z2-2*u-2)/z2);
  zamproc(u,v2,v2-u,0,1,0,0,1, r1,s1,-r1,s22, full=false):
```

$$v2 := u+2\sqrt{u+1}+1$$

$$0,\ -\frac{s1\,r1\left((-3\,u+2)\sqrt{u+1}+u^2+2\,u-2\right)}{\sqrt{u+1}-1},\ 3\,s1^2\,u,\ \frac{s1^3\left((-u-2)\sqrt{u+1}+u^2+2\,u+2\right)}{r1\left(\sqrt{u+1}-1\right)}$$

$$0,\ \left(-2\sqrt{u+1}+u+2\right)r1^2,\ 0,\ 0$$

$SF_{32}^{4,1}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1})]);
```

$$[\{r1=RootOf(3\,\_Z^3-\_Z-1)\,r2,\ s1=\left(3\,RootOf(3\,\_Z^3-\_Z-1)^2-3\,RootOf(3\,\_Z^3-\_Z-1)-1\right)s2,\ u=9\,RootOf(3\,\_Z^3-\_Z-1)^2-6,\ v=9\,RootOf(3\,\_Z^3-\_Z-1)-9\}]$$

```
> solve(3*_Z^3-_Z-1, _Z);
```

$$\frac{\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}{6}+\frac{2}{3\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}},\ -\frac{\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}{12}-\frac{1}{3\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}+\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}{6}-\frac{2}{3\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}\right)}{2},$$

$$-\frac{\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}{12}-\frac{1}{3\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}-\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}{6}-\frac{2}{3\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}\right)}{2}$$

```
> z1 := (1/6)*(36+4*sqrt(77))^(1/3)+2/(3*(36+4*sqrt(77))^(1/3)):
  r11 := z1*r2:
  s11 := evala(3*z1^2-3*z1-1)*s2;
  u1 := evala(9*z1^2-6);
  v1 := evala(9*z1-9);
  zamproc(u1,v1,v1-u1,0,1,0,0,1, r11,s11,r2,s2):
```

$$s11 := \left(-\frac{1}{3}+\frac{\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}{4}-\frac{\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}\sqrt{77}}{12}-\frac{25\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}}{24}+\frac{\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}\sqrt{77}}{8}\right)s2$$

$$u1 := -4+\frac{9\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}{4}-\frac{\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}\sqrt{77}}{4}+\frac{\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}}{4}$$

$$v1 := \frac{3\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}}{2}+\frac{27\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}}{8}-\frac{3\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}\sqrt{77}}{8}-9$$

$$0,\,0,\,\frac{\left(3\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}\sqrt{77}-25\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}-2\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}\sqrt{77}+6\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}+88\right)s2^2}{8},$$

$$\frac{3\left(\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}\sqrt{77}-6\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}-3\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}\sqrt{77}+23\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}-36\right)s2^3}{4\,r2}$$

$$-\frac{r2^3\left(\left(\sqrt{77}-9\right)\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}-4\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}-96\right)}{72\,s2},\,0,\,0,$$

$$-\frac{\left(33\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}\sqrt{77}-227\left(36+4\sqrt{77}\right)^{2/3}-70\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}\sqrt{77}+498\left(36+4\sqrt{77}\right)^{1/3}-592\right)s2^2}{24}$$

$SF_{33}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,4]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\,r2=-r1,\,s1=-\frac{s2}{u-2},\,s2=s2,\,v=\frac{2u^2-4u+3}{u-2}\right\}$$

```
> s21 := (2-u)*s1:
  v1 := (2*u^2-4*u+3)/(u-2);
  zamproc(u,v1,v1-u,0,1,0,0,1, r1,s1,-r1,s21, full=false):
```

$$v1 := \frac{2u^2-4u+3}{u-2}$$

$$0,\,0,\,u\,s1^2\,(u-2)\,(u-3),\,\frac{s1^3\,(u-3)\,(u^2-3u+3)}{r1}$$

$$0,\,\frac{3\,(u-3)\,r1^2}{u-2},\,-\frac{(u-3)\,(u^2-5u+3)\,s1\,r1}{u-2},\,0$$

$SF_{36}^{4,1}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,4]], {u,v,r1,s2})]);
```

$$[\{r1=\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3+\_Z^2-\_Z-1)\,r2,\,s2=-\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3+\_Z^2-\_Z-1)^2\,s1,\,u=-\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3+\_Z^2-\_Z-1)^3-\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3+\_Z^2-\_Z-1)+2,\,v=-6\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3+\_Z^2-\_Z-1)^3-5\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3+\_Z^2-\_Z-1)-2\,\mathrm{RootOf}(\_Z^4+\_Z^3+\_Z^2-\_Z-1)^2+8\},\,\{r1=r2,\,s2=-s1,\,u=0,\,v=-1\}]$$

$SF_{3}^{5,1}$

```
> evala([solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,r2,s2})]);
```

$$\Big[\Big\{r1=0,\,r2=r2,\,s2=-s1,\,u=\frac{v}{2}\Big\},\,\{r1=-v\,r2+2\,r2,\,r2=r2,\,s2=-s1,\,u=-v+3\},\,\Big\{r1=r2\,\big(-2\,\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^3-3+(2v+2)\,\_Z+(-v-2)\,\_Z^2)^2+\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^3-3+(2v+2)\,\_Z+(-v-2)\,\_Z^2)\,v-2\big),\,r2=r2,\,s2=\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^3-3+(2v+2)\,\_Z+(-v-2)\,\_Z^2)\,s1,\,u=-\frac{4\,\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^3-3+(2v+2)\,\_Z+(-v-2)\,\_Z^2)^2}{3}+\frac{2\,\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^3-3+(2v+2)\,\_Z+(-v-2)\,\_Z^2)\,v}{3}-\frac{2\,\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^3-3+(2v+2)\,\_Z+(-v-2)\,\_Z^2)}{3}+\frac{2v}{3}-\frac{7}{3}\Big\},\,\Big\{r1=0,\,r2=r2,\,s2=\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2-v+2+(-v-2)\,\_Z)\,s1,\,u=\frac{(2\,\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2-v+2+(-v-2)\,\_Z)+v-6)\,v}{2\,(v-2)}\Big\},\,\Big\{r1=-r2,\,r2=r2,\,s2=\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2+3+(-v-4)\,\_Z)\,s1,\,u=\frac{v}{3}+\frac{4\,\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2+3+(-v-4)\,\_Z)}{3}-\frac{5}{3}\Big\}\Big]$$

```
> solve(2*_Z^3-3+(2*v+2)*_Z+(-v-2)*_Z^2, _Z);
```

$$\frac{\left(-12v^2-42v+134+v^3+6\sqrt{-3v^4+39v^3-3v^2-270v+513}\right)^{1/3}}{6}-\frac{6\left(\frac{2}{9}v+\frac{2}{9}-\frac{1}{36}v^2\right)}{\left(-12v^2-42v+134+v^3+6\sqrt{-3v^4+39v^3-3v^2-270v+513}\right)^{1/3}}$$

$$+\frac{v}{6}+\frac{1}{3},\ -\frac{\left(-12\,v^2-42\,v+134+v^3+6\,\sqrt{-3\,v^4+39\,v^3-3\,v^2-270\,v+513}\right)^{1/3}}{12}$$
$$+\frac{3\left(\frac{2}{9}\,v+\frac{2}{9}-\frac{1}{36}\,v^2\right)}{\left(-12\,v^2-42\,v+134+v^3+6\,\sqrt{-3\,v^4+39\,v^3-3\,v^2-270\,v+513}\right)^{1/3}}+\frac{v}{6}+\frac{1}{3}$$
$$+\frac{1}{2}\left(I\sqrt{3}\left(\frac{\left(-12\,v^2-42\,v+134+v^3+6\,\sqrt{-3\,v^4+39\,v^3-3\,v^2-270\,v+513}\right)^{1/3}}{6}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{6\left(\frac{2}{9}\,v+\frac{2}{9}-\frac{1}{36}\,v^2\right)}{\left(-12\,v^2-42\,v+134+v^3+6\,\sqrt{-3\,v^4+39\,v^3-3\,v^2-270\,v+513}\right)^{1/3}}\right)\right),$$
$$-\frac{\left(-12\,v^2-42\,v+134+v^3+6\,\sqrt{-3\,v^4+39\,v^3-3\,v^2-270\,v+513}\right)^{1/3}}{12}$$
$$+\frac{3\left(\frac{2}{9}\,v+\frac{2}{9}-\frac{1}{36}\,v^2\right)}{\left(-12\,v^2-42\,v+134+v^3+6\,\sqrt{-3\,v^4+39\,v^3-3\,v^2-270\,v+513}\right)^{1/3}}+\frac{v}{6}+\frac{1}{3}$$
$$-\frac{1}{2}\left(I\sqrt{3}\left(\frac{\left(-12\,v^2-42\,v+134+v^3+6\,\sqrt{-3\,v^4+39\,v^3-3\,v^2-270\,v+513}\right)^{1/3}}{6}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{6\left(\frac{2}{9}\,v+\frac{2}{9}-\frac{1}{36}\,v^2\right)}{\left(-12\,v^2-42\,v+134+v^3+6\,\sqrt{-3\,v^4+39\,v^3-3\,v^2-270\,v+513}\right)^{1/3}}\right)\right)$$

```
> z1 := (1/6)*(-12*v^2-42*v+134+v^3+6*sqrt(-3*v^4+39*v^3-3*v^2-270*v+513))^(1/3)-(6*((2/9)*v+2/9-(1/36)
  *v^2))/(-12*v^2-42*v+134+v^3+6*sqrt(-3*v^4+39*v^3-3*v^2-270*v+513))^(1/3)+(1/6)*v+1/3:
  r11 := r2*(-2*z1^2+z1*v-2):
  s21 := z1*s1:
  u1 := -4*z1^2*(1/3)+2*z1*v*(1/3)-2*z1*(1/3)+2*v*(1/3)-7/3:
  #zamproc(u1,v,v-u1,0,1,0,0,1, r11,s1,r2,s21, full=false):
> solve(2*_Z^2-v+2+(-v-2)*_Z, _Z);
```

$$\frac{v}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{v^2+12\,v-12}}{4},\ \frac{v}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{v^2+12\,v-12}}{4}$$

```
> z1 := (1/4)*v+1/2+(1/4)*sqrt(v^2+12*v-12):
  s21 := z1*s1:
  u1 := (2*z1+v-6)*v/(2*(v-2));
  zamproc(u1,v,v-u1,0,1,0,0,1, 0,s1,r2,s21):
```

$$u1 := \frac{\left(\frac{3\,v}{2}-5+\frac{\sqrt{v^2+12\,v-12}}{2}\right)v}{2\,v-4}$$

$$r2^2,\ -\frac{s1\,r2\left(v+2+\sqrt{v^2+12\,v-12}\right)\left(v^2-v\sqrt{v^2+12\,v-12}-10\,v+24\right)}{16\,v-32},\ \frac{3\left(v+2+\sqrt{v^2+12\,v-12}\right)^2 s1^2}{16},\ 0$$

$$0,\ \frac{v\left(v+2-\sqrt{v^2+12\,v-12}\right)r2^2}{4\,v-8},\ 0,\ \frac{v\,s1^2\left(v^2+v\sqrt{v^2+12\,v-12}+6\,v-24\right)}{8\,v-16}$$

```
> z2 := (1/4)*v+1/2-(1/4)*sqrt(v^2+12*v-12):
  s22 := z2*s1:
  u2 := (2*z2+v-6)*v/(2*(v-2));
  zamproc(u2,v,v-u2,0,1,0,0,1, 0,s1,r2,s22):
```

$$u2 := \frac{\left(\frac{3\,v}{2}-5-\frac{\sqrt{v^2+12\,v-12}}{2}\right)v}{2\,v-4}$$

$$r2^2,\ \frac{s1\,r2\left(-v-2+\sqrt{v^2+12\,v-12}\right)\left(v\sqrt{v^2+12\,v-12}+v^2-10\,v+24\right)}{16\,v-32},\ \frac{3\left(-v-2+\sqrt{v^2+12\,v-12}\right)^2 s1^2}{16},\ 0$$

$$0,\ \frac{v\left(v+2+\sqrt{v^2+12\,v-12}\right)r2^2}{4\,v-8},\ 0,\ \frac{v\,s1^2\left(v^2-v\sqrt{v^2+12\,v-12}+6\,v-24\right)}{8\,v-16}$$

```
> # уход в 4-14
  solve(2*_Z^2+3+(-v-4)*_Z, _Z);
```

$$\frac{v}{4}+1+\frac{\sqrt{v^2+8v-8}}{4},\ \frac{v}{4}+1-\frac{\sqrt{v^2+8v-8}}{4}$$

```
> z1 := (1/4)*v+1+(1/4)*sqrt(v^2+8*v-8):
  s21 := z1*s1:
  u1 := (1/3)*v+4*z1*(1/3)-5/3;
  solve(u = (1/3)*v+4*z1*(1/3)-5/3, v);
  zamproc(u1,v,v-u1,0,1,0,0,1, r1,s1,-r1,s21):
```

$$u1 := \frac{2v}{3}-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{v^2+8v-8}}{3}$$

$$2u+2+\sqrt{u^2+6u+1},\ 2u+2-\sqrt{u^2+6u+1}$$

$$0,\ \frac{s1\left((v+2)\sqrt{v^2+8v-8}+v^2+6v-20\right)r1}{4},\ \frac{3\,s1^2\left((v+4)\sqrt{v^2+8v-8}+v^2+8v-4\right)}{8},\ 0$$

$$0,\ \frac{\left(2\sqrt{v^2+8v-8}+v+7\right)r1^2}{3},\ 0,\ \frac{\left(3v\sqrt{v^2+8v-8}+3v^2+8\sqrt{v^2+8v-8}+28v+28\right)s1^2}{24}$$

$SF_6^{5,1}$

```
> ([solve([M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,r1,s2})]);
```

$$\left[\{r1=-r2,\ s2=s1,\ u=0\},\ \left\{r1=RootOf(\_Z^4+v^2+(3v^2-6v+4)\_Z+(v^2-2v-3)\_Z^2+(-2v+3)\_Z^3)\,r2,\ s2=\left(s1\,(2\,RootOf(\_Z^4+v^2+(3v^2-6v+4)\_Z+(v^2-2v-3)\_Z^2+(-2v+3)\_Z^3)\,v-3\,RootOf(\_Z^4+v^2+(3v^2-6v+4)\_Z+(v^2-2v-3)\_Z^2+(-2v+3)\_Z^3)+v)\right)\Big/\left(RootOf(\_Z^4+v^2+(3v^2-6v+4)\_Z+(v^2-2v-3)\_Z^2+(-2v+3)\_Z^3)^2-RootOf(\_Z^4+v^2+(3v^2-6v+4)\_Z+(v^2-2v-3)\_Z^2+(-2v+3)\_Z^3)\,v+2\,RootOf(\_Z^4+v^2+(3v^2-6v+4)\_Z+(v^2-2v-3)\_Z^2+(-2v+3)\_Z^3)-2\right),\ u=\left(RootOf(\_Z^4+v^2+(3v^2-6v+4)\_Z+(v^2-2v-3)\_Z^2+(-2v+3)\_Z^3)^2-RootOf(\_Z^4+v^2+(3v^2-6v+4)\_Z+(v^2-2v-3)\_Z^2+(-2v+3)\_Z^3)-v+1\right)\Big/\left(RootOf(\_Z^4+v^2+(3v^2-6v+4)\_Z+(v^2-2v-3)\_Z^2+(-2v+3)\_Z^3)-1\right)\right\}\right]$$

$NSF_8^{5,1}$ ($w \neq$ v-u). Результат произвольной замены :

```
> M := zamproc(u,v,w,0,0,1,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{r1\,(r1^2 s2\,u+r2\,(s2\,v-s1)\,r1+r2^2\,(w\,s2-s1))}{r1\,s2-r2\,s1},\ \frac{(s2\,(3u-1)\,s1+v\,s2^2)\,r1^2+2\,r2\,(-s1^2+s2\,(v-1)\,s1+w\,s2^2)\,r1+r2^2\,s1\,(w\,s2-s1)}{r1\,s2-r2\,s1},$$
$$\frac{-r2\,s1^3+3\left(\left(u-\frac{2}{3}\right)r1+\frac{r2\,(v-2)}{3}\right)s2\,s1^2+2\left(\left(v-\frac{1}{2}\right)r1+w\,r2\right)s2^2\,s1+w\,r1\,s2^3}{r1\,s2-r2\,s1},\ \frac{((u-1)\,s1^2+s2\,(v-1)\,s1+w\,s2^2)\,s2\,s1}{r1\,s2-r2\,s1}$$
$$-\frac{r2\,r1\,((u-1)\,r1^2+r2\,(v-1)\,r1+r2^2\,w)}{r1\,s2-r2\,s1},\ \frac{r1^3 s2-3\,r2\left(\left(u-\frac{2}{3}\right)s1+\frac{s2\,(v-2)}{3}\right)r1^2-2\,r2^2\left(\left(v-\frac{1}{2}\right)s1+w\,s2\right)r1-r2^3\,s1\,w}{r1\,s2-r2\,s1},$$
$$\frac{(2\,s1\,s2+s2^2)\,r1^2-3\,r2\left(\left(u-\frac{1}{3}\right)s1^2+\frac{2\,s2\,(v-1)\,s1}{3}+\frac{w\,s2^2}{3}\right)r1-s1\,r2^2\,(s1\,v+2\,w\,s2)}{r1\,s2-r2\,s1},$$
$$-\frac{(r2\,s1^2\,u+s2\,(r2\,v-r1)\,s1+s2^2\,(w\,r2-r1))\,s1}{r1\,s2-r2\,s1}$$

$SF_9^{2,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=r1,\ r2=-\frac{r1}{2},\ s1=0,\ s2=s2,\ u=-\frac{1}{2},\ v=-2,\ w=-2\right\}$$

```
> r11 := -2*r2:
  zamproc(-1/2,-2,-2,0,0,1,1,0, r11,0,r2,s2):
```

$$0,\ 0,\ -2\,s2^2,\ 0$$

$$\frac{2\,r2^3}{s2},\ 0,\ 0,\ 0$$

$SF_6^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {u,v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{r2}{2},\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ u=0,\ v=-\frac{1}{2},\ w=-\frac{1}{2}\right\},\ \{r1=r2,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=-s1,\ u=0,\ v=1,\ w=1\},\ \left\{r1=-2\,r2,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ u=\frac{v}{4}+\frac{1}{2},\ v=v,\ w=v\right\}$$

```
> r11 := -2*r2:
  u1 := (v+2)/4:
  zamproc(u1,v,v,0,0,1,1,0, r11,0,r2,s2):
```

$$2\,r2^2,\,0,\,s2^2\,v,\,0$$
$$0,\,0,\,-s2\,r2\,(v+2),\,0$$

$SF_{11}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=\frac{2\,r2}{u-1},\,r2=r2,\,s1=0,\,s2=s2,\,v=-2,\,w=\frac{2}{u-1}\right\}$$

```
> w1 := 2/(u-1):
  r21 := (u-1)*r1/2:
  zamproc(u,-2,w1,0,0,1,1,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(u+1)}{2},\,0,\,\frac{2\,s2^2}{u-1},\,0$$
$$0,\,r1^2\,u,\,0,\,0$$

$SF_{17}^{3,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-2\,r2,\,r2=r2,\,s1=0,\,s2=s2,\,u=u,\,v=-2,\,w=-2\},\,\{r1=r2,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=-s1,\,u=0,\,v=1,\,w=1\},\,\left\{r1=-\frac{r2}{2},\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=0,\,u=0,\,v=-\frac{1}{2},\,w=-\frac{1}{2}\right\}$$

```
> r11 := -2*r2:
  zamproc(u,-2,-2,0,0,1,1,0, r11,0,r2,s2):
```

$$(4\,u+2)\,r2^2,\,0,\,-2\,s2^2,\,0$$
$$-\frac{4\,r2^3\,u}{s2},\,0,\,0,\,0$$

$SF_{19}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {u,v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=-\frac{s1}{2},\,u=\frac{v}{4},\,v=v,\,w=v\right\},\,\{r1=r1,\,r2=-r1,\,s1=s1,\,s2=s1,\,u=0,\,v=-1,\,w=-1\}$$

```
> s11 := -2*s2:
  u1 := v/4:
  zamproc(u1,v,v,0,0,1,1,0, 0,s11,r2,s2):
```

$$0,\,-s2\,r2\,(v+2),\,0,\,\frac{2\,s2^3}{r2}$$
$$0,\,v\,r2^2,\,0,\,0$$

$SF_{21}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=-s1,\,u=0,\,v=0,\,w=0\},\,\{r1=r1,\,r2=-r1,\,s1=s1,\,s2=0,\,u=0,\,v=-1,\,w=-1\},\,\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=0,\,u=0,\,v=0,\,w=0\}$$

$SF_{22}^{3,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=s1\,u,\,v=-2,\,w=\frac{1}{u}\right\}$$

```
> s21 := u*s1:
  w1 := 1/u:
  zamproc(u,-2,w1,0,0,1,1,0, 0,s1,r2,s21):
```

$$0,\,0,\,s1^2\,(2\,u+1),\,\frac{u\,s1^3\,(u+1)}{r2}$$
$$0,\,\frac{r2^2}{u},\,0,\,0$$

$SF_{1}^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {u,v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=-\frac{s2}{u},\,s2=s2,\,u=u,\,v=\frac{2\,u-1}{u},\,w=0\right\},\,\left\{r1=-\frac{r2}{u},\,r2=r2,\,s1=0,\,s2=s2,\,u=u,\,v=\frac{2\,u-1}{u},\,w=0\right\},\,\left\{r1=r1,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=-\frac{r2\,s1}{r1+2\,r2},\,u=\frac{1}{2},\,v=0,\,w=\frac{r1\,(r1+2\,r2)}{2\,r2^2}\right\}$$

$SF_{3}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-2\,r2,\,r2=r2,\,s1=0,\,s2=s2,\,v=4\,u-2,\,w=4\,u-2\},\,\left\{r1=-\frac{r2}{2},\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=0,\,v=u-\frac{1}{2},\,w=\frac{u}{4}-\frac{1}{2}\right\},\,\left\{r1=-\frac{r2}{3\,u-1},\,r2=r2,\,s1\right.$$

$$= s1, s2 = \frac{(3\,u^2 - 4\,u + 1)\,s1}{2\,u - 1}, v = \frac{2\,u-1}{3\,u-1}, w = -\frac{2\,u-1}{(3\,u-1)^2}\Big\}$$

```
> v1 := u-1/2:
  w1 := (1/4)*u-1/2:
  r21 := -2*r1:
  zamproc(u,v1,w1,0,0,1,1,0, r1,s1,r21,0):
```

$$-r1^2, 0, s1^2, 0$$

$$0, 0, r1\,s1\,u, s1^2\,u$$

```
> v1 := (2*u-1)/(3*u-1):
  w1 := -(2*u-1)/(3*u-1)^2:
  r21 := -(3*u-1)*r1:
  s21 := (3*u^2-4*u+1)*s1/(2*u-1):
  zamproc(u,v1,w1,0,0,1,1,0, r1,s1,r21,s21):
```

$$(-3\,u+2)\,r1^2, 0, (3\,u-2)\,s1^2, 0$$

$$0, 0, \frac{s1\,r1\,u\,(3\,u-2)}{2\,u-1}, \frac{s1^2\,u\,(3\,u-2)}{2\,u-1}$$

$SF_5^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,2],M[2,4]], {w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1 = r1, r2 = -\frac{r1\,(2\,u-1)}{v}, s1 = 0, s2 = s2, w = \frac{(v\,u - 2\,u + 1)\,v}{(2\,u-1)^2}\right\}$$

```
> r21 := -r1*(2*u-1)/v:
  w1 := (u*v-2*u+1)*v/(2*u-1)^2:
  zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{(-2\,u+v+1)\,r1^2}{v}, \frac{r1\,s2\,(4\,u-v-2)}{2\,u-1}, \frac{s2^2\,v\,(1+(v-2)\,u)}{(2\,u-1)^2}, 0$$

$$0, 0, \frac{r1\,s2\,v\,u}{2\,u-1}, 0$$

$SF_{11}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {w,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r2 = -\frac{r1\,(u-1)}{v}, s1 = 0, s2 = s2, w = -\frac{v}{u-1}\right\}$$

```
> r21 := -r1*(u-1)/v:
  w1 := -v/(u-1):
  zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, r1,0,r21,s2):
```

$$-\frac{r1^2\,(u-v-1)}{v}, r1\,s2\,(v+2), -\frac{v\,s2^2}{u-1}, 0$$

$$0, r1^2\,u, 0, 0$$

$SF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2});
```

$$\left\{r1 = r1, r2 = 0, s1 = -\frac{s2}{2}, u = \frac{2}{3} + \frac{4\,w}{3}, v = \frac{1}{2} + 2\,w\right\}, \left\{r1 = r1, r2 = -\frac{r1\,(RootOf(\_Z^2 - w) + 2\,w)}{w\,(RootOf(\_Z^2 - w) + 2)}, s1 = RootOf(\_Z^2 - w)\,s2, u = \right.$$

$$\left. -\frac{-w^2 + RootOf(\_Z^2 - w)}{w\,(4\,RootOf(\_Z^2 - w) + w + 4)}, v = \frac{2\,w+1}{RootOf(\_Z^2 - w) + 2}\right\}$$

```
> u1 := 2/3+4*w*(1/3):
  v1 := 1/2+2*w:
  s21 := -2*s1:
  zamproc(u1,v1,w,0,0,1,1,0, r1,s1,0,s21):
```

$$\frac{4}{3}\,r1^2\,w + \frac{2}{3}\,r1^2, 0, 0, \frac{2\,s1^3\,(2\,w+1)}{3\,r1}$$

$$0, r1^2, 0, -s1^2$$

```
> z1 := sqrt(w):
  u1 := -(-w^2+z1)/(w*(4*z1+w+4)):
  v1 := (2*w+1)/(z1+2):
  r21 := -r1*(z1+2*w)/(w*(z1+2)):
  s11 := z1*s2:
  zamproc(u1,v1,w,0,0,1,1,0, r1,s11,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\left(w^3 + 5\,w^{5\backslash 2} + 7\,w^2 - w^{3\backslash 2} - 8\,w - 4\sqrt{w}\right)}{\sqrt{w}\left(w+\sqrt{w}\right)\left(\sqrt{w}+2\right)\left(4\sqrt{w}+w+4\right)}, 0, 0, \frac{w^{3\backslash 2}\,s2^3\left(w^2 + 3\,w^{3\backslash 2} + w - 3\sqrt{w} - 2\right)}{\left(4\sqrt{w}+w+4\right)r1\left(w+\sqrt{w}\right)}$$

$$0, -\frac{3\,r1^2\left(w^3 + 7\,w^{5\backslash 2} + 20\,w^2 + 31\,w^{3\backslash 2} + 29\,w + 16\sqrt{w} + 4\right)}{\left(w+\sqrt{w}\right)\left(4\sqrt{w}+w+4\right)\left(\sqrt{w}+2\right)^2}, 0, \frac{3\,s2^2\sqrt{w}\left(w^3 + 5\,w^{5\backslash 2} + 10\,w^2 + 11\,w^{3\backslash 2} + 7\,w + 2\sqrt{w}\right)}{\left(w+\sqrt{w}\right)\left(\sqrt{w}+2\right)\left(4\sqrt{w}+w+4\right)}$$

```
> z2 := -sqrt(w):
  u2 := -(-w^2+z2)/(w*(4*z2+w+4)):
  v2 := (2*w+1)/(z2+2):
  r22 := -r1*(z2+2*w)/(w*(z2+2)):
  s12 := z2*s2:
  zamproc(u2,v2,w,0,0,1,1,0, r1,s12,r22,s2):
```

$$\frac{r1^2\left(w^3-5w^{5\backslash 2}+7w^2+w^{3\backslash 2}-8w+4\sqrt{w}\right)}{\sqrt{w}\left(w-\sqrt{w}\right)\left(\sqrt{w}-2\right)\left(-4\sqrt{w}+w+4\right)},0,0,-\frac{\left(w^2-3w^{3\backslash 2}+w+3\sqrt{w}-2\right)w^{3\backslash 2}s2^3}{\left(-4\sqrt{w}+w+4\right)r1\left(w-\sqrt{w}\right)}$$

$$0,-\frac{3r1^2\left(w^3-7w^{5\backslash 2}+20w^2-31w^{3\backslash 2}+29w-16\sqrt{w}+4\right)}{\left(w-\sqrt{w}\right)\left(-4\sqrt{w}+w+4\right)\left(\sqrt{w}-2\right)^2},0,\frac{3s2^2\sqrt{w}\left(w^3-5w^{5\backslash 2}+10w^2-11w^{3\backslash 2}+7w-2\sqrt{w}\right)}{\left(w-\sqrt{w}\right)\left(\sqrt{w}-2\right)\left(-4\sqrt{w}+w+4\right)}$$

$SF_{14}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,r2=r2,s1=-\frac{(v-2)s2}{2(u-1)},s2=s2,w=\frac{v(v-2)}{4(u-1)}\right\}$$

```
> w1 := v*(v-2)/(4*(u-1)):
  s11 := -(v-2)*s2/(2*(u-1)):
  zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, 0,s11,r2,s2):
```

$$0,\frac{(-v^2+4)s2\,r2}{4u-4},-\frac{(-v-2+4u)s2^2(v-2)}{4(u-1)^2},0$$

$$0,\frac{v(v-2)r2^2}{4u-4},0,-\frac{(v-2)\left(u-\frac{v}{2}\right)s2^2}{2(u-1)^2}$$

$SF_{19}^{4,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3],M[2,4]], {u,v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1=w\,r2,r2=r2,s1=0,s2=s2,u=u,v=w,w=w\},\{r1=w\,r2,r2=r2,s1=s1,s2=0,u=0,v=w,w=w\},\{r1=w\,r2,r2=r2,s1=s1,s2=-s1,u=0,v=w,w=w\}$

```
> r11 := v*r2:
  w1 := v:
  zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, r11,0,r2,s2):
```

$$v\,r2^2(u\,v+v+1),v\,r2\,s2(v+2),v\,s2^2,0$$

$$-\frac{r2^3u\,v^2}{s2},0,0,0$$

$SF_{27}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,3]], {v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,r2=r2,s1=w\,s2,s2=s2,v=-2,w=w\},\{r1=r1,r2=-r1,s1=s2\,u+s2,s2=s2,v=3u+1,w=2u+1\}$$

```
> s11 := w*s2:
  zamproc(u,-2,w,0,0,1,1,0, 0,s11,r2,s2):
```

$$0,0,w\,s2^2(w+2),-\frac{w\,s2^3(-2+(u-1)w)}{r2}$$

$$0,r2^2w,0,w\,s2^2(u\,w-1)$$

$SF_{28}^{4,1}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,3]], {u,v,r1,s1,r2,s2})]);
```

$$\left[\left\{r1=r1,r2=\frac{\left(6\,RootOf(2\_Z^3+w+(2w+1)\_Z)^2+2\,RootOf(2\_Z^3+w+(2w+1)\_Z)\,w+2w+3\right)r1}{w(w+6)},s1=RootOf(2\_Z^3+w+(2w+1)\_Z)\,s2,\right.\right.$$

$$s2=s2,u=-\frac{1}{w(w^2+12w+36)}\left(16\,RootOf(2\_Z^3+w+(2w+1)\_Z)^2w+4\,RootOf(2\_Z^3+w+(2w+1)\_Z)\,w^2+w^3\right.$$

$$\left.+18\,RootOf(2\_Z^3+w+(2w+1)\_Z)^2-2\,RootOf(2\_Z^3+w+(2w+1)\_Z)\,w+14w^2+30w+9\right),v$$

$$\left.\left.=\frac{RootOf(2\_Z^3+w+(2w+1)\_Z)^2w-2\,RootOf(2\_Z^3+w+(2w+1)\_Z)\,w+w^2+4w-3}{w+6}\right\}\right]$$

```
> solve(2*_Z^3+w+(2*w+1)*_Z, _Z);
```

$$\frac{\left(-54w+6\sqrt{48w^3+153w^2+36w+6}\right)^{1\backslash 3}}{6}-\frac{6\left(\frac{w}{3}+\frac{1}{6}\right)}{\left(-54w+6\sqrt{48w^3+153w^2+36w+6}\right)^{1\backslash 3}},-\frac{\left(-54w+6\sqrt{48w^3+153w^2+36w+6}\right)^{1\backslash 3}}{12}$$

$$+\frac{3\left(\frac{w}{3}+\frac{1}{6}\right)}{\left(-54w+6\sqrt{48w^3+153w^2+36w+6}\right)^{1\backslash 3}}$$

$$+\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{\left(-54\,w+6\sqrt{48\,w^3+153\,w^2+36\,w+6}\right)^{1/3}}{6}+\frac{6\left(\frac{w}{3}+\frac{1}{6}\right)}{\left(-54\,w+6\sqrt{48\,w^3+153\,w^2+36\,w+6}\right)^{1/3}}\right)}{2},$$

$$-\frac{\left(-54\,w+6\sqrt{48\,w^3+153\,w^2+36\,w+6}\right)^{1/3}}{12}+\frac{3\left(\frac{w}{3}+\frac{1}{6}\right)}{\left(-54\,w+6\sqrt{48\,w^3+153\,w^2+36\,w+6}\right)^{1/3}}$$

$$-\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{\left(-54\,w+6\sqrt{48\,w^3+153\,w^2+36\,w+6}\right)^{1/3}}{6}+\frac{6\left(\frac{w}{3}+\frac{1}{6}\right)}{\left(-54\,w+6\sqrt{48\,w^3+153\,w^2+36\,w+6}\right)^{1/3}}\right)}{2}$$

```
> z1 := (1/6)*(-54*w+6*sqrt(48*w^3+153*w^2+36*w+6))^(1/3)-(6*((1/3)*w+1/6))/(-54*w+6*sqrt(48*w^3+153*
  w^2+36*w+6))^(1/3):
  r21 := (6*z1^2+2*z1*w+2*w+3)*r1/(w*(w+6)):
  s11 := z1*s2:
  u1 := -(16*z1^2*w+4*z1*w^2+w^3+18*z1^2-2*z1*w+14*w^2+30*w+9)/(w*(w^2+12*w+36)):
  v1 := (z1^2*w-2*z1*w+w^2+4*w-3)/(w+6):
  #zamproc(u1,v1,w,0,0,1,1,0, r1,s11,r21,s2):
```

$SF_{29}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,3],M[2,1],M[2,4]], {w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-\frac{s2\,(v+2)}{2\,u+1},\ s2=s2,\ w=\frac{(v+2)\,(v\,u-2\,u+v)}{(2\,u+1)^2}\right\}$$

```
> s11 := -s2*(v+2)/(2*u+1):
  w1 := (v+2)*(u*v-2*u+v)/(2*u+1)^2:
  zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, 0,s11,r2,s2):
```

$$0,\ -\frac{(u\,v+v+1)\,r2\,(v+2)\,s2}{(2\,u+1)^2},\ 0,\ -\frac{(2\,u-v-1)\,(v+2)\,s2^3}{r2\,(2\,u+1)^2}$$

$$0,\ \frac{((v-2)\,u+v)\,r2^2\,(v+2)}{(2\,u+1)^2},\ -\frac{4\,r2\,(v+2)\,s2\left(u-\frac{v}{4}\right)}{(2\,u+1)^2},\ 0$$

$SF_{30}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[2,1],M[2,3],M[2,4]], {w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,\ r2=r2,\ s1=-\frac{v\,s2}{2\,u},\ s2=s2,\ w=\frac{v^2}{4\,u}\right\}$$

```
> s11 := -v*s2/(2*u):
  w1 := v^2/(4*u):
  zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, 0,s11,r2,s2):
```

$$0,\ -\frac{v\,s2\,r2\,(v+2)}{4\,u},\ -\frac{v\,s2^2\,(4\,u-v)}{4\,u^2},\ -\frac{v\,s2^3\,(-v+2\,u)}{4\,u^2\,r2}$$

$$0,\ \frac{v^2\,r2^2}{4\,u},\ 0,\ 0$$

$SF_{32}^{4,1}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,3]], {u,w,r1,s1,s2})]);
```

$$\left[\left\{r1=RootOf(\_Z^2-2\,\_Z\,v-v+2)\,r2,\ s1=\frac{(-2\,RootOf(\_Z^2-2\,\_Z\,v-v+2)+v-2)\,s2}{3},\ s2=s2,\ u=\frac{-RootOf(\_Z^2-2\,\_Z\,v-v+2)\,v+2\,v^2-RootOf(\_Z^2-2\,\_Z\,v-v+2)+v+2}{3\,(v-2)},\ w=-RootOf(\_Z^2-2\,\_Z\,v-v+2)\,v-RootOf(\_Z^2-2\,\_Z\,v-v+2)\right\}\right]$$

```
> solve(_Z^2-2*_Z*v-v+2, _Z);
```

$$v+\sqrt{v^2+v-2},\ v-\sqrt{v^2+v-2}$$

```
> z1 := v+sqrt(v^2+v-2):
  r11 := z1*r2:
  s11 := (1/3)*(-2*z1+v-2)*s2;
  u1 := (-z1*v+2*v^2-z1+v+2)/(3*(v-2));
  w1 := -z1*v-z1;
  zamproc(u1,v,w1,0,0,1,1,0, r11,s11,r2,s2):
```

$$s11:=\frac{\left(-v-2\sqrt{v^2+v-2}-2\right)s2}{3}$$

$$u1 := \frac{2\,v^2 - v\left(v+\sqrt{v^2+v-2}\right) - \sqrt{v^2+v-2}\,+2}{3\,v-6}$$

$$w1 := -v\left(v+\sqrt{v^2+v-2}\right) - v - \sqrt{v^2+v-2}$$

$$0,\,0,\,-\frac{\left(122\,v^3+121\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,v^2+183\,v^2+121\,v\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,-111\,v-26\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,-86\right)s2^2}{36\,v+45\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+18},$$
$$-\frac{s2^3\left((-v^2-64\,v-43)\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+v^3-57\,v^2-78\,v+26\right)\left(v+2\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+2\right)}{27\left(4\,v+5\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+2\right)r2}$$
$$\frac{\left(9\,v^2+9\,v\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+11\,v+7\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,-8\right)\left(v+\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\right)r2^3}{\left(4\,v+5\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+2\right)s2},\,0,\,0,$$
$$\frac{(v+2)\,s2^2\left(v+2\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+2\right)\left((-v-23)\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+v^2-17\,v-20\right)}{108\,v+135\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+54}$$

```
> z2 := v-sqrt(v^2+v-2):
  r12 := z2*r2:
  s12 := (1/3)*(-2*z2+v-2)*s2;
  u2 := (-z2*v+2*v^2-z2+v+2)/(3*(v-2));
  w2 := -z2*v-z2;
  zamproc(u2,v,w2,0,0,1,1,0, r12,s12,r2,s2):
```

$$s12 := \frac{\left(-v+2\,\sqrt{v^2+v-2}\,-2\right)s2}{3}$$

$$u2 := \frac{2\,v^2 - v\left(v-\sqrt{v^2+v-2}\right) + \sqrt{v^2+v-2}\,+2}{3\,v-6}$$

$$w2 := -v\left(v-\sqrt{v^2+v-2}\right) - v + \sqrt{v^2+v-2}$$

$$0,\,0,\,-\frac{\left(-122\,v^3+121\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,v^2-183\,v^2+121\,v\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+111\,v-26\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+86\right)s2^2}{-36\,v+45\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,-18},$$
$$-\frac{\left(v-2\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+2\right)\left((v^2+64\,v+43)\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+v^3-57\,v^2-78\,v+26\right)s2^3}{27\left(4\,v-5\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+2\right)r2}$$
$$\frac{\left(9\,v^2-9\,v\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+11\,v-7\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,-8\right)\left(v-\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\right)r2^3}{\left(4\,v-5\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+2\right)s2},\,0,\,0,$$
$$\frac{\left(v-2\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+2\right)\left((v+23)\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+v^2-17\,v-20\right)(v+2)\,s2^2}{108\,v-135\,\sqrt{(v+2)\,(v-1)}\,+54}$$

$SF_{33}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,1],M[2,4]], {w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=-\frac{(v+1)\,s2}{u},\,s2=s2,\,w=-\frac{v+1}{u}\right\}$$

```
> s11 := -(v+1)*s2/u:
  w1 := -(v+1)/u:
  zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, 0,s11,r2,s2):
```

$$0,\,0,\,\frac{(u\,v+v+1)\,s2^2\,(v+1)}{u^2},\,-\frac{(u-v-1)\,s2^3\,(v+1)}{u^2\,r2}$$
$$0,\,-\frac{(v+1)\,r2^2}{u},\,-\frac{(v+2)\,r2\,s2\,(v+1)}{u},\,0$$

$SF_{36}^{4,1}$

```
> solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,4]], {v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=-2\,r2,\,r2=r2,\,s1=0,\,s2=s2,\,v=4\,u,\,w=4\,u\},\,\left\{r1=\frac{r2}{3\,u+1},\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=-\frac{(3\,u^2+4\,u+1)\,s1}{2\,u+1},\,v=-\frac{2\,u^2+4\,u+1}{3\,u^2+4\,u+1},\,w=\right.$$
$$\left.-\frac{5\,u^2+4\,u+1}{(3\,u^2+4\,u+1)\,(3\,u+1)}\right\}$$

```
> r21 := (3*u+1)*r1:
  s11 := -(2*u+1)*s2/(3*u^2+4*u+1):
  v1 := -(2*u^2+4*u+1)/(3*u^2+4*u+1):
  w1 := -(5*u^2+4*u+1)/((3*u^2+4*u+1)*(3*u+1)):
  zamproc(u,v1,w1,0,0,1,1,0, r1,s11,r21,s2):
```

$$0,\,0,\,\frac{(3\,u+2)\,u\,s2^2}{(3\,u+1)^2\,(u+1)},\,-\frac{(2\,u+1)\,s2^3\,u\,(3\,u+2)}{(3\,u+1)^3\,(u+1)^2\,r1}$$

$$\frac{r1^3\,(3\,u+1)\,(3\,u+2)}{s2},\,0,\,-\frac{s2\,(3\,u+2)\,r1\,(2\,u+1)^2}{(3\,u+1)\,(u+1)^2},\,0$$

$SF_3^{5,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {w,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=-\frac{(v-2)\,s2}{2\,(u-1)},\,s2=s2,\,w=\frac{v\,(v-2)}{4\,(u-1)}\right\},\,\left\{r1=-\frac{v\,r2}{u-1},\,r2=r2,\,s1=0,\,s2=s2,\,w=-\frac{v}{u-1}\right\},\,\left\{r1=r1,\,r2=0,\,s1=s1,\,s2=-2\,s1,\,w=-\frac{u}{4}+\frac{v}{2}-\frac{1}{4}\right\},\,\left\{r1=r1,\,r2=-\frac{r1\,(3\,u-1)}{v},\,s1=s1,\,s2=0,\,w=\frac{(2\,u\,v-3\,u+1)\,v}{(3\,u-1)^2}\right\},\,\left\{r1=RootOf(\,(2\,u^2-2\,u)\,\_Z^2+v^2-v+(3\,u\,v-3\,u-v+1)\,\_Z)\,r2,\,r2=r2,\,s1=-\frac{s2\,(RootOf(\,(2\,u^2-2\,u)\,\_Z^2+v^2-v+(3\,u\,v-3\,u-v+1)\,\_Z)\,u-RootOf(\,(2\,u^2-2\,u)\,\_Z^2+v^2-v+(3\,u\,v-3\,u-v+1)\,\_Z)+v-1)}{u-1},\,s2=s2,\,w=\frac{1}{2\,u}\,(RootOf(\,(2\,u^2-2\,u)\,\_Z^2+v^2-v+(3\,u\,v-3\,u-v+1)\,\_Z)\,u\,v-RootOf(\,(2\,u^2-2\,u)\,\_Z^2+v^2-v+(3\,u\,v-3\,u-v+1)\,\_Z)\,u-RootOf(\,(2\,u^2-2\,u)\,\_Z^2+v^2-v+(3\,u\,v-3\,u-v+1)\,\_Z)\,v+v^2+RootOf(\,(2\,u^2-2\,u)\,\_Z^2+v^2-v+(3\,u\,v-3\,u-v+1)\,\_Z)-v)\right\}$$

```
> w1 := (2*v-u-1)/4:
  s21 := -2*s1:
  zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, r1,s1,0,s21):
```

$$r1^2\,u,\,r1\,s1\,(3\,u-2\,v-1),\,s1^2\,(2\,u-2\,v-1),\,0$$
$$0,\,r1^2,\,0,\,-s1^2$$

```
> w1 := (2*u*v-3*u+1)*v/(3*u-1)^2:
  r21 := -r1*(3*u-1)/v:
  zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, r1,s1,r21,0):
```

$$\frac{(-3\,u+v+1)\,r1^2}{v},\,\frac{(2\,v-3\,u+1)\,s1\,r1}{v},\,s1^2,\,0$$
$$0,\,-r1^2\,u,\,0,\,s1^2\,u$$

```
> solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {v,r1,s1,r2,s2});
```

$$\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=0,\,v=0\},\,\{r1=0,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=RootOf(w\,\_Z^2+\_Z-u+1)\,s1,\,v=-2\,w\,RootOf(w\,\_Z^2+\_Z-u+1)\},\,\{r1=w\,r2,\,r2=r2,\,s1=0,\,s2=s2,\,v=-w\,u+w\},\,\left\{r1=r1,\,r2=0,\,s1=s1,\,s2=-2\,s1,\,v=\frac{u}{2}+2\,w+\frac{1}{2}\right\},\,\left\{r1=RootOf(2\,\_Z^2\,u+\_Z-w)\,r2,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=0,\,v=\frac{3\,RootOf(2\,\_Z^2\,u+\_Z-w)\,u-3\,w\,u-RootOf(2\,\_Z^2\,u+\_Z-w)+w}{2\,u\,RootOf(2\,\_Z^2\,u+\_Z-w)}\right\},\,\left\{r1=r1,\,r2=RootOf(w^2\,\_Z^3-u+1+(-w\,u-w)\,\_Z-w\,\_Z^2)\,r1,\,s1=s1,\,s2=\frac{s1\,(u-1)}{w\,RootOf(w^2\,\_Z^3-u+1+(-w\,u-w)\,\_Z-w\,\_Z^2)},\,v=-\frac{RootOf(w^2\,\_Z^3-u+1+(-w\,u-w)\,\_Z-w\,\_Z^2)^2\,w-RootOf(w^2\,\_Z^3-u+1+(-w\,u-w)\,\_Z-w\,\_Z^2)+u-1}{RootOf(w^2\,\_Z^3-u+1+(-w\,u-w)\,\_Z-w\,\_Z^2)}\right\}$$

```
> #solve(w^2*_Z^3-u+1+(-u*w-w)*_Z-w*_Z^2, _Z);
> z1 := (3*sqrt(-(3*(u^3*w^2+3*u^2*w^2-11*u^2*w+3*u*w^2+14*u*w+w^2-u-2*w+1))/w)*w+18*w*u-9*w+1)^(1/3)/
  (3*w)+(3*u*w+3*w+1)/(3*w*(3*sqrt(-(3*(u^3*w^2+3*u^2*w^2-11*u^2*w+3*u*w^2+14*u*w+w^2-u-2*w+1))/w)*
  w+18*w*u-9*w+1)^(1/3))+1/(3*w):
  r21 := z1*r1:
  s21 := s1*(u-1)/(w*z1):
  v1 := -(z1^2*w-z1+u-1)/z1:
  #zamproc(u,v1,w,0,0,1,1,0, r1,s1,r21,s21):
```

$SF_6^{5,1}$

```
> ([solve([M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {w,r1,r2,s2})]);
```

$$\left[\left\{r1=0,\,r2=r2,\,s2=-\frac{s1}{2},\,w=v\right\},\,\left\{r1=r1,\,r2=0,\,s2=-2\,s1,\,w=-\frac{3\,u}{4}+v\right\},\,\left\{r1=r1,\,r2=RootOf(v^2\,\_Z^3+5\,u^2-6\,u+1+(-3\,u^2+6\,u\,v-2\,u-2\,v+1)\,\_Z+(2\,u\,v+v^2-2\,v)\,\_Z^2)\,r1,\,s2=-(RootOf(v^2\,\_Z^3+5\,u^2-6\,u+1+(-3\,u^2+6\,u\,v-2\,u-2\,v+1)\,\_Z+(2\,u\,v+v^2-2\,v)\,\_Z^2)\,s1\,(RootOf(v^2\,\_Z^3+5\,u^2-6\,u+1+(-3\,u^2+6\,u\,v-2\,u-2\,v+1)\,\_Z+(2\,u\,v+v^2-2\,v)\,\_Z^2)\,v+3\,u-1))\big/(RootOf(v^2\,\_Z^3+5\,u^2-6\,u+1+(-3\,u^2+6\,u\,v-2\,u-2\,v+1)\,\_Z+(2\,u\,v+v^2-2\,v)\,\_Z^2)\,v+u-1),\,w=-(RootOf(v^2\,\_Z^3+5\,u^2-6\,u+1+(-3\,u^2+6\,u\,v-2\,u-2\,v+1)\,\_Z+(2\,u\,v+v^2-2\,v)\,\_Z^2)\,v-RootOf(v^2\,\_Z^3+5\,u^2-6\,u+1+(-3\,u^2+6\,u\,v-2\,u-2\,v+1)\,\_Z+(2\,u\,v+v^2-2\,v)\,\_Z^2)+u-1)\big/RootOf(v^2\,\_Z^3+5\,u^2-6\,u+1+(-3\,u^2+6\,u\,v-2\,u-2\,v+1)\,\_Z+(2\,u\,v+v^2-2\,v)\,\_Z^2)^2\right\}\right]$$

```
> s21 := -2*s1:
```

```
w1 := -3*u*(1/4)+v:
zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, r1,s1,0,s21):
```

$$r1^2\,u,\ r1\,s1\,(3\,u-2\,v-1),\ 0,\ \frac{(-2\,u+2\,v+1)\,s1^3}{r1}$$

$$0,\ r1^2,\ 0,\ -s1^2$$

```
> #solve(v^2*_Z^3+5*u^2-6*u+1+(-3*u^2+6*u*v-2*u-2*v+1)*_Z+(2*u*v+v^2-2*v)*_Z^2, _Z);
> z1 := (-35*u^3-39*u^2*v+21*u*v^2-v^3+6*u*sqrt(-27*u^4+273*u^3*v-225*u^2*v^2+63*u*v^3-3*v^4-36*u^3
  -207*u^2*v+90*u*v^2-9*v^3+6*u^2+87*u*v-12*v^2+12*u-9*v-3)+33*u^2+24*u*v-3*v^2+3*u-3*v-1)^(1/3)/(3*v)+
  (13*u^2-14*u*v+v^2-2*u+2*v+1)/(3*v*(-35*u^3-39*u^2*v+21*u*v^2-v^3+6*u*sqrt(-27*u^4+273*u^3*v-225*u^2*
  v^2+63*u*v^3-3*v^4-36*u^3-207*u^2*v+90*u*v^2-9*v^3+6*u^2+87*u*v-12*v^2+12*u-9*v-3)+33*u^2+24*u*v-3*
  v^2+3*u-3*v-1)^(1/3))-(2*u+v-2)/(3*v):
  r21 := z1*r1:
  s21 := -z1*s1*(z1*v+3*u-1)/(z1*v+u-1):
  w1 := -(z1*v-z1+u-1)/z1^2:
  #zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, r1,s1,r21,s21):
```

$SF_7^{5,1}$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3]], {w,r1,s2});
```

$$\left\{r1=-\frac{r2\,v}{3\,u-1},\ s2=0,\ w=\frac{(3\,u\,v-3\,u+1)\,v}{9\,u^2-6\,u+1}\right\},\ \Big\{r1=\big(r2\,(RootOf((v^2-3\,v+3)\,\_Z^3+8\,u^2-12\,u+4+(6\,u^2+6\,u\,v-20\,u-2\,v+10)\,\_Z+(5\,u\,v+v^2-9\,u-5\,v+9)\,\_Z^2)\,v-2\,RootOf((v^2-3\,v+3)\,\_Z^3+8\,u^2-12\,u+4+(6\,u^2+6\,u\,v-20\,u-2\,v+10)\,\_Z+(5\,u\,v+v^2-9\,u-5\,v+9)\,\_Z^2)+2\,u-2)\big)\Big/\big(RootOf((v^2-3\,v+3)\,\_Z^3+8\,u^2-12\,u+4+(6\,u^2+6\,u\,v-20\,u-2\,v+10)\,\_Z+(5\,u\,v+v^2-9\,u-5\,v+9)\,\_Z^2)\,(RootOf((v^2-3\,v+3)\,\_Z^3+8\,u^2-12\,u+4+(6\,u^2+6\,u\,v-20\,u-2\,v+10)\,\_Z+(5\,u\,v+v^2-9\,u-5\,v+9)\,\_Z^2)+2)\big),\ s2=RootOf((v^2-3\,v+3)\,\_Z^3+8\,u^2-12\,u+4+(6\,u^2+6\,u\,v-20\,u-2\,v+10)\,\_Z+(5\,u\,v+v^2-9\,u-5\,v+9)\,\_Z^2)\,s1,\ w=-\big(RootOf((v^2-3\,v+3)\,\_Z^3+8\,u^2-12\,u+4+(6\,u^2+6\,u\,v-20\,u-2\,v+10)\,\_Z+(5\,u\,v+v^2-9\,u-5\,v+9)\,\_Z^2)\,v-RootOf((v^2-3\,v+3)\,\_Z^3+8\,u^2-12\,u+4+(6\,u^2+6\,u\,v-20\,u-2\,v+10)\,\_Z+(5\,u\,v+v^2-9\,u-5\,v+9)\,\_Z^2)+u-1\big)\Big/RootOf((v^2-3\,v+3)\,\_Z^3+8\,u^2-12\,u+4+(6\,u^2+6\,u\,v-20\,u-2\,v+10)\,\_Z+(5\,u\,v+v^2-9\,u-5\,v+9)\,\_Z^2)^2\Big\}$$

```
> r11 := -r2*v/(3*u-1):
  w1 := (3*u*v-3*u+1)*v/(3*u-1)^2:
  zamproc(u,v,w1,0,0,1,1,0, r11,s1,r2,0):
```

$$-\frac{r2^2\,v\,(3\,u-v-1)}{(3\,u-1)^2},\ \frac{r2\,s1\,(3\,u-2\,v-1)}{3\,u-1},\ s1^2,\ 0$$

$$-\frac{r2^3\,v^3\,u}{(3\,u-1)^3\,s1},\ 0,\ 0,\ s1^2\,u$$

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3]], {u,r1,s2});
```

$$\left\{r1=RootOf(\_Z^2-w+(-v+1)\,\_Z)\,r2,\ s2=0,\ u=\frac{RootOf(\_Z^2-w+(-v+1)\,\_Z)-v}{3\,RootOf(\_Z^2-w+(-v+1)\,\_Z)}\right\},\ \Big\{r1=RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)\,r2,\ s2=-\frac{1}{3\,RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)\,w}\big(s1\,(RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)^2+2\,RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)\,v-RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)+w)\big),$$

$$u=\frac{1}{9\,RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)^2}\big(13\,RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)^2\,v-16\,RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)^2\,w-RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)\,v^2+4\,RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)\,v\,w-6\,RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)^2+2\,RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)\,v-2\,RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)\,w-2\,w\,v+8\,w^2-3\,RootOf(\_Z^3+2\,w^2+(w\,v-w)\,\_Z+(2\,v-4\,w-1)\,\_Z^2)+3\,w\big)\Big\}$$

```
> #solve(_Z^3+2*w^2+(v*w-w)*_Z+(2*v-4*w-1)*_Z^2, _Z);
> z1 := (1/6)*(456*v^2*w-912*v*w^2-492*w*v+312*w^2+132*w-64*v^3+512*w^3+96*v^2-48*v+8+12*sqrt(-12*v^4*
  w^2+60*v^3*w^3-48*v^2*w^4+228*v^3*w^2-1524*v^2*w^3+2832*v*w^4-1536*w^5-327*v^2*w^2+1608*v*w^3-1308*
  w^4+162*v*w^2-432*w^3-27*w^2))^(1/3)-(6*((19/9)*w*v-(11/9)*w-(4/9)*v^2-(16/9)*w^2+(4/9)*v-1/9))/(456*
  v^2*w-912*v*w^2-492*w*v+312*w^2+132*w-64*v^3+512*w^3+96*v^2-48*v+8+12*sqrt(-12*v^4*w^2+60*v^3*w^3-48*
  v^2*w^4+228*v^3*w^2-1524*v^2*w^3+2832*v*w^4-1536*w^5-327*v^2*w^2+1608*v*w^3-1308*w^4+162*v*w^2-432*
  w^3-27*w^2))^(1/3)-2*v*(1/3)+4*w*(1/3)+1/3:
  r11 := z1*r2:
  s21 := -s1*(z1^2+2*z1*v-z1+w)/(3*z1*w):
  u1 := (13*z1^2*v-16*z1^2*w-z1*v^2+4*z1*v*w-6*z1^2+2*z1*v-2*z1*w-2*w*v+8*w^2-3*z1+3*w)/(9*z1^2):
  #zamproc(u1,v,w,0,0,1,1,0, r11,s1,r2,s21):
```

```
> solve([M[1,4],M[2,2],M[2,3]], {u,v,w,r1,s1,r2,s2});
```

$\{r1 = w\,r2, r2 = r2, s1 = 0, s2 = s2, u = u, v = w, w = w\}, \left\{r1 = r1, r2 = r2, s1 = s1, s2 = 0, u = u, v = -\frac{r1\,(3\,u-1)}{r2}, w = \frac{r1\,(3\,r1\,u+r2)}{r2^2}\right\}, \left\{r1 = r1, r2 = r2,\right.$

$s1 = s1, s2 = -\frac{s1\,(-r2^2\,w+3\,r1^2+r1\,r2)}{r1\,(w\,r2+2\,r1)}, u = -\frac{-r2^5\,w^3+3\,r1^2\,r2^3\,w^2-3\,r1^4\,r2\,w-3\,r1^3\,r2^2\,w+3\,r1^5+r1^3\,r2^2}{r1^2\,(w\,r2+2\,r1)^2\,r2}, v =$

$\left.-\frac{2\,r2^3\,w^2-4\,r1^2\,r2\,w-r1\,r2^2\,w+r1^3-r1^2\,r2}{r1\,(w\,r2+2\,r1)\,r2}, w = w\right\}, \left\{r1 = 0, r2 = r2, s1 = s1, s2 = s2, u = \frac{s1+s2}{s1}, v = 0, w = 0\right\}, \left\{r1 = -r2, r2 = r2, s1 = s1, s2\right.$

$\left.= s2, u = \frac{s1^2-s1\,s2+s2^2}{s1^2}, v = \frac{2\,s1-3\,s2}{s1}, w = 2\right\}$

```
> solve(v = (2*s1-3*s2)/s1, s2)
```

$$-\frac{(v-2)\,s1}{3}$$

```
> simplify(subs(s2 = -(1/3)*(v-2)*s1, (s1^2-s1*s2+s2^2)/s1^2));
```

$$\frac{7}{9}-\frac{1}{9}\,v+\frac{1}{9}\,v^2$$

```
> s21 := -(1/3)*(v-2)*s1:
  u1 := 7/9-(1/9)*v+(1/9)*v^2:
  zamproc(u1,v,2,0,0,1,1,0, r1,s1,-r1,s21):
```

$$\frac{(v-5)\,r1^2\,(v-2)}{9}, -\frac{r1\,s1\,(v-5)}{3}, -\frac{(v+1)\,(v-5)\,s1^2}{9}, 0$$

$$-\frac{(v-5)\,r1^3}{3\,s1}, 0, 0, -\frac{(v-5)\,s1^2}{3}$$

4.4. Доказательство леммы 2.1.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

Результат замены с $s_1=0$ в исходной системе:

```
> zamproc(p1,0,0,0,p2,0,1,0, r1,0,r2,s2):
```

$$p1\,r1^2,\,0,\,0,\,0$$
$$-\frac{r1\,(p1\,r1\,r2-p2\,r1^2-r2^2)}{s2},\,2\,r1\,r2,\,r1\,s2,\,0$$

1) $b_2=0 \;\Leftrightarrow\; r_2=0$

1_1) $a_2=0 \;\Leftrightarrow\; p_2=0$

```
> zamproc(p1,0,0,0,0,0,1,0, r1,0,0,s2):
```

$$p1\,r1^2,\,0,\,0,\,0$$
$$0,\,0,\,r1\,s2,\,0$$

```
> r11 := abs(p1)^(-1/2):
  s21 := p1*r11:
  zamproc(p1,0,0,0,0,0,1,0, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{p1}{|p1|},\,0,\,0,\,0$$
$$0,\,0,\,\frac{p1}{|p1|},\,0$$

1_1) $a_2\neq 0 \;\Leftrightarrow\; p_2\neq 0$

```
> zamproc(p1,0,0,0,p2,0,1,0, r1,0,0,s2):
```

$$p1\,r1^2,\,0,\,0,\,0$$
$$\frac{r1^3\,p2}{s2},\,0,\,r1\,s2,\,0$$

```
> r11 := abs(p1)^(-1/2):
  s21 := p2*r11/p1:
  zamproc(p1,0,0,0,p2,0,1,0, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{p1}{|p1|},\,0,\,0,\,0$$
$$\frac{p1}{|p1|},\,0,\,\frac{p2}{|p1|\,p1},\,0$$

2) $a_2=0$

```
> solve(-p1*r1*r2+p2*r1^2+r2^2, r2);
```

$$\left(\frac{p1}{2}+\frac{\sqrt{p1^2-4\,p2}}{2}\right)r1,\,\left(\frac{p1}{2}-\frac{\sqrt{p1^2-4\,p2}}{2}\right)r1$$

```
> r21 := ((1/2)+(1/2)*sqrt(p1^2-4*p2)*abs(p1)^(-1))*p1*r1:
  zamproc(p1,0,0,0,p2,0,1,0, r1,0,r21,s2):
```

$$p1\,r1^2,\,0,\,0,\,0$$
$$-\frac{r1^3\,(p1^2-4\,p2)\,(|p1|^2-p1^2)}{4\,|p1|^2\,s2},\,\frac{r1^2\left(|p1|+\sqrt{p1^2-4\,p2}\right)p1}{|p1|},\,r1\,s2,\,0$$

```
> r11 := abs(p1)^(-1/2):
  s21 := p1*r11:
  r21 := ((1/2)+(1/2)*sqrt(p1^2-4*p2)*abs(p1)^(-1))*p1*r11:
  zamproc(p1,0,0,0,p2,0,1,0, r11,0,r21,s21):
```

$$\frac{p1}{|p1|},\,0,\,0,\,0$$
$$-\frac{(p1^2-4\,p2)\,(|p1|^2-p1^2)}{4\,|p1|^3\,p1},\,\frac{\left(|p1|+\sqrt{p1^2-4\,p2}\right)p1}{|p1|^2},\,\frac{p1}{|p1|},\,0$$

```
> u = (abs(p1)+sqrt(p1^2-4*p2))/abs(p1);
```

$$u=\frac{|p1|+\sqrt{p1^2-4\,p2}}{|p1|}$$

4.5. Доказательство леммы 2.2.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

Результат замены с $s_1 = 0$ в исходной системе:

```
> zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r1,0,r2,s2):
```

$$q1\, r1\, r2,\ q1\, r1\, s2,\ 0,\ 0$$

$$\frac{r1\,(p2\, r1^2 + q2\, r1\, r2 - r2^2\,(q1-1))}{s2},\ -r1\,(-q2\, r1 + r2\,(q1-2)),\ r1\, s2,\ 0$$

1) $a_1 = 0 \ \Leftrightarrow\ r_2 = 0$

```
> zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r1,0,0,s2):
```

$$0,\ q1\, r1\, s2,\ 0,\ 0$$

$$\frac{r1^3\, p2}{s2},\ q2\, r1^2,\ r1\, s2,\ 0$$

1_1) $b_2 = 0 \ \Leftrightarrow\ q_2 = 0$

```
> zamproc(0,q1,0,0,p2,0,1,0, r1,0,0,s2):
```

$$0,\ q1\, r1\, s2,\ 0,\ 0$$

$$\frac{r1^3\, p2}{s2},\ 0,\ r1\, s2,\ 0$$

```
> r11 := 1/(q1*s2):
  zamproc(0,q1,0,0,p2,0,1,0, r11,0,0,s2):
```

$$0,\ 1,\ 0,\ 0$$

$$\frac{p2}{q1^3\, s2^4},\ 0,\ \frac{1}{q1},\ 0$$

```
> s21 := abs(p2)^(1/4)*abs(q1)^(-3/4):
  r11 := 1/(q1*s21):
  zamproc(0,q1,0,0,p2,0,1,0, r11,0,0,s21):
```

$$0,\ 1,\ 0,\ 0$$

$$\frac{|q1|^3\, p2}{q1^3\, |p2|},\ 0,\ \frac{1}{q1},\ 0$$

1_2) $b_2 \neq 0 \ \Leftrightarrow\ q_2 \neq 0$

```
> zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r1,0,0,s2):
```

$$0,\ q1\, r1\, s2,\ 0,\ 0$$

$$\frac{r1^3\, p2}{s2},\ q2\, r1^2,\ r1\, s2,\ 0$$

```
> r11 := abs(q2)^(-1/2):
  zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r11,0,0,s2):
```

$$0,\ \frac{q1\, s2}{\sqrt{|q2|}},\ 0,\ 0$$

$$\frac{p2}{|q2|^{3/2}\, s2},\ \frac{q2}{|q2|},\ \frac{s2}{\sqrt{|q2|}},\ 0$$

```
> s21 := q2*abs(q2)^(-1/2)/q1:
  zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r11,0,0,s21):
```

$$0,\ \frac{q2}{|q2|},\ 0,\ 0$$

$$\frac{p2\, q1}{|q2|\, q2},\ \frac{q2}{|q2|},\ \frac{q2}{|q2|\, q1},\ 0$$

```
> u = 1/q1;
  v = p2*q1/(q2^2);
```

$$u = \frac{1}{q1}$$

$$v = \frac{p2\, q1}{q2^2}$$

2) $a_1 \neq 0 \ \Leftrightarrow\ r_2 \neq 0$

2_1) $q_1 = 2$

```
> zamproc(0,2,0,0,p2,q2,1,0, r1,0,r2,s2):
```

$$2\, r1\, r2,\ 2\, r1\, s2,\ 0,\ 0$$

$$\frac{r1\,(p2\, r1^2 + q2\, r1\, r2 - r2^2)}{s2},\ q2\, r1^2,\ r1\, s2,\ 0$$

2_1^1) $b_2 = 0 \ \Leftrightarrow\ q_2 = 0$

```
> zamproc(0,2,0,0,p2,0,1,0, r1,0,r2,s2):
```

$$2\,r1\,r2,\,2\,r1\,s2,\,0,\,0$$
$$\frac{r1\,(p2\,r1^2-r2^2)}{s2},\,0,\,r1\,s2,\,0$$

$2_1^{1a})$ $a_2=0 \;\Rightarrow\; p_2>0$

```
> r21 := sqrt(p2)*r1:
  zamproc(0,2,0,0,p2,0,1,0, r1,0,r21,s2):
```

$$2\,r1^2\sqrt{p2},\,2\,r1\,s2,\,0,\,0$$
$$0,\,0,\,r1\,s2,\,0$$

```
> r11 := (4*p2)^(-1/4):
  r21 := sqrt(p2)*r11:
  s21 := 1/r11:
  zamproc(0,2,0,0,p2,0,1,0, r11,0,r21,s21):
```

$$1,\,2,\,0,\,0$$
$$0,\,0,\,1,\,0$$

$2_1^{1b})$ $p_2<0$

```
> zamproc(0,2,0,0,p2,0,1,0, r1,0,0,s2):
```

$$0,\,2\,r1\,s2,\,0,\,0$$
$$\frac{p2\,r1^3}{s2},\,0,\,r1\,s2,\,0$$

$2_1^{2})$ $b_2\neq 0 \;\Leftrightarrow\; q_2\neq 0$

$2_1^{2a})$ $a_2=0$

```
> zamproc(0,2,0,0,p2,q2,1,0, r1,0,r2,s2):
```

$$2\,r1\,r2,\,2\,r1\,s2,\,0,\,0$$
$$\frac{r1\,(p2\,r1^2+q2\,r1\,r2-r2^2)}{s2},\,q2\,r1^2,\,r1\,s2,\,0$$

```
> solve(p2*r1^2+q2*r1*r2-r2^2, r2);
```

$$\left(\frac{q2}{2}+\frac{\sqrt{q2^2+4\,p2}}{2}\right)r1,\,\left(\frac{q2}{2}-\frac{\sqrt{q2^2+4\,p2}}{2}\right)r1$$

```
> r21 := ((1/2)+(1/2)*sqrt(q2^2+4*p2)*abs(q2)^(-1))*q2*r1:
  zamproc(0,2,0,0,p2,q2,1,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\left(|q2|+\sqrt{q2^2+4\,p2}\right)q2}{|q2|},\,2\,r1\,s2,\,0,\,0$$
$$\frac{r1^3\,(q2^2+4\,p2)\,(|q2|^2-q2^2)}{4\,|q2|^2\,s2},\,q2\,r1^2,\,r1\,s2,\,0$$

```
> r11 := abs(q2)^(-1/2):
  s21 := q2*r11:
  r21 := ((1/2)+(1/2)*sqrt(q2^2+4*p2)*abs(q2)^(-1))*q2*r11:
  zamproc(0,2,0,0,p2,q2,1,0, r11,0,r21,s21):
```

$$\frac{q2\left(|q2|+\sqrt{q2^2+4\,p2}\right)}{|q2|^2},\,\frac{2\,q2}{|q2|},\,0,\,0$$
$$\frac{(q2^2+4\,p2)\,(|q2|^2-q2^2)}{4\,|q2|^3\,q2},\,\frac{q2}{|q2|},\,\frac{q2}{|q2|},\,0$$

```
> u = (abs(q2)+sqrt(q2^2+4*p2))/abs(q2);
  v = 2;
```

$$u=\frac{|q2|+\sqrt{q2^2+4\,p2}}{|q2|}$$
$$v=2$$

$2_2)$ $q_1\neq 2$

$2_2^{1})$ $b_2=0$

```
> r21 := q2*r1*(q1-2)^(-1):
  zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{q1\,r1^2\,q2}{q1-2},\,q1\,r1\,s2,\,0,\,0$$
$$\frac{(p2\,(q1-2)^2-q2^2)\,r1^3}{(q1-2)^2\,s2},\,0,\,r1\,s2,\,0$$

$2_2^{1a})$ $a_2=0$

```
> p21 := q2^2/(q1-2)^2:
  r11 := abs(q1-2)^(1/2)*abs(q1)^(-1/2)*abs(q2)^(-1/2):
```

```
r21 := q2*r11*(q1-2)^(-1):
s21 := q1*q2*r11/(q1-2):
zamproc(0,q1,0,0,p21,q2,1,0, r11,0,r21,s21):
```

$$\frac{q1\,q2\left|\frac{q1-2}{q1\,q2}\right|}{q1-2},\ \frac{q2\,q1^2\left|\frac{q1-2}{q1\,q2}\right|}{q1-2},0,0$$
$$0,0,\frac{q1\,q2\left|\frac{q1-2}{q1\,q2}\right|}{q1-2},0$$

$2_2^{1b})$ $a_2\neq 0$

```
> r11 := abs(q1-2)^(1/2)*abs(q1)^(-1/2)*abs(q2)^(-1/2):
  r21 := q2*r11*(q1-2)^(-1):
  s21 := q2*r11/(q1-2):
  zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r11,0,r21,s21):
```

$$\frac{q1\,q2\left|\frac{q1-2}{q1\,q2}\right|}{q1-2},\ \frac{q1\,q2\left|\frac{q1-2}{q1\,q2}\right|}{q1-2},0,0$$
$$\frac{(p2\,(q1-2)^2-q2^2)\left|\frac{q1-2}{q1\,q2}\right|}{(q1-2)\,q2},0,\ \frac{q2\left|\frac{q1-2}{q1\,q2}\right|}{q1-2},0$$

```
> u = 1/q1;
  v = (p2*(q1-2)^2-q2^2)/(q1*q2^2);
```

$$u=\frac{1}{q1}$$
$$v=\frac{p2\,(q1-2)^2-q2^2}{q2^2\,q1}$$

$2_2^{2})$ $b_2\neq 0$

$2_2^{2a})$ $a_2=0$

```
> zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r1,0,r2,s2):
```

$$q1\,r1\,r2,\ q1\,r1\,s2,0,0$$
$$\frac{(p2\,r1^2+q2\,r1\,r2-r2^2\,(q1-1))\,r1}{s2},\ -r1\,(-q2\,r1+r2\,(q1-2)),\ r1\,s2,0$$

```
> solve(p2*r1^2+q2*r1*r2-r2^2*(q1-1), r1);
```

$$\frac{\left(-q2+\sqrt{4\,p2\,q1+q2^2-4\,p2}\right)r2}{2\,p2},\ -\frac{\left(q2+\sqrt{4\,p2\,q1+q2^2-4\,p2}\right)r2}{2\,p2}$$

```
> r11 := -q2*(1+sqrt(4*p2*q1+q2^2-4*p2)*abs(q2)^(-1))*r2/(2*p2):
  zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r11,0,r2,s2):
```

$$-\frac{q1\,q2\left(|q2|+\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}\right)r2^2}{2\,|q2|\,p2},\ -\frac{q1\,q2\left(|q2|+\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}\right)r2\,s2}{2\,|q2|\,p2},0,0$$

$$\frac{q2\left(|q2|+\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}\right)(4\,p2\,q1+q2^2-4\,p2)\,r2^3\,(|q2|^2-q2^2)}{8\,p2^2\,|q2|^3\,s2},$$

$$\frac{q2\left(|q2|+\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}\right)\left((q2^2+2\,(q1-2)\,p2)\,|q2|+q2^2\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}\right)r2^2}{4\,p2^2\,|q2|^2},\ -\frac{q2\left(|q2|+\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}\right)r2\,s2}{2\,|q2|\,p2},0$$

```
> simplify((q2*(abs(q2)+sqrt((4*q1-4)*p2+q2^2))*((q2^2+(2*(q1-2))*p2)*abs(q2)+q2^2*sqrt((4*q1-4)*p2+
  q2^2))*r2^2/(4*abs(q2)^2*p2^2))/(-q2*(1+sqrt(4*p2*q1+q2^2-4*p2)*abs(q2)^(-1))/(2*p2)));
```

$$-\frac{\left((q2^2+(2\,q1-4)\,p2)\,|q2|+q2^2\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}\right)r2^2}{2\,|q2|\,p2}$$

```
> p2 = solve((q2^2+(2*q1-4)*p2)*q2+q2^2*sqrt((4*q1-4)*p2+q2^2), p2);
```

$$p2=\left(0,\ \frac{q2^2}{q1^2-4\,q1+4}\right)$$

```
> #simplify(subs(p2 = q2^2/(q1^2-4*q1+4), (q2^2+(2*q1-4)*p2)*abs(q2)+q2^2*sqrt((4*q1-4)*p2+q2^2)));
> r21 := (abs(q2)+sqrt((4*q1-4)*p2+q2^2))^(-1/2)*((q2^2+(2*(q1-2))*p2)*abs(q2)+q2^2*sqrt((4*q1-4)*p2+
  q2^2))^(-1/2)*2*p2*abs(q2)^(1/2):
  s21 := -2*p2/((abs(q2)+sqrt((4*q1-4)*p2+q2^2))*r21):
  r11 := -q2*(1+sqrt(4*p2*q1+q2^2-4*p2)*abs(q2)^(-1))*r21/(2*p2):
  zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r11,0,r21,s21):
```

$$-\frac{2\,p2\,q2\,q1}{(q2^2+2\,(q1-2)\,p2)\,|q2|+q2^2\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}},\ \frac{q2\,q1}{|q2|},0,0$$

$$\left(8\left(\left((q1-2)\,p2+\frac{q2^2}{2}\right)|q2|^2+\left((q1-2)\,p2+q2^2\right)|q2|\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}+2\,q2^2\left((q1-1)\,p2+\frac{q2^2}{4}\right)\right)q2\,p2\left((q1-1)\,p2+\frac{q2^2}{4}\right)(q2+|q2|)\,(q2-|q2|)\right)\Big/\left(\left(|q2|+\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}\right)|q2|\left(\left(q2^2+(2\,q1-4)\,p2\right)|q2|+q2^2\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}\right)^3\right),\ \frac{q2}{|q2|},\ \frac{q2}{|q2|},\ 0$$

```
> u1 := -2*p2*abs(q2)*q1/((q2^2+(2*(q1-2))*p2)*abs(q2)+q2^2*sqrt((4*q1-4)*p2+q2^2));
  v1 := q1;
```

$$u1 := -\frac{2\,p2\,|q2|\,q1}{\left(q2^2+2\,(q1-2)\,p2\right)|q2|+q2^2\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}}$$

$$v1 := q1$$

```
> simplify(v1-u1);
```

$$\frac{q1\left(2\,|q2|\,p2\,q1+|q2|\,q2^2+q2^2\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}-2\,|q2|\,p2\right)}{2\,|q2|\,p2\,q1+|q2|\,q2^2+q2^2\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}-4\,|q2|\,p2}$$

```
> simplify(v1-(2*u1-1)*u1^(-1));
```

$$\frac{\left((2\,q1^2-6\,q1+4)\,p2-q2^2\right)|q2|-q2^2\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}}{2\,|q2|\,p2\,q1}$$

```
> solve(((2*q1^2-6*q1+4)*p2-q2^2)-q2*sqrt((4*q1-4)*p2+q2^2), p2);
```

$$0,\ \frac{q2^2}{q1^2-4\,q1+4}$$

```
> simplify(subs(p2 = q2^2/(q1^2-4*q1+4), ((2*q1^2-6*q1+4)*p2-q2^2)-abs(q2)*sqrt((4*q1-4)*p2+q2^2)));
```

$$\frac{-(q1-2)\,|q2|\sqrt{\dfrac{q1^2\,q2^2}{(q1-2)^2}}+q1\,q2^2}{q1-2}$$

```
> simplify(v1-2*u1*(u1+1)^(-1));
```

$$\frac{\left(|q2|+\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}\right)q1\,q2^2}{\left(q2^2-4\,p2\right)|q2|+q2^2\sqrt{(4\,q1-4)\,p2+q2^2}}$$

Сведение к системам из II части списка.

Результат произвольной замены в исходной системе:

```
> M := zamproc(0,q1,0,0,p2,q2,1,0, r1,s1,r2,s2):
```

$$-\frac{r1\left(p2\,r1^2\,s1-r2\,(q1\,s2-q2\,s1)\,r1+r2^2\,s1\right)}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{\left(-3\,p2\,s1^2+q1\,s2^2-q2\,s1\,s2\right)r1^2+2\,s1\,r2\left(-q2\,s1+s2\,(q1-1)\right)r1-s1^2\,r2^2}{r1\,s2-s1\,r2},$$

$$-\frac{3\,s1\left(\left(p2\,r1+\dfrac{q2\,r2}{3}\right)s1^2-\dfrac{s2\left(-2\,q2\,r1+r2\,(q1-2)\right)s1}{3}-\dfrac{2\left(q1-\frac{1}{2}\right)s2^2\,r1}{3}\right)}{r1\,s2-s1\,r2},\ -\frac{s1^2\left(p2\,s1^2+q2\,s1\,s2-s2^2\,(q1-1)\right)}{r1\,s2-s1\,r2}$$

$$\frac{\left(p2\,r1^2+q2\,r1\,r2-r2^2\,(q1-1)\right)r1^2}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{3\,r1\left(\left(p2\,s1+\dfrac{q2\,s2}{3}\right)r1^2-\dfrac{r2\left(-2\,q2\,s1+s2\,(q1-2)\right)r1}{3}-\dfrac{2\left(q1-\frac{1}{2}\right)s1\,r2^2}{3}\right)}{r1\,s2-s1\,r2},$$

$$\frac{\left(3\,p2\,s1^2+2\,q2\,s1\,s2+s2^2\right)r1^2-2\,s1\left(-\dfrac{q2\,s1}{2}+s2\,(q1-1)\right)r2\,r1-q1\,s1^2\,r2^2}{r1\,s2-s1\,r2},\ \frac{s1\left(p2\,r1\,s1^2-s2\,(q1\,r2-q2\,r1)\,s1+r1\,s2^2\right)}{r1\,s2-s1\,r2}$$

$NSF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {q1,p2,q2,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{p2=\frac{s2^2}{s1^2},\ q1=q1,\ q2=\frac{s2\,(q1-2)}{s1},\ r1=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=s2\right\},\ \left\{p2=\frac{r2^2}{r1^2},\ q1=q1,\ q2=\frac{r2\,(q1-2)}{r1},\ r1=r1,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2\right\},\ \left\{p2=\frac{s2^2}{s1^2},\ q1=2,\ q2=0,\ r1=r1,\ r2=-\frac{r1\,s2}{s1},\ s1=s1,\ s2=s2\right\}$$

```
> q11 := 2:
  q21 := 0:
  p21 := s2^2/s1^2:
  r21 := -r1*s2/s1:
  zamproc(0,q11,0,0,p21,q21,1,0, r1,s1,r21,s2):
```

$$-\frac{2\,s2\,r1^2}{s1},\ -2\,r1\,s2,\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ 2\,r1\,s2,\ 2\,s1\,s2$$

$NSF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {p2,q1,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{p2=\frac{q2^2}{4}, q1=0, r1=-\frac{2\,r2}{q2}, r2=r2, s1=0, s2=s2\right\}, \left\{p2=4\,q2^2, q1=\frac{3}{2}, r1=-\frac{r2}{2\,q2}, r2=r2, s1=\frac{s2}{4\,q2}, s2=s2\right\}$$

```
> q11 := 3/2:
  p21 := 4*q2^2:
  r21 := -2*q2*r1:
  s21 := 4*q2*s1:
  zamproc(0,q11,0,0,p21,q2,1,0, r1,s1,r21,s21):
```

$$-3\,q2\,r1^2, 0, 3\,s1^2\,q2, 0$$
$$0, 0, 6\,r1\,q2\,s1, 6\,s1^2\,q2$$

```
> q11 := 3/2:
  p21 := 4*q2^2:
  s11 := 1/sqrt(6*abs(q2)):
  r11 := s11:
  r21 := -2*q2*r11:
  s21 := 4*q2*s11:
  zamproc(0,q11,0,0,p21,q2,1,0, r11,s11,r21,s21):
```

$$-\frac{q2}{2\,|q2|}, 0, \frac{q2}{2\,|q2|}, 0$$
$$0, 0, \frac{q2}{|q2|}, \frac{q2}{|q2|}$$

$NSF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {q1,p2,r1,s1,r2,s2});
```

$$\left\{p2=\frac{4\,q2^2}{9}, q1=\frac{1}{2}, r1=-\frac{3\,r2}{4\,q2}, r2=r2, s1=s1, s2=\frac{2\,q2\,s1}{3}\right\}$$

```
> p21 := 4*q2^2*(1/9):
  q11 := 1/2:
  r11 := -3*r2/(4*q2):
  s21 := 2*q2*s1*(1/3):
  zamproc(0,q11,0,0,p21,q2,1,0, r11,s1,r2,s21):
```

$$-\frac{3\,r2^2}{8\,q2}, 0, 0, \frac{8\,q2^2\,s1^3}{9\,r2}$$
$$0, -\frac{9\,r2^2}{16\,q2}, 0, q2\,s1^2$$

```
> p21 := 4*q2^2*(1/9):
  q11 := 1/2:
  s11 := 1/sqrt(abs(q2)):
  r21 := -4*q2/(3*sqrt(abs(q2))):
  r11 := -3*r21/(4*q2);
  s21 := 2*q2*s11*(1/3):
  zamproc(0,q11,0,0,p21,q2,1,0, r11,s11,r21,s21):
```

$$r11 := \frac{1}{\sqrt{|q2|}}$$
$$-\frac{2\,q2}{3\,|q2|}, 0, 0, -\frac{2\,q2}{3\,|q2|}$$
$$0, -\frac{q2}{|q2|}, 0, \frac{q2}{|q2|}$$

4.6. Доказательство леммы 2.3.

```
> restart; read("newlib.m"); with(mylib): with(LinearAlgebra):
```

Результат замены с $s_1=0$ в исходной системе:

```
> zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r2,s2):
```

$$p1\,r1^2+q1\,r1\,r2+r2^2\,t1,\ s2\,(q1\,r1+2\,r2\,t1),\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$-\frac{\left((p1-q2)\,r1^2+r2\,(q1-t2)\,r1+r2^2\,t1\right)r2}{s2},\ q2\,r1^2-r2\,(q1-2\,t2)\,r1-2\,r2^2\,t1,\ s2\,(r1\,t2-r2\,t1),\ 0$$

1) $c_2=0$

```
> r21 := r1*t2/t1:
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(p1\,t1+q1\,t2+t2^2)}{t1},\ r1\,s2\,(q1+2\,t2),\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$-\frac{r1^3\left((p1-q2)\,t1+q1\,t2\right)t2}{t1^2\,s2},\ -\frac{r1^2\,(q1\,t2-q2\,t1)}{t1},\ 0,\ 0$$

1_1) $b_1=0 \Leftrightarrow q_1=-2\,t_2$

```
> q11 := -2*t2:
  zamproc(p1,q11,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(p1\,t1-t2^2)}{t1},\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$-\frac{\left((p1-q2)\,t1-2\,t2^2\right)r1^3\,t2}{t1^2\,s2},\ \frac{r1^2\,(q2\,t1+2\,t2^2)}{t1},\ 0,\ 0$$

1_1^1) $a_1=0$

```
> p11 := t2^2/t1:
  zamproc(p11,q11,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$0,\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$\frac{r1^3\,t2\,(q2\,t1+t2^2)}{t1^2\,s2},\ \frac{r1^2\,(q2\,t1+2\,t2^2)}{t1},\ 0,\ 0$$

1_1^{1a}) $b_2=0$

```
> q21 := -2*t2^2/t1:
  zamproc(p11,q11,t1,0,0,q21,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$0,\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$-\frac{r1^3\,t2^3}{t1^2\,s2},\ 0,\ 0,\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := -t1/(t2*sqrt(abs(t1))):
  r22 := r11*t2/t1:
  zamproc(p11,q11,t1,0,0,q21,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$0,\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$\frac{t1}{|t1|},\ 0,\ 0,\ 0$$

1_1^{1b}) $b_2\neq 0$

```
> r21 := r1*t2/t1:
  zamproc(p11,q11,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$0,\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$\frac{r1^3\,t2\,(q2\,t1+t2^2)}{t1^2\,s2},\ \frac{r1^2\,(q2\,t1+2\,t2^2)}{t1},\ 0,\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := t1*t2^(-1/3)*(q2*t1+t2^2)^(-1/3)/sqrt(abs(t1)):
  r22 := r11*t2/t1:
  zamproc(p11,q11,t1,0,0,q2,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$0,\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$\frac{t1}{|t1|},\ \frac{t1\,(q2\,t1+2\,t2^2)}{t2^{2/3}\,(q2\,t1+t2^2)^{2/3}\,|t1|},\ 0,\ 0$$

```
> u = (q2*t1+2*t2^2)/(t2^(2/3)*(q2*t1+t2^2)^(2/3));
```

$$u=\frac{q2\,t1+2\,t2^2}{t2^{2/3}\,(q2\,t1+t2^2)^{2/3}}$$

$1_1^2)\ b_2 = 0$

```
> q21 := -2*t2^2/t1:
  zamproc(p1,q11,t1,0,0,q21,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(p1\,t1 - t2^2)}{t1},\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$
$$-\frac{r1^3\,t2\,p1}{t1\,s2},\ 0,\ 0,\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := -abs(t1)^(1/6)*(t2*p1)^(-1/3):
  r22 := r11*t2/t1:
  zamproc(p1,q11,t1,0,0,q21,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$\frac{|t1|^{1\setminus 3}\,(p1\,t1 - t2^2)\,(t2\,p1)^{1\setminus 3}}{t2\,p1\,t1},\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$
$$\frac{|t1|}{t1},\ 0,\ 0,\ 0$$

```
> u = (p1*t1-t2^2)*(t2*p1)^(1/3)/(t2*p1*t1^(2/3));
```

$$u = \frac{(p1\,t1 - t2^2)\,(t2\,p1)^{1\setminus 3}}{t2\,p1\,t1^{2\setminus 3}}$$

$1_1^3)\ \ a_2 = 0$

$1_1^{3a})\ t_2 = 0$

```
> zamproc(p1,0,t1,0,0,q2,0,0, r1,0,0,s2):
```

$$p1\,r1^2,\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$
$$0,\ q2\,r1^2,\ 0,\ 0$$

```
> r11 := 1/sqrt(abs(q2)):
  s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  zamproc(p1,0,t1,0,0,q2,0,0, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{p1}{|q2|},\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$
$$0,\ \frac{q2}{|q2|},\ 0,\ 0$$

```
> u = p1/q2;
```

$$u = \frac{p1}{q2}$$

$1_1^{3b})\ t_2 \neq 0,\ (p1 - q2)\,t1 - 2\,t2^2 = 0$

```
> q21 := (p1*t1-2*t2^2)/t1:
  zamproc(p1,q11,t1,0,0,q21,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(p1\,t1 - t2^2)}{t1},\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$
$$0,\ r1^2\,p1,\ 0,\ 0$$

```
> r11 := 1/sqrt(abs(p1)):
  s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r22 := r11*t2/t1:
  zamproc(p1,q11,t1,0,0,q21,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$\frac{p1\,t1 - t2^2}{|p1|\,t1},\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$
$$0,\ \frac{p1}{|p1|},\ 0,\ 0$$

```
> u = (p1*t1-t2^2)/(p1*t1);
```

$$u = \frac{p1\,t1 - t2^2}{p1\,t1}$$

$1_1^4)\ \ a_1, a_2, b_2 \neq 0$

```
> zamproc(p1,q11,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(p1\,t1 - t2^2)}{t1},\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$
$$-\frac{((p1 - q2)\,t1 - 2\,t2^2)\,r1^3\,t2}{t1^2\,s2},\ \frac{r1^2\,(q2\,t1 + 2\,t2^2)}{t1},\ 0,\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := -t1*((p1-q2)*t1-2*t2^2)^(-1/3)*t2^(-1/3)/sqrt(abs(t1)):
  r22 := r11*t2/t1:
  zamproc(p1,q11,t1,0,0,q2,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$\frac{t1\,(p1\,t1-t2^2)}{|t1|\,\left((p1-q2)\,t1-2\,t2^2\right)^{2/3}\,t2^{2/3}},\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$\frac{t1}{|t1|},\ \frac{t1\,(q2\,t1+2\,t2^2)}{\left((p1-q2)\,t1-2\,t2^2\right)^{2/3}\,t2^{2/3}\,|t1|},\ 0,\ 0$$

```
> u = (q2*t1+2*t2^2)/(((p1-q2)*t1-2*t2^2)^(2/3)*t2^(2/3));
  v = (p1*t1-t2^2)/(((p1-q2)*t1-2*t2^2)^(2/3)*t2^(2/3));
```

$$u=\frac{q2\,t1+2\,t2^2}{\left((p1-q2)\,t1-2\,t2^2\right)^{2/3}\,t2^{2/3}}$$

$$v=\frac{p1\,t1-t2^2}{\left((p1-q2)\,t1-2\,t2^2\right)^{2/3}\,t2^{2/3}}$$

1_2) $b_1\neq 0$

1_2^1) $b_2=0$

```
> q21 := q1*t2/t1:
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(p1\,t1+q1\,t2+t2^2)}{t1},\ r1\,s2\,(q1+2\,t2),\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$-\frac{r1^3\,t2\,p1}{t1\,s2},\ 0,\ 0,\ 0$$

1_2^{1a}) $a_1=0$

```
> p11 := -(q1+t2)*t2/t1:
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$0,\ r1\,s2\,(q1+2\,t2),\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$\frac{r1^3\,t2^2\,(q1+t2)}{t1^2\,s2},\ 0,\ 0,\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := t1*(q1+t2)^(-1/3)*t2^(-2/3)/sqrt(abs(t1)):
  r22 := r11*t2/t1:
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$0,\ \frac{t1\,(q1+2\,t2)}{(q1+t2)^{1/3}\,t2^{2/3}\,|t1|},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$\frac{t1}{|t1|},\ 0,\ 0,\ 0$$

```
> u = (q1+2*t2)/((q1+t2)^(1/3)*t2^(2/3));
```

$$u=\frac{q1+2\,t2}{(q1+t2)^{1/3}\,t2^{2/3}}$$

1_2^{1b}) $a_1\neq 0$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := -abs(t1)^(1/6)*(t2*p1)^(-1/3): r22 := r11*t2/t1:
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$\frac{|t1|^{1/3}\,(p1\,t1+q1\,t2+t2^2)\,(t2\,p1)^{1/3}}{t2\,p1\,t1},\ -\frac{q1+2\,t2}{|t1|^{1/3}\,(t2\,p1)^{1/3}},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$\frac{|t1|}{t1},\ 0,\ 0,\ 0$$

```
> u1 := (p1*t1+q1*t2+t2^2)*(t2*p1)^(1/3)/(t2*p1*t1^(2/3));
  v1 := -(q1+2*t2)/(t1*t2*p1)^(1/3);
```

$$u1:=\frac{(p1\,t1+q1\,t2+t2^2)\,(t2\,p1)^{1/3}}{t2\,p1\,t1^{2/3}}$$

$$v1:=-\frac{q1+2\,t2}{(t2\,p1\,t1)^{1/3}}$$

```
> simplify(v1^2-4*u1);
  simplify((q1+2*t2)^2-4*(p1*t1+q1*t2+t2^2));
```

$$\frac{-4\,(t2\,p1)^{1/3}\,(p1\,t1+q1\,t2+t2^2)\,(t2\,p1\,t1)^{2/3}+p1\,t2\,t1^{2/3}\,(q1+2\,t2)^2}{(t2\,p1\,t1)^{2/3}\,t1^{2/3}\,t2\,p1}$$

$$-4\,p1\,t1+q1^2$$

```
> simplify(v1^3-4*u1*v1-8);
  factor(simplify((q1+2*t2)^3+8*t1*p1*t2-4*(q1+2*t2)*(p1*t1+q1*t2+t2^2)));
```

$$-\frac{8\left(\left(\frac{(q1+2\,t2)^3\,t1^{2/3}}{8}+t1^{5/3}\,p1\,t2\right)(t2\,p1\,t1)^{1/3}-\frac{(t2\,p1)^{1/3}\,t1\,(q1+2\,t2)\,(p1\,t1+q1\,t2+t2^2)}{2}\right)}{(t2\,p1\,t1)^{1/3}\,t1^{5/3}\,t2\,p1}$$

$$-q1\,(4\,p1\,t1-q1^2-2\,q1\,t2)$$

$1_2^2)\ a_1 = 0$

```
> p11 := -(q1+t2)*t2/t1:
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$0,\ r1\ s2\ (q1+2\ t2),\ t1\ s2^2,\ 0$$
$$\frac{r1^3\ t2\ (q2\ t1+t2^2)}{t1^2\ s2},\ -\frac{r1^2\ (q1\ t2-q2\ t1)}{t1},\ 0,\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := t1/(sqrt(abs(t1))*(q1+2*t2)):
  r22 := r11*t2/t1:
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$0,\ \frac{t1}{|t1|},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$
$$\frac{t1\ t2\ (q2\ t1+t2^2)}{|t1|\ (q1+2\ t2)^3},\ -\frac{t1\ (q1\ t2-q2\ t1)}{|t1|\ (q1+2\ t2)^2},\ 0,\ 0$$

```
> u = -(q1*t2-q2*t1)/(q1+2*t2)^2;
  v = t2*(q2*t1+t2^2)/(q1+2*t2)^3;
```

$$u = -\frac{q1\ t2-q2\ t1}{(q1+2\ t2)^2}$$
$$v = \frac{t2\ (q2\ t1+t2^2)}{(q1+2\ t2)^3}$$

$1_2^3)\ a_2 = 0$

$1_2^{3a})\ t_2 = 0$

```
> zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,0,0, r1,0,0,s2):
```

$$p1\ r1^2,\ q1\ r1\ s2,\ t1\ s2^2,\ 0$$
$$0,\ q2\ r1^2,\ 0,\ 0$$

```
> r11 := 1/sqrt(abs(q2)):
  s21 := q2/(q1*sqrt(abs(q2))):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,0,0, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{p1}{|q2|},\ \frac{q2}{|q2|},\ \frac{t1\ q2^2}{|q2|\ q1^2},\ 0$$
$$0,\ \frac{q2}{|q2|},\ 0,\ 0$$

```
> u = p1/q2;
  v = t1*q2/q1^2;
```

$$u = \frac{p1}{q2}$$
$$v = \frac{t1\ q2}{q1^2}$$

$1_2^{3b})\ t_2 \neq 0$

```
> p11 := (q2*t1-q1*t2)/t1:
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\ (q2\ t1+t2^2)}{t1},\ r1\ s2\ (q1+2\ t2),\ t1\ s2^2,\ 0$$
$$0,\ -\frac{r1^2\ (q1\ t2-q2\ t1)}{t1},\ 0,\ 0$$

```
> r11 := sqrt(abs(t1))*abs(q2*t1-q1*t2)^(-1/2):
  r22 := r11*t2/t1:
  s21 := (q2*t1-q1*t2)*sqrt(abs(t1))/(t1*(q1+2*t2)*abs(q2*t1-q1*t2)^(1/2)):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$\frac{(q2\ t1+t2^2)\left|\frac{t1}{q1\ t2-q2\ t1}\right|}{t1},\ -\frac{(q1\ t2-q2\ t1)\left|\frac{t1}{q1\ t2-q2\ t1}\right|}{t1},\ \frac{(q1\ t2-q2\ t1)^2\left|\frac{t1}{q1\ t2-q2\ t1}\right|}{t1\ (q1+2\ t2)^2},\ 0$$
$$0,\ -\frac{(q1\ t2-q2\ t1)\left|\frac{t1}{q1\ t2-q2\ t1}\right|}{t1},\ 0,\ 0$$

```
> u = (q2*t1+t2^2)/(q2*t1-q1*t2);
  v = (q2*t1-q1*t2)/(q1+2*t2)^2;
```

$$u = \frac{q2\ t1+t2^2}{-q1\ t2+q2\ t1}$$
$$v = \frac{-q1\ t2+q2\ t1}{(q1+2\ t2)^2}$$

2) $c_2 \neq 0,\ b_1 = 0$

```
> r21 := -q1*r1/(2*t1):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(4\,p1\,t1 - q1^2)}{4\,t1},\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$\frac{r1^3\left(-\frac{q1^2}{4} + \frac{q1\,t2}{2} + (p1 - q2)\,t1\right)q1}{2\,t1^2\,s2},\ -\frac{r1^2\,(q1\,t2 - q2\,t1)}{t1},\ \frac{r1\,s2\,(q1 + 2\,t2)}{2},\ 0$$

2_1) $b_2 = 0$

```
> q21 := q1*t2/t1:
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(4\,p1\,t1 - q1^2)}{4\,t1},\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$\frac{q1\,r1^3\,(4\,p1\,t1 - q1^2 - 2\,q1\,t2)}{8\,t1^2\,s2},\ 0,\ \frac{r1\,s2\,(q1 + 2\,t2)}{2},\ 0$$

2_1^1) $a_1 = 0$

```
> p11 := q1^2/(4*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$0,\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$-\frac{r1^3\,t2\,q1^2}{4\,t1^2\,s2},\ 0,\ \frac{r1\,s2\,(q1 + 2\,t2)}{2},\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := -t1*4^(1/3)/(q1^(2/3)*t2^(1/3)*sqrt(abs(t1))):
  r22 := -q1*r11/(2*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$0,\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$\frac{t1}{|t1|},\ 0,\ -\frac{t1\,2^{2\backslash 3}\,(q1 + 2\,t2)}{2\,q1^{2\backslash 3}\,t2^{1\backslash 3}\,|t1|},\ 0$$

```
> u = -2^(2/3)*(q1+2*t2)/(2*q1^(2/3)*t2^(1/3));
```

$$u = -\frac{2^{2\backslash 3}\,(q1 + 2\,t2)}{2\,q1^{2\backslash 3}\,t2^{1\backslash 3}}$$

2_1^2) $a_2 = 0$

2_1^{2a}) $q_1 = 0$

```
> zamproc(p1,0,t1,0,0,0,t2,0, r1,0,0,s2):
```

$$p1\,r1^2,\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$0,\ 0,\ r1\,t2\,s2,\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := t1/(t2*sqrt(abs(t1))):
  zamproc(p1,0,t1,0,0,0,t2,0, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{p1\,t1^2}{|t1|\,t2^2},\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

```
> u = p1*t1/t2^2;
```

$$u = \frac{p1\,t1}{t2^2}$$

2_1^{2b}) $q_1 \neq 0$

```
> p11 := q1*(q1+2*t2)/(4*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{q1\,r1^2\,t2}{2\,t1},\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{r1\,s2\,(q1 + 2\,t2)}{2},\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := 2*t1/((q1+2*t2)*sqrt(abs(t1))):
  r22 := -q1*r11/(2*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$\frac{2\,t2\,t1\,q1}{|t1|\,(q1 + 2\,t2)^2},\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

```
> u = 2*t2*q1/(q1+2*t2)^2;
```

$$u = \frac{2\,t2\,q1}{(q1+2\,t2)^2}$$

2_1^3) $c_2, a_1, a_2 \neq 0$

```
> zamproc(p1,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(4\,p1\,t1-q1^2)}{4\,t1},\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$\frac{q1\,r1^3\,(4\,p1\,t1-q1^2-2\,q1\,t2)}{8\,t1^2\,s2},\ 0,\ \frac{r1\,s2\,(q1+2\,t2)}{2},\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := 2*t1/(sqrt(abs(t1))*q1^(1/3)*(4*p1*t1-q1^2-2*q1*t2)^(1/3)):
  r22 := -q1*r11/(2*t1):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$\frac{t1\,(4\,p1\,t1-q1^2)}{|t1|\,q1^{2\backslash 3}\,(4\,p1\,t1-q1^2-2\,q1\,t2)^{2\backslash 3}},\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$\frac{t1}{|t1|},\ 0,\ \frac{t1\,(q1+2\,t2)}{|t1|\,q1^{1\backslash 3}\,(4\,p1\,t1-q1^2-2\,q1\,t2)^{1\backslash 3}},\ 0$$

```
> u1 := (q1+2*t2)/(q1^(1/3)*(4*p1*t1-q1^2-2*q1*t2)^(1/3));
  v1 := (4*p1*t1-q1^2)/(q1^(2/3)*(4*p1*t1-q1^2-2*q1*t2)^(2/3));
```

$$u1 := \frac{q1+2\,t2}{q1^{1\backslash 3}\,(4\,p1\,t1-q1^2-2\,q1\,t2)^{1\backslash 3}}$$

$$v1 := \frac{4\,p1\,t1-q1^2}{q1^{2\backslash 3}\,(4\,p1\,t1-q1^2-2\,q1\,t2)^{2\backslash 3}}$$

```
> simplify(v1+u1^2);
```

$$\frac{4\,(p1\,t1+q1\,t2+t2^2)}{q1^{2\backslash 3}\,(4\,p1\,t1-q1^2-2\,q1\,t2)^{2\backslash 3}}$$

Сведение NSF_{20}^4 к предшествующим.

```
> zamproc(v,0,1,0,1,0,u,0, r1,0,u*r1,s2):
```

$$r1^2\,(u^2+v),\ 2\,u\,r1\,s2,\ s2^2,\ 0$$

$$-\frac{r1^3\,(u\,v-1)}{s2},\ 0,\ 0,\ 0$$

$v = -u^2$

```
> zamproc(-u^2,0,1,0,1,0,u,0, r1,0,u*r1,s2):
```

$$0,\ 2\,u\,r1\,s2,\ s2^2,\ 0$$

$$\frac{r1^3\,(u+1)\,(u^2-u+1)}{s2},\ 0,\ 0,\ 0$$

```
> s21 := 1:
  r11 := ((u+1)*(u^2-u+1))^(-1/3):
  zamproc(-u^2,0,1,0,1,0,u,0, r11,0,u*r11,s21):
```

$$0,\ \frac{2\,u}{((u+1)\,(u^2-u+1))^{1\backslash 3}},\ 1,\ 0$$

$$1,\ 0,\ 0,\ 0$$

$v \neq -u^2$

```
> s21 := 1:
  r11 := -(u*v-1)^(-1/3):
  zamproc(v,0,1,0,1,0,u,0, r11,0,u*r11,s21):
```

$$\frac{u^2+v}{(u\,v-1)^{2\backslash 3}},\ -\frac{2\,u}{(u\,v-1)^{1\backslash 3}},\ 1,\ 0$$

$$1,\ 0,\ 0,\ 0$$

2_2) $a_1 = 0$

```
> p11 := q1^2/(4*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$0,\ 0,\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$\frac{r1^3\,q1\,(q1\,t2-2\,q2\,t1)}{4\,t1^2\,s2},\ -\frac{r1^2\,(q1\,t2-q2\,t1)}{t1},\ \frac{r1\,s2\,(q1+2\,t2)}{2},\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := 4^(1/3)*t1/(sqrt(abs(t1))*q1^(1/3)*(q1*t2-2*q2*t1)^(1/3)):
```

```
  r22 := -q1*r11/(2*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$0,\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$\frac{t1}{|t1|},\ -\frac{2\ t1\ (q1\ t2-q2\ t1)\ 2^{1\backslash 3}}{|t1|\ q1^{2\backslash 3}\ (q1\ t2-2\ q2\ t1)^{2\backslash 3}},\ \frac{2^{2\backslash 3}\ t1\ (q1+2\ t2)}{2\ |t1|\ q1^{1\backslash 3}\ (q1\ t2-2\ q2\ t1)^{1\backslash 3}},\ 0$$

```
> u = 2^(2/3)*(q1+2*t2)/(2*q1^(1/3)*(q1*t2-2*q2*t1)^(1/3));
  v = -2*(q1*t2-q2*t1)*2^(1/3)/(q1^(2/3)*(q1*t2-2*q2*t1)^(2/3));
```

$$u=\frac{2^{2\backslash 3}\ (q1+2\ t2)}{2\ q1^{1\backslash 3}\ (q1\ t2-2\ q2\ t1)^{1\backslash 3}}$$

$$v=-\frac{2\ (q1\ t2-q2\ t1)\ 2^{1\backslash 3}}{q1^{2\backslash 3}\ (q1\ t2-2\ q2\ t1)^{2\backslash 3}}$$

2_3) $a_2=0$

2_3^1) $q_1=0$

```
> zamproc(p1,0,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,0,s2):
```

$$p1\ r1^2,\ 0,\ t1\ s2^2,\ 0$$

$$0,\ q2\ r1^2,\ t2\ r1\ s2,\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := t1/(t2*sqrt(abs(t1))):
  zamproc(p1,0,t1,0,0,q2,t2,0, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{p1\ t1^2}{|t1|\ t2^2},\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$0,\ \frac{q2\ t1^2}{t2^2\ |t1|},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

```
> u = q2*t1/t2^2;
  v = p1*t1/t2^2;
```

$$u=\frac{q2\ t1}{t2^2}$$

$$v=\frac{p1\ t1}{t2^2}$$

2_3^2) $q_1\neq 0$

```
> p11 := q1*(q1-2*t2)*(4*t1)^(-1)+q2:
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$-\frac{r1^2\ (q1\ t2-2\ q2\ t1)}{2\ t1},\ 0,\ t1\ s2^2,\ 0$$

$$0,\ -\frac{r1^2\ (q1\ t2-q2\ t1)}{t1},\ \frac{r1\ s2\ (q1+2\ t2)}{2},\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := 2*t1/(sqrt(abs(t1))*(q1+2*t2)):
  r22 := -q1*r11/(2*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r11,0,r22,s21):
```

$$-\frac{2\ (q1\ t2-2\ q2\ t1)\ t1}{|t1|\ (q1+2\ t2)^2},\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$0,\ -\frac{4\ t1\ (q1\ t2-q2\ t1)}{|t1|\ (q1+2\ t2)^2},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

```
> u = -4*(q1*t2-q2*t1)/(q1+2*t2)^2;
  v = -(2*(q1*t2-2*q2*t1))/(q1+2*t2)^2;
```

$$u=-\frac{4\ (q1\ t2-q2\ t1)}{(q1+2\ t2)^2}$$

$$v=-\frac{2\ (q1\ t2-2\ q2\ t1)}{(q1+2\ t2)^2}$$

3) $a_1=0$

```
> solve(p1*r1^2+q1*r1*r2+r2^2*t1, r2);
```

$$\frac{\left(-q1+\sqrt{-4\ p1\ t1+q1^2}\right)\ r1}{2\ t1},\ -\frac{\left(q1+\sqrt{-4\ p1\ t1+q1^2}\right)\ r1}{2\ t1}$$

```
> r21 := (-q1+sqrt(-4*p1*t1+q1^2))*r1/(2*t1):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$0,\ r1\ s2\ \sqrt{-4\ p1\ t1+q1^2},\ t1\ s2^2,\ 0$$

$$\frac{r1^3\left(-q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)\left(t2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}-q1\,t2+2\,q2\,t1\right)}{4\,t1^2\,s2},$$

$$\frac{r1^2\left(q1\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+2\,t2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+4\,p1\,t1-q1^2-2\,q1\,t2+2\,q2\,t1\right)}{2\,t1},\ -\frac{r1\,s2\left(-2\,t2-q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)}{2},\ 0$$

```
> r22 := (-q1-sqrt(-4*p1*t1+q1^2))*r1/(2*t1):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r22,s2):
```

$$0,\ -r1\,s2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2},\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$\frac{r1^3\left(q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)\left(t2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+q1\,t2-2\,q2\,t1\right)}{4\,t1^2\,s2},$$

$$-\frac{r1^2\left(-4\,p1\,t1+q1^2+q1\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+2\,t2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+2\,q1\,t2-2\,q2\,t1\right)}{2\,t1},\ \frac{r1\,s2\left(2\,t2+q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)}{2},\ 0$$

3_1) $b_2=0$

```
> q21 := (q1^2+2*q1*t2-4*p1*t1-(q1+2*t2)*sqrt(-4*p1*t1+q1^2))/(2*t1):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$0,\ r1\,s2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2},\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$-\frac{r1^3\left(-q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)\left(q1\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+t2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+4\,p1\,t1-q1^2-q1\,t2\right)}{4\,t1^2\,s2},\ 0,\ -\frac{r1\,s2\left(-2\,t2-q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)}{2},\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := t1/(sqrt(abs(t1))*sqrt(-4*p1*t1+q1^2)):
  r21 := (-q1+sqrt(-4*p1*t1+q1^2))*r11/(2*t1):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q21,t2,0, r11,0,r21,s21):
```

$$0,\ \frac{t1}{|t1|},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$-\frac{t1\left(-q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)\left(q1\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+t2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+4\,p1\,t1-q1^2-q1\,t2\right)}{4\,|t1|\left(-4\,p1\,t1+q1^2\right)^{3/2}},\ 0,\ -\frac{\left(-2\,t2-q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)t1}{2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\,|t1|},\ 0$$

```
> u = -(-q1-2*t2+sqrt(-4*p1*t1+q1^2))/(2*sqrt(-4*p1*t1+q1^2));
  v = -(-q1+sqrt(-4*p1*t1+q1^2))*(q1*sqrt(-4*p1*t1+q1^2)+t2*sqrt(-4*p1*t1+q1^2)+4*p1*t1-q1^2-q1*t2)/(4*
  (-4*p1*t1+q1^2)^(3/2));
```

$$u=-\frac{-2\,t2-q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}}{2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}}$$

$$v=-\frac{\left(-q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)\left(q1\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+t2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+4\,p1\,t1-q1^2-q1\,t2\right)}{4\left(-4\,p1\,t1+q1^2\right)^{3/2}}$$

```
> q22 := (q1^2+2*q1*t2-4*p1*t1+(q1+2*t2)*sqrt(-4*p1*t1+q1^2))/(2*t1):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q22,t2,0, r1,0,r22,s2):
```

$$0,\ -r1\,s2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2},\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$-\frac{r1^3\left(q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)\left(q1\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+t2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}-4\,p1\,t1+q1^2+q1\,t2\right)}{4\,t1^2\,s2},\ 0,\ \frac{r1\,s2\left(2\,t2+q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)}{2},\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r12 := -t1/(sqrt(abs(t1))*sqrt(-4*p1*t1+q1^2)):
  r22 := (-q1-sqrt(-4*p1*t1+q1^2))*r12/(2*t1):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q22,t2,0, r12,0,r22,s21):
```

$$0,\ \frac{t1}{|t1|},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$\frac{t1\left(q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)\left(q1\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+t2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}-4\,p1\,t1+q1^2+q1\,t2\right)}{4\,|t1|\left(-4\,p1\,t1+q1^2\right)^{3/2}},\ 0,\ -\frac{t1\left(2\,t2+q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)}{2\,|t1|\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}},\ 0$$

```
> u = -(q1+2*t2+sqrt(-4*p1*t1+q1^2))/(2*sqrt(-4*p1*t1+q1^2));
  v = (q1+sqrt(-4*p1*t1+q1^2))*(q1*sqrt(-4*p1*t1+q1^2)+t2*sqrt(-4*p1*t1+q1^2)-4*p1*t1+q1^2+q1*t2)/(4*
  (-4*p1*t1+q1^2)^(3/2));
```

$$u=-\frac{2\,t2+q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}}{2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}}$$

$$v=\frac{\left(q1+\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}\right)\left(q1\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}+t2\sqrt{-4\,p1\,t1+q1^2}-4\,p1\,t1+q1^2+q1\,t2\right)}{4\left(-4\,p1\,t1+q1^2\right)^{3/2}}$$

4) $b_2 = 0$

4_1) $q_2 = 0$

4_1^1) $r_2 = 0$

```
> zamproc(p1,q1,t1,0,0,0,t2,0, r1,0,0,s2):
```

$$r1^2\, p1,\ q1\, r1\, s2,\ t1\, s2^2,\ 0$$
$$0,\ 0,\ t2\, r1\, s2,\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)): r11 := t1/(t2*sqrt(abs(t1))):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,0,t2,0, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{p1\, t1^2}{|t1|\, t2^2},\ \frac{q1\, t1}{t2\, |t1|},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$
$$0,\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

```
> u = p1*t1/t2^2; v = q1/t2;
```

$$u = \frac{p1\, t1}{t2^2}$$
$$v = \frac{q1}{t2}$$

4_1^2) $r_2 \neq 0$

```
> r21 := (2*t2-q1)*r1*(2*t1)^(-1):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,0,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + 4\,t2^2)}{4\,t1},\ 2\,t2\,r1\,s2,\ t1\,s2^2,\ 0$$
$$\frac{(q1 - 2\,t2)\,r1^3\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + 2\,q1\,t2)}{8\,t1^2\,s2},\ 0,\ \frac{q1\,r1\,s2}{2},\ 0$$

```
> p11 := q1*(q1-2*t2)/(4*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,0,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$-\frac{(q1 - 2\,t2)\,r1^2\,t2}{2\,t1},\ 2\,t2\,r1\,s2,\ t1\,s2^2,\ 0$$
$$0,\ 0,\ \frac{q1\,r1\,s2}{2},\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := 2*t1/(sqrt(abs(t1))*q1):
  r21 := (2*t2-q1)*r11*(2*t1)^(-1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,0,t2,0, r11,0,r21,s21):
```

$$-\frac{2\,(q1 - 2\,t2)\,t1\,t2}{|t1|\,q1^2},\ \frac{4\,t1\,t2}{|t1|\,q1},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$
$$0,\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

```
> u = -(2*(q1-2*t2))*t2/q1^2; v = 4*t2/q1;
```

$$u = -\frac{2\,(q1 - 2\,t2)\,t2}{q1^2}$$
$$v = \frac{4\,t2}{q1}$$

4_2) $q_2 \neq 0$

```
> solve(q2*r1^2-r2*(q1-2*t2)*r1-2*r2^2*t1, r2);
```

$$\frac{\left(-q1 + 2\,t2 + \sqrt{q1^2 - 4\,q1\,t2 + 8\,t1\,q2 + 4\,t2^2}\right) r1}{4\,t1},\ -\frac{\left(q1 - 2\,t2 + \sqrt{q1^2 - 4\,q1\,t2 + 8\,t1\,q2 + 4\,t2^2}\right) r1}{4\,t1}$$

```
> r21 := (-q1+2*t2+sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2))*r1/(4*t1):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\left(q1\sqrt{q1^2 - 4\,q1\,t2 + 8\,t1\,q2 + 4\,t2^2} + 2\,t2\sqrt{q1^2 - 4\,q1\,t2 + 8\,t1\,q2 + 4\,t2^2} + 8\,p1\,t1 - q1^2 + 4\,t1\,q2 + 4\,t2^2\right)}{8\,t1},$$

$$\frac{r1\,s2\left(q1 + 2\,t2 + \sqrt{q1^2 - 4\,q1\,t2 + 8\,t1\,q2 + 4\,t2^2}\right)}{2},\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$-\frac{\left(-q1 + 2\,t2 + \sqrt{q1^2 - 4\,q1\,t2 + 8\,t1\,q2 + 4\,t2^2}\right) r1^3\left(q1\sqrt{q1^2 - 4\,q1\,t2 + 8\,t1\,q2 + 4\,t2^2} + 8\,p1\,t1 - q1^2 + 2\,q1\,t2 - 4\,t1\,q2\right)}{32\,t1^2\,s2},\ 0,$$

$$-\frac{r1\,s2\left(-2\,t2 - q1 + \sqrt{q1^2 - 4\,q1\,t2 + 8\,t1\,q2 + 4\,t2^2}\right)}{4},\ 0$$

```
> r22 := (-q1+2*t2-sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2))*r1/(4*t1):
```

```
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r22,s2):
```

$$-\frac{r1^2\left(q1\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}+2\,t2\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}-8\,p1\,t1+q1^2-4\,t1\,q2-4\,t2^2\right)}{8\,t1},$$

$$-\frac{r1\,s2\left(-2\,t2-q1+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)}{2},\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$-\frac{\left(q1-2\,t2+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)r1^3\left(q1\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}-8\,p1\,t1+q1^2-2\,q1\,t2+4\,t1\,q2\right)}{32\,t1^2\,s2},\ 0,$$

$$\frac{r1\,s2\left(q1+2\,t2+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)}{4},\ 0$$

4_2^1) $a_2=0$

```
> p11 := (q1^2-2*q1*t2+4*q2*t1-q1*sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2))/(8*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r21,s2):
```

$$\frac{r1^2\left(t2\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}-q1\,t2+4\,t1\,q2+2\,t2^2\right)}{4\,t1},\ \frac{r1\,s2\left(q1+2\,t2+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)}{2},\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$0,\ 0,\ -\frac{r1\,s2\left(-2\,t2-q1+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)}{4},\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r11 := 4*t1/(sqrt(abs(t1))*(2*t2+q1-sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2))):
  r21 := (-q1+2*t2+sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2))*r11/(4*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r11,0,r21,s21):
```

$$\frac{4\left(t2\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}-q1\,t2+4\,t1\,q2+2\,t2^2\right)t1}{|t1|\left(-2\,t2-q1+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)^2},\ \frac{2\,t1\left(q1+2\,t2+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)}{|t1|\left(2\,t2+q1-\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

```
> u = (4*(t2*sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2)-q1*t2+4*t1*q2+2*t2^2))/(-2*t2-q1+sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*
  t1+4*t2^2))^2;
  v = 2*(q1+2*t2+sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2))/(2*t2+q1-sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2));
```

$$u=\frac{4\left(t2\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}-q1\,t2+4\,t1\,q2+2\,t2^2\right)}{\left(-2\,t2-q1+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)^2}$$

$$v=\frac{2\left(q1+2\,t2+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)}{2\,t2+q1-\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}}$$

```
> p12 := (q1^2-2*q1*t2+4*q2*t1+q1*sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2))/(8*t1):
  zamproc(p12,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,r22,s2):
```

$$-\frac{r1^2\left(t2\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}+q1\,t2-4\,t1\,q2-2\,t2^2\right)}{4\,t1},\ -\frac{r1\,s2\left(-2\,t2-q1+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)}{2},\ t1\,s2^2,\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{r1\,s2\left(q1+2\,t2+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)}{4},\ 0$$

```
> s21 := 1/sqrt(abs(t1)):
  r12 := 4*t1/(sqrt(abs(t1))*(q1+2*t2+sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2))):
  r22 := (-q1+2*t2-sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2))*r12/(4*t1):
  zamproc(p12,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r12,0,r22,s21):
```

$$-\frac{4\left(t2\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}+q1\,t2-4\,t1\,q2-2\,t2^2\right)t1}{|t1|\left(q1+2\,t2+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)^2},\ \frac{2\,t1\left(2\,t2+q1-\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)}{|t1|\left(q1+2\,t2+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)},\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{t1}{|t1|},\ 0$$

```
> u = -(4*(t2*sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2)+q1*t2-4*t1*q2-2*t2^2))/(q1+2*t2+sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*
  t1+4*t2^2))^2;
  v = 2*(2*t2+q1-sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2))/(2*t2+q1+sqrt(q1^2-4*q1*t2+8*q2*t1+4*t2^2));
```

$$u=-\frac{4\left(t2\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}+q1\,t2-4\,t1\,q2-2\,t2^2\right)}{\left(q1+2\,t2+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)^2}$$

$$v=\frac{2\left(2\,t2+q1-\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}\right)}{q1+2\,t2+\sqrt{q1^2-4\,q1\,t2+8\,t1\,q2+4\,t2^2}}$$

5) $a_2=0$

```
> zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r1,0,0,s2):
```

$$p1\, r1^2,\ q1\, r1\, s2,\ t1\, s2^2,\ 0$$
$$0,\ q2\, r1^2,\ t2\, r1\, s2,\ 0$$

```
> r11 := 1/sqrt(abs(q2)):
  s21 := q2/(t2*sqrt(abs(q2))):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, r11,0,0,s21):
```

$$\frac{p1}{|q2|},\ \frac{q1\, q2}{|q2|\, t2},\ \frac{t1\, q2^2}{|q2|\, t2^2},\ 0$$
$$0,\ \frac{q2}{|q2|},\ \frac{q2}{|q2|},\ 0$$

```
> u = p1/q2;
  v = q1/t2;
  w = t1*q2/t2^2;
```

$$u = \frac{p1}{q2}$$
$$v = \frac{q1}{t2}$$
$$w = \frac{t1\, q2}{t2^2}$$

Сведение к системам из II части списка 2.1.
Результат замены с $r_1 = s_1$ в исходной системе:

```
> M := zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, s1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{-s1^2\, s2\, p1 - s1\, s2\, r2\, q1 + q2\, s1^2\, r2 + t2\, s1\, r2^2 - r2^2\, s2\, t1}{r2 - s2},$$
$$\frac{(-s1\, q1 - 2\, r2\, t1)\, s2^2 + \left(-r2^2\, t1 - 2\, s1\, (q1 - t2)\, r2 - 3\, s1^2 \left(p1 - \frac{q2}{3}\right)\right) s2 + 2\, q2\, s1^2\, r2 + t2\, s1\, r2^2}{r2 - s2},$$
$$\frac{-s2^3\, t1 + ((-2\, q1 + t2)\, s1 - 2\, r2\, t1)\, s2^2 - 3\, s1 \left(\left(p1 - \frac{2\, q2}{3}\right) s1 + \frac{r2\, (q1 - 2\, t2)}{3}\right) s2 + q2\, s1^2\, r2}{r2 - s2},$$
$$-\frac{s2\, (s2^2\, t1 + s1\, (q1 - t2)\, s2 + s1^2\, (p1 - q2))}{r2 - s2}$$

$$\frac{r2\, (r2^2\, t1 + s1\, (q1 - t2)\, r2 + s1^2\, (p1 - q2))}{r2 - s2},\ \frac{r2^3\, t1 + ((2\, q1 - t2)\, s1 + 2\, s2\, t1)\, r2^2 + 3\, s1 \left(\left(p1 - \frac{2\, q2}{3}\right) s1 + \frac{s2\, (q1 - 2\, t2)}{3}\right) r2 - s1^2\, s2\, q2}{r2 - s2},$$
$$\frac{(s1\, q1 + 2\, s2\, t1)\, r2^2 + (s1^2\, (3\, p1 - q2) + 2\, s1\, (q1 - t2)\, s2 + s2^2\, t1)\, r2 - 2\, s1^2\, s2\, q2 - s1\, s2^2\, t2}{r2 - s2},$$
$$\frac{p1\, r2\, s1^2 + s1\, s2\, r2\, q1 - s1^2\, s2\, q2 + r2\, s2^2\, t1 - s1\, s2^2\, t2}{r2 - s2}$$

$NSF_1^{4,1}$

```
> solve([M[1,3],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {q1,t1,q2,t2,s1,r2,s2});
```

$$\left\{q1 = -\frac{2\, s1\, p1}{s2},\ q2 = 0,\ r2 = 0,\ s1 = s1,\ s2 = s2,\ t1 = \frac{s1\, (s1\, p1 + s2\, t2)}{s2^2},\ t2 = t2\right\},\ \{q1 = q1,\ q2 = q2,\ r2 = r2,\ s1 = 0,\ s2 = s2,\ t1 = 0,\ t2 = t2\},\ \left\{q1 = -\frac{2\, s1\, p1}{r2},\ q2 = 0,\ r2 = r2,\ s1 = s1,\ s2 = 0,\ t1 = \frac{s1\, (s1\, p1 + r2\, t2)}{r2^2},\ t2 = t2\right\},\ \left\{q1 = 0,\ q2 = 2\, p1,\ r2 = r2,\ s1 = s1,\ s2 = s2,\ t1 = -\frac{p1\, s1^2}{r2\, s2},\ t2 = -\frac{s1\, p1\, (r2 + s2)}{r2\, s2}\right\}$$

```
> p11 := -t1*r2*s2/(s1^2):
  q21 := 2*p11:
  t21 := -s1*p11*(r2+s2)/(r2*s2);
  zamproc(p11,0,t1,0,0,q21,t21,0, s1,s1,r2,s2):
```

$$t21 := \frac{t1\, (r2 + s2)}{s1}$$
$$(r2 - s2)\, r2\, t1,\ (r2 - s2)\, r2\, t1,\ 0,\ 0$$
$$0,\ 0,\ -(r2 - s2)\, s2\, t1,\ -(r2 - s2)\, s2\, t1$$

```
> r21 := -p1*s1^2/(t1*s2):
  solve(t2 = -s1*p1*(r21+s2)/(r21*s2), s2);
```

$$\frac{\left(t2 + \sqrt{4\, t1\, p1 + t2^2}\right) s1}{2\, t1},\ -\frac{\left(-t2 + \sqrt{4\, t1\, p1 + t2^2}\right) s1}{2\, t1}$$

```
> s21 := (t2+sqrt(4*p1*t1+t2^2))*s1/(2*t1);
  r21 := -rationalize(p1*s1^2/(t1*s21));
  q21 := 2*p1:
```

```
zamproc(p1,0,t1,0,0,q21,t2,0, s1,s1,r21,s21, full=false):
```

$$s21 := \frac{\left(t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right) s1}{2\,t1}$$

$$r21 := -\frac{\left(-t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right) s1}{2\,t1}$$

$$\frac{\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\,s1^2\left(-t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,t1}, \frac{\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\,s1^2\left(-t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,t1}, 0, 0$$

$$0, 0, \frac{\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\,s1^2\left(t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,t1}, \frac{\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\,s1^2\left(t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,t1}$$

```
> s11 := (4*p1*t1+t2^2)^(-1/4)*abs(2*t1)^(1/2)/abs(t2+sqrt(4*p1*t1+t2^2))^(1/2):
  s21 := (t2+sqrt(4*p1*t1+t2^2))*s11/(2*t1);
  r21 := -rationalize(p1*s11^2/(t1*s21));
  zamproc(p1,0,t1,0,0,q21,t2,0, s11,s11,r21,s21):
```

$$s21 := \frac{\left(t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)\sqrt{2}\,\sqrt{|t1|}}{2\,(4\,t1\,p1+t2^2)^{1/4}\sqrt{\left|t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right|}\,t1}$$

$$r21 := \frac{\sqrt{|t1|}\,\sqrt{2}\left(\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\,t2-4\,t1\,p1-t2^2\right)}{2\,(4\,t1\,p1+t2^2)^{3/4}\,t1\sqrt{\left|t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right|}}$$

$$\frac{\left(-t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)\left|\frac{t1}{t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}\right|}{t1}, \frac{\left(4\,t1\,p1+t2^2-\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\,t2\right)\left|\frac{t1}{t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}\right|}{t1\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}, 0, 0$$

$$0, 0, \frac{\left(4\,t1\,p1+t2^2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\,t2\right)\left|\frac{t1}{t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}\right|}{t1\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}, \frac{\left(4\,t1\,p1+t2^2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\,t2\right)\left|\frac{t1}{t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}\right|}{t1\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}$$

```
> u = (-t2+sqrt(4*p1*t1+t2^2))/(t2+sqrt(4*p1*t1+t2^2));
```

$$u = \frac{-t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}{t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}$$

```
> s22 := (t2-sqrt(4*p1*t1+t2^2))*s1/(2*t1);
  r22 := -rationalize(p1*s1^2/(t1*s22));
  q21 := 2*p1:
  zamproc(p1,0,t1,0,0,q21,t2,0, s1,s1,r22,s22, full=false):
```

$$s22 := \frac{\left(t2-\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right) s1}{2\,t1}$$

$$r22 := \frac{\left(t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right) s1}{2\,t1}$$

$$\frac{\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\,s1^2\left(t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,t1}, \frac{\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\,s1^2\left(t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,t1}, 0, 0$$

$$0, 0, \frac{\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\,s1^2\left(-t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,t1}, \frac{\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\,s1^2\left(-t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,t1}$$

```
> s12 := (4*p1*t1+t2^2)^(-1/4)*abs(2*t1)^(1/2)/abs(t2-sqrt(4*p1*t1+t2^2))^(1/2):
  s22 := (t2-sqrt(4*p1*t1+t2^2))*s12/(2*t1);
  r22 := -rationalize(p1*s12^2/(t1*s22));
  zamproc(p1,0,t1,0,0,q21,t2,0, s12,s12,r22,s22):
```

$$s22 := \frac{\left(t2-\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)\sqrt{2}\,\sqrt{|t1|}}{2\,(4\,t1\,p1+t2^2)^{1/4}\sqrt{\left|t2-\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right|}\,t1}$$

$$r22 := \frac{\sqrt{|t1|}\,\sqrt{2}\left(4\,t1\,p1+t2^2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\,t2\right)}{2\,(4\,t1\,p1+t2^2)^{3/4}\,t1\sqrt{\left|t2-\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right|}}$$

$$\frac{\left(t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)\left|\frac{t1}{-t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}\right|}{t1}, \frac{\left(4\,t1\,p1+t2^2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\,t2\right)\left|\frac{t1}{-t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}\right|}{t1\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}, 0, 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{\left(4\,t1\,p1+t2^2-\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\ t2\right)\left|\frac{t1}{-t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}\right|}{t1\,\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}},\ \frac{\left(4\,t1\,p1+t2^2-\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\ t2\right)\left|\frac{t1}{-t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}\right|}{t1\,\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}$$

```
> u = (t2+sqrt(4*p1*t1+t2^2))/(-t2+sqrt(4*p1*t1+t2^2));
```

$$u=\frac{t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}{-t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}}$$

```
> {q1=-2*s1*p1/r2, q2=0, r2=r2, s1=s1, s2=0, t1=s1*(s1*p1+r2*t2)/r2^2, t2 = t2};
```

$$\left\{q1=-\frac{2\,s1\,p1}{r2},\ q2=0,\ r2=r2,\ s1=s1,\ s2=0,\ t1=\frac{s1\,(s1\,p1+r2\,t2)}{r2^2},\ t2=t2\right\}$$

```
> solve(t1 = s1*(s1*p1+r2*t2)/r2^2, r2);
```

$$\frac{\left(t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)s1}{2\,t1},\ -\frac{\left(-t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)s1}{2\,t1}$$

```
> r21 := (t2+sqrt(4*p1*t1+t2^2))*s1/(2*t1):
  q11 := rationalize(-2*s1*p1/r21);
  zamproc(p1,q11,t1,0,0,0,t2,0, s1,s1,r21,0):
```

$$q11:=t2-\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}$$

$$\frac{t2\,s1^2\left(t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)}{2\,t1},\ \frac{t2\,s1^2\left(t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)}{2\,t1},\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ p1\,s1^2,\ p1\,s1^2$$

```
> s11 := abs(p1)^(-1/2):
  r21 := (t2+sqrt(4*p1*t1+t2^2))*s11/(2*t1):
  q11 := rationalize(-2*s11*p1/r21);
  zamproc(p1,q11,t1,0,0,0,t2,0, s11,s11,r21,0):
```

$$q11:=t2-\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}$$

$$\frac{t2\left(t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)}{2\,|p1|\,t1},\ \frac{t2\left(t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)}{2\,|p1|\,t1},\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{p1}{|p1|},\ \frac{p1}{|p1|}$$

```
> u = t2*(t2+sqrt(4*p1*t1+t2^2))/(2*p1*t1);
```

$$u=\frac{t2\left(t2+\sqrt{4\,t1\,p1+t2^2}\right)}{2\,t1\,p1}$$

```
> r22 := (t2-sqrt(4*p1*t1+t2^2))*s1/(2*t1):
  q12 := rationalize(-2*s1*p1/r22);
  zamproc(p1,q12,t1,0,0,0,t2,0, s1,s1,r22,0):
```

$$q12:=t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}$$

$$-\frac{s1^2\,t2\left(-t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,t1},\ -\frac{s1^2\,t2\left(-t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,t1},\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ p1\,s1^2,\ p1\,s1^2$$

```
> s12 := abs(p1)^(-1/2):
  r22 := (t2-sqrt(4*p1*t1+t2^2))*s12/(2*t1):
  q12 := rationalize(-2*s12*p1/r22);
  zamproc(p1,q12,t1,0,0,0,t2,0, s12,s12,r22,0):
```

$$q12:=t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}$$

$$-\frac{t2\left(-t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,|p1|\,t1},\ -\frac{t2\left(-t2+\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,|p1|\,t1},\ 0,\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{p1}{|p1|},\ \frac{p1}{|p1|}$$

```
> u = t2*(t2-sqrt(4*p1*t1+t2^2))/(2*p1*t1);
```

$$u=\frac{t2\left(t2-\sqrt{4\,p1\,t1+t2^2}\right)}{2\,p1\,t1}$$

$NSF_3^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,4],M[2,1],M[2,2]], {p1,q2,r2,s2});
```

$$\left\{p1=\frac{(2\,q1-3\,t2)\,q1}{9\,t1},\ q2=0,\ r2=0,\ s2=-\frac{s1\,(2\,q1-3\,t2)}{3\,t1}\right\},\ \left\{p1=\frac{(2\,q1-3\,t2)\,(2\,q1+t2)}{16\,t1},\ q2=\frac{(2\,q1-3\,t2)\,t2}{8\,t1},\ r2=-\frac{s1\,(2\,q1-3\,t2)}{4\,t1},\ s2=0\right\},$$

$$\left\{p1=\frac{q1\,(q1-t2)}{t1},\ q2=\frac{q1\,(3\,q1-2\,t2)}{t1},\ r2=\frac{q1\,s1}{t1},\ s2=-\frac{(2\,q1-t2)\,s1}{t1}\right\}$$

```
> p11 := q1*(q1-t2)/t1:
  q21 := q1*(3*q1-2*t2)/t1:
  r21 := q1*s1/t1:
  s21 := -(2*q1-t2)*s1/t1:
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, s1,s1,r21,s21, full=false):
```

$$\frac{s1^2\,q1\,(3\,q1-t2)}{t1},\ 0,\ -\frac{s1^2\,q1\,(3\,q1-t2)}{t1},\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{s1^2\,(3\,q1-t2)\,(q1-t2)}{t1},\ \frac{s1^2\,(3\,q1-t2)\,(q1-t2)}{t1}$$

```
> s11 := abs(t1)^(1/2)/(abs(3*q1-t2)*abs(q1-t2))^(1/2):
  r21 := q1*s11/t1:
  s21 := -(2*q1-t2)*s11/t1:
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, s11,s11,r21,s21):
```

$$\frac{q1\,(3\,q1-t2)\left|\frac{t1}{(q1-t2)\,(3\,q1-t2)}\right|}{t1},\ 0,\ -\frac{q1\,(3\,q1-t2)\left|\frac{t1}{(q1-t2)\,(3\,q1-t2)}\right|}{t1},\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{\left|\frac{t1}{(q1-t2)\,(3\,q1-t2)}\right|(q1-t2)\,(3\,q1-t2)}{t1},\ \frac{\left|\frac{t1}{(q1-t2)\,(3\,q1-t2)}\right|(q1-t2)\,(3\,q1-t2)}{t1}$$

```
> u = q1/(q1-t2);
```

$$u=\frac{q1}{q1-t2}$$

```
> {p1=(2*q1-3*t2)*q1/(9*t1), q2=0, r2=0, s2=-s1*(2*q1-3*t2)/(3*t1)};
```

$$\left\{p1=\frac{(2\,q1-3\,t2)\,q1}{9\,t1},\ q2=0,\ r2=0,\ s2=-\frac{s1\,(2\,q1-3\,t2)}{3\,t1}\right\}$$

```
> p11 := (2*q1-3*t2)*q1/(9*t1):
  s21 := -s1*(2*q1-3*t2)/(3*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,0,t2,0, s1,s1,0,s21, full=false):
```

$$\frac{s1^2\,(2\,q1-3\,t2)\,q1}{9\,t1},\ 0,\ -\frac{s1^2\,(2\,q1-3\,t2)\,q1}{9\,t1},\ 0$$

$$0,\ 0,\ -\frac{t2\,s1^2\,(2\,q1-3\,t2)}{3\,t1},\ -\frac{t2\,s1^2\,(2\,q1-3\,t2)}{3\,t1}$$

```
> s11 := sqrt(3)*abs(t1)^(1/2)/(abs(t2)*abs(2*q1-3*t2))^(1/2):
  s21 := -s11*(2*q1-3*t2)/(3*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,0,t2,0, s11,s11,0,s21):
```

$$\frac{q1\,(2\,q1-3\,t2)\left|\frac{t1}{t2\,(2\,q1-3\,t2)}\right|}{3\,t1},\ 0,\ -\frac{q1\,(2\,q1-3\,t2)\left|\frac{t1}{t2\,(2\,q1-3\,t2)}\right|}{3\,t1},\ 0$$

$$0,\ 0,\ -\frac{t2\,(2\,q1-3\,t2)\left|\frac{t1}{t2\,(2\,q1-3\,t2)}\right|}{t1},\ -\frac{t2\,(2\,q1-3\,t2)\left|\frac{t1}{t2\,(2\,q1-3\,t2)}\right|}{t1}$$

```
> u = -q1/(3*t2);
```

$$u=-\frac{q1}{3\,t2}$$

```
> {p1=(2*q1-3*t2)*(2*q1+t2)/(16*t1), q2=(2*q1-3*t2)*t2/(8*t1), r2=-s1*(2*q1-3*t2)/(4*t1), s2=0};
```

$$\left\{p1=\frac{(2\,q1-3\,t2)\,(2\,q1+t2)}{16\,t1},\ q2=\frac{(2\,q1-3\,t2)\,t2}{8\,t1},\ r2=-\frac{s1\,(2\,q1-3\,t2)}{4\,t1},\ s2=0\right\}$$

```
> p11 := (2*q1-3*t2)*(2*q1+t2)/(16*t1):
  q21 := (2*q1-3*t2)*t2/(8*t1):
  r21 := -s1*(2*q1-3*t2)/(4*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, s1,s1,r21,0, full=false):
```

$$-\frac{t2\,s1^2\,(2\,q1-3\,t2)}{8\,t1},\ 0,\ \frac{t2\,s1^2\,(2\,q1-3\,t2)}{8\,t1},\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{(2\,q1-3\,t2)\,(2\,q1+t2)\,s1^2}{16\,t1},\ \frac{(2\,q1-3\,t2)\,(2\,q1+t2)\,s1^2}{16\,t1}$$

```
> s11 := 4*abs(t1)^(1/2)/(abs(2*q1-3*t2)*abs(2*q1+t2))^(1/2):
  r21 := -s11*(2*q1-3*t2)/(4*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, s11,s11,r21,0):
```

$$-\frac{2\,t2\,(2\,q1-3\,t2)\left|\frac{t1}{(2\,q1-3\,t2)\,(2\,q1+t2)}\right|}{t1},\ 0,\ \frac{2\,t2\,(2\,q1-3\,t2)\left|\frac{t1}{(2\,q1-3\,t2)\,(2\,q1+t2)}\right|}{t1},\ 0$$

$$0,\ 0,\ \frac{(2\,q1-3\,t2)\,(2\,q1+t2)\left|\frac{t1}{(2\,q1-3\,t2)\,(2\,q1+t2)}\right|}{t1},\ \frac{(2\,q1-3\,t2)\,(2\,q1+t2)\left|\frac{t1}{(2\,q1-3\,t2)\,(2\,q1+t2)}\right|}{t1}$$

```
> u = -2*t2/(2*q1+t2);
```

$$u=-\frac{2\,t2}{2\,q1+t2}$$

$NSF_{13}^{4,1}$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {p1,q2,r2,s2});
```

$$\left\{p1=\frac{(2\,q1-t2)\,(2\,q1+t2)}{12\,t1},\ q2=\frac{(2\,q1-t2)\,t2}{4\,t1},\ r2=0,\ s2=-\frac{(2\,q1-t2)\,s1}{2\,t1}\right\},\ \left\{p1=(4\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,q1^3-4\,RootOf(2\,\_Z^2\right.$$
$$-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,q1^2\,t2-7\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,q1\,t2^2+4\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,t2^3+8\,q1^3\,t2-8\,q1^2\,t2^2$$
$$+4\,q1\,t2^3-t2^4)\Big/\big(2\,(8\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,q1-8\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,t2+16\,q1\,t2-7\,t2^2)\,t1\big),\ q2$$
$$=\frac{1}{2\,t1\,(4\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)-t2)}\,(2\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,q1^2+7\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2$$
$$+t2^2)\,q1\,t2-4\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,t2^2+4\,q1^2\,t2-4\,q1\,t2^2+t2^3),\ r2=$$
$$-\frac{s1\,(4\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,q1-2\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,t2+2\,q1\,t2-t2^2)}{t1\,(4\,RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)-t2)},\ s2$$
$$\left.=\frac{RootOf(2\,\_Z^2-q1\,\_Z-2\,q1\,t2+t2^2)\,s1}{t1}\right\}$$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {p1,q1,t1,r2,s1,s2});
```

$$\left\{p1=\frac{q2\,(2\,q1+t2)}{3\,t2},\ q1=q1,\ r2=0,\ s1=s1,\ s2=-\frac{2\,s1\,q2}{t2},\ t1=\frac{(2\,q1-t2)\,t2}{4\,q2}\right\},\ \{p1=p1,\ q1=q1,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ t1=0\},\ \left\{p1\right.$$
$$\left.=\frac{(r2^3+2\,r2^2\,s2+2\,r2\,s2^2+s2^3)\,q2}{(2\,r2+s2)\,s2^2},\ q1=\frac{t2\,(3\,r2^2+4\,r2\,s2+2\,s2^2)}{s2\,(r2+2\,s2)},\ r2=r2,\ s1=-\frac{s2\,t2\,(2\,r2+s2)}{q2\,(r2+2\,s2)},\ s2=s2,\ t1=\frac{t2^2\,(2\,r2+s2)^2}{q2\,(r2+2\,s2)^2}\right\}$$

```
> solve([M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {p1,q1,t1,t2,r2,s1,s2});
```

$$\left\{p1=-\frac{s2\,q1-s1\,q2}{3\,s1},\ q1=q1,\ r2=0,\ s1=s1,\ s2=s2,\ t1=-\frac{s1\,(s2\,q1+s1\,q2)}{s2^2},\ t2=-\frac{2\,s1\,q2}{s2}\right\},\ \{p1=p1,\ q1=q1,\ r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ t1=0,\ t2$$
$$=t2\},\ \left\{p1=\frac{(r2^3+2\,r2^2\,s2+2\,r2\,s2^2+s2^3)\,q2}{(2\,r2+s2)\,s2^2},\ q1=\frac{t2\,(3\,r2^2+4\,r2\,s2+2\,s2^2)}{s2\,(r2+2\,s2)},\ r2=r2,\ s1=-\frac{s2\,t2\,(2\,r2+s2)}{q2\,(r2+2\,s2)},\ s2=s2,\ t1\right.$$
$$\left.=\frac{t2^2\,(2\,r2+s2)^2}{q2\,(r2+2\,s2)^2},\ t2=t2\right\},\ \left\{p1=q2,\ q1=\frac{2\,s1\,q2}{s2},\ r2=-2\,s2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ t1=\frac{s1^2\,q2}{s2^2},\ t2=0\right\}$$

```
> {p1=(2*q1-t2)*(2*q1+t2)/(12*t1), q2=(2*q1-t2)*t2/(4*t1), r2=0, s2=-(2*q1-t2)*s1/(2*t1)};
```

$$\left\{p1=\frac{(2\,q1-t2)\,(2\,q1+t2)}{12\,t1},\ q2=\frac{(2\,q1-t2)\,t2}{4\,t1},\ r2=0,\ s2=-\frac{(2\,q1-t2)\,s1}{2\,t1}\right\}$$

```
> p11 := (2*q1-t2)*(2*q1+t2)/(12*t1):
  q21 := (2*q1-t2)*t2/(4*t1):
  s21 := -(2*q1-t2)*s1/(2*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, s1,s1,0,s21):
```

$$\frac{s1^2\,(4\,q1^2-t2^2)}{12\,t1},\ 0,\ 0,\ \frac{s1^2\,(4\,q1^2-t2^2)}{12\,t1}$$

$$0,\ \frac{(2\,q1-t2)\,t2\,s1^2}{4\,t1},\ 0,\ -\frac{(2\,q1-t2)\,t2\,s1^2}{4\,t1}$$

```
> s11 := 2*abs(t1)^(1/2)/(abs(2*q1-t2)^(1/2)*abs(t2)^(1/2)):
  s21 := -(2*q1-t2)*s11/(2*t1):
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q21,t2,0, s11,s11,0,s21):
```

$$\frac{\left|\frac{t1}{t2\,(2\,q1-t2)}\right|(4\,q1^2-t2^2)}{3\,t1},\ 0,\ 0,\ \frac{\left|\frac{t1}{t2\,(2\,q1-t2)}\right|(4\,q1^2-t2^2)}{3\,t1}$$

$$0,\ \frac{t2\,(2\,q1-t2)\left|\frac{t1}{t2\,(2\,q1-t2)}\right|}{t1},\ 0,\ -\frac{t2\,(2\,q1-t2)\left|\frac{t1}{t2\,(2\,q1-t2)}\right|}{t1}$$

```
> u = (2*q1+t2)/(3*t2);
```

$$u=\frac{2\,q1+t2}{3\,t2}$$

```
> {p1=(r2^3+2*r2^2*s2+2*r2*s2^2+s2^3)*q2/((2*r2+s2)*s2^2), q1=t2*(3*r2^2+4*r2*s2+2*s2^2)/(s2*(r2+2*s2)
  ), r2=r2, s1=-s2*t2*(2*r2+s2)/(q2*(r2+2*s2)), s2=s2, t1=t2^2*(2*r2+s2)^2/(q2*(r2+2*s2)^2)};
```

$$\left\{p1=\frac{(r2^3+2\,r2^2\,s2+2\,r2\,s2^2+s2^3)\,q2}{(2\,r2+s2)\,s2^2},\ q1=\frac{t2\,(3\,r2^2+4\,r2\,s2+2\,s2^2)}{s2\,(r2+2\,s2)},\ r2=r2,\ s1=-\frac{s2\,t2\,(2\,r2+s2)}{q2\,(r2+2\,s2)},\ s2=s2,\ t1=\frac{t2^2\,(2\,r2+s2)^2}{q2\,(r2+2\,s2)^2}\right\}$$

```
> evala([solve(t1 = t2^2*(2*r2+s2)^2/(q2*(r2+2*s2)^2), r2)]);
```

$$\left[-\frac{\left(t2+2\sqrt{q2\,t1}\right)s2}{2\,t2+\sqrt{q2\,t1}},\ -\frac{\left(t2-2\sqrt{q2\,t1}\right)s2}{-\sqrt{q2\,t1}+2\,t2}\right]$$

```
> r21 := -(t2+2*sqrt(q2*t1))*s2/(2*t2+sqrt(q2*t1)):
  s11 := simplify(-s2*t2*(2*r21+s2)/(q2*(r21+2*s2)));
  p11 := simplify((r21^3+2*r21^2*s2+2*r21*s2^2+s2^3)*q2/((2*r21+s2)*s2^2));
  q11 := simplify(t2*(3*r21^2+4*r21*s2+2*s2^2)/(s2*(r21+2*s2)));
  zamproc(p11,q11,t1,0,0,q2,t2,0, s11,s11,r21,s2, full=false):
```

$$s11 := \frac{\sqrt{q2\,t1}\,s2}{q2}$$

$$p11 := \frac{q2\left(q2\,t1\sqrt{q2\,t1}-t2^3\right)}{\sqrt{q2\,t1}\left(2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\right)^2}$$

$$q11 := \frac{2\,q2\,t1+t2^2}{2\,t2+\sqrt{q2\,t1}}$$

$$\frac{\left(q2\,t1-t2^2\right)s2^2\,t1}{\left(2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\right)\sqrt{q2\,t1}},\ 0,\ 0,\ \frac{\left(q2\,t1-t2^2\right)s2^2\,t1}{\left(2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\right)\sqrt{q2\,t1}}$$

$$0,\ -\frac{3\,s2^2\,t1\left(q2^2\,t1^2+4\,q2\,t1\,t2^2+3\,q2\,t1\,t2\sqrt{q2\,t1}+t2^4+3\,t2^3\sqrt{q2\,t1}\right)}{\left(2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\right)^2\sqrt{q2\,t1}\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)},\ 0,\ \frac{3\,s2^2\,t1\left(q2^2\,t1^2+4\,q2\,t1\,t2^2+3\,q2\,t1\,t2\sqrt{q2\,t1}+t2^4+3\,t2^3\sqrt{q2\,t1}\right)}{\left(2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\right)^2\sqrt{q2\,t1}\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)}$$

```
> factor(q2^2*t1^2+4*q2*t1*t2^2+3*q2*t1*t2*sqrt(q2*t1)+t2^4+3*t2^3*sqrt(q2*t1), sqrt(q2*t1));
```

$$\left(q2\,t1+t2\sqrt{q2\,t1}+t2^2\right)\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)^2$$

```
> s21 := (2*t2+sqrt(q2*t1))*(q2*t1)^(1/4)/(sqrt(3)*(q2*t1+t2*sqrt(q2*t1)+t2^2)^(1/2)*abs(t2+sqrt(q2*t1)
  )^(1/2)*abs(t1)^(1/2)):
  r21 := -(t2+2*sqrt(q2*t1))*s21/(2*t2+sqrt(q2*t1)):
  s11 := simplify(-s21*t2*(2*r21+s21)/(q2*(r21+2*s21)));
  p11 := simplify((r21^3+2*r21^2*s21+2*r21*s21^2+s21^3)*q2/((2*r21+s21)*s21^2));
  q11 := simplify(t2*(3*r21^2+4*r21*s21+2*s21^2)/(s21*(r21+2*s21)));
  zamproc(p11,q11,t1,0,0,q2,t2,0, s11,s11,r21,s21):
```

$$s11 := \frac{\left(2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\right)(q2\,t1)^{3\backslash 4}\sqrt{3}}{3\sqrt{q2\,t1+t2\sqrt{q2\,t1}+t2^2}\sqrt{\left|t2+\sqrt{q2\,t1}\right|}\sqrt{|t1|}\,q2}$$

$$p11 := \frac{\sqrt{q2\,t1}\left(q2\,t1\sqrt{q2\,t1}-t2^3\right)\left|t1\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)\right|}{\left|t2+\sqrt{q2\,t1}\right||t1|\,t1\left(2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\right)^2}$$

$$q11 := \frac{\left|\frac{1}{t1\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)}\right|\left(2\,q2\,t1+t2^2\right)\left|t2+\sqrt{q2\,t1}\right||t1|}{2\,t2+\sqrt{q2\,t1}}$$

$$\frac{\sqrt{q2\,t1}\left(2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\right)\left(q2\,t1+t2\sqrt{q2\,t1}\right)\left(q2\,t1-t2^2\right)\left|\frac{1}{t1\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)}\right|}{3\,q2\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)\left(q2\,t1+t2\sqrt{q2\,t1}+t2^2\right)},\ 0,\ 0,$$

$$\frac{\sqrt{q2\,t1}\left(2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\right)\left(q2\,t1+t2\sqrt{q2\,t1}\right)\left(q2\,t1-t2^2\right)\left|\frac{1}{t1\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)}\right|}{3\,q2\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)\left(q2\,t1+t2\sqrt{q2\,t1}+t2^2\right)}$$

$$0,\ -\frac{t1\left(q2^2\,t1^2+4\,q2\,t1\,t2^2+3\,q2\,t1\,t2\sqrt{q2\,t1}+t2^4+3\,t2^3\sqrt{q2\,t1}\right)\left|\frac{1}{t1\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)}\right|}{\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)\left(q2\,t1+t2\sqrt{q2\,t1}+t2^2\right)},\ 0,$$

$$\frac{\sqrt{q2\,t1}\left(3\,q2^2\,t1^2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\,q2^2\,t1^2+3\,q2\,t1\,t2^3+4\,q2\,t1\,t2^2\sqrt{q2\,t1}+t2^4\sqrt{q2\,t1}\right)\left|\frac{1}{t1\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)}\right|}{q2\left(t2+\sqrt{q2\,t1}\right)\left(q2\,t1+t2\sqrt{q2\,t1}+t2^2\right)}$$

```
> u = -(2*t2+sqrt(q2*t1))*(t2+sqrt(q2*t1))*(-t2+sqrt(q2*t1))/(3*(q2*t1+t2*sqrt(q2*t1)+t2^2)*(t2+sqrt
  (q2*t1)));
```

$$u = -\frac{\left(2\,t2+\sqrt{q2\,t1}\right)\left(-t2+\sqrt{q2\,t1}\right)}{3\left(q2\,t1+t2\sqrt{q2\,t1}+t2^2\right)}$$

```
> {p1=q2, q1=2*s1*q2/s2, r2=-2*s2, s1=s1, s2=s2, t1=s1^2*q2/s2^2, t2=0};
```

$$\left\{p1=q2,\ q1=\frac{2\,s1\,q2}{s2},\ r2=-2\,s2,\ s1=s1,\ s2=s2,\ t1=\frac{s1^2\,q2}{s2^2},\ t2=0\right\}$$

```
> p11 := q2:
  q11 := 2*s1*q2/s2:
  t11 := s1^2*q2/s2^2:
  r21 := -2*s2:
  zamproc(p11,q11,t11,0,0,q2,0,0, s1,s1,r21,s2, full=false):
```

$$s1^2\,q2, 0, 0, s1^2\,q2$$
$$0, -3\,s1^2\,q2, 0, 3\,s1^2\,q2$$

Результат замены с $r_1 = s_1$ в исходной системе с $p_2 \not\equiv 0$:

```
> M := zamproc(p1,q1,t1,0,p2,q2,t2,0, s1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{-p1\,s1^2\,s2+p2\,s1^3-q1\,r2\,s1\,s2+q2\,r2\,s1^2+r2^2\,s1\,t2-r2^2\,s2\,t1}{r2-s2},$$
$$\frac{3\,p2\,s1^3+((-3\,p1+q2)\,s2+2\,q2\,r2)\,s1^2+(-q1\,s2^2-2\,r2\,(q1-t2)\,s2+t2\,r2^2)\,s1-r2\,s2\,t1\,(r2+2\,s2)}{r2-s2},$$
$$\frac{-s2^3\,t1+((-2\,q1+t2)\,s1-2\,r2\,t1)\,s2^2-3\,s1\left(\left(p1-\frac{2\,q2}{3}\right)s1+\frac{r2\,(q1-2\,t2)}{3}\right)s2+3\,p2\,s1^3+q2\,r2\,s1^2}{r2-s2},$$
$$\frac{-s2^3\,t1-s1\,(q1-t2)\,s2^2-s1^2\,(p1-q2)\,s2+p2\,s1^3}{r2-s2}$$
$$\frac{r2^3\,t1+s1\,(q1-t2)\,r2^2+s1^2\,(p1-q2)\,r2-p2\,s1^3}{r2-s2},$$
$$\frac{r2^3\,t1+((2\,q1-t2)\,s1+2\,s2\,t1)\,r2^2+3\,s1\left(\left(p1-\frac{2\,q2}{3}\right)s1+\frac{s2\,(q1-2\,t2)}{3}\right)r2-3\,p2\,s1^3-q2\,s1^2\,s2}{r2-s2},$$
$$\frac{(s1\,q1+2\,s2\,t1)\,r2^2+((3\,p1-q2)\,s1^2+2\,s2\,(q1-t2)\,s1+s2^2\,t1)\,r2-3\,p2\,s1^3-2\,q2\,s1^2\,s2-s1\,s2^2\,t2}{r2-s2},$$
$$\frac{(r2\,t1-s1\,t2)\,s2^2+(q1\,r2\,s1-s1^2\,q2)\,s2+p1\,r2\,s1^2-p2\,s1^3}{r2-s2}$$

$NSF_{28}^{4,1}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,3],M[2,2],M[2,3]], {p2,q2,r2,s2})]);
```

$$\Big[\Big\{p2=\frac{1}{t1^2\,(q1+2\,t2)^3}\,(27\,p1^3\,t1^3-21\,p1^2\,q1^2\,t1^2+6\,p1^2\,q1\,t1^2\,t2+15\,p1^2\,t1^2\,t2^2+4\,p1\,q1^4\,t1-12\,p1\,q1^3\,t1\,t2-27\,p1\,q1^2\,t1\,t2^2-16\,p1\,q1\,t1\,t2^3$$
$$-3\,p1\,t1\,t2^4+4\,q1^5\,t2+12\,q1^4\,t2^2+17\,q1^3\,t2^3+14\,q1^2\,t2^4+6\,q1\,t2^5+t2^6),\ q2=$$
$$-\frac{9\,p1^2\,t1^2-3\,p1\,q1^2\,t1+6\,p1\,q1\,t1\,t2+6\,p1\,t1\,t2^2-4\,q1^3\,t2-10\,q1^2\,t2^2-10\,q1\,t2^3-3\,t2^4}{t1\,(q1+2\,t2)^2},\ r2=-\frac{s1\,(3\,p1\,t1+2\,q1\,t2+t2^2)}{t1\,(q1+2\,t2)},\ s2$$
$$=\frac{(6\,p1\,t1-2\,q1^2-q1\,t2)\,s1}{t1\,(q1+2\,t2)}\Big\}\Big]$$

```
> collect(27*p1^3*t1^3-21*p1^2*q1^2*t1^2+6*p1^2*q1*t1^2*t2+15*p1^2*t1^2*t2^2+4*p1*q1^4*t1-12*p1*q1^3*
  t1*t2-27*p1*q1^2*t1*t2^2-16*p1*q1*t1*t2^3-3*p1*t1*t2^4+4*q1^5*t2+12*q1^4*t2^2+17*q1^3*t2^3+14*q1^2*
  t2^4+6*q1*t2^5+t2^6, [p1,t1], factor);
```

$$27\,p1^3\,t1^3-3\,(7\,q1+5\,t2)\,(q1-t2)\,t1^2\,p1^2+(q1^2-4\,q1\,t2-3\,t2^2)\,(2\,q1+t2)^2\,t1\,p1+t2\,(q1+t2)\,(q1^2+q1\,t2+t2^2)\,(2\,q1+t2)^2$$

```
> subs(q1 = -t2, 27*z^3-(3*(7*q1+5*t2))*(q1-t2)*z^2+(q1^2-4*q1*t2-3*t2^2)*(2*q1+t2)^2*z+t2*(q1+t2)*
  (q1^2+q1*t2+t2^2)*(2*q1+t2)^2);
```

$$2\,t2^4\,z-12\,t2^2\,z^2+27\,z^3$$

```
> collect(9*p1^2*t1^2-3*p1*q1^2*t1+6*p1*q1*t1*t2+6*p1*t1*t2^2-4*q1^3*t2-10*q1^2*t2^2-10*q1*t2^3-3*t2^4,
  [p1,t1], factor);
```

$$9\,p1^2\,t1^2+(-3\,q1^2+6\,q1\,t2+6\,t2^2)\,t1\,p1-t2\,(2\,q1+t2)\,(2\,q1^2+4\,q1\,t2+3\,t2^2)$$

```
> p11 := theta/t1:
  p21 := (27*theta^3-(3*(7*q1+5*t2))*(q1-t2)*theta^2+(q1^2-4*q1*t2-3*t2^2)*(2*q1+t2)^2*theta+t2*(q1+t2)
  *(q1^2+q1*t2+t2^2)*(2*q1+t2)^2)/(t1^2*(q1+2*t2)^3):
  q21 := -(9*theta^2+(-3*q1^2+6*q1*t2+6*t2^2)*theta-t2*(2*q1+t2)*(2*q1^2+4*q1*t2+3*t2^2))/(t1*(q1+2*t2)
  ^2):
  r21 := -s1*(3*theta+2*q1*t2+t2^2)/(t1*(q1+2*t2)):
  s21 := (6*theta-2*q1^2-q1*t2)*s1/(t1*(q1+2*t2)):
  zamproc(p11,q1,t1,0,p21,q21,t2,0, s1,s1,r21,s21, full=false):
  pm1(p11,q1,t1,0,p21,q21,t2,0, s1,s1,r21,s21);
```

$$0,\ -\frac{s1^2\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)\,(q1^2+q1\,t2+t2^2-3\,\theta)}{t1\,(q1+2\,t2)^2},\ 0,\ \frac{s1^2\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)\,(q1^2+q1\,t2+t2^2-3\,\theta)}{t1\,(q1+2\,t2)^2}$$
$$-\frac{s1^2\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)\,(q1\,t2+t2^2+\theta)}{t1\,(q1+2\,t2)^2},\ 0,\ 0,\ -\frac{s1^2\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)\,(q1\,t2+t2^2+\theta)}{t1\,(q1+2\,t2)^2}$$

$$\textit{Resultant of G:}\ \frac{(q1\,t2+t2^2+\theta)^2\,(q1^2+q1\,t2+t2^2-3\,\theta)^2\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)^2}{t1^2\,(q1+2\,t2)^6}$$

```
> s11 := abs(t1)^(1/2)*(q1+2*t2)/(abs(q1*t2+t2^2+theta)^(1/2)*abs(9*theta-2*q1^2+q1*t2+t2^2)^(1/2)):
  r21 := -s11*(3*theta+2*q1*t2+t2^2)/(t1*(q1+2*t2)):
  s21 := (6*theta-2*q1^2-q1*t2)*s11/(t1*(q1+2*t2)):
  zamproc(p11,q1,t1,0,p21,q21,t2,0, s11,s11,r21,s21, full=false):
```

$$0,\ -\frac{(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)\left|\frac{t1}{(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)}\right|(q1^2+q1\,t2+t2^2-3\,\theta)}{t1},\ 0,$$

$$\frac{(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)\left|\frac{t1}{(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)}\right|(q1^2+q1\,t2+t2^2-3\,\theta)}{t1}$$

$$-\frac{(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)\left|\frac{t1}{(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)}\right|}{t1},\ 0,\ 0,$$

$$-\frac{(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)\left|\frac{t1}{(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(2\,q1^2-q1\,t2-t2^2-9\,\theta)}\right|}{t1}$$

```
> u = (3*theta-q1^2-q1*t2-t2^2)/(q1*t2+t2^2+theta);
```

$$u=\frac{-q1^2-q1\,t2-t2^2+3\,\theta}{q1\,t2+t2^2+\theta}$$

```
> q11 := -2*t2:
  N := zamproc(p1,q11,t1,0,p2,q2,t2,0, s1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{p2\,s1^3+(-s2\,p1+q2\,r2)\,s1^2+r2\,t2\,(r2+2\,s2)\,s1-r2^2\,s2\,t1}{r2-s2},$$

$$\frac{3\,p2\,s1^3+((-3\,p1+q2)\,s2+2\,q2\,r2)\,s1^2+t2\,(r2^2+6\,r2\,s2+2\,s2^2)\,s1-r2\,s2\,t1\,(r2+2\,s2)}{r2-s2},$$

$$\frac{-s2^3\,t1+(-2\,r2\,t1+5\,s1\,t2)\,s2^2+((-3\,p1+2\,q2)\,s1^2+4\,r2\,t2\,s1)\,s2+3\,p2\,s1^3+q2\,r2\,s1^2}{r2-s2},\ \frac{-s2^3\,t1+3\,s1\,s2^2\,t2-s1^2\,(p1-q2)\,s2+p2\,s1^3}{r2-s2}$$

$$\frac{r2^3\,t1-3\,r2^2\,s1\,t2+s1^2\,(p1-q2)\,r2-p2\,s1^3}{r2-s2},\ \frac{r2^3\,t1+(-5\,s1\,t2+2\,s2\,t1)\,r2^2+((3\,p1-2\,q2)\,s1^2-4\,s1\,s2\,t2)\,r2-3\,p2\,s1^3-q2\,s1^2\,s2}{r2-s2},$$

$$\frac{(-2\,s1\,t2+2\,s2\,t1)\,r2^2+((3\,p1-q2)\,s1^2-6\,s1\,s2\,t2+s2^2\,t1)\,r2-3\,p2\,s1^3-2\,q2\,s1^2\,s2-s1\,s2^2\,t2}{r2-s2},$$

$$\frac{-p2\,s1^3+(p1\,r2-s2\,q2)\,s1^2-2\,s2\left(r2+\frac{s2}{2}\right)t2\,s1+r2\,s2^2\,t1}{r2-s2}$$

```
> evala([solve([N[1,1],N[1,3],N[2,2],N[2,3]], {p1,p2,q2,s2})]);
```

$$\left[\left\{p1=\frac{t2^2}{t1},\ p2=-\frac{r2^3\,t1^3-4\,r2^2\,s1\,t2\,t1^2+5\,r2\,s1^2\,t1\,t2^2-3\,s1^3\,t2^3}{t1^2\,s1^3},\ q2=-\frac{t1^2\,r2^2-2\,r2\,t2\,s1\,t1+3\,s1^2\,t2^2}{t1\,s1^2},\ s2=-\frac{2\,r2\,t1-3\,s1\,t2}{t1}\right\}\right]$$

```
> solve(z^3-4*z^2+5*z-3, z);
```

$$\frac{(116+12\sqrt{93})^{1/3}}{6}+\frac{2}{3\,(116+12\sqrt{93})^{1/3}}+\frac{4}{3},\ -\frac{(116+12\sqrt{93})^{1/3}}{12}-\frac{1}{3\,(116+12\sqrt{93})^{1/3}}+\frac{4}{3}$$

$$+\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{(116+12\sqrt{93})^{1/3}}{6}-\frac{2}{3\,(116+12\sqrt{93})^{1/3}}\right)}{2},\ -\frac{(116+12\sqrt{93})^{1/3}}{12}-\frac{1}{3\,(116+12\sqrt{93})^{1/3}}+\frac{4}{3}$$

$$-\frac{I\sqrt{3}\left(\frac{(116+12\sqrt{93})^{1/3}}{6}-\frac{2}{3\,(116+12\sqrt{93})^{1/3}}\right)}{2}$$

```
> p11 := t2^2/t1:
  p21 := -(r2^3*t1^3-4*r2^2*s1*t1^2*t2+5*r2*s1^2*t1*t2^2-3*s1^3*t2^3)/(t1^2*s1^3):
  q21 := -(r2^2*t1^2-2*r2*s1*t1*t2+3*s1^2*t2^2)/(s1^2*t1):
  s21 := -(2*r2*t1-3*s1*t2)/t1:
  zamproc(p11,q11,t1,0,p21,q21,t2,0, s1,s1,r2,s21):
```

$$0,\ -\frac{3\,(t1\,r2-s1\,t2)^2}{t1},\ 0,\ \frac{3\,(t1\,r2-s1\,t2)^2}{t1}$$

$$\frac{(t1\,r2-s1\,t2)^2}{t1},\ 0,\ 0,\ \frac{(t1\,r2-s1\,t2)^2}{t1}$$

$NSF^{4,1}_{32}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,3]], {p2,q2,r2,s2})]);
```

$$\left[\left\{p2=\frac{3\,p1^2\,t1^2-4\,p1\,q1^2\,t1-6\,p1\,q1\,t1\,t2-2\,p1\,t1\,t2^2+q1^4+3\,q1^3\,t2+4\,q1^2\,t2^2+3\,q1\,t2^3+t2^4}{t1^2\,(q1+2\,t2)},\,q2=-\frac{3\,p1\,t1-q1^2-2\,q1\,t2-t2^2}{t1},\,r2=-\frac{s1\,(q1+t2)}{t1},\,s2=\frac{s1\,(3\,p1\,t1-q1^2+t2^2)}{t1\,(q1+2\,t2)}\right\}\right]$$

```
> collect(3*p1^2*t1^2-4*p1*q1^2*t1-6*p1*q1*t1*t2-2*p1*t1*t2^2+q1^4+3*q1^3*t2+4*q1^2*t2^2+3*q1*t2^3+
  t2^4, [p1,t1], factor);
```

$$3\,p1^2\,t1^2-2\,(q1+t2)\,(2\,q1+t2)\,t1\,p1+(q1^2+q1\,t2+t2^2)\,(q1+t2)^2$$

```
> D = simplify(((2*(q1+t2))*(2*q1+t2))^2 - 12*(q1^2+q1*t2+t2^2)*(q1+t2)^2);
```

$$\mathrm{D}=4\,(q1+2\,t2)\,(q1-t2)\,(q1+t2)^2$$

```
> solve(3*z^2-(2*(q1+t2))*(2*q1+t2)*z+(q1^2+q1*t2+t2^2)*(q1+t2)^2, z);
```

$$\left(\frac{2\,q1}{3}+\frac{t2}{3}+\frac{\sqrt{q1^2+q1\,t2-2\,t2^2}}{3}\right)(q1+t2),\ \left(\frac{2\,q1}{3}+\frac{t2}{3}-\frac{\sqrt{q1^2+q1\,t2-2\,t2^2}}{3}\right)(q1+t2)$$

```
> p11 := theta/t1:
  p21 := (3*theta^2-(2*(q1+t2))*(2*q1+t2)*theta+(q1^2+q1*t2+t2^2)*(q1+t2)^2)/(t1^2*(q1+2*t2)):
  q21 := -(3*p11*t1-q1^2-2*q1*t2-t2^2)/t1:
  r21 :=  -s1*(q1+t2)/t1:
  s21 := s1*(3*p11*t1-q1^2+t2^2)/(t1*(q1+2*t2)):
  zamproc(p11,q1,t1,0,p21,q21,t2,0, s1,s1,r21,s21, full=false):
  pm1(p11,q1,t1,0,p21,q21,t2,0, s1,s1,r21,s21);
```

$$0,\,0,\,-\frac{3\,(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(q1^2+q1\,t2+t2^2-3\,\theta)\,s1^2}{t1\,(q1+2\,t2)^2},\,-\frac{3\,(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(q1^2+q1\,t2+t2^2-3\,\theta)\,s1^2}{t1\,(q1+2\,t2)^2}$$

$$\frac{(q1\,t2+t2^2+\theta)\,s1^2}{t1},\,0,\,0,\,\frac{(q1\,t2+t2^2+\theta)\,s1^2}{t1}$$

$$\mathit{Resultant\ of\ G:}\ \frac{(q1\,t2+t2^2+\theta)^2\,(q1^2+q1\,t2+t2^2-3\,\theta)^2}{t1^2\,(q1+2\,t2)^2}$$

```
> simplify(r21 - s21);
```

$$-\frac{3\,s1\,(q1\,t2+t2^2+\theta)}{t1\,(q1+2\,t2)}$$

```
> s11 := abs(t1)^(1/2)/abs(q1*t2+t2^2+theta)^(1/2):
  r21 :=  -s11*(q1+t2)/t1:
  s21 := s11*(3*p11*t1-q1^2+t2^2)/(t1*(q1+2*t2)):
  zamproc(p11,q1,t1,0,p21,q21,t2,0, s11,s11,r21,s21):
```

$$0,\,0,\,-\frac{3\,(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(q1^2+q1\,t2+t2^2-3\,\theta)\left|\frac{t1}{q1\,t2+t2^2+\theta}\right|}{t1\,(q1+2\,t2)^2},\,-\frac{3\,(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(q1^2+q1\,t2+t2^2-3\,\theta)\left|\frac{t1}{q1\,t2+t2^2+\theta}\right|}{t1\,(q1+2\,t2)^2}$$

$$\frac{(q1\,t2+t2^2+\theta)\left|\frac{t1}{q1\,t2+t2^2+\theta}\right|}{t1},\,0,\,0,\,\frac{(q1\,t2+t2^2+\theta)\left|\frac{t1}{q1\,t2+t2^2+\theta}\right|}{t1}$$

```
> u = 3*(3*theta-q1^2-q1*t2-t2^2)/(q1+2*t2)^2;
```

$$u=\frac{3\,(-q1^2-q1\,t2-t2^2+3\,\theta)}{(q1+2\,t2)^2}$$

$NSF^{4,1}_{36}$

```
> evala([solve([M[1,1],M[1,2],M[2,2],M[2,4]], {p2,q2,r2,s2})]);
```

$$\left[\left\{p2=\frac{p1^2\,t1^2-4\,p1\,q1^2\,t1-10\,p1\,q1\,t1\,t2-6\,p1\,t1\,t2^2-4\,q1^3\,t2-16\,q1^2\,t2^2-21\,q1\,t2^3-9\,t2^4}{t1^2\,(q1+2\,t2)},\,q2=-\frac{3\,p1\,t1+2\,q1\,t2+3\,t2^2}{t1},\,r2=-\frac{s1\,(2\,q1+3\,t2)}{t1},\,s2=\frac{s1\,(p1\,t1+2\,q1\,t2+3\,t2^2)}{t1\,(q1+2\,t2)}\right\}\right]$$

```
> collect(p1^2*t1^2-4*p1*q1^2*t1-10*p1*q1*t1*t2-6*p1*t1*t2^2-4*q1^3*t2-16*q1^2*t2^2-21*q1*t2^3-9*t2^4,
  [p1,t1], factor);
```

$$p1^2\,t1^2-2\,(2\,q1+3\,t2)\,(q1+t2)\,t1\,p1-t2\,(q1+t2)\,(2\,q1+3\,t2)^2$$

```
> solve(z^2-(2*(2*q1+3*t2))*(q1+t2)*z-t2*(q1+t2)*(2*q1+3*t2)^2, z);
```

$$\left(q1+t2+\sqrt{q1^2+3\,q1\,t2+2\,t2^2}\right)(2\,q1+3\,t2),\ \left(q1+t2-\sqrt{q1^2+3\,q1\,t2+2\,t2^2}\right)(2\,q1+3\,t2)$$

```
> p11 := theta/t1:
  p21 := (theta^2-(2*(2*q1+3*t2))*(q1+t2)*theta-t2*(q1+t2)*(2*q1+3*t2)^2)/(t1^2*(q1+2*t2)):
  q21 := -(3*p11*t1+2*q1*t2+3*t2^2)/t1:
  r21 := -s1*(2*q1+3*t2)/t1:
  s21 := s1*(p11*t1+2*q1*t2+3*t2^2)/(t1*(q1+2*t2)):
```

```
  zamproc(p11,q1,t1,0,p21,q21,t2,0, s1,s1,r21,s21):
  pm1(p11,q1,t1,0,p21,q21,t2,0, s1,s1,r21,s21);
```

$$0,\ 0,\ \frac{s1^2\,(2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta)\,(q1\,t2+t2^2+\theta)}{t1\,(q1+2\,t2)^2},\ \frac{s1^2\,(2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta)\,(q1\,t2+t2^2+\theta)}{t1\,(q1+2\,t2)^2}$$

$$\frac{(2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta)\,s1^2}{t1},\ 0,\ -\frac{(2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta)\,s1^2}{t1},\ 0$$

$$\mathit{Resultant\ of\ G:}\ \frac{(2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta)^2\,(q1\,t2+t2^2+\theta)^2}{t1^2\,(q1+2\,t2)^2}$$

```
> simplify(r21 - s21);
```

$$-\frac{s1\,(2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta)}{t1\,(q1+2\,t2)}$$

```
> s11 := abs(t1)^(1/2)/abs(2*q1^2+9*q1*t2+9*t2^2+theta)^(1/2):
  r21 := -s11*(2*q1+3*t2)/t1:
  s21 := s11*(p11*t1+2*q1*t2+3*t2^2)/(t1*(q1+2*t2)):
  zamproc(p11,q1,t1,0,p21,q21,t2,0, s11,s11,r21,s21):
```

$$0,\ 0,\ \frac{\left|\frac{t1}{2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta}\right|\,(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta)}{t1\,(q1+2\,t2)^2},$$

$$\frac{\left|\frac{t1}{2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta}\right|\,(q1\,t2+t2^2+\theta)\,(2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta)}{t1\,(q1+2\,t2)^2}$$

$$\frac{(2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta)\left|\frac{t1}{2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta}\right|}{t1},\ 0,\ \frac{(-2\,q1^2-9\,q1\,t2-9\,t2^2-\theta)\left|\frac{t1}{2\,q1^2+9\,q1\,t2+9\,t2^2+\theta}\right|}{t1},\ 0$$

```
> u = (q1*t2+t2^2+theta)/(q1+2*t2)^2;
```

$$u=\frac{q1\,t2+t2^2+\theta}{(q1+2\,t2)^2}$$

Результат замены с $r_1=s_1$ в исходной системе:

```
> M := zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, s1,s1,r2,s2):
```

$$\frac{-s1^2\,s2\,p1-s1\,s2\,r2\,q1+q2\,s1^2\,r2+t2\,s1\,r2^2-r2^2\,s2\,t1}{r2-s2},$$

$$\frac{(-s1\,q1-2\,r2\,t1)\,s2^2+\left(-r2^2\,t1-2\,s1\,(q1-t2)\,r2-3\,s1^2\left(p1-\frac{q2}{3}\right)\right)s2+2\,q2\,s1^2\,r2+t2\,s1\,r2^2}{r2-s2},$$

$$\frac{-s2^3\,t1+((-2\,q1+t2)\,s1-2\,r2\,t1)\,s2^2-3\left(\left(p1-\frac{2\,q2}{3}\right)s1+\frac{r2\,(q1-2\,t2)}{3}\right)s1\,s2+q2\,s1^2\,r2}{r2-s2},$$

$$-\frac{(s2^2\,t1+s1\,(q1-t2)\,s2+s1^2\,(p1-q2))\,s2}{r2-s2}$$

$$\frac{r2\,(r2^2\,t1+s1\,(q1-t2)\,r2+s1^2\,(p1-q2))}{r2-s2},\ \frac{r2^3\,t1+((2\,q1-t2)\,s1+2\,s2\,t1)\,r2^2+3\left(\left(p1-\frac{2\,q2}{3}\right)s1+\frac{s2\,(q1-2\,t2)}{3}\right)s1\,r2-s1^2\,s2\,q2}{r2-s2},$$

$$\frac{(s1\,q1+2\,s2\,t1)\,r2^2+(s1^2\,(3\,p1-q2)+2\,s1\,(q1-t2)\,s2+s2^2\,t1)\,r2-2\,s1^2\,s2\,q2-s1\,s2^2\,t2}{r2-s2},$$

$$\frac{p1\,r2\,s1^2+s1\,s2\,r2\,q1-s1^2\,s2\,q2+r2\,s2^2\,t1-s1\,s2^2\,t2}{r2-s2}$$

$NSF_3^{5,1}$

```
> evala([solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {t1,s1,r2,s2})]);
```

$$\left[\left\{r2=0,\ s1=s1,\ s2=-\frac{2\,s1\,q2}{t2},\ t1=-\frac{(p1\,t2-2\,q1\,q2+t2\,q2)\,t2}{4\,q2^2}\right\},\ \{r2=r2,\ s1=0,\ s2=s2,\ t1=0\},\ \left\{r2=-\frac{s1\,(3\,p1-q2)}{q1},\ s1=s1,\ s2=0,\ t1=\frac{(2\,p1\,q1-3\,p1\,t2+t2\,q2)\,q1}{(3\,p1-q2)^2}\right\},\ \left\{r2=\mathit{RootOf}((q1^2-q1\,t2)\,\_Z^2+2\,p1^2-2\,p1\,q2+(3\,p1\,q1-3\,p1\,t2-q1\,q2+t2\,q2)\,\_Z)\,s1,\ s1=s1,\ s2=-\frac{(\mathit{RootOf}((q1^2-q1\,t2)\,\_Z^2+2\,p1^2-2\,p1\,q2+(3\,p1\,q1-3\,p1\,t2-q1\,q2+t2\,q2)\,\_Z)\,q1+2\,p1)\,s1}{t2},\ t1=-\frac{1}{4\,p1^2}\,((q1-t2)\,(\mathit{RootOf}((q1^2-q1\,t2)\,\_Z^2+2\,p1^2-2\,p1\,q2+(3\,p1\,q1-3\,p1\,t2-q1\,q2+t2\,q2)\,\_Z)\,q1^2-\mathit{RootOf}((q1^2-q1\,t2)\,\_Z^2+2\,p1^2-2\,p1\,q2+(3\,p1\,q1-3\,p1\,t2-q1\,q2+t2\,q2)\,\_Z)\,q1\,t2+p1\,q1-3\,p1\,t2-q1\,q2+t2\,q2))\right\}\right]$$

```
> evala([solve([M[1,4],M[2,1],M[2,3]], {p1,q1,q2})]);
```

$$\left[\left\{p1=\frac{t1\,r2^2-r2\,t2\,s1+r2\,s2\,t1-s1\,s2\,t2}{2\,s1^2},\ q1=-\frac{r2\,t1-s1\,t2+s2\,t1}{s1},\ q2=\frac{t1\,r2^2-r2\,t2\,s1-r2\,s2\,t1-s1\,s2\,t2}{2\,s1^2}\right\}\right]$$

```
> {r2=-s1*(3*p1-q2)/q1, s1=s1, s2=0, t1=(2*p1*q1-3*p1*t2+q2*t2)*q1/(3*p1-q2)^2};
```

$$\left\{r2 = -\frac{s1\,(3\,p1 - q2)}{q1},\, s1 = s1,\, s2 = 0,\, t1 = \frac{(2\,p1\,q1 - 3\,p1\,t2 + t2\,q2)\,q1}{(3\,p1 - q2)^2}\right\}$$

```
> t11 := (2*p1*q1-3*p1*t2+q2*t2)*q1/(3*p1-q2)^2:
  r21 := -s1*(3*p1-q2)/q1:
  zamproc(p1,q1,t11,0,0,q2,t2,0, s1,s1,r21,0):
  pm1(p1,q1,t11,0,0,q2,t2,0, s1,s1,r21,0);
```

$$-\frac{3\,s1^2\left(-\frac{q2\,q1}{3} + t2\left(p1 - \frac{q2}{3}\right)\right)}{q1},\, -\frac{3\,s1^2\left(-\frac{2\,q2\,q1}{3} + t2\left(p1 - \frac{q2}{3}\right)\right)}{q1},\, q2\,s1^2,\, 0$$

$$0,\, -p1\,s1^2,\, 0,\, p1\,s1^2$$

$$\text{Resultant of G: } \frac{(3\,p1\,t2 - 2\,q2\,q1 - q2\,t2)\,p1^2\,(3\,p1\,t2 - q2\,q1 - q2\,t2)}{(3\,p1 - q2)^2}$$

```
> s11 := abs(p1)^(-1/2):
  r21 := -s11*(3*p1-q2)/q1:
  zamproc(p1,q1,t11,0,0,q2,t2,0, s11,s11,r21,0):
```

$$\frac{q1\,q2 - 3\,t2\left(p1 - \frac{q2}{3}\right)}{q1\,|p1|},\, \frac{2\,q1\,q2 - 3\,t2\left(p1 - \frac{q2}{3}\right)}{q1\,|p1|},\, \frac{q2}{|p1|},\, 0$$

$$0,\, -\frac{p1}{|p1|},\, 0,\, \frac{p1}{|p1|}$$

```
> u = -(q1*q2+t2*(q2-3*p1))/(q1*p1);
  v = -(2*q1*q2-t2*(q2-3*p1))/(q1*p1);
```

$$u = -\frac{q1\,q2 + t2\,(-3\,p1 + q2)}{p1\,q1}$$

$$v = -\frac{2\,q1\,q2 - t2\,(-3\,p1 + q2)}{p1\,q1}$$

```
> {r2=0, s1=s1, s2=-2*s1*q2/t2, t1=-(p1*t2-2*q1*q2+q2*t2)*t2/(4*q2^2)};
```

$$\left\{r2 = 0,\, s1 = s1,\, s2 = -\frac{2\,s1\,q2}{t2},\, t1 = -\frac{(p1\,t2 - 2\,q1\,q2 + t2\,q2)\,t2}{4\,q2^2}\right\}$$

```
> t11 := -(p1*t2-2*q1*q2+q2*t2)*t2/(4*q2^2):
  s21 := -2*s1*q2/t2:
  zamproc(p1,q1,t11,0,0,q2,t2,0, s1,s1,0,s21):
  pm1(p1,q1,t11,0,0,q2,t2,0, s1,s1,0,s21);
```

$$p1\,s1^2,\, \frac{s1^2\,(3\,p1\,t2 - 2\,q2\,q1 - q2\,t2)}{t2},\, \frac{2\,s1^2\left(\left(p1 - \frac{q2}{2}\right)t2 - q2\,q1\right)}{t2},\, 0$$

$$0,\, q2\,s1^2,\, 0,\, -q2\,s1^2$$

$$\text{Resultant of G: } \frac{p1\,t2\,(3\,p1\,t2 - 2\,q2\,q1 - q2\,t2)}{4}$$

```
> s11 := abs(q2)^(-1/2):
  s21 := -2*s11*q2/t2:
  zamproc(p1,q1,t11,0,0,q2,t2,0, s11,s11,0,s21):
```

$$\frac{p1}{|q2|},\, \frac{t2\,(3\,p1 - q2) - 2\,q1\,q2}{|q2|\,t2},\, \frac{(2\,p1 - q2)\,t2 - 2\,q1\,q2}{|q2|\,t2},\, 0$$

$$0,\, \frac{q2}{|q2|},\, 0,\, -\frac{q2}{|q2|}$$

```
> u = p1/q2;
  v = (t2*(3*p1-q2)-2*q1*q2)/(q2*t2);
```

$$u = \frac{p1}{q2}$$

$$v = \frac{t2\,(3\,p1 - q2) - 2\,q1\,q2}{t2\,q2}$$

```
> factor([{p1 = (r2^2*t1-r2*s1*t2+r2*s2*t1-s1*s2*t2)/(2*s1^2), q1 = -(r2*t1-s1*t2+s2*t1)/s1, q2 =
  (r2^2*t1-r2*s1*t2-r2*s2*t1-s1*s2*t2)/(2*s1^2)}]);
```

$$\left[\left\{p1 = \frac{(r2 + s2)\,(r2\,t1 - s1\,t2)}{2\,s1^2},\, q1 = -\frac{r2\,t1 - s1\,t2 + s2\,t1}{s1},\, q2 = \frac{t1\,r2^2 - r2\,t2\,s1 - r2\,s2\,t1 - s1\,s2\,t2}{2\,s1^2}\right\}\right]$$

```
> r21 := solve(q1 = -(r2*t1-s1*t2+s2*t1)/s1, r2):
  s21 := solve(p1 = (r21+s2)*(r21*t1-s1*t2)/(2*s1^2), s2);
  r21 := simplify(-(q1*s1-s1*t2+s21*t1)/t1);
```

$$s21 := \frac{s1\,(2\,p1\,t1 - q1^2 + q1\,t2)}{t1\,(q1 - t2)}$$

$$r21 := -\frac{s1\,(2\,p1\,t1 - q1\,t2 + t2^2)}{t1\,(q1 - t2)}$$

```
> simplify(r21-s21);
```

$$-\frac{s1\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)}{t1\,(q1 - t2)}$$

```
> r21 := -s1*(2*p1*t1-q1*t2+t2^2)/(t1*(q1-t2)):
  s21 := s1*(2*p1*t1-q1^2+q1*t2)/(t1*(q1-t2)):
  q21 := collect(simplify((r21^2*t1-r21*s1*t2-r21*s21*t1-s1*s21*t2)/(2*s1^2)), q1, factor);
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q21,t2,0, s1,s1,r21,s21):
  pm1(p1,q1,t1,0,0,q21,t2,0, s1,s1,r21,s21);
```

$$q21 := \frac{q1^3\,t2 + (-p1\,t1 - 2\,t2^2)\,q1^2 - t2\,(2\,p1\,t1 - t2^2)\,q1 + p1\,t1\,(4\,p1\,t1 + 3\,t2^2)}{t1\,(q1 - t2)^2}$$

$$\frac{(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)\,(p1\,t1 - q1\,t2 + t2^2)\,s1^2}{t1\,(q1 - t2)^2},\ \frac{s1^2\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)}{t1},\ -\frac{(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)\,(p1\,t1 - q1^2 + q1\,t2)\,s1^2}{t1\,(q1 - t2)^2},\ 0$$

$$0,\ -\frac{s1^2\,p1\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)}{(q1 - t2)^2},\ 0,\ \frac{s1^2\,p1\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)}{(q1 - t2)^2}$$

$$\textit{Resultant of G:}\ \frac{(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)^2\,p1^2\,(p1\,t1 - q1\,t2 + t2^2)}{(q1 - t2)^4}$$

```
> s11 := (q1-t2)/(abs(p1)^(1/2)*abs(4*p1*t1-q1^2+t2^2)^(1/2)):
  s21 := s11*(2*p1*t1-q1^2+q1*t2)/(t1*(q1-t2)):
  r21 := -s11*(2*p1*t1-q1*t2+t2^2)/(t1*(q1-t2)):
  zamproc(p1,q1,t1,0,0,q21,t2,0, s11,s11,r21,s21):
```

$$\frac{(p1\,t1 - q1\,t2 + t2^2)\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)\left|\frac{1}{p1\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)}\right|}{t1},\ \frac{\left|\frac{1}{p1\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)}\right|(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)\,(q1 - t2)^2}{t1},$$

$$-\frac{\left|\frac{1}{p1\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)}\right|(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)\,(p1\,t1 - q1^2 + q1\,t2)}{t1},\ 0$$

$$0,\ -p1\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)\left|\frac{1}{p1\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)}\right|,\ 0,\ p1\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)\left|\frac{1}{p1\,(4\,p1\,t1 - q1^2 + t2^2)}\right|$$

```
> u = -(p1*t1-q1*t2+t2^2)/(p1*t1);
  v = -(q1-t2)^2/(p1*t1);
```

$$u = -\frac{p1\,t1 - q1\,t2 + t2^2}{p1\,t1}$$

$$v = -\frac{(q1 - t2)^2}{p1\,t1}$$

$NSF_6^{5,1}$

```
> evala([solve([M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {p1,q1,s1,r2,s2})]);
```

$$\left[\left\{p1 = \frac{4\,q2\,(q1\,t2 - t1\,q2)}{3\,t2^2},\ q1 = q1,\ r2 = 0,\ s1 = s1,\ s2 = -\frac{2\,s1\,q2}{t2}\right\},\ \left\{p1 = \frac{(r2 + 2\,s2)\,q2\,(t1\,q2\,r2^3 + 3\,q2\,r2^2\,s2\,t1 + 2\,q2\,r2\,s2^2\,t1 + 2\,r2^2\,s2\,t2^2 + 3\,r2\,s2^2\,t2^2 + s2^3\,t2^2)}{2\,(2\,r2 + s2)^2\,t2^2\,s2^2},\ q1 = \frac{3\,t1\,q2\,r2^3 + 13\,q2\,r2^2\,s2\,t1 + 16\,q2\,r2\,s2^2\,t1 + 4\,q2\,s2^3\,t1 + 6\,r2^2\,s2\,t2^2 + 9\,r2\,s2^2\,t2^2 + 3\,s2^3\,t2^2}{2\,(2\,r2 + s2)\,t2\,s2\,(r2 + 2\,s2)},\ r2 = r2,\ s1 = -\frac{s2\,t2\,(2\,r2 + s2)}{q2\,(r2 + 2\,s2)},\ s2 = s2\right\}\right]$$

```
> evala([solve([M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {p1,t1,t2,s1,s2})]);
```

$$\left[\{p1 = p1,\ s1 = 0,\ s2 = s2,\ t1 = 0,\ t2 = t2\},\ \left\{p1 = -\frac{q1\,r2^2 + q1\,r2\,s2 - q2\,r2\,s1 - s1\,s2\,q2}{s1\,(3\,r2 + s2)},\ s1 = s1,\ s2 = s2,\ t1 = -\frac{s1\,(4\,q1\,r2\,s2 + 2\,q1\,s2^2 + 3\,q2\,r2\,s1 + 3\,s1\,s2\,q2)}{(3\,r2 + s2)\,s2\,(2\,r2 + s2)},\ t2 = -\frac{(r2 + 2\,s2)\,q2\,s1}{s2\,(2\,r2 + s2)}\right\},\ \left\{p1 = p1,\ s1 = \frac{r2\,q1}{q2},\ s2 = -3\,r2,\ t1 = -\frac{q1^2\,(3\,p1 - 5\,q2)}{3\,q2^2},\ t2 = \frac{5\,q1}{3}\right\}\right]$$

```
> evala([solve([M[1,3],M[2,1],M[2,3]], {p1,s1,r2,s2})]);
```

$$\left[\left\{p1 = \frac{4\,q2\,(q1\,t2 - t1\,q2)}{3\,t2^2},\ r2 = 0,\ s1 = s1,\ s2 = -\frac{2\,s1\,q2}{t2}\right\},\ \left\{p1 = -\frac{1}{9\,t1\,t2^2}\left(5\,q2^2\,\mathit{RootOf}(q2^2\,\_Z^3 - t1\,t2 + (4\,q1\,t2 - 5\,t1\,q2 - 2\,t2^2)\,\_Z + (2\,q1\,q2 + q2\,t2)\,\_Z^2)^2\,q1\,t2 - 5\,q2^3\,\mathit{RootOf}(q2^2\,\_Z^3 - t1\,t2 + (4\,q1\,t2 - 5\,t1\,q2 - 2\,t2^2)\,\_Z + (2\,q1\,q2 + q2\,t2)\,\_Z^2)^2\,t1 + 10\,q2\,\mathit{RootOf}(q2^2\,\_Z^3 - t1\,t2 + (4\,q1\,t2 - 5\,t1\,q2 - 2\,t2^2)\,\_Z + (2\,q1\,q2 + q2\,t2)\,\_Z^2)\,q1^2\,t2 - 10\,q2^2\,\mathit{RootOf}(q2^2\,\_Z^3 - t1\,t2 + (4\,q1\,t2 - 5\,t1\,q2 - 2\,t2^2)\,\_Z + (2\,q1\,q2 + q2\,t2)\,\_Z^2)\,q1\,t1 + 4\,\mathit{RootOf}(q2^2\,\_Z^3 - t1\,t2 + (4\,q1\,t2 - 5\,t1\,q2 - 2\,t2^2)\,\_Z + (2\,q1\,q2 + q2\,t2)\,\_Z^2)\,q1\,q2\,t2^2 - 4\,q2^2\,\mathit{RootOf}(q2^2\,\_Z^3 - t1\,t2\right.\right.$$

$$+(4\,q1\,t2-5\,t1\,q2-2\,t2^2)\;\_Z+(2\,q1\,q2+q2\,t2)\;\_Z^2)\;t1\,t2+18\,q1^2\,t2^2-43\,q1\,q2\,t1\,t2-9\,q1\,t2^3+25\,q2^2\,t1^2+9\,q2\,t1\,t2^2),\,r2=$$

$$-\frac{1}{3\,t1}\,(s2\,(RootOf(q2^2\;\_Z^3-t1\,t2+(4\,q1\,t2-5\,t1\,q2-2\,t2^2)\;\_Z+(2\,q1\,q2+q2\,t2)\;\_Z^2)^2\,q2+2\,RootOf(q2^2\;\_Z^3-t1\,t2+(4\,q1\,t2-5\,t1\,q2$$

$$-2\,t2^2)\;\_Z+(2\,q1\,q2+q2\,t2)\;\_Z^2)\;q1-RootOf(q2^2\;\_Z^3-t1\,t2+(4\,q1\,t2-5\,t1\,q2-2\,t2^2)\;\_Z+(2\,q1\,q2+q2\,t2)\;\_Z^2)\;t2+t1)),\,s1$$

$$=RootOf(q2^2\;\_Z^3-t1\,t2+(4\,q1\,t2-5\,t1\,q2-2\,t2^2)\;\_Z+(2\,q1\,q2+q2\,t2)\;\_Z^2)\;s2,\,s2=s2\}\Big]$$

```
> {p1=4*q2*(q1*t2-q2*t1)/(3*t2^2), q1=q1, r2=0, s1=s1, s2=-2*s1*q2/t2};
```

$$\left\{p1=\frac{4\,q2\,(q1\,t2-t1\,q2)}{3\,t2^2},\,q1=q1,\,r2=0,\,s1=s1,\,s2=-\frac{2\,s1\,q2}{t2}\right\}$$

```
> p11 := 4*q2*(q1*t2-q2*t1)/(3*t2^2): s21 := -2*s1*q2/t2:
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, s1,s1,0,s21):
```

$$\frac{4\,s1^2\,q2\,(q1\,t2-t1\,q2)}{3\,t2^2},\,\frac{q2\,s1^2\,(2\,q1\,t2-4\,t1\,q2-t2^2)}{t2^2},\,0,\,-\frac{2\,s1^2\left(q1\,t2-4\,t1\,q2-\frac{3}{2}\,t2^2\right)q2}{3\,t2^2}$$

$$0,\,q2\,s1^2,\,0,\,-q2\,s1^2$$

```
> s11 := abs(q2)^(-1/2): s21 := -2*s11*q2/t2:
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, s11,s11,0,s21):
```

$$\frac{4\,q2\,(q1\,t2-t1\,q2)}{3\,|q2|\,t2^2},\,\frac{q2\,(2\,q1\,t2-4\,t1\,q2-t2^2)}{|q2|\,t2^2},\,0,\,-\frac{2\left(q1\,t2-4\,t1\,q2-\frac{3}{2}\,t2^2\right)q2}{3\,|q2|\,t2^2}$$

$$0,\,\frac{q2}{|q2|},\,0,\,-\frac{q2}{|q2|}$$

```
> u = 4*q2*(q1*t2-q2*t1)/(3*q2*t2^2);
  v = q2*(2*q1*t2-4*q2*t1-t2^2)/(q2*t2^2);
```

$$u=\frac{4\,(q1\,t2-t1\,q2)}{3\,t2^2}$$

$$v=\frac{2\,q1\,t2-4\,t1\,q2-t2^2}{t2^2}$$

```
> {p1=p1, s1=r2*q1/q2, s2=-3*r2, t1=-q1^2*(3*p1-5*q2)/(3*q2^2), t2=5*q1*(1/3)};
```

$$\left\{p1=p1,\,s1=\frac{r2\,q1}{q2},\,s2=-3\,r2,\,t1=-\frac{q1^2\,(3\,p1-5\,q2)}{3\,q2^2},\,t2=\frac{5\,q1}{3}\right\}$$

```
> t11 := -q1^2*(3*p1-5*q2)/(3*q2^2): t21 := 5*q1*(1/3):
  s21 := -3*r2: s11 := r2*q1/q2:
  zamproc(p1,q1,t11,0,0,q2,t21,0, s11,s11,r2,s21):
```

$$\frac{8\,r2^2\,q1^2}{3\,q2},\,\frac{2\,r2^2\,q1^2\,(9\,p1-14\,q2)}{3\,q2^2},\,0,\,-\frac{6\,r2^2\,q1^2\,(p1-2\,q2)}{q2^2}$$

$$0,\,\frac{2\,p1\,r2^2\,q1^2}{q2^2},\,0,\,-\frac{2\,p1\,r2^2\,q1^2}{q2^2}$$

```
> r21 := q2/(sqrt(2)*q1*abs(p1)^(1/2)):
  s21 := -3*r21: s11 := r21*q1/q2:
  zamproc(p1,q1,t11,0,0,q2,t21,0, s11,s11,r21,s21):
```

$$\frac{4\,q2}{3\,|p1|},\,\frac{9\,p1-14\,q2}{3\,|p1|},\,0,\,\frac{-3\,p1+6\,q2}{|p1|}$$

$$0,\,\frac{p1}{|p1|},\,0,\,-\frac{p1}{|p1|}$$

```
> u = 4*q2/(3*p1); v = (9*p1-14*q2)/(3*p1);
```

$$u=\frac{4\,q2}{3\,p1}$$

$$v=\frac{9\,p1-14\,q2}{3\,p1}$$

```
> evala([solve(M[2,1], {p1,q1,t1,q2,t2,s1,r2,s2})]);
```

$$\Big[\{p1=p1,\,q1=q1,\,q2=q2,\,r2=0,\,s1=s1,\,s2=s2,\,t1=t1,\,t2=t2\},\,\Big\{p1=-\frac{q1\,r2\,s1-q2\,s1^2+r2^2\,t1-r2\,s1\,t2}{s1^2},\,q1=q1,\,q2=q2,\,r2=r2,\,s1=s1,\,s2=s2,$$

$$t1=t1,\,t2=t2\Big\}\Big]$$

```
> N := zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, s1,s1,0,s2):
```

$$p1\,s1^2,\,s1^2\,(3\,p1-q2)+q1\,s1\,s2,\,(3\,p1-2\,q2)\,s1^2+2\left(q1-\frac{t2}{2}\right)s2\,s1+s2^2\,t1,\,s2^2\,t1+s1\,(q1-t2)\,s2+s1^2\,(p1-q2)$$

$$0,\,q2\,s1^2,\,2\,q2\,s1^2+s1\,s2\,t2,\,s1\,(s1\,q2+s2\,t2)$$

```
> evala([solve([N[1,3], N[2,3]], {p1,s1,s2})]);
```

$$\left[\{p1=p1,\, s1=0,\, s2=0\},\, \left\{p1=\frac{4\,q2\,(q1\,t2-q2\,t1)}{3\,t2^2},\, s1=s1,\, s2=-\frac{2\,s1\,q2}{t2}\right\}\right]$$

```
> r21 := eta*s1: s21 := theta*s1:
  p11 := simplify(-(q1*r21*s1-q2*s1^2+r21^2*t1-r21*s1*t2)/s1^2);
  N := zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, s1,s1,r21,s21):
```

$$p11:=-\eta^2\,t1+(-q1+t2)\,\eta+q2$$

$$(\eta\,t2+q2)\,s1^2,\, s1^2\,((2\,\eta\,t1+q1)\,\theta+\eta\,t2+2\,q2),\, (3\,\eta\,t1\,\theta+t1\,\theta^2+2\,\theta\,q1-\theta\,t2+q2)\,s1^2,\, ((\eta+\theta)\,t1+q1-t2)\,\theta\,s1^2$$

$$0,\, -s1^2\,(2\,\eta^2\,t1+(q1-2\,t2)\,\eta-q2),\, -2\left(\frac{3\,\eta^2\,t1}{2}+\left(\frac{\theta\,t1}{2}+q1-\frac{3\,t2}{2}\right)\eta-\frac{\theta\,t2}{2}-q2\right)s1^2,\, -s1^2\,(\eta^2\,t1+(\theta\,t1+q1-t2)\,\eta-\theta\,t2-q2)$$

```
> evala([solve(N[1,3], {q1,t1,t2,s1,eta,theta})]);
```

$$\left[\{\eta=\eta,\, q1=q1,\, s1=0,\, t1=t1,\, t2=t2,\, \theta=\theta\},\, \left\{\eta=-\frac{t1\,\theta^2+2\,\theta\,q1-\theta\,t2+q2}{3\,\theta\,t1},\, q1=q1,\, s1=s1,\, t1=t1,\, t2=t2,\, \theta=\theta\right\}\right]$$

```
> eta1 := -(t1*theta^2+2*q1*theta-t2*theta+q2)/(3*theta*t1):
  r21 := eta1*s1: s21 := theta*s1:
  p11 := simplify(-(q1*r21*s1-q2*s1^2+r21^2*t1-r21*s1*t2)/s1^2);
  N := zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, s1,s1,r21,s21):
  pm1(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0);
```

$$p11:=\frac{-t1^2\,\theta^4-t1\,(q1+t2)\,\theta^3+(2\,q1^2-5\,q1\,t2+7\,q2\,t1+2\,t2^2)\,\theta^2-q2\,(q1+t2)\,\theta-q2^2}{9\,t1\,\theta^2}$$

$$-\frac{s1^2\,(t1\,t2\,\theta^2+2\,q1\,t2\,\theta-3\,q2\,t1\,\theta-t2^2\,\theta+q2\,t2)}{3\,t1\,\theta},\, -\frac{s1^2\,(2\,\theta^3\,t1^2+t1\,(q1-t2)\,\theta^2+(2\,q1\,t2-4\,q2\,t1-t2^2)\,\theta+q2\,t2)}{3\,t1\,\theta},\, 0,$$

$$\frac{s1^2\,(2\,t1\,\theta^2+(q1-2\,t2)\,\theta-q2)}{3}$$

$$0,\, -\frac{2\,s1^2\left(t1^2\,\theta^4+\frac{5\,t1\left(q1+\frac{2\,t2}{5}\right)\theta^3}{2}+\left(-\frac{5\,q2\,t1}{2}+(q1+4\,t2)\left(q1-\frac{t2}{2}\right)\right)\theta^2+\frac{5\,q2\left(q1+\frac{2\,t2}{5}\right)\theta}{2}+q2^2\right)}{9\,t1\,\theta^2},$$

$$-\frac{(-t1\,t2\,\theta^3+4\,q1\,t2\,\theta^2-5\,q2\,t1\,\theta^2-2\,t2^2\,\theta^2+2\,q1\,q2\,\theta+q2\,t2\,\theta+q2^2)\,s1^2}{3\,t1\,\theta^2},$$

$$\frac{2\left(t1^2\,\theta^4+\frac{5\,t1\,(q1+t2)\,\theta^3}{2}+\left(5\,q2\,t1+\left(q1-\frac{t2}{2}\right)(q1-2\,t2)\right)\theta^2-\frac{q2\,(q1+t2)\,\theta}{2}-\frac{q2^2}{2}\right)s1^2}{9\,t1\,\theta^2}$$

Resultant of G: $\frac{1}{81\,t1^2\,\theta^4}\Big((-t1\,t2\,\theta^2+q1\,t2\,\theta-3\,q2\,t1\,\theta-2\,t2^2\,\theta-q2\,t2)\,(t1\,t2\,\theta^2+2\,q1\,t2\,\theta-3\,q2\,t1\,\theta-t2^2\,\theta+q2\,t2)\,(-t1^2\,\theta^4-q1\,t1\,\theta^3-t1\,t2\,\theta^3$ $+2\,q1^2\,\theta^2-5\,q1\,t2\,\theta^2+7\,q2\,t1\,\theta^2+2\,t2^2\,\theta^2-q1\,q2\,\theta-q2\,t2\,\theta-q2^2)\Big)$

```
> collect(-(-t1*t2*theta^3+4*q1*t2*theta^2-5*q2*t1*theta^2-2*t2^2*theta^2+2*q1*q2*theta+q2*t2*theta+
  q2^2), theta, factor);
```

$$t1\,t2\,\theta^3+(-4\,q1\,t2+5\,q2\,t1+2\,t2^2)\,\theta^2-q2\,(2\,q1+t2)\,\theta-q2^2$$

```
> b2+d2 = collect(simplify(-(2*s1^2*(t1^2*theta^4+5*t1*(q1+2*t2*(1/5))*theta^3*(1/2)+(-5*q2*t1*(1/2)+
  (q1+4*t2)*(q1-(1/2)*t2))*theta^2+5*q2*(q1+2*t2*(1/5))*theta*(1/2)+q2^2)) + 2*s1^2*(t1^2*theta^4+5*t1*
  (q1+t2)*theta^3*(1/2)+(5*q2*t1+(q1-(1/2)*t2)*(q1-2*t2))*theta^2-(1/2)*q2*(q1+t2)*theta-(1/2)*q2^2)),
  theta,factor);
```

$$b2+d2=3\,s1^2\,t1\,t2\,\theta^3-3\,(4\,q1\,t2-5\,q2\,t1-2\,t2^2)\,s1^2\,\theta^2-3\,q2\,(2\,q1+t2)\,s1^2\,\theta-3\,s1^2\,q2^2$$

$NSF_7^{5,1}$

```
> evala([solve(M[1,4], {p1,q1,t1,q2,t2,s1,r2,s2})]);
```

$$\left[\{p1=p1,\, q1=q1,\, q2=q2,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=0,\, t1=t1,\, t2=t2\},\, \left\{p1=-\frac{q1\,s1\,s2-q2\,s1^2-s1\,s2\,t2+s2^2\,t1}{s1^2},\, q1=q1,\, q2=q2,\, r2=r2,\, s1=s1,\, s2=s2,\, t1=t1,\, t2=t2\right\}\right]$$

```
> N := zamproc(p1,q1,t1,0,0,q2,t2,0, s1,s1,r2,0):
```

$$s1\,(s1\,q2+r2\,t2),\, 2\,q2\,s1^2+r2\,s1\,t2,\, q2\,s1^2,\, 0$$

$$r2^2\,t1+s1\,(q1-t2)\,r2+s1^2\,(p1-q2),\, (3\,p1-2\,q2)\,s1^2+2\left(q1-\frac{t2}{2}\right)r2\,s1+r2^2\,t1,\, s1^2\,(3\,p1-q2)+q1\,r2\,s1,\, p1\,s1^2$$

```
> evala([solve([N[2,2],N[2,3]], {t1,s1,r2})]);
```

$$\left[\{r2=0,\, s1=0,\, t1=t1\},\, \{r2=r2,\, s1=0,\, t1=0\},\, \left\{r2=-\frac{s1\,(3\,p1-q2)}{q1},\, s1=s1,\, t1=\frac{q1\,(3\,p1\,q1-3\,p1\,t2+q2\,t2)}{9\,p1^2-6\,p1\,q2+q2^2}\right\}\right]$$

```
> t11 := q1*(3*p1*q1-3*p1*t2+q2*t2)/(9*p1^2-6*p1*q2+q2^2):
  r21 := -s1*(3*p1-q2)/q1:
  zamproc(p1,q1,t11,0,0,q2,t2,0, s1,s1,r21,0):
```

$$-\frac{3\,s1^2\left(-\frac{q2\,q1}{3}+t2\left(p1-\frac{q2}{3}\right)\right)}{q1},\ -\frac{3\left(-\frac{2\,q2\,q1}{3}+t2\left(p1-\frac{q2}{3}\right)\right)s1^2}{q1},\ q2\,s1^2,\ 0$$

$$p1\,s1^2,\ 0,\ 0,\ p1\,s1^2$$

```
> s11 := abs(p1)^(-1/2): r21 := -s11*(3*p1-q2)/q1:
  zamproc(p1,q1,t11,0,0,q2,t2,0, s11,s11,r21,0):
```

$$\frac{q2\,q1-3\,t2\left(p1-\frac{q2}{3}\right)}{q1\,|p1|},\ \frac{2\,q2\,q1-3\,t2\left(p1-\frac{q2}{3}\right)}{q1\,|p1|},\ \frac{q2}{|p1|},\ 0$$

$$\frac{p1}{|p1|},\ 0,\ 0,\ \frac{p1}{|p1|}$$

```
> u = (q2*q1-3*t2*(p1-(1/3)*q2))/(q1*p1);
  v = (2*q2*q1-3*t2*(p1-(1/3)*q2))/(q1*p1);
```

$$u=\frac{q2\,q1-3\,t2\left(p1-\frac{q2}{3}\right)}{p1\,q1}$$

$$v=\frac{2\,q2\,q1-3\,t2\left(p1-\frac{q2}{3}\right)}{p1\,q1}$$

```
> r21 := theta*s1: s21 := eta*s1:
  p11 := simplify(-(q1*s1*s21-q2*s1^2-s1*s21*t2+s21^2*t1)/s1^2);
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, s1,s1,r21,s21):
```

$$p11:=-\eta^2\,t1+(-q1+t2)\,\eta+q2$$

$$-s1^2\left(\eta^2\,t1+(t1\,\theta+q1-t2)\,\eta-t2\,\theta-q2\right),\ -2\,s1^2\left(\frac{3\,\eta^2\,t1}{2}+\left(\frac{t1\,\theta}{2}+q1-\frac{3\,t2}{2}\right)\eta-\frac{t2\,\theta}{2}-q2\right),\ -s1^2\left(2\,\eta^2\,t1+(q1-2\,t2)\,\eta-q2\right),\ 0$$

$$s1^2\left((\eta+\theta)\,t1+q1-t2\right)\theta,\ \left(3\,\eta\,t1\,\theta+t1\,\theta^2+2\,\theta\,q1-t2\,\theta+q2\right)s1^2,\ \left((2\,t1\,\eta+q1)\,\theta+\eta\,t2+2\,q2\right)s1^2,\ (\eta\,t2+q2)\,s1^2$$

```
> eta1 := solve(3*eta*t1*theta+t1*theta^2+2*q1*theta-t2*theta+q2, eta);
```

$$\eta 1:=-\frac{t1\,\theta^2+2\,\theta\,q1-t2\,\theta+q2}{3\,\theta\,t1}$$

```
> r21 := theta*s1: s21 := eta1*s1:
  p11 := simplify(-(q1*s1*s21-q2*s1^2-s1*s21*t2+s21^2*t1)/s1^2);
  zamproc(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0, s1,s1,r21,s21):
  pm1(p11,q1,t1,0,0,q2,t2,0);
```

$$p11:=\frac{-t1^2\,\theta^4-t1\,(q1+t2)\,\theta^3+(2\,q1^2-5\,q1\,t2+7\,q2\,t1+2\,t2^2)\,\theta^2-q2\,(q1+t2)\,\theta-q2^2}{9\,t1\,\theta^2}$$

$$\frac{2\left(t1^2\,\theta^4+\frac{5\,t1\,(q1+t2)\,\theta^3}{2}+\left(5\,q2\,t1+\left(q1-\frac{t2}{2}\right)(q1-2\,t2)\right)\theta^2-\frac{q2\,(q1+t2)\,\theta}{2}-\frac{q2^2}{2}\right)s1^2}{9\,t1\,\theta^2},$$

$$-\frac{\left(-t1\,t2\,\theta^3+4\,q1\,t2\,\theta^2-5\,q2\,t1\,\theta^2-2\,t2^2\,\theta^2+2\,q1\,q2\,\theta+q2\,t2\,\theta+q2^2\right)s1^2}{3\,t1\,\theta^2},$$

$$-\frac{2\,s1^2\left(t1^2\,\theta^4+\frac{5\,t1\left(q1+\frac{2\,t2}{5}\right)\theta^3}{2}+\left(-\frac{5\,q2\,t1}{2}+(q1+4\,t2)\left(q1-\frac{t2}{2}\right)\right)\theta^2+\frac{5\,q2\left(q1+\frac{2\,t2}{5}\right)\theta}{2}+q2^2\right)}{9\,t1\,\theta^2},\ 0$$

$$\frac{s1^2\left(2\,t1\,\theta^2+(q1-2\,t2)\,\theta-q2\right)}{3},\ 0,\ -\frac{s1^2\left(2\,\theta^3\,t1^2+t1\,(q1-t2)\,\theta^2+(2\,q1\,t2-4\,q2\,t1-t2^2)\,\theta+q2\,t2\right)}{3\,t1\,\theta},$$

$$-\frac{s1^2\left(t1\,t2\,\theta^2+2\,q1\,t2\,\theta-3\,q2\,t1\,\theta-t2^2\,\theta+q2\,t2\right)}{3\,t1\,\theta}$$

Resultant of G: $\frac{1}{81\,t1^2\,\theta^4}\Big(\left(-t1\,t2\,\theta^2+q1\,t2\,\theta-3\,q2\,t1\,\theta-2\,t2^2\,\theta-q2\,t2\right)\left(t1\,t2\,\theta^2+2\,q1\,t2\,\theta-3\,q2\,t1\,\theta-t2^2\,\theta+q2\,t2\right)\left(-t1^2\,\theta^4-q1\,t1\,\theta^3-t1\,t2\,\theta^3\right.$

$\left.+2\,q1^2\,\theta^2-5\,q1\,t2\,\theta^2+7\,q2\,t1\,\theta^2+2\,t2^2\,\theta^2-q1\,q2\,\theta-q2\,t2\,\theta-q2^2\right)\Big)$

```
> a2-d2=simplify((1/3)*s1^2*(2*t1*theta^2+(q1-2*t2)*theta-q2)+(s1^2*(t1*t2*theta^2+2*q1*t2*theta-3*q2*
  t1*theta-t2^2*theta+q2*t2)/(3*t1*theta)));
```

$$a2-d2=\frac{s1^2\left(2\,\theta^3\,t1^2+t1\,(q1-t2)\,\theta^2+(2\,q1\,t2-4\,q2\,t1-t2^2)\,\theta+q2\,t2\right)}{3\,t1\,\theta}$$