ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОДУ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ – II

В. В. БАСОВ, Е. В. ФЕДОРОВА

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28,
Санкт-Петербургский Государственный университет,
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru, fev.math@gmail.com

Аннотация

Рассматриваются вещественные двумерные автономные системы ОДУ, правая часть которых представляет собой векторный однородный многочлен третьего порядка с компонентами, имеющими общий множитель.

Разработаны структурные и нормировочные принципы, позволяющие после разбиения таких систем на классы эквивалентности относительно линейных неособых замен выделить в каждом классе каноническую форму – наиболее простой многочлен с точки зрения использования его в качестве невозмущенной части в формальных или аналитических системах, подлежащих сведению к обобщенной нормальной форме.

Для каждой канонической формы в явном виде приведены условия на коэффициенты исходной однородной кубической системы и линейная замена, сводящая ее при этих условиях к системе с выбранной канонической формой в правой части.

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [1], поэтому в ней сохраняются обозначения и продолжается нумерация пунктов, формул, теорем, замечаний, утверждений, следствий и списков.

6 Канонические формы кубической системы с общим множителем первой степени

6.1 Выделение канонических структурных форм

Система (31) или (14) $\dot{x} = P(x)$ при $l = 1$ с учетом предложения 4 $(\alpha = 1)$ имеет вид

$$\dot{x} = (x_1 + \beta x_2)\begin{pmatrix} p_1 x_1^2 + q_1 x_1 x_2 + t_1 x_2^2 \\ p_2 x_1^2 + q_2 x_1 x_2 + t_2 x_2^2 \end{pmatrix} = P_0^1(x)\, G\, q^{[2]}(x), \quad G = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & t_2 \end{pmatrix}, \tag{67}$$

причем $R_2 = \delta_{pt}^2 - \delta_{pq}\delta_{qt} \neq 0,$ так как $l = 1,$ а значит, $p_1^2 + p_2^2,\ t_1^2 + t_2^2 \neq 0.$

По теореме 2 любая замена (16) $x = Ly$ с $L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}$ $(\det L = \delta \neq 0)$ переводит систему (67) в систему (17) $\dot{y} = \widetilde{P}(y)$ вида (33), т. е. в систему

$$\dot{y} = (\tilde{\alpha} y_1 + \tilde{\beta} y_2)\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 y_1^2 + \tilde{q}_1 y_1 y_2 + \tilde{t}_1 y_2^2 \\ \tilde{p}_2 y_1^2 + \tilde{q}_2 y_1 y_2 + \tilde{t}_2 y_2^2 \end{pmatrix} = \widetilde{P}_0^1(y)\, \widetilde{G}\, q^{[2]}(y), \quad \widetilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 & \tilde{t}_1 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 & \tilde{t}_2 \end{pmatrix}, \tag{68}$$

где согласно (32) $\tilde{\alpha} = r_1 + \beta r_2,\ \tilde{\beta} = s_1 + \beta s_2\ \ (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 \neq 0),\ \ \widetilde{R}_2 = \delta_{\tilde{p}\tilde{t}}^2 - \delta_{\tilde{p}\tilde{q}}\delta_{\tilde{q}\tilde{t}} = \delta^2 R_2 \neq 0,$ $\widetilde{G} = L^{-1} G M,$ и с учетом (17) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\tilde{p}_1 & \tilde{\alpha}\tilde{q}_1 + \tilde{\beta}\tilde{p}_1 & \tilde{\alpha}\tilde{t}_1 + \tilde{\beta}\tilde{q}_1 & \tilde{\beta}\tilde{t}_1 \\ \tilde{\alpha}\tilde{p}_2 & \tilde{\alpha}\tilde{q}_2 + \tilde{\beta}\tilde{p}_2 & \tilde{\alpha}\tilde{t}_2 + \tilde{\beta}\tilde{q}_2 & \tilde{\beta}\tilde{t}_2 \end{pmatrix}.$

Матрица $\widetilde{A}$ в системе (68) существенно упростится, если в замене (16) положить $s_1 = -\beta s_2,$ получая $\tilde{\beta} = 0.$ Поэтому сразу перейдем от исходной системы (67) при помощи замены (16) с $L = \widetilde{L},$ где

$$\widetilde{L}: \quad \tilde{r}_1 = 1,\ \tilde{s}_1 = -\beta,\ \tilde{r}_2 = 0,\ \tilde{s}_2 = 1 \quad (\tilde{\delta} = 1),$$

к системе (68) следующего вида

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 & \tilde{t}_1 & 0 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 & \tilde{t}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = (1, 0), \quad \widetilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 & \tilde{t}_1 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 & \tilde{t}_2 \end{pmatrix}, \tag{69}$$

в которой $\tilde{p}_1 = p_1 + \beta p_2,\ \tilde{q}_1 = q_1 + \beta(q_2 - 2p_1) - 2\beta^2 p_2,\ \tilde{t}_1 = t_1 + \beta(t_2 - q_1) - \beta^2 q_2 + \beta^3 p_2,$ $\tilde{p}_2 = p_2,\ \tilde{q}_2 = q_2 - 2\beta p_2,\ \tilde{t}_2 = t_2 - \beta q_2 + \beta^2 p_2 \quad (\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 \neq 0,\ \tilde{t}_1^2 + \tilde{t}_2^2 \neq 0,\ \widetilde{R}_2 = R_2 \neq 0).$

Очевидным достоинством системы (69), помимо равенства нулю $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2,$ является совпадение первых трех столбцов матрицы $\widetilde{A}$ с матрицей $\widetilde{G}.$

В дальнейшем система (69) будет использоваться в качестве исходной, а возврат к коэффициентам системы (67) всегда можно осуществить по формулам:

$$\begin{aligned} &p_1 = \tilde{p}_1 - \beta\tilde{p}_2, && q_1 = \tilde{q}_1 + \beta(2\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2) - 2\beta^2\tilde{p}_2, && t_1 = \tilde{t}_1 + \beta(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2) - \beta^2(2\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2) - 2\beta^3\tilde{p}_2, \\ &p_2 = \tilde{p}_2, && q_2 = \tilde{q}_2 + 2\beta\tilde{p}_2, && t_2 = \tilde{t}_2 + \beta\tilde{q}_2 + \beta^2\tilde{p}_2. \end{aligned}$$

Пусть произвольная замена (16) сводит систему (69) к системе $\breve A = \begin{pmatrix} \breve a_1 & \breve b_1 & \breve c_1 & \breve d_1 \\ \breve a_2 & \breve b_2 & \breve c_2 & \breve d_2 \end{pmatrix}$ с матрицей $\breve G = \begin{pmatrix} \breve p_1 & \breve q_1 & \breve t_1 \\ \breve p_2 & \breve q_2 & \breve t_2 \end{pmatrix}$ и вектором коэффициентов общего множителя $(\breve\alpha, \breve\beta)$. Их коэффициенты вычисляются по формулам, аналогичным формулам для системы (68).

Список 10. $NSF^{m,1}$ системы (14) до $SF_8^{5,1}$ включительно $(\sigma, \kappa = \pm 1,\ R_2 \neq 0)$:
I. 26 форм с $\breve\alpha = 1,\ \breve\beta = 0$ $(\breve d_1, \breve d_2 = 0,\ \breve G$ – три первых столбца соответствующей $NSF)$

$NSF_2^{2,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_3,\ \breve R_2 = 1;$ $\qquad NSF_9^{2,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_7,\ \breve R_2 = 1;$

$NSF_3^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_5,\ \breve R_2 = 1;$ $\qquad NSF_{a,5}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 1 & 0 \end{pmatrix}_6,\ \breve R_2 = 1;$

$NSF_6^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_6,\ \breve R_2 = u^2;$ $\qquad NSF_{a,8}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_7,\ \breve R_2 = u^2;$

$NSF_{9,\kappa}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_7,\ \breve R_2 = \kappa u;$ $\qquad NSF_{a,14,\kappa}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_8,\ \breve R_2 = \kappa u;$

$NSF_{17}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8,\ \breve R_2 = 1;$ $\qquad NSF_{a,19}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_9,\ \breve R_2 = 1;$

$NSF_{21}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_9,\ \breve R_2 = 1;$ $\qquad NSF_{a,22}^{3,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10},\ \breve R_2 = 1;$

$NSF_5^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_8,\ \breve R_2 = u^2;$ $\qquad NSF_7^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_8,\ \breve R_2 = u(u-v);$

$NSF_{11}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 1 & v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_9,\ \breve R_2 = uv;$ $\qquad NSF_{a,12}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_9,\ \breve R_2 = u(u+v);$

$NSF_{a,14}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 & 0 \end{pmatrix}_9,\ \breve R_2 = v(u^2+v);$ $\qquad NSF_{a,15}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & v & u & 0 \end{pmatrix}_{10},\ \breve R_2 = u^2;$

$NSF_{19}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10},\ \breve R_2 = 1;$ $\qquad NSF_{a,20}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} v & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_{10},\ \breve R_2 = (uv-1)^2;$

$NSF_{a,24}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ v & 1 & u & 0 \end{pmatrix}_{11},\ \breve R_2 = uv;$ $\qquad NSF_{a,27}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} v & 0 & 1 & 0 \\ 1 & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11},\ \breve R_2 = u^2v+1;$

$NSF_{a,29}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ v & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_{11},\ \breve R_2 = v(u+v);$ $\qquad NSF_{a,30}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & v & u & 0 \end{pmatrix}_{12},\ \breve R_2 = 1;$

$NSF_{a,33}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ v & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{12},\ \breve R_2 = v(v-u);$ $\qquad NSF_8^{5,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & w & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{11},\ \breve R_2 = u(u-v+w).$

II. 15 форм с $\breve\alpha = 1,\ \breve\beta = 1$

$$NSF_1^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_6, \qquad \breve G = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \breve R_2 = u^2;$$

$$NSF_3^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_7, \qquad \breve G = \sigma \begin{pmatrix} u & -u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \breve R_2 = u^2;$$

$$NSF_6^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&u\\0&0&1&1\end{pmatrix}_8,\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}u&-u&u\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_{13}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&u\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_9,\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}u&-u&u\\0&1&-1\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_{22}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&u\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{10},\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}u&-u&u\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_{28}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&-u\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{11},\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&-u\\1&-1&1\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_{32}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&u\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{12},\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u\\1&-1&1\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_{36}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&u\\1&0&-1&0\end{pmatrix}_{13},\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u\\1&-1&0\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_{37}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&u\\1&1&0&0\end{pmatrix}_{14},\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_1^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_9,\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_2^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&u-v\\0&0&1&1\end{pmatrix}_{10},\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&u-v\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_3^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_{10},\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&0\\0&1&-1\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=uv;$$

$$NSF_5^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&v&u+v\\0&0&1&1\end{pmatrix}_{11},\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}u&-u&u+v\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_6^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&u-v\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_{11},\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&u-v\\0&1&-1\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2;$$

$$NSF_7^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{11},\qquad \breve{G}=\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&0\\1&-1&1\end{pmatrix},\qquad \breve{R}_2=u^2-uv+v^2.$$

Утверждение 8. *$NSF_{15}^{4,1}, NSF_{20}^{4,1}$ из списка 10,I и $NSF_6^{4,1}$, $NSF_{22}^{4,1}$, $NSF_{37}^{4,1}$, $NSF_1^{5,1}$, $NSF_2^{5,1}$, $NSF_5^{5,1}$ из списка 10,II — неканонические, так как при всех значениях своих параметров заменой (16) сводятся согласно с. п. к предшествующим структурным формам из списка 10,I. Оставшиеся в списке 10,I двадцать четыре NSF и в списке 10,II девять NSF являются каноническими структурными формами.*

Доказательство. 1) $NSF_6^{4,1}$ заменой с $s_1=-s_2$, $r_2=0$ сводится к $SF_5^{4,1}$.

2) $NSF_{a,15}^{4,1}$ заменой с $r_1=-2uv^{-1}r_2$, $s_1=0$ сводится к $SF_{a,8}^{3,1}$.

3) $NSF_{a,20}^{4,1}$ заменой с $s_1=0$, $r_2=ur_1$ сводится к $SF_{19}^{4,1}$.

4) $NSF_{22}^{4,1}$ заменой с $s_1=-s_2$, $r_2=r_1$ сводится к $SF_{a,20}^{4,1}$.

5) $NSF_{37}^{4,1}$ заменой с $s_1=-s_2$, $r_2=r_1$ при $u=1$ сводится к $SF_{9,\kappa}^{3,1}$, при $u=-1$ сводится к $SF_{a,14,\kappa}^{3,1}$, а при $u\neq\pm1$ заменой с $s_1=-s_2$, $r_1=ur_2$ сводится к $SF_{a,27}^{4,1}$.

6) $NSF_1^{5,1}$ $(v\neq u)$, $NSF_2^{5,1}$ $(v\neq u)$ и $SF_5^{5,1}$ $(v\neq -u)$ заменой с $s_1=-s_2$, $r_2=0$ сводятся к $SF_5^{4,1}$.

Попытка свести любую другую NSF из списка 10 к предшествующей приводит к необходимости наложить какие-либо ограничения на ее элементы, что по определению 7 означает, что данная NSF является канонической. □

6.2 Выделение канонических форм

Сначала будем последовательно сводить имеющиеся тридцать три $CSF_i^{m,1}$ ко всем предшествующим каноническим структурным формам при всех значениях параметров, позволяющих это сделать, доказывая, тем самым, что при остальных значениях параметров каждая исследуемая каноническая структурная форма линейно не эквивалентна предшествующим, а значит, в конечном итоге, все они попарно линейно не эквивалентны.

Утверждение 9. *Только при указанных ниже значениях параметров и только каждая из приведенных ниже двадцати одной из двадцати девяти* $CSF_i^{m,1}$ *с* $m = 2, 3, 4$ *может быть сведена известными заменами* (16) *к каким-либо предшествующим согласно* с. п. *каноническим структурным формам.*

Доказательство. 1) $CSF_5^{3,1}$ при $u = 2$ заменой с $r_1 = 1,\ s_1, r_2 = -1,\ s_2 = 0$ сводится к $CF_2^{2,1}$.

2) $CSF_8^{3,1}$ при $u = u_* \leq 1/4$ заменой с $r_1 = u_*^{-1},\ s_1 = 2(1 \pm (1-4u_*)^{1/2})^{-1},\ r_2 = 0,$ $s_2 = 1$ сводится к $CF_5^{3,1}$ с $u = 4u_*(1 \pm (1-4u_*)^{1/2})^{-1}$.

3) $CSF_{14,\kappa}^{3,1}$ при $u = 1/2,\ \kappa = 1,\ \sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1 = 2^{1/4}\sigma_*,\ s_1 = 2^{5/4}\sigma_*,\ r_2 = 2^{-1/4},$ $s_2 = 0$ сводится к $CSF_3^{3,1}$ с $\sigma = 1,\ u = 2$.

4) $CSF_{21}^{3,1}$ при $u = 2$ заменой с $r_1, s_2 = 1,\ s_1 = 0,\ r_2 = -1$ сводится к $CSF_6^{3,1}$ с $u = -1$.

5) $CSF_1^{4,1}$ при $u = 1$ заменой с $r_1, r_2 = 1/2,\ -s_1, s_2 = 1/\sqrt{2}$ сводится к $CSF_{9,+}^{3,1}$ с $u = 1/2$; при $u = -1,\ \sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1, s_1 = -1,\ r_2 = 0,\ s_2 = 1$ она сводится к $CSF_3^{3,1}$ с $\sigma = -\sigma_*,\ u = 2$.

6) $CSF_3^{4,1}$ при $u = -1/2,\ \sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1 = \sqrt{2},\ s_1 = 1/\sqrt{2},\ r_2 = 0,\ s_2 = -1/\sqrt{2}$ сводится к $CSF_3^{3,1}$ с $\sigma = -\sigma_*,\ u = 3/2$; при $u = -2,\ \sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1 = \sqrt{2}/6,$ $s_1 = \sqrt{2}/2,\ r_2 = \sqrt{2}/6,\ s_2 = 0$ она сводится к $CSF_1^{4,1}$ с $\sigma = -\sigma_*,\ u = -1/3$.

7) $CSF_5^{4,1}$ при $u = 1,\ v = -2$ заменой с $r_1 = 0,\ s_1, r_2, s_2 = 1$ сводится к $CSF_{22}^{3,1}$ с $u = 2$; при $u = -1/9,\ v = 1$ заменой $r_2 = 0,\ s_2 = s_1/3$ она сводится к $SF_3^{4,1}$; при $u = v(v-2)/4,\ \sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1, s_1 = \sqrt{2}|v-2|^{-1/2},\ r_2 = 0,\ s_2 = -(v-2)|v-2|^{-1/2}/\sqrt{2}$ она сводится к $CSF_1^{4,1}$ с $\sigma = \sigma_* \mathrm{sign}(2-v),\ u = -v/2$.

8) $CSF_7^{4,1}$ $(v \neq u)$ при $v = (2u-1)u^{-1},\ u = u_*,\ \sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1 = |u_*-1|^{-1/2},$ $s_1 = 0,\ r_2 = -u_*|u_*-1|^{-1/2},\ s_2 = -|u_*-1|^{3/2}(u_*-1)^{-1}$ сводится к $CSF_3^{3,1}$ с $\sigma = \sigma_* \,\mathrm{sign}(1-u_*),\ u = (2u_*-1)u_*^{-1}$; при $v = 2u(u+1),\ u = u_*$ заменой с $r_1 = 0,\ s_1 = 2^{1/4}|u_*(u_*-1)|^{-1/4},$ $r_2 = \sigma_*(u_*+1)|u_*(u_*-1)|^{1/4}u_*^{-1}2^{-5/4},\ s_2 = -(u_*+1)|u_*(u_*-1)|^{-1/4}2^{-3/4}$ она сводится к $CSF_{14,\kappa}^{3,1}$ с $\sigma = 1,\ u = (u_*+1)(2u_*)^{-1},\ \kappa = \mathrm{sign}(u_*(u_*-1))$.

9) $CSF_{11}^{4,1}$ при $v = u(2u-1)^{-2}$ заменой с $s_1 = 0,\ r_2 = (1-2u)r_1$ сводится к $SF_5^{4,1}$.

10) $CSF_{12}^{4,1}$ $(v \neq -u)$ при $u = 1/2$ заменой с $r_1 = -\sigma|2v+1|^{1/4}2^{-1/4},\ r_2 = 0,$ $s_1, -s_2 = 2^{1/4}|2v+1|^{-1/4}$ сводится к $CSF_{14,\kappa}^{3,1}$ с $\sigma = 1,\ u = 1/2,\ \kappa = \mathrm{sign}(2v+1)$; при $4v(1-u)+1 \geq 0$ заменой с $r_2 = (1 \pm (4v-4uv+1)^{1/2})(2v)^{-1},\ s_2 = 0$ она сводится к $SF_7^{4,1}$.

11) $CSF^{4,1}_{13}$ при $u = 2/3$ заменой с $r_1 = 2\sqrt{3}/3$, $s_1, -s_2 = \sqrt{3}/6$, $r_2 = \sqrt{3}/3$ сводится к $CSF^{3,1}_{3}$ с $u = 1/2$; при $u = -1/3$ заменой с $r_1 = r_2/2$, $s_2 = -s_1$ – к $SF^{4,1}_{11}$.

12) $CSF^{4,1}_{14}$ $(v \neq -u^2)$ при $v = u = u_*$, $\sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1, r_2 = |u_*|^{-1/2}$, $s_1 = u_*|u_*|^{-1/2}/2$, $s_2 = 0$ сводится к $CSF^{4,1}_{11}$ с $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} u_*$, $u = (u_* + 1)u_*^{-1}$, $v = u_*/4$; при $u = u_* > -1/2$, $v = u/2$ заменой с $r_1 = (1 \pm (2u+1)^{1/2})r_2/2$, $s_1 = (1 \mp (2u+1)^{1/2})s_2/2$ она сводится к $SF^{4,1}_{1}$.

13) $CSF^{4,1}_{19}$ при $u = (v^3 - 8)(4v)^{-1}$ заменой с $r_1 = 2v^{-1}$, $s_1 = 0$, $r_2 = -1$, $s_2 = 1$ сводится к $CSF^{3,1}_{6}$ с $u = -8v^{-3}$; при $u = v^2/4$ заменой с $r_1 = 0$, $s_1, r_2 = 1$, $s_2 = -v/2$ она сводится к $CSF^{3,1}_{19}$ с $u = v/2$.

14) $CSF^{4,1}_{24}$ при $v = v_* \geq -1/2$ заменой с $r_1 = 1 \pm (2v_* + 1)^{1/2}$, $s_1 = 2$, $r_2 = 1$, $s_2 = 0$ сводится к $CSF^{4,1}_{7}$ с $u = 1 \pm (2v_* + 1)^{1/2}$, $v = 2$.

15) $CSF^{4,1}_{27}$ $(v \neq -u^{-2})$ при $v = (u^{3/2} \pm 2^{3/2})u^{-1/2}/2$ заменой с $r_1 = -(u/2)^{1/2}r_2$, $s_2 = 0$ сводится к $SF^{4,1}_{5}$; при $u = 3 \cdot 2^{-4/3}$, $v = 2^{-4/3}$ заменой с $r_1 = 2^{1/3}r_2$, $s_1 = -3 \cdot 2^{-2/3}s_2$ сводится к $SF^{4,1}_{13}$.

16) $CSF^{4,1}_{28}$ при $u = -3$ заменой с $r_1 = 2/3$, $-s_1, r_2, s_2 = 1/3$ сводится к $CSF^{3,1}_{a,22}$ с $u = -1$; при $u = -3/4$ заменой с $r_2 = 2r_1$, $s_2 = -s_1$ она сводится к $SF^{4,1}_{11}$; при $u = 3/2$ заменой с $s_1 = 3s_2/2$, $r_2 = -r_1$ она сводится к $SF^{4,1}_{12}$; при $u = 6$ заменой с $r_1 = 2r_2$, $s_2 = -s_1$ она сводится к $SF^{4,1}_{5}$; при $u = (92 + 4\sqrt{29})^{1/3} + 20 \cdot (92 + 4\sqrt{29})^{-1/3} + 5$ (т. е. при $u^3 - 15u^2 + 15u - 9 = 0$) заменой с $s_1 = ((130 - 10\sqrt{29})(92 + 4\sqrt{29})^{1/3} + (27 + \sqrt{29})(92 + 4\sqrt{29})^{2/3} + 1000)s_2/600$, $r_2 = -r_1$ она сводится к $SF^{4,1}_{14}$.

17) $CSF^{4,1}_{29}$ $(v \neq -u)$ при $u = u_* = -1/2$, если $v = v_* \neq 1/4$, то заменой с $r_1 = 1$, $s_1 = 2^{-1/3}(1 - 4v_*)^{-1/3}$, $r_2 = 0$, $s_2 = -2^{2/3}(1 - 4v_*)^{-1/3}$ сводится к $CSF^{4,1}_{27}$ с $u = 2^{1/3}(1 - 4v_*)^{-2/3}$, $v = -2^{-2/3}(1 - 4v_*)^{-2/3}$, а если $v = v_* = 1/4$, то заменой с $r_1 = 1/\sqrt{2}$, $s_1 = 1$, $r_2 = -\sqrt{2}$, $s_2 = 0$ она сводится к $CSF^{3,1}_{9,\kappa}$ с $u = -1/2$, $\kappa = +1$; при $v = (1 - 2u)/8$, $u = u_* \neq -1/2$ заменой с $r_1 = 1$, $s_1 = -(2u_* + 1)^{-1}$, $r_2 = 0$, $s_2 = 2(2u_* + 1)^{-1}$ она сводится к $CSF^{4,1}_{14}$ с $u = -4u_*(2u_* + 1)^{-2}$, $v = -(2u_* + 1)^{-2}$; при $v = u^2$ заменой с $r_1 = ur_2$, $s_2 = 0$ она сводится к $SF^{4,1}_{11}$; при $v = (1 - 2u)^2/8$ заменой с $r_1 = (2u - 1)r_2/2$, $s_2 = 0$ она сводится к $SF^{4,1}_{5}$; при $u = -2/3 + (\sqrt{29}/6 - 1)(108 + 20\sqrt{29})^{1/3} + (\sqrt{29}/8 - 17/24)(108 + 20\sqrt{29})^{2/3}$, $v = 2 + (59/36 - \sqrt{29}/4)(108 + 20\sqrt{29})^{1/3} + (2 - 13\sqrt{29}/36)(108 + 20\sqrt{29})^{2/3}$ заменой с $r_1 = -(108 + 20\sqrt{29})^{1/3}((5\sqrt{29} - 27)(108 + 20\sqrt{29})^{1/3} - 4)r_2/24$, $s_1 = ((2\sqrt{29} - 18)(108 + 20\sqrt{29})^{1/3} + (9\sqrt{29} - 49)(108 + 20\sqrt{29})^{2/3} - 32)s_2/24$ она сводится к $SF^{4,1}_{13}$.

18) $CSF^{4,1}_{30}$ при $u = -v^{-1}$ заменой с $r_1 = -r_2$, $s_2 = 0$ сводится к $SF^{4,1}_{11}$; при $u = (v^3 - 8)(4v)^{-1}$ заменой с $r_2 = -vr_1/2$, $s_2 = 0$ она сводится к $SF^{4,1}_{5}$; при $u = 3$, $v = -3$ заменой с $r_1 = r_2$, $s_1 = 0$ она сводится к $SF^{4,1}_{13}$; при $u = 2$, $v = 3$ заменой с $r_1 = -r_2$, $s_1 = 0$ она сводится к $SF^{4,1}_{28}$.

19) $CSF^{4,1}_{32}$ при $u = -3$ заменой с $r_1, s_2 = 1/3$, $s_1 = 2/3$, $r_2 = -1/3$ сводится к $CSF^{3,1}_{14,\kappa}$ с $u = -1$, $\kappa = -1$; при $u = 3/8$ заменой с $r_1 = \sqrt{6}/3$, $s_1 = -2\sqrt{6}/9$, $r_2 = 2\sqrt{6}/3$, $s_2 = 2\sqrt{6}/9$ она сводится к $SF^{4,1}_{5}$ с $u = 3$, $v = 2$; при $u = 6$, $\sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1, s_1 = \sqrt{2}/3$, $r_2 = \sqrt{2}/6$, $s_2 = -\sqrt{2}/3$ она сводится к $CSF^{4,1}_{11}$ с $\sigma = -\sigma_*$, $u = -1/2$, $v = -2$; при $u = -3/4$ заменой с $r_2 = -r_1$, $s_2 = 2s_1$ она сводится к $SF^{4,1}_{30}$.

20) $CSF^{4,1}_{33}$ $(v \neq u)$ при $u = 1$ заменой с $r_2 = 0$, $s_2 = -s_1$ сводится к $SF^{4,1}_{29}$; при $v = (4u + 1)/8$ заменой с $r_2 = 0$, $s_2 = -2s_1$ она сводится к $SF^{4,1}_{14}$; при $v = (6u + 1 \pm (2u + 1)(8u + 1)^{1/2})/16$ заменой с $r_1 = -(1 \pm (8u + 1)^{1/2})r_2/4$, $s_2 = 0$ – к $SF^{4,1}_{5}$.

21) $CSF_{36}^{4,1}$ при $u = 1 \pm 3\sqrt{2}/4$ заменой с $r_1 = -r_2,\ s_1 = (2 \pm \sqrt{2})s_2/2$ сводится к $SF_{14}^{4,1}$; при $u = -2,\ \sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1 = -\sqrt{14}/21,\ s_1 = 2\sqrt{14}/7,\ r_2 = \sqrt{14}/21,$ $s_2 = 3\sqrt{14}/14$ она сводится к $NSF_{12}^{4,1}$ с $\sigma = -\sigma_*,\ u = -2/3,\ v = -15/2$; при $u = -1/8$ заменой с $r_2 = 2r_1,\ s_2 = -s_1$ она сводится к $SF_5^{4,1}$; при $u = 1/4$ заменой с $r_1 = 2/3,$ $s_1 = 6^{1/3}/3,\ r_2 = -r_1,\ s_2 = 2s_1$ она сводится к $NSF_{30}^{4,1}$ с $u, v = -6^{1/3}/3$; при $u = 4,$ $\sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1 = \sqrt{2}/3,\ s_1 = \sqrt{2},\ r_2 = \sqrt{2}/6,\ s_2 = -\sqrt{2}$ она сводится к $CSF_{11}^{4,1}$ с $\sigma = -\sigma_*,\ u = -1/3,\ v = -12.$

Непосредственной проверкой установлено, что вышеперечисленные CSF при других значения своих параметров к предшествующим CSF не сводятся. Также непосредственной проверкой установлено, что оставшиеся шесть $CSF:\ CSF_3^{3,1}, CSF_5^{3,1}, CSF_6^{3,1}, CSF_{9,\kappa}^{3,1},$ $CSF_{17}^{3,1}, CSF_{22}^{3,1}$ ни при каких значениях параметров не сводятся к предшествующим, естественно, как и $CSF_2^{2,1}$ с $CSF_9^{2,1}$, очевидно, являющимися CF. $\square$

Теперь постараемся найти такие линейные замены, которые сохраняют исследуемую $CSF_i^{m,1}$ $(m = 2, 3, 4)$, но меняют в ней значения параметров, что позволяет максимально ограничить их значения и ведет согласно определению 8 к выделению канонических форм.

Утверждение 10. *Среди всех $CSF_i^{m,1}$ с $m = 2, 3, 4$ только в $CSF_3^{3,1}, CSF_5^{3,1},$ $CSF_{14,\kappa}^{3,1}, CSF_1^{4,1}, CSF_7^{4,1}$ указанные ниже замены (16) позволяют получить приведенные ниже ограничения на значения параметров.*

Доказательство. 1) $CSF_3^{3,1}$ с $\sigma = -1,\ u = 2$ заменой с $r_1 = -1,\ s_1 = 0,\ r_2, s_2 = 1$ сводится к $CSF_3^{3,1}$ с $\sigma = 1,\ u = 2.$

2) $CSF_5^{3,1}$ с $u = u_* \le 1$ заменой с $r_1 = 1,\ s_1 = 1 - u_*,\ r_2 = 0,\ s_2 = 1$ сводится к $CSF_5^{3,1}$ с $u = 2 - u_* \ge 1.$

3) $CSF_{14,\kappa}^{3,1}$ с $\sigma = -1$ заменой с $-r_1, s_2 = -1,\ s_1, r_2 = 0,$ сводится к $CSF_{14,\kappa}^{3,1}$ с $\sigma = 1.$

4) $CSF_1^{4,1}$ с $u = u_*,\ |u_*| > 1,\ \sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1, s_2 = 0,\ s_1, r_2 = |u_*|^{-1/2}$ сводится к $CSF_1^{4,1}$ с $\sigma = \sigma_* \operatorname{sign} u_*,\ u = u_*^{-1}\ \ (|u| < 1).$

5) $CSF_7^{4,1}$ с $u = u_*,\ \sigma = \sigma_*$ заменой с $r_1 = |v-1|^{1/2}|u_*v - 2u_* + 1|^{-1/2},\ s_1 = 0,\ r_2 =$ $(1-u_*)|v-1|^{1/2}|u_*v-2u_*+1|^{-1/2}(v-1)^{-1},\ s_2 = |v-1|^{1/2}|u_*v-2u_*+1|^{3/2}(v-1)^{-1}(u_*v-2u_*+1)^{-1}$ сводится к $CSF_7^{4,1}$ с $u = (v - u_*)(u_*v - 2u_* + 1)^{-1},\ \sigma = \sigma_* \operatorname{sign}((v-1)(u_*v - 2u_* + 1))$ и тем же v. В частности, $CSF_7^{4,1}$ с $u = u_* \le 1,\ v = 2$ заменой с $r_1, s_2 = 1,\ s_1 = 0,\ r_2 = 1 - u_*$ сводится к $CSF_7^{4,1}$ с $u = 2 - u_* \ge 1,\ v = 2.$ $\square$

Утверждение 11. *$CSF_i^{5,1}$ только при указанных ниже значениях параметров указанными ниже заменами (16) сводятся к предшествующим каноническим структурным формам при наличии следующих исключений:*

1) $CSF_3^{5,1}$ возможно линейно эквивалентна $CSF_{28}^{4,1}$, $CSF_{32}^{4,1}$ или $CSF_{36}^{4,1}$, а $CSF_7^{5,1}$ – $CSF_{28}^{4,1}$, $CSF_{36}^{4,1}$ или $CSF_6^{5,1}$ (не удается избавиться от уравнений 4-го порядка и выше с параметрами);

2) для $CSF_6^{5,1}$ и $CSF_7^{5,1}$ существуют по одному не выписанному явно набору параметров, при которых они линейно эквивалентны $CSF_3^{5,1}$, а для $CSF_8^{5,1}$ существуют не выписанные явно наборы параметров, при которых она линейно эквивалентна $CSF_{28}^{4,1}$, $CSF_6^{5,1}$, $CSF_7^{5,1}$ (имеются многостраничные точные формулы для параметров и замен).

Доказательство. 1) $CSF_3^{5,1}$ $(u \neq v)$ при $u=-1$ заменой с $r_1=(v+2)r_2/2$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_{11}^{4,1}$; при $v=(u-1)^2u^{-1}$ заменой с $r_2=ur_1$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_5^{4,1}$; при $v=2u-2$ заменой с $r_1=0$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_7^{4,1}$; при $v=2u$ заменой с $r_1=0$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_{11}^{4,1}$; при $v=u-3$ заменой с $s_1=0$, $r_2=-r_1$ сводится к $SF_{14}^{4,1}$; при $v=3u-1$ заменой с $r_2=-r_1$, $s_2=0$ сводится к $SF_{14}^{4,1}$; при $v=u+1$ заменой с $r_2=-r_1$, $s_2=(1-u)s_1/2$ сводится к $SF_{14}^{4,1}$; при $v=4u$ заменой с $r_1=ur_2$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_{19}^{4,1}$; при $v=3u+3$ заменой с $s_1=(u+3)s_2/2$, $r_2=-r_1$ сводится к $SF_{27}^{4,1}$; при $v=(2u^2+1\pm(2u+1)(5-4u)^{1/2})(2u+2)^{-1}$ заменой с $r_2=-r_1$, $s_2=(3\pm(5-4u)^{1/2})s_1/2$ сводится к $SF_{29}^{4,1}$; при $v=u-1\pm2\sqrt{-u}$ заменой с $r_2=-r_1$, $s_2=\pm\sqrt{-u}s_1$ сводится к $SF_{30}^{4,1}$; при $v=2(u+1)^2(u+2)^{-1}$ заменой с $r_2=-r_1$, $s_2=(u+2)s_1$ сводится к $SF_{33}^{4,1}$; при $u=17/3+(3\sqrt{57}-1)(1+3\sqrt{57})^{1/3}/12+2(1+3\sqrt{57})^{2/3}/3$, $v=20/3+(\sqrt{57}-1)(1+3\sqrt{57})^{1/3}/3+(85+\sqrt{57})(1+3\sqrt{57})^{2/3}/96$ заменой с $r_1=(-64+(3\sqrt{57}-1)(1+3\sqrt{57})^{2/3}-64(1+3\sqrt{57})^{1/3})r_2/192$, $s_1=(32+(20+4\sqrt{57})(1+3\sqrt{57})^{1/3}+(11-\sqrt{57})(1+3\sqrt{57})^{2/3})s_2/96$ сводится к $SF_{13}^{4,1}$.

2) $CSF_6^{5,1}$ $(u \neq v)$ при $v=2-3u$ заменой с $r_1=2r_2$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_5^{4,1}$; при $v=(3u-2)/2$ заменой с $r_2=0$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_7^{4,1}$; при $v=(3u+1)/2$ заменой с $r_2=2r_1$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_{11}^{4,1}$; при $v=3u-1$ заменой с $r_2=-r_1$, $s_2=0$ сводится к $SF_{14}^{4,1}$; при $v=(\pm(3u^2-4u+5)+4(u^2-u+1)^{1/2})(u+1\pm2(u^2-u+1)^{1/2})^{-1}$ заменой с $s_1=(u-2\mp(u^2-u+1)^{1/2})(u-1)^{-1}s_2$, $r_2=-r_1$ сводится к $SF_{14}^{4,1}$; при $v=3u+3$ заменой с $s_1=3(u+2)s_2/2$, $r_2=-r_1$ сводится к $SF_{27}^{4,1}$; при $v=u-1$ заменой с $s_1=0$, $r_2=-r_1$ сводится к $SF_{30}^{4,1}$; при $v=-3u-1$ заменой с $s_1=2s_2$, $r_2=-r_1$ сводится к $SF_{30}^{4,1}$; при $v=(3u^2+4u+2)(2u+2)^{-1}$ заменой с $s_1=(u+2)(2u+2)^{-1}s_2$, $r_2=-r_1$ сводится к $SF_{33}^{4,1}$; при $v=-1\pm\sqrt{3}$ заменой с $r_1=(1\mp\sqrt{3})r_2/2$, $s_2=0$ сводится к $SF_3^{5,1}$; при $v=(4u^3+3u^2+6u+5\pm(4u^2+u+4)(u^2+u+1)^{1/2})(4u^2+7u+4\pm(4u+5)(u^2+u+1)^{1/2})^{-1}$ заменой с $r_2=-r_1$, $s_2=(u+2\pm(u^2+u+1)^{1/2})s_1/3$ сводится к $SF_{29}^{4,1}$; при $u=35/3$, $v=12$ заменой с $s_1=2s_2$, $r_2=-4r_1$ сводится к $SF_{13}^{4,1}$; при $u=-35/3$, $v=-41/4$ заменой с $s_1=2s_2$, $r_2=-4r_1$ сводится к $SF_{28}^{4,1}$; при $u=-7/12$, $v=3/2$ заменой с $r_1=2r_2$, $s_2=-4s_1$ сводится к $SF_{32}^{4,1}$; при $u=-5/9$, $v=17/12$ заменой с $r_1=2r_2$, $s_2=-4s_1$ сводится к $SF_{36}^{4,1}$.

3) $CSF_7^{5,1}$ $(u \neq v)$ при $u=(v-1)(v-3)(v-2)^{-1}$ заменой с $r_2=(2-v)r_1$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_5^{4,1}$; при $u=v(3v-10\pm(v^2+12v-12)^{1/2})(4v-8)^{-1}$ заменой с $r_1=0$, $s_2=(v+2\pm(v^2+12v-12)^{1/2})s_1/4$ сводится к $SF_6^{5,1}$; при $v=2u$ заменой с $r_1=0$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_{11}^{4,1}$; при $v=2u+3$ заменой с $r_1=0$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_7^{4,1}$; при $v=3-u$ заменой с $r_1=(u-1)r_2$, $s_2=-s_1$ сводится к $SF_{11}^{4,1}$; при $v=u+3$ заменой с $s_1=0$, $r_2=-r_1$ сводится к $SF_{14}^{4,1}$; при $v=3u-3$ заменой с $s_1=(3-u)s_2/3$, $r_2=-r_1$ сводится к $SF_{27}^{4,1}$; при $v=(2u^2-4u+3)(u-2)^{-1}$ заменой с $r_2=-r_1$, $s_2=(2-u)s_1$ сводится к $SF_{33}^{4,1}$; при $v=u+1\pm2(u+1)^{1/2}$ заменой с $r_2=-r_1$, $s_2=\mp(u+1)^{1/2}s_1$ сводится к $SF_{30}^{4,1}$; при $v=(3u^2+14u+7\pm(3u+5)(u^2+6u+1)^{1/2})(u+3\pm(u^2+6u+1)^{1/2})^{-1}$ заменой с $s_1=(u+3\pm(u^2+6u+1)^{1/2})s_2/2$, $r_2=-r_1$ сводится к $SF_{14}^{4,1}$; при $v=(4u+16\pm9(1+4u)^{1/2}\mp(1+4u)^{3/2})(-3\mp(1+4u)^{1/2})^{-1}/4$ заменой с $r_2=-r_1$, $s_2=(3\pm(1+4u)^{1/2})s_1/2$ сводится к $SF_{29}^{4,1}$; при $u=-5+(\sqrt{17}-9)(2+2\sqrt{17})^{2/3}/8-(1+\sqrt{17})(2+2\sqrt{17})^{1/3}/2$, $v=u-3$ заменой с $r_1=(2+2\sqrt{17})^{1/3}((\sqrt{17}-1)(2+2\sqrt{17})^{1/3}-8)r_2/8$, $s_1=(16+(4+4\sqrt{17})(2+2\sqrt{17})^{1/3}+(9-\sqrt{17})(2+2\sqrt{17})^{2/3})s_2/48$ сводится к $SF_{13}^{4,1}$; при $u=-4+(36+4\sqrt{77})^{2/3}/4+(9-\sqrt{77})(36+4\sqrt{77})^{1/3}/4$, $v=3(4-6(36+4\sqrt{77})^{1/3}+(36+4\sqrt{77})^{2/3})(36+4\sqrt{77})^{2/3}(9-\sqrt{77})/32$ заменой с $r_1=(36+4\sqrt{77})^{1/3}(4+(9-\sqrt{77})(36+4\sqrt{77})^{1/3})r_2/24$, $s_1=((3\sqrt{77}-25)(36+4\sqrt{77})^{2/3}+(6-2\sqrt{77})(36+4\sqrt{77})^{1/3}-8)s_2/24$ сводится к $SF_{32}^{4,1}$.

4) $CSF_8^{5,1}$ $(w \neq v-u)$ при $v=-2$ заменой с $r_1=0$, $s_1=ws_2$ сводится к $SF_{27}^{4,1}$; при $w=v$ заменой с $r_1=vr_2$, $s_1=0$ она сводится к $SF_{19}^{4,1}$; при $w=v(uv-2u+1)(2u-1)^{-2}$ заменой с $s_1=0$, $r_2=-(2u-1)v^{-1}r_1$ она сводится к $SF_5^{4,1}$; при $w=v(1-u)^{-1}$ заменой с $r_1=-v(u-1)^{-1}r_2$, $s_1=0$ она сводится к $SF_{11}^{4,1}$; при $w=(v^2-2v)(4u-4)^{-1}$ заменой с $r_1=0$, $s_1=(2-v)(2u-2)^{-1}s_2$ она сводится к $SF_{14}^{4,1}$; при $w=(uv^2+v^2+2v-4u)(2u+1)^{-2}$ заменой с $r_1=0$, $s_1=-(2+v)(2u+1)^{-1}s_2$ она сводится к $SF_{29}^{4,1}$; при $w=v^2(4u)^{-1}$ заменой с $r_1=0$, $s_1=-v(2u)^{-1}s_2$ она сводится к $SF_{30}^{4,1}$; при $w=-(v+1)u^{-1}$ заменой с $r_1=0$, $s_1=-(v+1)u^{-1}s_2$ она сводится к $SF_{33}^{4,1}$; при $w=(2v-u-1)/4$ заменой с $r_2=0$, $s_2=-2s_1$ она сводится к $SF_3^{5,1}$; при $w=v-3u/4$ заменой с $r_2=0$, $s_2=-2s_1$ она сводится к $SF_6^{5,1}$; при $w=v(3uv-3u+1)(3u-1)^{-2}$ заменой с $r_2=-(3u-1)v^{-1}r_1$, $s_2=0$ она сводится к $SF_7^{5,1}$; при $w=v(2uv-3u+1)(3u-1)^{-2}$ заменой с $r_2=(1-3u)v^{-1}r_1$, $s_2=0$ она сводится к $SF_3^{5,1}$; при $w=(v-1)^2(2u-1)\theta_*+(v-1)(u-1)(2u+v-1)(2u-2+\theta_*v-\theta_*)^{-1}u^{-2}/2$, где $\theta_*=((u+1)(1-v)\pm((v-1)(v-9)u^2+2(v+3)(v-1)u+(v-1)^2)^{1/2})(2v-2)^{-1}$, заменой с $r_1=(\theta_*-u+1)(v-1)(2u)^{-1}(u-1)^{-1}r_2$, $s_2=\theta_*s_1$ она сводится к $SF_3^{5,1}$; при $u=(w^{3/2}\mp 1)(w^{1/2}\pm 2)^{-2}w^{-1/2}$, $v=(2w+1)(\pm w^{1/2}+2)^{-1}$ заменой с $s_1=\pm w^{1/2}s_2$, $r_2=(-1\mp 2w^{1/2})w^{-1/2}(w^{1/2}\pm 2)^{-1}r_1$ она сводится к $SF_{13}^{4,1}$; при $u=(v^2+2\pm(v^2+v-2)^{1/2}(v+1))(v-2)^{-1}/3$, $w=-v^2-v\pm(v^2+v-2)^{1/2}(v+1)$ заменой с $r_1=(v\mp(v^2+v-2)^{1/2})r_2$, $s_1=(-v-2\pm 2(v^2+v-2)^{1/2})s_2/3$ она сводится к $SF_{32}^{4,1}$; при $v=-(2u^2+4u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}$, $w=-(5u^2+4u+1)(3u+1)^{-2}(u+1)^{-1}$ заменой с $s_1=-(2u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}s_2$, $r_2=(3u+1)r_1$ она сводится к $SF_{36}^{4,1}$. $\square$

6.3 Сведение исходной системы к $\mathbf{CF^{m,1}}$ $(\mathbf{m=2,3,4})$ и $\mathbf{CSF^{5,1}}$

Список 11. 29 $CF_i^{m,1}$ $(m=2,3,4)$ и 4 $CSF_i^{5,1}$ системы (14) при $l=1$ $(\sigma,\kappa=\pm1)$.

$CF_2^{2,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_3$; $\quad CF_9^{2,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_7$;

$CF_3^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_5$, $\begin{matrix}\sigma=1\\ [\sigma=-1]\end{matrix}$ при $u=2$; $\quad CF_5^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}_6$, $\begin{matrix}u\geq 1,\ u\neq 2\\ [u<1]\end{matrix}$;

$CF_6^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_6$; $\quad CF_8^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}_7$, $u>1/4$;

$CF_{9,\kappa}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&\kappa&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_7$; $\quad CF_{14,\kappa}^{3,1}=\begin{pmatrix}0&u&0&\kappa\\0&0&1&0\end{pmatrix}_8$, $\begin{matrix}u\neq 1/2 \text{ при } \kappa=1\\ [\sigma=-1]\end{matrix}$;

$CF_{17}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_8$; $\quad CF_{19}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_9$;

$CF_{21}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_9$, $u\neq 2$; $\quad CF_{22}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{10}$;

$CF_1^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&u&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_6$, $\begin{matrix}|u|<1\\ [|u|>1]\end{matrix}$; $\quad CF_3^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&-u&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_7$, $u\neq -1/2,-2$;

$CF_5^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_8$, $u\neq v(v-2)/4$, $u\neq 1$ при $v=-2$, $u\neq -1/9$ при $v=1$;

$CF_7^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_8$, $v\neq u,\ (2u-1)u^{-1},\ 2u(u+1)^{-1}$, $\begin{matrix}u\geq u_v\\ [u<u_v]\end{matrix}$, $u_v=\max\left\{u,\ \dfrac{v-u}{uv-2u+1}\right\}$;

$CF_{11}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&v&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_9,\quad v\neq u(2u-1)^{-2};\qquad CF_{12}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\0&0&1&1\end{pmatrix}_9,\quad \begin{matrix}u\neq 1/2,\,-v,\\ 4v(u-1)-1\geq 0;\end{matrix}$

$CF_{13}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&u\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_9,\quad u\neq -1/3,\,2/3;\quad CF_{14}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&v\end{pmatrix}_9,\quad \begin{matrix}v\neq u,\,-u^2,\\ v\neq u/2 \text{ при } u>-1/2;\end{matrix}$

$CF_{19}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{10},\quad \begin{matrix}u\neq (v^3-8)(4v)^{-1},\\ u\neq v^2/4;\end{matrix}\qquad CF_{24}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&1/2&1&v\\0&0&1&0\end{pmatrix}_{11},\quad v<-1/2;$

$CF_{27}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&1\\0&1&0&v\end{pmatrix}_{11},\quad v\neq -u^{-2},\,(u^{3/2}\pm 2^{3/2})u^{-1/2}/2,\quad u\neq 3\cdot 4^{-2/3}\ \text{ при }\ v=4^{-2/3};$

$CF_{28}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&-u\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{11},\quad u\neq -3,\,-3/4,\,3/2,\,6,\,(92+4\sqrt{29})^{1/3}+20\cdot(92+4\sqrt{29})^{-1/3}+5;$

$CF_{29}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{11},\quad u\neq -1/2,\quad v\neq -u,\,u^2,\,(1-2u)/8,\,(1-2u)^2/8,$
$u\neq -2/3+(\sqrt{29}/6-1)(108+20\sqrt{29})^{1/3}+(\sqrt{29}/8-17/24)(108+20\sqrt{29})^{2/3}$
при $v=2+(59/36-\sqrt{29}/4)(108+20\sqrt{29})^{1/3}+(2-13\sqrt{29}/36)(108+20\sqrt{29})^{2/3}$;

$CF_{30}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&v&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{12},\quad \begin{matrix}u\neq -v^{-1},\,(v^3-8)(4v)^{-1},\\ u\neq 3\ \text{ при }\ v=-3,\quad u\neq 2\ \text{ при }\ v=3;\end{matrix}$

$CF_{32}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&u\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{12},\quad u\neq -3,\,-3/4,\,3/8,\,6;$

$CF_{33}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&v\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{12},\quad u\neq 1,\quad v\neq u,\,(4u+1)/8,\,(6u+1\pm(2u+1)(8u+1)^{1/2})/16;$

$CF_{36}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&u\\1&0&-1&0\end{pmatrix}_{13},\quad u\neq -2,\,-1/8,\,1\pm 3\sqrt{2}/4,\,1/4,\,4;$

$CSF_{3}^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_{10},\quad \begin{matrix}u\neq -1,\quad v\neq u,\,(u-1)^2u^{-1},\,2u-2,\,2u,\,u-3,\,3u-1,\,4u,\\ u+1,\,3u+3,\,(2u^2+1\pm(2u+1)(5-4u)^{1/2})(u+1)^{-1}/2,\\ u-1\pm 2\sqrt{-u},\,2(u+1)^2(u+2)^{-1},\end{matrix}$
$u\neq 17/3+(3\sqrt{57}-1)(1+3\sqrt{57})^{1/3}/12+2(1+3\sqrt{57})^{2/3}/3$ при
$v=20/3+(\sqrt{57}-1)(1+3\sqrt{57})^{1/3}/3+(85+\sqrt{57})(1+3\sqrt{57})^{2/3}/96$;

$CSF_{6}^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&u-v\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_{11},\quad v\neq u,\,2-3u,\,(3u-2)/2,\,(3u+1)/2,\,3u-1,\,3u+3,\,u-1,\,-3u-1,$
$(\pm(3u^2-4u+5)+4(u^2-u+1)^{1/2})(u+1\pm 2(u^2-u+1)^{1/2})^{-1},\,(3u^2+4u+2)(u+1)^{-1}/2,\,-1\pm\sqrt{3},$
$(4u^3+3u^2+6u+5\pm(4u^2+u+4)(u^2+u+1)^{1/2})(4u^2+7u+4\pm(4u+5)(u^2+u+1)^{1/2})^{-1},$
$u\neq -5/9$ при $v=17/12,\quad u\neq -7/12$ при $v=3/2,$
$u\neq 35/3$ при $v=12,\quad u\neq -35/3$ при $v=-41/4;$

$CSF_{7}^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{11},\,u\neq (v-1)(v-3)(v-2)^{-1},\,v(3v-10\pm(v^2+12v-12)^{1/2})(4v-8)^{-1},$
$v\neq u,\,2u,\,2u+3,\,3-u,\,u+3,\,3u-3,\,(2u^2-4u+3)(u-2)^{-1},\,u+1\pm 2(u+1)^{1/2},$
$(3u^2+14u+7\pm(3u+5)(u^2+6u+1)^{1/2})(u+3\pm(u^2+6u+1)^{1/2})^{-1},$
$(4u+16\pm 9(1+4u)^{1/2}\mp(1+4u)^{3/2})(-3\mp(1+4u)^{1/2})^{-1}/4,$
$u\neq -5+(\sqrt{17}-9)(2+2\sqrt{17})^{2/3}/8-(1+\sqrt{17})(2+2\sqrt{17})^{1/3}/2$ при $v=u-3,$
$u\neq -4+(36+4\sqrt{77})^{2/3}/4+(9-\sqrt{77})(36+4\sqrt{77})^{1/3}/4$ при $v=3(4-6(36+4\sqrt{77})^{1/3}+(36+4\sqrt{77})^{2/3})(36+4\sqrt{77})^{2/3}(9-\sqrt{77})/32;$

$CSF_8^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&w&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{11}$, $v\ne -2$, $w\ne v$, $v(uv-2u+1)(2u-1)^{-2}$, $v(1-u)^{-1}$, $(v^2-2v)(4u-4)^{-1}$, $(uv^2+v^2+2v-4u)(2u+1)^{-2}$, $v^2(4u)^{-1}$, $-(v+1)u^{-1}$, $(2v-u-1)/4$, $v-3u/4$, $v(3uv-3u+1)(3u-1)^{-2}$, $v(2uv-3u+1)(3u-1)^{-2}$, $(v-1)^2(2u-1)\theta_*+(v-1)(u-1)(2u+v-1)(2u-2+\theta_*v-\theta_*)^{-1}u^{-2}/2$,
где $\theta_*=((u+1)(1-v)\pm((v-1)(v-9)u^2+2(v+3)(v-1)u+(v-1)^2)^{1/2})(2v-2)^{-1}$,
$u\ne(w^{3/2}\mp1)(w^{1/2}\pm2)^{-2}w^{-1/2}$ при $v=(2w+1)(\pm w^{1/2}+2)^{-1}$,
$u\ne(v^2+2\pm(v^2+v-2)^{1/2}(v+1))(v-2)^{-1}/3$ при $w=-v^2-v\pm(v^2+v-2)^{1/2}(v+1)$,
$v\ne-(2u^2+4u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}$ при $w=-(5u^2+4u+1)(3u+1)^{-2}(u+1)^{-1}$.

Теорема 8. *Любая система* (14) *вида* (31) *с* $\delta_{pt}^2-\delta_{pq}\delta_{qt}\ne0$ *известной линейной неособой заменой* (16) *может быть сведена к одной из двадцати девяти указанных в списке 11 попарно линейно неэквивалентных* $CF^{2,1},CF^{3,1},CF^{4,1}$ *или четырем* $CSF^{5,1}$.

Доказательство. В п. 6.1 любая система (31) сводится к системе (69), которая будет в дальнейшем использоваться в качестве исходной.

Покажем, как любую систему (69) заменой (16) можно свести к каноническим структурным формам из списка 11, сначала к тем, у которых $(\breve\alpha,\breve\beta)=(1,0)$, они получены из соответствующих NSF из списка 10,I, а затем к тем, у которых $(\breve\alpha,\breve\beta)=(1,1)$, полученным из списка 10,II. При этом для каждой $CSF_i^{m,1}$ укажем условия на элементы исходной системы (69) и замену (16), сводящую (69) к выбранной $CSF_i^{m,1}$.

Введем в рассмотрение следующее уравнение:

$$Q(\theta)=\tilde t_1\theta^3+(\tilde q_1-\tilde t_2)\theta^2+(\tilde p_1-\tilde q_2)\theta-\tilde p_2=0. \tag{70}$$

I. Сделаем в (69) произвольную замену (16) с $s_1=0$ $(r_1,s_2\ne0)$, получая систему

$$\breve A=\begin{pmatrix}\tilde p_1r_1^2+\tilde q_1r_1r_2+\tilde t_1r_2^2 & (\tilde q_1r_1+2\tilde t_1r_2)s_2 & \tilde t_1s_2^2 & 0\\ -Q(r_1^{-1}r_2)r_1^3s_2^{-1} & \tilde q_2r_1^2-(\tilde q_1-2\tilde t_2)r_1r_2-2\tilde t_1r_2^2 & (\tilde t_2r_1-\tilde t_1r_2)s_2 & 0\end{pmatrix}. \tag{71}$$

Поскольку в системе (69) $\tilde\beta=0$, условие $s_1=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы $\breve\beta=0$. Кроме того, при $s_1=0$ в силу (31) и (69) $\breve a_1^2+\breve a_2^2\ne0$, $\breve c_1^2+\breve c_2^2\ne0$.

1) $\breve c_1=0\Leftrightarrow\underline{\tilde t_1=0}$ $(\tilde p_1^2+\tilde p_2^2\ne0,\ \tilde t_2\ne0)$. Тогда система (71) примет вид

$$r_1\begin{pmatrix}\tilde p_1r_1+\tilde q_1r_2 & \tilde q_1s_2 & 0 & 0\\ (\tilde p_2r_1^2-(\tilde p_1-\tilde q_2)r_1r_2-(\tilde q_1-\tilde t_2)r_2^2)s_2^{-1} & \tilde q_2r_1+(2\tilde t_2-\tilde q_1)r_2 & \tilde t_2s_2 & 0\end{pmatrix}\quad (r_1\ne0). \tag{72}$$

Сведем ее к $CSF_{24}^{4,1}$ или какой-либо канонической форме, предшествующий $CSF_{24}^{4,1}$.

Введем следующие константы:

$$\begin{gathered}\text{æ}_1=2\tilde p_1\tilde q_2+4\tilde p_2\tilde t_2-\tilde q_2^2,\quad \text{æ}_2=(\tilde p_1-\tilde q_2)^2-4\tilde p_2\tilde t_2,\quad \text{æ}_3=\tilde p_1^2+4\tilde p_2\tilde t_2,\\ \text{æ}_4=\tilde q_2(2\tilde p_1\tilde t_2-\tilde p_1\tilde q_1-\tilde q_2\tilde t_2)+\tilde p_2(\tilde q_1-2\tilde t_2)^2,\quad \text{æ}_5=\tilde p_1(\tilde q_1-2\tilde t_2)+\tilde q_1\tilde q_2,\\ \text{æ}_6=\tilde p_1(\tilde p_1-\tilde q_2)+2\tilde p_2\tilde q_1,\ \text{æ}_7=(\tilde p_1-\tilde q_2)^2+4\tilde p_2(\tilde q_1-\tilde t_2),\quad \text{æ}_8=\tilde p_1-\tilde q_2\pm\text{æ}_7^{1/2},\\ \text{æ}_9=\tilde q_2\text{æ}_8-2\tilde p_2(\tilde q_1-2\tilde t_2),\quad \text{æ}_{10}=\tilde p_1\text{æ}_8+2\tilde q_1\tilde p_2,\quad \text{æ}_{11}=\tilde t_2\tilde p_1^2-\tilde q_2\tilde p_1\tilde q_1+\tilde p_2\tilde q_1^2.\end{gathered} \tag{73}$$

1₁) $\breve b_1=0\Leftrightarrow\underline{\tilde q_1=0}$ $(\tilde p_1\ne0)$. Тогда система (72) имеет вид

$$r_1\begin{pmatrix}\tilde p_1r_1 & 0 & 0 & 0\\ (\tilde p_2r_1^2+(\tilde q_2-\tilde p_1)r_1r_2+\tilde t_2r_2^2)s_2^{-1} & \tilde q_2r_1+2\tilde t_2r_2 & \tilde t_2s_2 & 0\end{pmatrix}. \tag{74}$$

$\mathbf{1_1^1}$) $\text{æ}_1=0 \Leftrightarrow \underline{\tilde p_2=\tilde q_2(\tilde q_2-2\tilde p_1)(4t_2)^{-1}}$. Тогда $\breve a_2, \breve b_2=0$ при $r_2=-\tilde q_2(2\tilde t_2)^{-1}r_1$. При $r_1=|\tilde p_1|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde p_1|^{3/2}(\tilde p_1\tilde t_2)^{-1}$ система (74) – это $CF_2^{2,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_3$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$.

$\mathbf{1_1^2}$) $\text{æ}_1\neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde p_2\neq\tilde q_2(\tilde q_2-2\tilde p_1)(4t_2)^{-1}}$ $(\breve a_2^2+\breve b_2^2\neq 0)$. Тогда $\breve b_2=0$ можно получить всегда, а более предпочтительный с точки зрения с.п. вариант $\breve a_2=0$, – если $\text{æ}_2\geq 0$.

$\mathbf{1_1^{2a}}$) $\text{æ}_2=\tilde p_1^2-\text{æ}_1\geq 0 \Leftrightarrow \underline{(\tilde p_1-\tilde q_2)^2-4\tilde p_2\tilde t_2\geq 0}$ $(\text{æ}_1=(\tilde p_1-\text{æ}_2^{1/2})(\tilde p_1+\text{æ}_2^{1/2})\neq 0)$. Тогда при $r_1=|\tilde p_1|^{-1/2}$, $r_2=(\tilde p_1-\tilde q_2\pm\text{æ}_2^{1/2})\tilde t_2^{-1}|\tilde p_1|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde p_1|^{3/2}(\tilde p_1\tilde t_2)^{-1}$ система (74) является $CSF_{a,5}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&u&1&0\end{pmatrix}_6$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=1\pm\text{æ}_2^{1/2}\tilde p_1^{-1}$ $(u\neq 0,2)$.

$\mathbf{1_1^{2b}}$) $\text{æ}_2<0 \Leftrightarrow \underline{(\tilde p_1-\tilde q_2)^2-4\tilde p_2\tilde t_2<0}$ $(\text{æ}_1>0,\ \breve a_2\neq 0)$. Тогда при $r_1=|\tilde p_1|^{-1/2}$, $r_2=-\tilde q_2(2\tilde t_2)^{-1}r_1$, $s_2=(4\tilde p_1\tilde t_2)^{-1}|\tilde p_1|^{-1/2}\text{æ}_1$ система (74) – это $CSF_{a,8}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&u&0\end{pmatrix}_7$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=(2\tilde p_1)^{-2}\text{æ}_1$.

$\mathbf{1_1^{2c}}$) $\breve a_2, \breve b_2\neq 0$. Получаем $SF_{a,15}^{4,1}$, сводящуюся к предшествующим $CF_2^{2,1}$ или $CF_8^{3,1}$.

$\mathbf{1_2}$) В системе (72) $\breve b_1\neq 0\Leftrightarrow \underline{\tilde q_1\neq 0}$.

$\mathbf{1_2^1}$) $\breve a_2=0$, $\breve b_2=0$ в любом из следующих трех случаев:

$\mathbf{1_2^{1a}}$) $\underline{\tilde q_2=0}$, $\underline{\tilde p_2=0}$ $(\text{æ}_3=\tilde p_1^2>0)$, $r_2=0$. Тогда при $r_1=|\tilde p_1|^{1/2}\tilde p_1^{-1}$, $s_2=|\tilde p_1|^{1/2}\tilde t_2^{-1}$ система (72) является $CSF_3^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_5$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=\tilde q_1\tilde t_2^{-1}$.

$\mathbf{1_2^{1b}}$) $\underline{\tilde q_2=0}$, $\underline{\tilde p_1^2+4\tilde p_2\tilde t_2>0}\Leftrightarrow\text{æ}_3>0$, $\underline{\tilde q_1=2\tilde t_2}$, $r_2=(-\tilde p_1+\text{æ}_3^{1/2})(2\tilde t_2)^{-1}r_1$. Тогда при $r_1=\pm\text{æ}_3^{-1/4}$, $s_2=\text{æ}_3^{1/4}\tilde t_2^{-1}$, система (72) является $CSF_3^{3,1}$ с $\sigma=\pm 1$, $u=2$.

$\mathbf{1_2^{1c}}$) $\underline{\tilde q_2\neq 0}$, $\underline{\tilde p_1^2+4\tilde p_2\tilde t_2\geq 0}$ $\Leftrightarrow$ $\text{æ}_3\geq 0$, $\underline{\tilde q_2=(-\tilde p_1\pm\text{æ}_3)(\tilde q_1-2\tilde t_2)(2\tilde t_2)^{-1}}$ $\Leftrightarrow$ $\text{æ}_4=0$ $(\tilde q_1\neq 2\tilde t_2)$, $r_1=(\tilde q_1-2\tilde t_2)\tilde q_2^{-1}r_2s_2$ (входящий в $\breve a_1$ сомножитель $\text{æ}_5\neq 0$, иначе $\widetilde R_2=0$). Тогда при $r_2=\tilde q_2|\tilde q_1-2\tilde t_2|^{-1/2}|\text{æ}_5|^{-1/2}$, $s_2=|\text{æ}_5|^{3/2}\tilde t_2^{-1}|\tilde q_1-2\tilde t_2|^{-1/2}\text{æ}_5^{-1}$ система (72) является $CF_3^{3,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde q_1-2\tilde t_2)\text{æ}_5$, $u=\tilde q_1\tilde t_2^{-1}$ $(u\neq 2)$.

$\mathbf{1_2^2}$) $\breve a_1=0\Leftrightarrow r_2=-\tilde p_1\tilde q_1^{-1}r_1$, $\breve b_2=0\Leftrightarrow\text{æ}_5=0\Leftrightarrow\underline{\tilde q_2=-\tilde p_1(\tilde q_1-2\tilde t_2)}\tilde q_1^{-1}$ $(\text{æ}_6\neq 0$, иначе $\widetilde R_2=0)$. Тогда при $r_1=-2^{1/4}|\text{æ}_6|^{-1/4}$, $s_2=-2^{-1/4}\tilde q_1^{-1}\text{æ}_6|\text{æ}_6|^{-3/4}$ система (72) является $CSF_{a,14,\kappa}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&0&0\\\kappa&0&u&0\end{pmatrix}_8$ с $\sigma=\kappa=\operatorname{sign}\text{æ}_6$, $u=\tilde q_1^{-1}\tilde t_2$.

$\mathbf{1_2^3}$) $\breve a_2=0\Leftrightarrow\{\text{æ}_7\geq 0\Leftrightarrow\underline{(\tilde p_1-\tilde q_2)^2+4\tilde p_2(\tilde q_1-\tilde t_2)\geq 0}$, $r_1=(2\tilde p_2)^{-1}\text{æ}_8r_2\neq 0\}$, $\breve b_2\neq 0\Leftrightarrow\text{æ}_9\neq 0$ (входящий в $\breve a_1$ сомножитель $\text{æ}_{10}\neq 0$, иначе $\widetilde R_2=0$). При $r_2=2\tilde p_2|\text{æ}_8|^{-1/2}|\text{æ}_9|^{-1/2}$, $s_2=|\text{æ}_9|^{3/2}\text{æ}_9^{-1}|\text{æ}_8|^{-1/2}$ система (72) – это $CSF_7^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_8$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\text{æ}_8\text{æ}_9)$, $u=\text{æ}_{10}\text{æ}_9^{-1}$, $v=\tilde q_1\tilde t_2^{-1}$ $(u\neq v)$.

$\mathbf{1_2^4}$) $\breve a_1\neq 0$ и $\breve b_2=0$ $\Leftrightarrow$ $\{\underline{\tilde q_1\neq 2\tilde t_2}$, $\text{æ}_5\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\underline{\tilde q_2\neq\tilde p_1\tilde q_1^{-1}(2\tilde t_2-\tilde q_1)}$, $r_2=\tilde q_2(\tilde q_1-2\tilde t_2)^{-1}r_1\}$, $\breve a_2\neq 0\Leftrightarrow\text{æ}_4\neq 0\Leftrightarrow\underline{\tilde p_2\neq-\tilde q_2(2\tilde p_1\tilde t_2-\tilde p_1\tilde q_1-\tilde q_2\tilde t_2)(\tilde q_1-2\tilde t_2)^{-2}}$. Тогда при $r_1=|\tilde q_1-2\tilde t_2|^{1/2}|\text{æ}_5|^{-1/2}$, $s_2=|\tilde q_1-2\tilde t_2|^{1/2}|\text{æ}_5|^{3/2}(\tilde q_1-2\tilde t_2)^{-1}\text{æ}_5^{-1}$ система (72) является

$CSF^{4,1}_{a,12} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_9$ с $\sigma = \operatorname{sign}((\tilde q_1 - 2\tilde t_2)æ_5)$, $u = \tilde q_1^{-1}\tilde t_2$, $v = \tilde q_1 æ_4 æ_5^{-2}$ $(u+v\neq 0)$.

$\mathbf{1^5_2}$) $\breve a_1 = 0 \Leftrightarrow r_2 = -\tilde p_1\tilde q_1^{-1}r_1$, $\breve b_2 \neq 0 \Leftrightarrow æ_5 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde q_2 \neq \tilde p_1(2\tilde q_1^{-1}\tilde t_2 - 1)}$ $(æ_{11}\neq 0$, иначе $\widetilde R_2 = 0)$. Тогда при $r_1 = |\tilde q_1|^{1/2}|æ_5|^{1/2}æ_5$, $s_2 = -|\tilde q_1|^{3/2}|\tilde q_1^{-3}æ_5|^{3/2}æ_5^{-1}$ система (72) – это $CSF^{4,1}_{a,24} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ v & 1 & u & 0 \end{pmatrix}_{11}$ с $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde q_1 æ_5)$, $u = \tilde q_1^{-1}\tilde t_2$, $v = \tilde q_1 æ_{11}æ_5^{-2}$.

Но при $\tilde q_1 \neq 2\tilde t_2$, как уже установлено, можно получить предшествующую ей $CSF^{4,1}_{12}$. Поэтому $\underline{\tilde t_2 = \tilde q_1/2}$ и $æ_{11} = \tilde q_1(\tilde p_1^2/2 - \tilde p_1\tilde q_2 + \tilde p_2\tilde q_1) \neq 0$. При $r_1 = -|\tilde q_2|^{-1/2}$, $r_2 = \tilde p_1\tilde q_1^{-1}|\tilde q_2|^{-1/2}$, $s_2 = -|\tilde q_2|^{3/2}(\tilde q_1\tilde q_2)^{-1}$ получаем $CSF^{4,1}_{a,24}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde q_2$, $u = 1/2$, $v = (\tilde p_1^2/2 - \tilde p_1\tilde q_2 + \tilde p_2\tilde q_1)\tilde q_2^{-2}$.

Кроме того, при $\tilde t_2 = \tilde q_1/2$ имеем: $æ_7 = (\tilde p_1 - \tilde q_2)^2 + 2\tilde p_2\tilde q_1 < 0$, иначе согласно 1^3_2) можно получить предшествующую $CSF^{4,1}_7$. Поэтому в $CF^{4,1}_{a,24}$ $v < -1/2$.

2) $\breve c_1 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde t_1 \neq 0}$. Сведем систему (71) к $CSF^{5,1}_8$ или к какой-либо канонической форме, предшествующей $CSF^{5,1}_8$.

Введем вторую группу констант:

$$\begin{gathered} æ_{12} = 4\tilde p_1\tilde t_1 - \tilde q_1^2,\quad æ_{13} = 4\tilde p_2\tilde t_1^2 - \tilde q_1^2\tilde t_2,\quad æ_{14} = 8\tilde p_2\tilde t_1^2 + 4(\tilde p_1 - \tilde q_2)\tilde q_1\tilde t_1 - (\tilde q_1 - 2\tilde t_2)\tilde q_1^2, \\ æ_{15} = \tilde q_2\tilde t_1 - \tilde q_1\tilde t_2,\quad æ_{16} = \tilde p_1\tilde t_1 + \tilde q_1\tilde t_2 + \tilde t_2^2,\quad æ_{17} = \tilde p_2\tilde t_1^2 - (\tilde p_1 - \tilde q_2)\tilde t_1\tilde t_2 - \tilde q_1 t_2^2, \\ æ_{18} = \tilde p_1\tilde t_1 - \tilde t_2^2,\quad æ_{19} = \tilde p_2\tilde t_1^2 - (\tilde p_1 - \tilde q_2)\tilde t_1\tilde t_2 + 2\tilde t_2^3,\quad æ_{20} = \tilde q_2\tilde t_1 + 2\tilde t_2^2, \\ æ_{21} = \tilde p_1\tilde t_2^2 - \tilde p_2\tilde t_1,\quad æ_{22} = \tilde p_2\tilde t_1^2 + \tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2 + \tilde t_2^3,\quad æ_{23} = 8\tilde p_2\tilde t_1^2 + (4\tilde p_1\tilde t_1 - (\tilde q_1 + 2\tilde t_2)\tilde q_1)\tilde q_1, \\ æ_{24} = 4\tilde p_2\tilde t_1^2 + (\tilde q_1\tilde t_2 - 2\tilde q_2\tilde t_1)\tilde q_1,\quad æ_{25} = \tilde p_2\tilde t_1^2 + \tilde q_1\tilde t_2^2 + \tilde t_2^3,\quad æ_{26} = (\tilde q_1 - 2\tilde t_2)^2 + 8\tilde t_1\tilde q_2. \end{gathered} \tag{73_2}$$

В системе (71) элемент $\breve b_1 = 0$ при $r_2 = -\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}r_1$, тогда она примет вид

$$\begin{pmatrix} æ_{12}(4\tilde t_1)^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde t_1 s_2^2 & 0 \\ æ_{14}(8\tilde t_1^2 s_2)^{-1}r_1^3 & æ_{15}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & (2\tilde t_2 + \tilde q_1)r_1 s_2/2 & 0 \end{pmatrix}; \tag{75}$$

а элемент $\breve c_2 = 0$ при $r_2 = \tilde t_1^{-1}\tilde t_2 r_1$, тогда система (71) примет вид

$$\begin{pmatrix} æ_{16}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & (\tilde q_1 + 2\tilde t_2)r_1 s_2 & \tilde t_1 s_2^2 & 0 \\ æ_{17}\tilde t_1^{-2}r_1^3 s_2^{-1} & æ_{15}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{76}$$

$\mathbf{2_1}$) $\breve b_1, \breve c_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde q_1 = -2\tilde t_2}$. Тогда обе замены совпадают $(æ_{12}/4 = æ_{16} = æ_{18}$, $æ_{14}/8 = æ_{17} = æ_{19}$, $æ_{15} = æ_{20})$, и система (71) имеет вид

$$\begin{pmatrix} æ_{18}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & 0 & \tilde t_1 s_2^2 & 0 \\ æ_{19}\tilde t_1^{-2}r_1^3 s_2^{-1} & æ_{20}\tilde t_1^{-1}r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{77}$$

$\mathbf{2^1_1}$) $\breve a_1 = 0 \Leftrightarrow æ_{18} = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde p_1 = \tilde t_1^{-1}\tilde t_2^2}$, $\breve b_2 = 0 \Leftrightarrow æ_{20} = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde q_2 = -2\tilde t_2^2\tilde t_1^{-1}}$ $(\breve a_2 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{19} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde p_2 \neq \tilde t_2^3\tilde t_1^{-2}$, иначе $\widetilde R_2 = 0)$. Тогда при $r_1 = |\tilde t_1|^{1/2}(\tilde p_2\tilde t_1^2 - \tilde t_2^3)^{-1/3}$, $s_2 = |\tilde t_1|^{1/2}\tilde t_1^{-1}$ система (77) – это $CF^{2,1}_9 = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_7$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$.

$\mathbf{2_1^2}$) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow æ_{19} = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{p}_2 = ((\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)\tilde{t}_1\tilde{t}_2 - 2\tilde{t}_2^3)\tilde{t}_1^{-2}}$ ($\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{18} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 \neq \tilde{t}_2^2\tilde{t}_1^{-1}$, $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{20} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq -2\tilde{t}_2^2\tilde{t}_1^{-1}$, иначе $\widetilde{R}_2 = 0$). При $r_1 = |\tilde{t}_1|^{1/2}|æ_{20}|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ система (77) – это $CF^{3,1}_{9,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_7$ с $\sigma = \operatorname{sign} æ_{20}$, $u = æ_{18}æ_{20}^{-1}$, $\kappa = \sigma \operatorname{sign} \tilde{t}_1$.

$\mathbf{2_1^3}$) $\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{18} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{p}_1 \neq \tilde{t}_2^2\tilde{t}_1^{-1}}$, $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow æ_{20} = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 = -2\tilde{t}_2^2\tilde{t}_1^{-1}}$ ($\breve{a}_2 \neq 0$ ($\Leftrightarrow æ_{19} \neq 0$) $\Leftrightarrow æ_{21} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_2 \neq \tilde{p}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}$, иначе $\widetilde{R}_2 = 0$). Тогда при $r_1 = -|\tilde{t}_1|^{1/6}æ_{21}^{-1/3}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ система (77) – это $CF^{3,1}_{17} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_8$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = æ_{18}æ_{21}^{-2/3}\tilde{t}_1^{-2/3}$.

$\mathbf{2_1^4}$) $\breve{a}_1 = 0 \Leftrightarrow æ_{18} = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{p}_1 = \tilde{t}_2^2\tilde{t}_1^{-1}}$, $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{20} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 \neq -2\tilde{t}_2^2\tilde{t}_1^{-1}}$ ($\breve{a}_2 \neq 0$ ($\Leftrightarrow æ_{19} \neq 0$) $\Leftrightarrow æ_{22} \Leftrightarrow \tilde{p}_2 \neq -(\tilde{t}_1\tilde{q}_2 + \tilde{t}_2^2)\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-2}$, иначе $\widetilde{R}_2 = 0$). Тогда при $r_1 = |\tilde{t}_1|^{3/2}æ_{22}^{-1/3}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ система (77) – это $CF^{3,1}_{a,22} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{10}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = æ_{20}æ_{22}^{-2/3}$.

$\mathbf{2_1^5}$) $\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{18} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{p}_1 \neq \tilde{t}_1^{-1}\tilde{t}_2^2}$, $\breve{a}_2 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{19} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{p}_2 \neq ((\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)\tilde{t}_1\tilde{t}_2 - 2\tilde{t}_2^3)\tilde{t}_1^{-2}}$, $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{20} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 \neq -2\tilde{t}_2^2\tilde{t}_1^{-1}}$. Тогда при $r_1 = -|\tilde{t}_1|^{1/2}æ_{19}^{-1/3}$, $s_2 = -|\tilde{t}_1|^{1/2}\tilde{t}_1^{-1}$ (77) – это $CSF^{4,1}_{a,27} = \sigma \begin{pmatrix} v & 0 & 1 & 0 \\ 1 & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{11}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = æ_{20}æ_{19}^{-2/3}$, $v = æ_{18}æ_{19}^{-2/3}$ ($u^2v + 1 \neq 0$).

$\mathbf{2_2}$) $\breve{b}_1 = 0 \Leftrightarrow r_2 = -\tilde{q}_1(2\tilde{t}_1)^{-1}r_1$, тогда в системе (75) $\breve{c}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_1 \neq -2\tilde{t}_2}$ ($\breve{a}_1^2 + \breve{a}_2^2 \neq 0$).

$\mathbf{2_2^1}$) $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow æ_{15} = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}}$, $\breve{a}_2 = 0$ ($\Leftrightarrow æ_{14} = 0$) $\Leftrightarrow æ_{23} = 0 \Leftrightarrow \underline{8\tilde{p}_2 = ((\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)\tilde{q}_1 - 4\tilde{p}_1\tilde{t}_1)\tilde{q}_1\tilde{t}_1^{-2}}$ ($\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{12} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 \neq \tilde{q}_1^2(4\tilde{t}_1)^{-1}$, иначе $\widetilde{R}_2 = 0$). Тогда при $r_1 = 2\tilde{t}_1|\tilde{t}_1|^{-1/2}(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-1}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ система (75) – это $CF^{3,1}_6 = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_6$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = æ_{12}(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-2}$.

$\mathbf{2_2^2}$) $\breve{a}_1 = 0 \Leftrightarrow æ_{12} = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{p}_1 = \tilde{q}_1^2(4\tilde{t}_1)^{-1}}$, $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow æ_{15} = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}}$ ($\breve{a}_2 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{13} \neq 0 \Leftrightarrow 4\tilde{p}_2 \neq \tilde{q}_1^2\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-2}$, иначе $\widetilde{R}_2 = 0$). Тогда при $r_1 = 2^{2/3}|\tilde{t}_1|^{3/2}\tilde{t}_1^{-1}æ_{13}^{-1/3}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ система (75) – это $CF^{3,1}_{a,19} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_9$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = 2^{-1/3}(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)æ_{13}^{-1/3}$.

$\mathbf{2_2^3}$) $\breve{a}_2 = 0 \Leftrightarrow æ_{14} = 0 \Leftrightarrow \underline{8\tilde{p}_2 = ((\tilde{q}_1 - 2\tilde{t}_2)\tilde{q}_1 - 4(\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)\tilde{t}_1)\tilde{q}_1\tilde{t}_1^{-2}}$, $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{15} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 \neq \tilde{q}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}}$ ($\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{12} \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 \neq \tilde{q}_1^2(4\tilde{t}_1)^{-1}$, иначе $\widetilde{R}_2 = 0$). Тогда при $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$, $r_1 = 2|\tilde{t}_1|^{3/2}(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-1}\tilde{t}_1^{-1}$ система (75) является $CSF^{4,1}_{a,14} = \sigma \begin{pmatrix} v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 & 0 \end{pmatrix}_9$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = 4æ_{15}(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-2}$, $v = æ_{12}(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-2}$ ($u^2 + v \neq 0$).

$\mathbf{2_2^4}$) $\breve{a}_1 \neq 0$, $\breve{b}_2 = 0$, $\breve{a}_2 \neq 0$. В этом случае система (75) – это $SF^4_{a,20}$, которая согласно утверждению 8 не является канонической.

$\mathbf{2_2^5}$) $\breve{a}_1 = 0 \Leftrightarrow æ_{12} = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{p}_1 = \tilde{q}_1^2(4\tilde{t}_1)^{-1}}$, $\breve{b}_2 \neq 0 \Leftrightarrow æ_{15} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 \neq \tilde{q}_1\tilde{t}_2\tilde{t}_1^{-1}}$ ($\breve{a}_2 \neq 0$ ($\Leftrightarrow æ_{14} = 0$) $\Leftrightarrow æ_{24} \neq 0 \Leftrightarrow 4\tilde{p}_2 \neq (2\tilde{t}_1\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1\tilde{t}_2)\tilde{q}_1\tilde{t}_1^{-2}$, иначе $\widetilde{R}_2 = 0$). Тогда при $r_1 = 2|\tilde{t}_1|^{3/2}æ_{24}^{-1/3}\tilde{t}_1^{-1}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{-1/2}$ система (75) – $CSF^{4,1}_{a,30} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & v & u & 0 \end{pmatrix}_{12}$ с $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$,

$u=(\tilde q_1+2\tilde t_2)æ_{24}^{-1/3},\ \ v=4æ_{15}æ_{24}^{-2/3}$.

$\mathbf{2_2^6}$) $\breve a_1,\breve a_2,\breve b_2\neq 0$. В этом случае система (75) – это $SF^5_{a,16}$.

$\mathbf{2_3}$) $\breve c_2=0\Leftrightarrow r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2 r_1$, тогда в (76) $\breve b_1\neq 0\Leftrightarrow \underline{\tilde q_1\neq -2\tilde t_2}$ $(\breve a_1^2+\breve a_2^2\neq 0,\ \breve a_2^2+\breve b_2^2\neq 0)$.

$\mathbf{2_3^1}$) $\breve a_1=0\Leftrightarrow æ_{16}=0\Leftrightarrow \underline{\tilde p_1=-(\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}\tilde t_2}$, $\breve b_2=0\Leftrightarrow æ_{15}=0\Leftrightarrow \underline{\tilde q_2=\tilde q_1\tilde t_2\tilde t_1^{-1}}$ $(\breve a_2\neq 0\,(\Leftrightarrow æ_{17}\neq 0)\Leftrightarrow æ_{25}\neq 0\Leftrightarrow \tilde p_2\neq -(\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_2^2\tilde t_1^{-2}$, иначе $\widetilde R_2=0)$. Тогда при $r_1=|\tilde t_1|^{1/2}æ_{25}^{-1/3}$, $s_2=|\tilde t_1|^{1/2}\tilde t_1^{-1}$ система (76) – $CSF^{3,1}_{21}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_9$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=(\tilde q_1+2\tilde t_2)æ_{25}^{-1/3}$.

$\mathbf{2_3^2}$) $\breve a_2=0\Leftrightarrow æ_{17}=0\Leftrightarrow \underline{\tilde p_2=((\tilde p_1-\tilde q_2)\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1^{-2}}$ $(\breve a_1\neq 0\Leftrightarrow æ_{16}\neq 0\Leftrightarrow \tilde p_1\neq -(\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}\tilde t_2$, $\breve b_2\neq 0\Leftrightarrow æ_{15}\neq 0\Leftrightarrow \tilde q_2\neq \tilde q_1\tilde t_2\tilde t_1^{-1}$, иначе $\widetilde R_2=0)$. Тогда при $r_1=|\tilde t_1|^{1/2}|æ_{15}|^{-1/2}$, $s_2=\sigma|æ_{15}|^{1/2}|\tilde t_1|^{-1/2}(\tilde q_1+2\tilde t_2)^{-1}$ система (76) – $CSF^{4,1}_{11}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&v&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_9$ с $\sigma=\operatorname{sign}(æ_{15}\tilde t_1)$, $u=æ_{16}æ_{15}^{-1}$, $v=æ_{15}(\tilde q_1+2\tilde t_2)^{-2}$.

$\mathbf{2_3^3}$) $\breve a_1\neq 0\Leftrightarrow æ_{16}\neq 0\Leftrightarrow \underline{\tilde p_1\neq -(\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}\tilde t_2}$, $\breve b_2=0\Leftrightarrow æ_{15}=0\Leftrightarrow \underline{\tilde q_2=\tilde q_1\tilde t_2\tilde t_1^{-1}}$ $(\breve a_2\neq 0\,(\Leftrightarrow æ_{17}\neq 0)\Leftrightarrow æ_{21}\Leftrightarrow \tilde p_1\neq \tilde p_2\tilde t_1\tilde t_2^{-1}$, иначе $\widetilde R_2=0)$. Тогда при $r_1=-|\tilde t_1|^{1/6}æ_{21}^{-1/3}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ система (76) – $CSF^{4,1}_{19}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{10}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=æ_{16}æ_{21}^{-2/3}|\tilde t_1|^{-2/3}$, $v=-(\tilde q_1+2\tilde t_2)æ_{21}^{-1/3}\tilde t_1^{-1/3}$.

$\mathbf{2_3^4}$) $\breve a_1=0\Leftrightarrow æ_{16}=0\Leftrightarrow \underline{\tilde p_1=-(\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}\tilde t_2}$, $\breve b_2\neq 0\Leftrightarrow æ_{15}\neq 0\Leftrightarrow \underline{\tilde q_2\neq \tilde q_1\tilde t_2\tilde t_1^{-1}}$ $(\breve a_2\neq 0\,(\Leftrightarrow æ_{17}\neq 0)\Leftrightarrow æ_{22}\neq 0\Leftrightarrow \tilde p_2\neq -(\tilde t_1\tilde q_2+\tilde t_2^2)\tilde t_2\tilde t_1^{-2}$, иначе $\widetilde R_2=0)$. Тогда при $r_1=|\tilde t_1|^{3/2}(\tilde q_1+2\tilde t_2)^{-1}\tilde t_1^{-1}$, $s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}$ система (76) является $CSF^{4,1}_{a,33}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\v&u&0&0\end{pmatrix}_{12}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=æ_{15}(\tilde q_1+2\tilde t_2)^{-2}$, $v=æ_{22}(\tilde q_1+2\tilde t_2)^{-3}$ $(u\neq v)$.

$\mathbf{2_3^5}$) $\breve a_1,\breve a_2,\breve b_2\neq 0$. В этом случае система (75) – это $SF^5_{a,20}$.

$\mathbf{2_4}$) В системе (71) $\breve b_1,\ \breve c_2\neq 0$ $(\breve a_1^2+\breve a_2^2\neq 0)$.

$\mathbf{2_4^1}$) $\breve a_1=0$ $(\breve a_2\neq 0)$, $\breve b_2=0$.

$\breve a_1=0\Leftrightarrow \{æ_{12}=\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1\geq 0,\ r_2=(-\tilde q_1\pm æ_{12}^{1/2})(2\tilde t_1^{-1})r_1\}$. Тогда (71) имеет вид

$$\begin{pmatrix}0&\pm æ_{12}^{1/2}r_1s_2&\tilde t_1s_2^2&0\\ a_2^*r_1^3s_2^{-1}&b_2^*r_1^2&(\tilde q_1+2\tilde t_2\mp æ_{12}^{1/2})r_1s_2/2&0\end{pmatrix},\tag{78}$$

$a_2^*=((q_1t_2-q_2t_1)(q_1\mp æ_{12}^{1/2})/2+t_1(t_1p_2-t_2p_1))t_1^{-2}$, $b_2^*=(q_2t_1-q_1t_2-æ_{12}/2\pm(q_1/2+t_2)æ_{12}^{1/2})t_1^{-1}$.

Элемент $\breve b_2=0$ при $\underline{q_2=(2q_1t_2+æ_{12}\mp(q_1+2t_2)æ_{12}^{1/2})(2t_1)^{-1}}$, $\breve b_1,\breve c_2\neq 0$ при $æ_{12}\neq 0$ $\Leftrightarrow \underline{\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1>0}$, $\underline{q_1+2t_2\mp æ_{12}^{1/2}\neq 0}$. Тогда при $r_1=\pm|t_1|^{3/2}t_1^{-1}æ_{12}^{-1/2}$, $s_2=|t_1|^{-1/2}$ система (78) – это $CSF^{4,1}_{a,29}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\v&0&u&0\end{pmatrix}_{11}$ с $\sigma=\operatorname{sign}t_1$, $u=(\pm\tilde q_1\pm 2\tilde t_2-æ_{12}^{1/2})æ_{12}^{-1/2}/2$, $v=\pm(2t_1(t_1p_2-p_1t_2)-(q_1+t_2)æ_{12}\pm(q_1^2-2t_1p_1+q_1t_2)æ_{12}^{1/2})æ_{12}^{-3/2}/2$ $(u+v\neq 0$ при $R_2\neq 0)$.

$\mathbf{2_4^2}$) $\breve a_1\neq 0$. В системе (71) элемент $\breve a_2=0$ при $r_2=\theta_* r_1$, где θ_* – вещественный корень кубического уравнения (70). Тогда (71) примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{1*}r_1^2 & b_{1*}r_1s_2 & c_{1*}s_2^2 & 0 \\ 0 & b_{2*}r_1^2 & c_{2*}r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} a_{1*}=\tilde p_1+\tilde q_1\theta_*+\tilde t_1\theta_*^2,\ \ b_{1*}=\tilde q_1+2\tilde t_1\theta_*,\ \ c_{1*}=\tilde t_1, \\ b_{2*}=\tilde q_2-(\tilde q_1-2\tilde t_2)\theta_*-2\tilde t_1\theta_*^2,\ \ c_{2*}=\tilde t_2-\tilde t_1\theta_*, \end{array} \tag{79}$$

при этом $a_{1*}, b_{1*}, c_{1*}, c_{2*}\neq 0$.

$\mathbf{2_4^{2a}}$) $\breve b_2=0 \Leftrightarrow b_{2*}=0 \ \Leftrightarrow\ \theta_*=(2\tilde t_2-\tilde q_1\pm æ_{26}^{1/2})(4\tilde t_1)^{-1}$, и $b_{1*}\neq 0 \ \Leftrightarrow\ \underline{\tilde q_1\neq -2\tilde t_2\mp æ_{26}^{1/2}}$, $c_{2*}\neq 0\Leftrightarrow \underline{\tilde q_1\neq -2\tilde t_2\pm æ_{26}^{1/2}}$, где $æ_{26}=\underline{(\tilde q_1-2\tilde t_2)^2+8\tilde t_1\tilde q_2\geq 0}$.

Теперь $a_{2*}=0 \ \Leftrightarrow\ \underline{\tilde p_2=(8\tilde p_1\tilde t_2\tilde t_1-4\tilde p_1\tilde q_1\tilde t_1+4\tilde q_1\tilde t_2^2-4\tilde q_1^2\tilde t_2+6\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_1-4\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2+\tilde q_1^3\pm}$ $\underline{(2\tilde q_1\tilde t_2+4\tilde p_1 t_1-\tilde q_1^2-2\tilde q_2\tilde t_1)æ_{26}^{1/2})(4\tilde t_1)^{-2}}$. Поэтому при $r_1=4\sigma|\tilde t_1|^{1/2}(\tilde q_1+2\tilde t_2\mp æ_{26}^{1/2})^{-1}=\sigma|c_{1*}|^{1/2}c_{2*}^{-1}$, $s_2=|c_{1*}|^{-1/2}=|\tilde t_1|^{-1/2}$ система (79) – это $CSF_5^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix} u & v & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}_8$ с $\sigma=\operatorname{sign} c_{1*}=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=a_{1*}c_{1*}c_{2*}^{-2}=2(4\tilde t_1(2\tilde p_1+\tilde q_2)-\tilde q_1^2+4\tilde t_2^2\pm(\tilde q_1+2\tilde t_2)æ_{26}^{1/2})(\tilde q_1+2\tilde t_2\mp æ_{26}^{1/2})^{-2}$, $v=b_{1*}c_{2*}^{-1}=2(\tilde q_1+2\tilde t_2\pm æ_{26}^{1/2})(\tilde q_1+2\tilde t_2\mp æ_{26}^{1/2})^{-1}$.

$\mathbf{2_4^{2b}}$) $\breve b_2\neq 0 \Leftrightarrow b_{2*}\neq 0 \Leftrightarrow \underline{\theta_*\neq(2\tilde t_2-\tilde q_1\pm æ_{26}^{1/2})(4\tilde t_1)^{-1}}$, и $b_{1*}\neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde q_1\neq -2\tilde t_1\theta_*}$, $c_{2*}\neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde t_2\neq \tilde t_1\theta_*}$. Тогда при $r_1=|b_{2*}|^{-1/2}$, $s_2=\sigma|b_{2*}|^{1/2}c_{2*}^{-1}$ (79) – это $CSF_8^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix} u & v & w & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}_{11}$ с $\sigma=\operatorname{sign} b_{2*}$, $u=a_{1*}b_{2*}^{-1}$, $v=b_{1*}c_{2*}^{-1}$, $w=c_{1*}b_{2*}c_{2*}^{-2}$ $(w\neq v-u)$.

$\mathbf{2_4^{3}}$) $\breve a_1, \breve a_2\neq 0$, $\breve b_2=0$, тогда (71) – SF_{14}^5; $\breve a_1=0$, $\breve a_2, \breve b_2\neq 0$, тогда (71) – $SF_{a,23}^5$.

II. Систему (69) будем теперь сводить произвольной заменой (16) с $r_1=s_1$ к различным каноническим структурным формам из списка 11, у которых вектор $(\breve\alpha,\breve\beta)=(1,1)$. Они получены из соответствующих NSF из списка 10,II. При этом условие $r_1=s_1$ означает, что во всех получаемых системах будет $\breve\alpha=\breve\beta$.

Замечание 13. При сведении системы (69) к $CSF_{28}^{4,1}$, $CSF_{32}^{4,1}$, $CSF_{36}^{4,1}$, $CSF_3^{5,1}$, $CSF_6^{5,1}$, $CSF_7^{5,1}$ будем считать, что ее элемент $\underline{\tilde t_1\neq 0}$, так как в I,1) показано, что при $\tilde t_1=0$ система (69) сводится к каноническим структурным формам не хуже, чем $CSF_{24}^{4,1}$.

Введем третью группу констант, элементы $\hat p_1, \hat q_1, \hat q_2, \hat t_1, \hat t_2, \theta_*$ которых описаны ниже в пунктах, где эти константы используются:

$$\begin{array}{l}
æ_{27}=\tilde q_1-2\tilde t_2\mp æ_{26}^{1/2}, \quad æ_{28}=-æ_{26}(\tilde q_1^3\tilde t_2-6\tilde q_1^2\tilde t_2^2-\tilde q_2\tilde t_1\tilde q_1^2+12\tilde q_1\tilde t_2^3+10\tilde q_2\tilde t_1\tilde q_1\tilde t_2- \\
\quad 8\tilde t_2^4-4\tilde q_2^2\tilde t_1^2-16\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^2\pm æ_{26}^{1/2}(\tilde q_2\tilde t_1\tilde q_1+4\tilde q_1\tilde t_2^2-4\tilde t_2^3-4\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2-\tilde q_1^2\tilde t_2))\tilde t_1^{-1}æ_{27}^{-2}, \\
æ_{29}=(\hat q_1-\hat t_2)^2-4(\hat p_1-\hat q_2)\hat t_1, \quad æ_{30}=(\hat q_2^2+2\hat q_1\hat q_2+2\hat q_1\hat t_2-\hat t_2^2-4\hat q_2 t_1)(\hat q_2+\hat t_2)^{-2}, \\
æ_{31}=4(\hat t_2^3+(\hat q_2-\hat q_1)\hat t_2^2+(3\hat t_1-\hat q_1)\hat q_2\hat t_2+\hat q_2^2\hat t_1)(\hat q_2+\hat t_2)^{-3}, \\
æ_{32}=(\hat q_2^2+2\hat q_1\hat q_2+2\hat q_1\hat t_2-3\hat t_2^2-8\hat q_2\hat t_1-2\hat q_2\hat t_2)(\hat q_2+\hat t_2)^{-2}, \quad æ_{33}=2\hat t_1\hat q_2+\hat q_2\hat t_2+\hat t_2^2, \\
æ_{34}=(2\hat q_1\hat t_2-4\hat t_1\hat q_2-\hat t_2^2)\hat t_2^{-2}, \quad æ_{35}=4(\hat q_1\hat t_2-3\hat t_1\hat q_2-\hat t_2^2)\hat t_2^{-2}, \\
æ_{36}=2\tilde t_1^2\theta_*^4+5\tilde t_1(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*^3+(-5\tilde t_2\tilde q_1+2\tilde q_1^2+2\tilde t_2^2+10\tilde t_1\tilde q_2)\theta_*^2-\tilde q_2(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*-\tilde q_2^2, \\
æ_{37}=\theta_*^3\tilde t_1\tilde t_2+(5\tilde t_1\tilde q_2+2\tilde t_2^2-4\tilde q_1\tilde t_2)\theta_*^2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2^2, \\
æ_{38}=4\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2, \quad æ_{39}=2\tilde t_1\theta_*^2+(\tilde q_1-2\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2, \\
æ_{40}=12\tilde p_1\tilde t_1+\tilde t_2^2, \quad æ_{41}=æ_{40}\pm\tilde t_2æ_{40}^{1/2}-6\tilde p_1\tilde t_1, \quad æ_{42}=æ_{40}\pm\tilde t_2æ_{40}^{1/2}, \\
æ_{43}=3\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2, \quad æ_{44}=9\tilde p_1\tilde t_1-2\tilde q_1^2+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2, \quad æ_{45}=3\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2-\tilde q_1\tilde t_2-\tilde t_2^2, \\
æ_{46}=\tilde p_1\tilde t_1+2\tilde q_1^2+9\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2), \quad æ_{47}=2\theta_*^2\tilde t_1+\theta_*(\tilde q_1-2\tilde t_2)-\tilde q_2, \\
æ_{48}=2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2+2(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1\theta_*+3\tilde t_1^2\theta_*^2.
\end{array} \tag{73_3}$$

1) Из (69) получаем $CSF_1^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_6$.

В полученной из (69) системе $\breve c_1, \breve d_1, \breve a_2, \breve b_2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \tilde p_1 = (\tilde t_1 r_2^2 + \tilde t_1 r_2 s_2 - \tilde t_2 s_1 r_2 + \tilde t_1 s_2^2 - \tilde t_2 s_1 s_2) s_1^{-2}$, $\tilde q_1 = 2(\tilde t_2 s_1 - \tilde t_1 r_2 - \tilde t_1 s_2) s_1^{-1}$, $\tilde p_2 = (\tilde t_1 r_2 + \tilde t_1 s_2 - \tilde t_2 s_1) s_2 r_2 s_1^{-3}$, $\tilde q_2 = -2\tilde t_1 r_2 s_2 s_1^{-2}$.

$\mathbf{1_1}$) $\underline{\tilde t_1 \neq 0}$. Из равенства для $\tilde q_2$ можно выразить $r_2:\ r_2 = -\tilde q_2 (2\tilde t_1 s_2)^{-1} s_1^2$ и подставить в коэффициенты $\tilde p_1, \tilde q_1, \tilde p_2$. В результате получим систему
$$\breve A = \frac{2\tilde t_1 s_2^2 + \tilde q_2 s_1^2}{2\tilde t_1 s_2} \begin{pmatrix} \tilde t_1 s_2 - \tilde t_2 s_1 & \tilde t_1 s_2 - \tilde t_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\tilde q_2 s_1 + 2\tilde t_2 s_2) s_1 (2s_2)^{-1} & (\tilde q_2 s_1 + 2\tilde t_2 s_2) s_1 (2s_2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{1_1^1}$) $\underline{\tilde q_2 = 0}$, $\underline{\tilde p_2 = 0}$. Тогда $r_2 = 0$ и
$\breve A = \begin{pmatrix} (\tilde t_1 s_2 - \tilde t_2 s_1) s_2 & (\tilde t_1 s_2 - \tilde t_2 s_1) s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde t_2 s_1 s_2 & \tilde t_2 s_1 s_2 \end{pmatrix}$. Из равенства для $\tilde q_1$ выразим s_2 : $s_2 = -(\tilde q_1 - 2\tilde t_2)(2\tilde t_1)^{-1} s_1$. Тогда $\underline{\tilde p_1 = (\tilde q_1 - 2\tilde t_2)\tilde q_1 (4\tilde t_1)^{-1}}$ ($\tilde q_1 \neq 2\tilde t_2$, иначе $R_2 = 0$). При $s_1 = |2\tilde t_1|^{1/2} |\tilde t_2 (\tilde q_1 - 2\tilde t_2)|^{-1}$ имеем $\overline{CSF_1^{4,1}}$ с $\sigma = -\operatorname{sign}(\tilde t_1 \tilde t_2 (\tilde q_1 - 2\tilde t_2))$, $u = -\tilde q_1 (2\tilde t_2)^{-1} \neq -1$.

$\mathbf{1_1^2}$) $\underline{\tilde q_2 \neq 0}$. Пусть $æ_{26} = \underline{(\tilde q_1 - 2\tilde t_2)^2 + 8\tilde q_2 \tilde t_1 > 0}$. Тогда из равенства для $\tilde q_1$ можно выразить $s_2:\ s_2 = -æ_{27}(4\tilde t_1)^{-1} s_1$. Тогда $\underline{\tilde p_1 = (4(4\tilde q_2 \tilde t_1 - 8\tilde q_1 \tilde t_2 + 3\tilde q_1^2 + 4\tilde t_2^2)\tilde q_2 \tilde t_1 + 2\tilde q_1^4 - 12\tilde q_1^3 \tilde t_2 +}$ $\underline{24\tilde q_1^2 \tilde t_2^2 - 16\tilde q_1 \tilde t_2^3 \pm æ_{26}^{1/2}(3\tilde q_1^2 \tilde t_2 - \tilde q_1^3 + 4\tilde q_1 \tilde q_2 \tilde t_1 - 4\tilde t_2^3 + (\tilde t_2 - \tilde q_1)æ_{26}))(4\tilde t_1)^{-1} æ_{27}^{-2}}$, $\underline{\tilde p_2 = \tilde q_1 \tilde q_2 (4\tilde t_1)^{-1}}$.

В полученной системе $\breve a_1, \breve b_1 = æ_{26}(\tilde q_1^3 - 4\tilde q_1^2 \tilde t_2 + 4\tilde q_1 \tilde t_2^2 + 6\tilde q_1 \tilde q_2 \tilde t_1 - 4\tilde q_2 \tilde t_1 \tilde t_2 \pm æ_{26}^{1/2}(2\tilde q_1 \tilde t_2 - \tilde q_1^2 - 2\tilde q_2 \tilde t_1))\tilde t_1^{-1} æ_{27}^{-3} s_1^2$, $\breve c_2, \breve d_2 = æ_{28} æ_{27}^{-2} s_1^2$, где $æ_{28} = -æ_{26}(\tilde q_1^3 \tilde t_2 - 6\tilde q_1^2 \tilde t_2^2 - \tilde q_1^2 \tilde q_2 \tilde t_1 + 12\tilde q_1 \tilde t_2^3 + 10\tilde q_1 \tilde q_2 \tilde t_1 \tilde t_2 - 8\tilde t_2^4 - 4\tilde q_2^2 \tilde t_1^2 - 16\tilde q_2 \tilde t_1 \tilde t_2^2 \pm æ_{26}^{1/2}(\tilde q_1 \tilde q_2 \tilde t_1 + 4\tilde q_1 \tilde t_2^2 - 4\tilde t_2^3 - 4\tilde q_2 \tilde t_1 \tilde t_2 - \tilde q_1^2 \tilde t_2))\tilde t_1^{-1} æ_{27}^{-2}$.

При $s_1 = æ_{27} |æ_{28}|^{-1/2}$ получаем $\overline{CSF_1^{4,1}}$ с $\sigma = \operatorname{sign} æ_{28}$, $u = -(\tilde q_1^3 - 4\tilde q_1^2 \tilde t_2 + 4\tilde q_1 \tilde t_2^2 + 6\tilde q_1 \tilde q_2 \tilde t_1 - 4\tilde q_2 \tilde t_1 \tilde t_2 \pm æ_{26}^{1/2}(2\tilde q_1 \tilde t_2 - \tilde q_1^2 - 2\tilde q_2 \tilde t_1))æ_{27}(\tilde q_1^3 \tilde t_2 - 6\tilde q_1^2 \tilde t_2^2 - \tilde q_1^2 \tilde q_2 \tilde t_1 + 12\tilde q_1 \tilde t_2^3 + 10\tilde q_1 \tilde q_2 \tilde t_1 \tilde t_2 - 8\tilde t_2^4 - 4\tilde q_2^2 \tilde t_1^2 - 16\tilde q_2 \tilde t_1 \tilde t_2^2 \pm æ_{26}^{1/2}(\tilde q_1 \tilde q_2 \tilde t_1 + 4\tilde q_1 \tilde t_2^2 - 4\tilde t_2^3 - 4\tilde q_2 \tilde t_1 \tilde t_2 - \tilde q_1^2 \tilde t_2))^{-1}/4$.

$\mathbf{1_2}$) $\underline{\tilde t_1 = 0}$ ($\tilde t_2 \neq 0$). Тогда $\tilde p_1 = -\tilde t_2 (r_2 + s_2) s_1^{-1}$, $\underline{\tilde q_1 = 2\tilde t_2}$, $\tilde p_2 = \tilde t_2 r_2 s_2 s_1^{-2}$, $\underline{\tilde q_2 = 0}$.

Пусть $æ_3 = \underline{\tilde p_1^2 + 4\tilde p_2 \tilde t_2 > 0}$. Из $\tilde p_2$ выразим $r_2 = -\tilde p_2 (2\tilde t_2 s_2)^{-1} s_1^2$ и подставим в $\tilde p_1$: $\tilde p_1 = (\tilde p_2 s_1^2 - \tilde t_2 s_2^2)(s_1 s_2)^{-1}$, откуда выразим $s_2 = (-\tilde p_1 \pm æ_3^{1/2})(2\tilde t_2)^{-1} s_1$.

Тогда при $s_1 = |\tilde p_1 \mp æ_3^{1/2}|^{1/2} |\tilde p_1^2 + 4\tilde p_2 \tilde t_2 \mp \tilde p_1 æ_3^{1/2}|^{1/2} (2æ_3)^{-1/2} |\tilde p_1^2 + 2\tilde p_2 \tilde t_2 \mp \tilde p_1 æ_3^{1/2}|^{1/2}$ получаем $CSF_1^{4,1}$ с $\sigma = -\operatorname{sign}(\tilde p_1^2 + 2\tilde p_2 \tilde t_2 \mp \tilde p_1 æ_3^{1/2})(\tilde p_1^2 + 4\tilde p_2 \tilde t_2 \mp \tilde p_1 æ_3^{1/2})(\tilde p_1 \mp æ_3^{1/2})$, $u = -1$, линейно эквивалентную согласно п. 5) утверждения 9 $CSF_3^{3,1}$.

2) Из (69) получаем $CSF_{a,3}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u & 0 & u \end{pmatrix}_7$, $CSF_3^{5,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{10}$.

$\mathbf{2_1}$) $\underline{\tilde p_2 \neq 0}$. Пусть $\theta_0 \neq 0$ – вещественный корень кубического уравнения (70).

Тогда промежуточная замена $\widehat L^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \theta_0 & 0 \end{pmatrix}$ сводит (69) к $\widehat A = \begin{pmatrix} \hat a_1 & \hat b_1 & \hat c_1 & \hat d_1 \\ \hat a_2 & \hat b_2 & \hat c_2 & \hat d_2 \end{pmatrix} =$
$$\frac{1}{\theta_0} \begin{pmatrix} \tilde t_2 \theta_0^2 + \tilde q_2 \theta_0 + \tilde p_2 & \tilde t_2 \theta_0^2 + 2\tilde q_2 \theta_0 + 3\tilde p_2 & \tilde q_2 \theta_0 + \tilde p_2 & \tilde p_2 \\ 0 & \tilde q_1 \theta_0^2 + (2\tilde p_1 - \tilde q_2)\theta_0 - 2\tilde p_2 & \tilde q_1 \theta_0^2 + (3\tilde p_1 - \tilde q_2)\theta_0 - 3\tilde p_2 & \tilde p_1 \theta_0 - \tilde p_2 \end{pmatrix}, \quad (80)$$
у которой $\widehat G = \begin{pmatrix} \hat p_1 & \hat q_1 & \hat t_1 \\ \hat p_2 & \hat q_2 & \hat t_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\theta_0} \begin{pmatrix} \tilde t_2 \theta_0^2 + \tilde q_2 \theta_0 + \tilde p_2 & \tilde q_2 \theta_0 + 2\tilde p_2 & \tilde p_2 \\ 0 & \tilde q_1 \theta_0^2 + (2\tilde p_1 - \tilde q_2)\theta_0 - 2\tilde p_2 & \tilde p_1 \theta_0 - \tilde p_2 \end{pmatrix}$,

$(\hat\alpha,\hat\beta)=(1,1)$. При этом $\widehat{R}_2=\hat p_1(\hat p_1\hat t_2^2-\hat q_1\hat q_2\hat t_2+\hat q_2^2\hat t_1)\neq 0$, поэтому $\hat a_1=\hat p_1\neq 0$ и $\tilde q_2\neq 0$.

В системе (80) сделаем произвольную замену (16) с $r_2=0$, сохраняющую $\breve p_2=0$, и получая $\breve A$ с $\breve G=\begin{pmatrix}\hat p_1 r_1 & (2\hat p_1-\hat q_2)s_1+\hat q_1 s_2 & (\hat t_1 s_2^2+(\hat q_1-\hat t_2)s_1s_2+(\hat p_1-\hat q_2)s_1^2)r_1^{-1}\\ 0 & \hat q_2 r_1 & \hat q_2 s_1+\hat t_2 s_2\end{pmatrix}$.

Пусть $æ_{29}=\underline{(\hat q_1-\hat t_2)^2-4(\hat p_1-\hat q_2)\hat t_1\geq 0}$, тогда при $s_2=(\hat t_2-\hat q_1\pm æ_{29}^{1/2})(2\hat t_1)^{-1}s_1$ в $\breve A$ элементы $\breve a_2=0$, $\breve d_1=0$, $\breve c_2=(4\hat q_2\hat t_1+(\hat q_2+\hat t_2)(\hat t_2-\hat q_1\pm æ_{29}^{1/2}))(2\hat t_1)^{-1}r_1s_1$ и $\breve G=\begin{pmatrix}\hat p_1 r_1 & (4\hat p_1\hat t_1-2\hat q_2\hat t_1+\hat q_1\hat t_2-\hat q_1^2\pm\hat q_1æ_{29}^{1/2})(2\hat t_1)^{-1}s_1 & 0\\ 0 & \hat q_2 r_1 & (2\hat q_2\hat t_1+\hat t_1^2-\hat q_1\hat t_2\pm\hat t_2æ_{29}^{1/2})(2\hat t_1)^{-1}s_1\end{pmatrix}$.

Элемент $\breve c_2=0\ \Leftrightarrow\ 4\hat q_2\hat t_1+(\hat q_2+\hat t_2)(\hat t_2-\hat q_1\pm æ_{29}^{1/2})=0\ \ (\hat q_2+\hat t_2\neq 0)\ \Leftrightarrow\ \underline{\hat p_1=\hat q_2æ_{30}}$, где $æ_{30}=(\hat q_2^2+2\hat q_1\hat q_2+2\hat q_1\hat t_2-\hat t_2^2-4\hat q_2 t_1)(\hat q_2+\hat t_2)^{-2}$, и пусть $æ_{31}=4(\hat t_2^3+(\hat q_2-\hat q_1)\hat t_2^2+(3\hat t_1-\hat q_1)\hat q_2\hat t_2+\hat q_2^2\hat t_1)(\hat q_2+\hat t_2)^{-3}$ $\ (æ_{30},æ_{31}\neq 0$ и $\hat t_2-\hat q_2\neq 0$, иначе $\widehat R_2=0)$.

Тогда при $s_2=-2\hat q_2(\hat q_2+\hat t_2)^{-1}s_1$ и $æ_{32}=(\hat q_2^2+2\hat q_1\hat q_2+2\hat q_1\hat t_2-3\hat t_2^2-8\hat q_2\hat t_1-2\hat q_2\hat t_2)(\hat q_2+\hat t_2)^{-2}$:

$$\breve A=\hat q_2\begin{pmatrix}æ_{30}r_1^2 & -æ_{31}r_1s_1 & (\hat t_2-\hat q_2)(\hat q_2+\hat t_2)^{-1}æ_{32}s_2^2 & 0\\ 0 & r_1^2 & 0 & -(\hat t_2-\hat q_2)^2(\hat q_2+\hat t_2)^{-2}s_1^2\end{pmatrix}. \tag{81}$$

a) $æ_{32}=0\ \Leftrightarrow\ \underline{\hat q_1=-(\hat q_2^2-2(4\hat t_1+\hat t_2)\hat q_2-3\hat t_2^2)(\hat q_2+\hat t_2)^{-1}/2}$, $æ_{33}=2\hat q_2\hat t_1+\hat q_2\hat t_2+\hat t_2^2$. Тогда при $r_1=(\hat q_2+\hat t_2)|2\hat q_2æ_{33}|^{-1/2}$, $s_1=(\hat q_2+\hat t_2)^2(\hat t_2-\hat q_2)^{-1}|\hat q_2æ_{33}|^{3/2}(\hat q_2æ_{33})^{-2}/\sqrt{2}$ $(r_2=0$, $s_2=\sqrt{2}(\hat q_2+\hat t_2)|\hat q_2æ_{33}|^{3/2}\hat q_2^{-1}æ_{33}^{-2}(\hat q_2-\hat t_2)^{-1})$ система (81) является $CSF_{a,3}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\hat q_2æ_{33})$, $u=-(\hat q_2+\hat t_2)^2(2æ_{33})^{-1}$.

b) $æ_{32}\neq 0\ \Leftrightarrow\ \underline{\hat q_1\neq-(\hat q_2^2-2(4\hat t_1+\hat t_2)\hat q_2-3\hat t_2^2)(\hat q_2+\hat t_2)^{-1}/2}$. Тогда при $r_1=|\hat q_2|^{-1/2}$, $s_1=(\hat q_2+\hat t_2)(\hat q_2-\hat t_2)^{-1}|\hat q_2|^{-1/2}$ $\ (r_2=0,\ s_2=2\hat q_2|\hat q_2|^{-1/2}(\hat t_2-\hat q_2)^{-1})$ система (81) является $CSF_3^{5,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\hat q_2$, $u=æ_{30}$, $v=æ_{31}(\hat t_2+\hat q_2)(\hat t_2-\hat q_2)^{-1}$ $\ (u\neq v)$.

2_2) $\underline{\tilde p_2=0}$ $(\tilde p_1\neq 0)$. Тогда $\widehat A=\widetilde A$, $\widehat G=\widetilde G$, но $(\hat\alpha,\hat\beta)=(1,0)$ в отличие от 2_1).

Предположив, что $\underline{æ_{29}\geq 0}$, при $r_2=0$, $s_2=(\hat t_2-\hat q_1\pm æ_{29}^{1/2})(2\hat t_1)^{-1}s_1$ получим матрицу $\breve G$ из 2_1), но в матрице $\breve A$ элемент $\breve c_2=(4\hat q_2\hat t_1+\hat t_2(\hat t_2-\hat q_1\pm æ_{29}^{1/2}))(2\hat t_1)^{-1}s_1^2$.

Пусть $\breve c_2=0\ \Leftrightarrow\ 4\hat q_2\hat t_1+\hat t_2(\hat t_2-\hat q_1\pm æ_{29}^{1/2})=0\ \ (\hat t_2\neq 0)\ \Leftrightarrow\ \underline{\hat p_1=\hat q_2æ_{34}}$, где $æ_{34}=(2\hat q_1\hat t_2-4\hat q_2\hat t_1-\hat t_2^2)\hat t_2^{-2}$, и пусть $æ_{35}=4(\hat q_1\hat t_2-3\hat q_2\hat t_1-\hat t_2^2)\hat t_2^{-2}$ $\ (æ_{34},æ_{35}\neq 0$, иначе $R_2=0)$.

Тогда $s_2=-2\hat q_2\hat t_2^{-1}s_1$ и матрица $\breve A=\hat q_2 s_1^2\begin{pmatrix}æ_{34} & æ_{35} & æ_{35}-æ_{34} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) $æ_{35}=æ_{34}\ \Leftrightarrow\ \underline{\hat q_1=(8\hat q_2\hat t_1+3\hat t_2^2)(2\hat t_2)^{-1}}$, тогда при $s_1=\hat t_2|2\hat q_2(2\hat t_1\hat q_2+\hat t_2^2)|^{-1/2}$ $\ (r_2=0$, $s_2=-\sqrt{2}\hat q_2|\hat q_2|^{-1/2}|2\hat t_1\hat q_2+\hat t_2^2|^{-1/2})$ получаем $CSF_{a,3}^{4,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}(\hat q_2(2\hat t_1\hat q_2+\hat t_2^2))$, $u=-\hat t_2^2(2\hat t_1\hat q_2+\hat t_2^2)^{-1}/2$.

b) $æ_{35}\neq æ_{34}\ \Leftrightarrow\ \underline{\hat q_1\neq(8\hat q_2\hat t_1+3\hat t_2^2)(2\hat t_2)^{-1}}$, тогда при $s_1=|\hat q_2|^{-1/2}$ $\ (r_2=0$, $s_2=-2\hat q_2|\hat q_2|^{-1/2}\hat t_2^{-1})$ получаем $CSF_3^{5,1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\hat q_2$, $u=æ_{34}$, $v=æ_{35}$ $\ (u\neq v)$.

2_3) $\underline{\tilde t_1=0}$ $(\tilde t_2\neq 0)$. С учетом замечания 13 будем сводить (69) только к $CSF_{a,3}^{4,1}$.

Сделаем в (69) произвольную замену (16) с $r_1=s_1$, тогда в полученной матрице $\breve A$ элементы $\breve d_1=s_1(\tilde p_2s_1^2-(\tilde p_1-\tilde q_2)s_1s_2-(\tilde q_1-\tilde t_2)s_2^2)(r_2-s_2)^{-1}$, $\breve a_2=-s_1(\tilde p_2s_1^2-(\tilde p_1-\tilde q_2)s_1r_2-(\tilde q_1-\tilde t_2)r_2^2)(r_2-s_2)^{-1}$.

Пусть $æ_7 = \underline{(\tilde p_1-\tilde q_2)^2+4\tilde p_2(\tilde q_1-\tilde t_2)>0}$, тогда $\breve d_1=0$, $\breve a_2=0 \ \Leftrightarrow\ \underline{\tilde p_2\neq 0}$, $\tilde q_1\neq \tilde t_2$, $r_2=(\tilde q_2-\tilde p_1\mp æ_7^{1/2})(2\tilde p_1-2\tilde q_2)^{-1}s_1$, $s_2=(\tilde q_2-\tilde p_1\pm æ_7^{1/2})(2\tilde p_1-2\tilde q_2)^{-1}s_1$.

Теперь система $\breve c_1=0$, $\breve c_2=0 \ \Leftrightarrow\ \underline{\tilde q_2\neq 0,\tilde p_1/2,\tilde p_1/3}$, $\underline{\tilde t_2=2\tilde p_2^{-1}\tilde q_2(2\tilde q_2-\tilde p_1)}$, $\underline{\tilde q_1=3\tilde t_2/2}$.

В результате система (69) с выбранными $\tilde q_1$ и $\tilde t_2$ заменой с $r_1=s_1$, $r_2=\tilde p_2\tilde q_2^{-1}s_1$, $s_2=\tilde p_2(\tilde p_1-2\tilde q_2)^{-1}s_1$, $s_1=|6q_2-2p_1|^{-1/2}$ сводится к $CSF^{4,1}_{a,3}$ с $\sigma=\mathrm{sign}(3q_2-p_1)$, $u=-1/2$.

3) Из (69) получаем $CSF^{4,1}_{a,13}=\sigma\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\ u&0&0&u\end{pmatrix}_9$, $CSF^{5,1}_{7}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\ 1&0&0&1\end{pmatrix}_{11}$.

3₁) $\underline{\tilde p_2\neq 0}$, $\underline{\tilde t_1\neq 0}$. Пусть $\theta_0\neq 0$ – вещественный корень кубического уравнения (70).

При $r_1,s_1=\theta_0^{-1}s_2$, $r_2=0$ получаем систему $\breve A$, у которой $\breve d_1=0$, $\breve b_2=(\tilde q_2\theta_0+3\tilde p_2)\theta_0^{-3}s_2^2$, $\breve c_2=(\tilde t_2\theta_0^2+2\tilde q_2\theta_0+3\tilde p_2)\theta_0^{-3}s_2^2$.

Система уравнений $\breve b_2=0$, $\breve c_2=0$ однозначно разрешима относительно $\tilde p_2$ и θ_0, если $\underline{\tilde t_2\neq 0}$ $(\tilde q_2\neq 0)$, $\underline{\tilde p_2=\tilde q_2^2\tilde t_2^{-1}/3}$, $\theta_0=-\tilde q_2\tilde t_2^{-1}$. Подставляя θ_0 в уравнение (70), заключаем, что $\breve d_1=0 \ \Leftrightarrow\ \underline{\tilde p_1=\tilde q_2(\tilde q_1\tilde t_2^{-1}-\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-2}-1/3)}$. Поэтому теперь

$$\breve A=\frac{s_2^2}{\tilde q_2}\begin{pmatrix}\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_2\tilde t_1 & 2\tilde q_1\tilde t_2-3\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2 & \tilde q_1\tilde t_2-2\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2 & 0\\ -\tilde t_2^2/3 & 0 & 0 & -\tilde t_2^2/3\end{pmatrix}. \tag{82}$$

a) $\breve b_1=0\Leftrightarrow \underline{\tilde q_1=(3\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)(2\tilde t_2)^{-1}}$ $(\breve a_1\neq 0\Leftrightarrow \tilde q_1\neq \tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-1}$, $\breve c_1\neq 0\Leftrightarrow \tilde q_1\neq(2\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)\tilde t_2^{-1}$ и $q_2t_1+t_2^2\neq 0$, иначе $\widetilde R_2=0)$. Тогда при $s_2=|2\tilde q_2|^{1/2}|\tilde t_1\tilde q_2+\tilde t_2^2|^{-1/2}$ $(r_1,s_1=-\tilde t_2|2\tilde q_2|^{1/2}|\tilde t_1\tilde q_2+\tilde t_2^2|^{-1/2}\tilde q_2^{-1}$, $r_2=0)$ система (82) является $CSF^{4,1}_{a,13}$ с $\sigma=-\mathrm{sign}\,(\tilde q_2(\tilde t_1\tilde q_2+\tilde t_2^2))$, $u=2\tilde t_2^2(\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)^{-1}/3$.

b) $\breve a_1\neq 0 \ \Leftrightarrow\ \underline{\tilde q_1\neq\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-1}}$, $\breve b_1\neq 0 \ \Leftrightarrow\ \underline{\tilde q_1\neq(3\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)(2\tilde t_2)^{-1}}$, $\breve c_1\neq 0 \ \Leftrightarrow\ \underline{\tilde q_1\neq(2\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)\tilde t_2^{-1}}$, тогда при $s_2=3^{1/2}\tilde q_2|\tilde q_2|^{-1/2}\tilde t_2^{-1}$ $(r_1,s_1=-3^{1/2}|\tilde q_2|^{-1/2}$, $r_2=0)$ (82) – это $CSF^{5,1}_7$ с $\sigma=-\mathrm{sign}\,\tilde q_2$, $u=3(\tilde q_2\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2)\tilde t_2^{-2}$, $v=3(3\tilde q_2\tilde t_1-2\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2)\tilde t_2^{-2}$ $(u\neq v)$.

3₂) $\underline{\tilde p_2=0}$, $\underline{\tilde t_1\neq 0}$ $(\tilde p_1\neq 0)$. При $r_1=s_1$ получаем систему $\breve A$, у которой элемент $\breve d_1=s_2(\tilde t_1s_2^2+(\tilde q_1-\tilde t_2)s_1s_2+(\tilde p_1-\tilde q_2)s_1^2)(s_2-r_2)^{-1}$.

$\mathbf{3_2^1}$) $s_2\neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$2\tilde t_1^2\theta^3+(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1\theta^2+(2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2)\theta+\tilde t_2\tilde q_2=0. \tag{83}$$

Система уравнений $\breve d_1,\breve b_2,\breve c_2=0$ равносильна тому, что $\underline{\tilde p_1=-(\tilde t_1^2\theta_*^4+\tilde t_1(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*^3+ +(-2\tilde t_2^2+5\tilde q_1\tilde t_2-7\tilde q_2\tilde t_1-2\tilde q_1^2)\theta_*^2+\tilde q_2(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*+\tilde q_2^2)(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1}}\neq 0$, $r_2=\theta_*s_1$, $s_2=-(\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1$ $(\delta=-æ_{38}(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1^2$, следовательно, $\underline{æ_{38}\neq 0})$, где θ_* – любой ненулевой вещественный корень уравнения (83). При $\underline{\tilde q_2\tilde t_2\neq 0}$ он существует всегда, поскольку уравнение (83) в данном случае является кубическим; при $\underline{\tilde q_2=0}$ $(\tilde t_2\neq 0)$, $\underline{\tilde q_1^2-18\tilde q_1\tilde t_2+9\tilde t_2^2\geq 0}$ θ_* – любой ненулевой корень квадратного уравнения (83), принимающего вид $2\tilde t_1^2\theta^2+(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1\theta+\tilde t_2(2\tilde q_1-\tilde t_2)=0$, а при $\underline{\tilde t_2=0}$ $(\tilde q_2\neq 0)$, $\underline{\tilde q_1^2+32\tilde t_1\tilde q_2\geq 0}$ θ_* – любой из корней квадратного уравнения (83), принимающего вид $2\tilde t_1\theta^2+\tilde q_1\theta-4\tilde q_2=0$.

Пусть $\underline{æ_{36}\neq 0}\Leftrightarrow\breve a_1\neq 0$.

a) $\underline{æ_{37}=0}\Leftrightarrow\breve b_1=0$. Тогда при $s_1=3\theta_*|\tilde t_1|^{1/2}|æ_{36}|^{-1/2}$, полученная система – $CSF^{4,1}_{a,13}$ с $\sigma=-\mathrm{sign}(\tilde t_1æ_{36})$, $u=-3\theta_*^2\tilde t_1(2\tilde t_1\theta_*^2+(\tilde q_1-2\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2)æ_{36}^{-1}\neq 0$, иначе $R_2=0)$.

b) $\underline{æ_{37} \neq 0} \Leftrightarrow \breve{b}_1 \neq 0$. Пусть $\underline{æ_{36} \neq 3æ_{37}} \Leftrightarrow \breve{c}_1 \neq 0$. Тогда при $s_1 = \sqrt{3}|æ_{39}|^{-1/2}$ ($æ_{39} \neq 0$, иначе $R_2 = 0$) полученная система является $CSF_7^{5,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign} æ_{39}$, $u = æ_{36}(3\tilde{t}_1 æ_{39})^{-1}\theta_*^{-2}$, $v = æ_{37}(\tilde{t}_1 æ_{39})^{-1}\theta_*^{-2}$.

$\mathbf{3_2^2}$) Пусть $s_2 = 0$ $(s_1, r_2 \neq 0)$. Тогда $\breve{d}_1 = 0$ и $\breve{c}_2 = ((3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)s_1 + \tilde{q}_1 r_2)s_1$.

$\mathbf{3_2^2 a}$) $\underline{\tilde{q}_1 \neq 0}$, тогда $\breve{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 \neq 3\tilde{p}_1}$ и $r_2 = (\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1)\tilde{q}_1^{-1} s_1$.

Теперь $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{t}_2 = (3\tilde{p}_1 \tilde{q}_1^2 - \tilde{t}_1(3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)^2)(3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)^{-1}\tilde{q}_1^{-1}}$. Поэтому

$$\breve{A} = \frac{s_2^2}{\tilde{q}_1^2}\begin{pmatrix} (3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)((3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2) & (3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)^2\tilde{t}_1 - (3\tilde{p}_1 - 2\tilde{q}_2)\tilde{q}_1^2 & \tilde{q}_1^2\tilde{q}_2 & 0 \\ \tilde{p}_1\tilde{q}_1^2 & 0 & 0 & \tilde{p}_1\tilde{q}_1^2 \end{pmatrix}. \tag{84}$$

a) $\breve{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{t}_1 = (3\tilde{p}_1 - 2\tilde{q}_2)(3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)^{-2}\tilde{q}_1^2}$ ($\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_2 \neq (3\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2)\tilde{t}_1^{-1}$), тогда при $r_1, s_1 = |\tilde{q}_2|^{-1/2}$ ($s_2 = 0$, $r_2 = (\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1)\tilde{q}_1^{-1}|\tilde{q}_2|^{-1/2}$) система (84) является $CSF_{a,13}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{q}_2$, $u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1}$.

b) $\breve{a}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 \neq (3\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2)\tilde{t}_1^{-1}}$, $\breve{b}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{t}_1 \neq (3\tilde{p}_1 - 2\tilde{q}_2)(3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)^{-2}\tilde{q}_1^2}$, $\breve{c}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 \neq 0}$, тогда $\breve{a}_1, \breve{b}_1 \neq 0$ и при $r_1, s_1 = |\tilde{p}_1|^{1/2}p_1^{-1}$ ($s_2 = 0$, $r_2 = (\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1)\tilde{q}_1^{-1}|\tilde{p}_1|^{1/2}p_1^{-1}$) (84) – это $CSF_7^{5,1}$ с $\sigma = -\operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = (3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)((3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2)\tilde{p}_1^{-1}\tilde{q}_1^{-2}$, $v = ((3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)^2\tilde{t}_1 - (3\tilde{p}_1 - 2\tilde{q}_2)\tilde{q}_1^2)\tilde{p}_1^{-1}\tilde{q}_1^{-2}$ и $u \neq v$.

$\mathbf{3_2^2 b}$) $\underline{\tilde{q}_1 = 0}$, тогда $\breve{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 = 3\tilde{p}_1}\,(\neq 0)$.

Пусть $æ_{40} = \underline{12\tilde{p}_1\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2^2 \geq 0}$, $æ_{41} = æ_{40} \pm \tilde{t}_2 æ_{40}^{1/2} - 6\tilde{p}_1\tilde{t}_1$ ($æ_{41} \neq 0$), $æ_{42} = æ_{40} \pm \tilde{t}_2 æ_{40}^{1/2}$, тогда $\breve{b}_2 = 0$ при $r_2 = (\tilde{t}_2 \pm æ_{40}^{1/2})(2\tilde{t}_1)^{-1}s_1$ и $\breve{A} = \dfrac{\tilde{s}_2^2}{2\tilde{t}_1}\begin{pmatrix} æ_{41} & æ_{42} & 6\tilde{p}_1\tilde{t}_1 & 0 \\ 2\tilde{p}_1\tilde{t}_1 & 0 & 0 & 2\tilde{p}_1\tilde{t}_1 \end{pmatrix}$.

a) $\underline{æ_{42} = 0} \Leftrightarrow 12\tilde{t}_1 = -\tilde{p}_1^{-1}\tilde{t}_2^2$, тогда при $r_1, s_1 = |3\tilde{p}_1|^{-1/2}$ ($r_2 = -2\sqrt{3}\tilde{p}_1|\tilde{p}_1|^{-1/2}\tilde{t}_2^{-1}$, $s_2 = 0$) получаем $CSF_{a,13}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = 1/3$.

b) $\underline{æ_{42} \neq 0} \Leftrightarrow 12\tilde{t}_1 \neq -\tilde{p}_1^{-1}\tilde{t}_2^2$, тогда при $r_1, s_1 = |\tilde{p}_1|^{1/2}p_1^{-1}$ ($r_2 = (\tilde{t}_2 \pm æ_{40}^{1/2})(2\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}|\tilde{p}_1|^{1/2}$, $s_2 = 0$) получаем $CSF_7^{5,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = æ_{41}(2\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$, $v = æ_{42}(2\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$ $(u \neq v)$.

$\mathbf{3_3}$) $\tilde{t}_1 = 0$ $(\tilde{t}_2 \neq 0)$. Сделаем в (69) произвольную замену (16) с $r_1 = s_1$, тогда в матрице $\breve{A}$ система $\breve{d}_1, \breve{b}_2, \breve{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}_1 = (4\tilde{q}_1\tilde{t}_2 r_2 - \tilde{q}_2\tilde{t}_2 s_1 - 2\tilde{t}_2^2 r_2 - 3\tilde{q}_1^2 r_2 + 3\tilde{q}_1\tilde{q}_2 s_1)(3\tilde{t}_2 s_1)^{-1}$, $\tilde{p}_2 = (\tilde{t}_2 r_2 - \tilde{q}_1 r_2 + \tilde{q}_2 s_1)(2\tilde{q}_1 r_2 + \tilde{q}_2 s_1 - \tilde{t}_2 r_2)(3\tilde{t}_2)^{-1}s_1^{-2}$, $s_2 = -(\tilde{t}_2 r_2 - \tilde{q}_1 r_2 + \tilde{q}_2 s_1)\tilde{t}_2^{-1}$.

Выразим s_1 из $\tilde{p}_1$ и подставим в $\tilde{p}_2$, тогда $\tilde{p}_2 = (3\tilde{p}_1\tilde{q}_1 - 3\tilde{p}_1\tilde{t}_2 + \tilde{q}_2\tilde{t}_2)(3\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2 - 2\tilde{p}_1\tilde{q}_1\tilde{t}_2 - 3\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{t}_2 + (\tilde{p}_1 + \tilde{q}_2)\tilde{t}_2^2)(3\tilde{q}_1^2 - 4\tilde{q}_1\tilde{t}_2 + 2\tilde{t}_2^2)^{-2}$.

b) $\breve{b}_1 = 0$ при $\underline{\tilde{t}_2 = 2\tilde{q}_1}$. Тогда $\underline{\tilde{p}_2 = \tilde{q}_2(2\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1)(9\tilde{q}_1)^{-1}}$ ($\tilde{q}_1 \neq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 3\tilde{p}_1$, иначе $\widetilde{R}_2 = 0$) и при $r_1, s_1 = |\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1|^{-1/2}$, $r_2 = (\tilde{q}_2 - 6\tilde{p}_1)(3\tilde{q}_1)^{-1}|\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1|^{-1/2}$ ($s_2 = (3\tilde{p}_1 - 2\tilde{q}_2)(3\tilde{q}_1)^{-1}|\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1|^{-1/2}$, $\delta = -\sigma\tilde{q}_1^{-1}$) получаем $CSF_{a,13}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}(3\tilde{p}_1 - \tilde{q}_2)$, $u = 2/3$, линейно эквивалентную согласно п. 11) утверждения 9 $CSF_3^{3,1}$.

4) Из (69) с $\underline{\tilde{t}_1 \neq 0}$ в силу замечания 13 получаем $CSF_{a,28}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -u & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_{11}$.

$\mathbf{4_1}$) Пусть $s_2 = 0$, тогда $\underline{\tilde{p}_1\tilde{p}_2 \neq 0}$ (иначе $\breve{d}_2 \neq 0$). При $r_2 = \tilde{p}_2\tilde{p}_1^{-1}s_1$ в полученной системе $\breve{c}_1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{q}_2 = -3\tilde{p}_1}$, тогда $\breve{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{t}_2 = 3\tilde{p}_1^2\tilde{p}_2^{-1}}$, $\breve{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\tilde{t}_1 = -\tilde{p}_1(3\tilde{p}_1^2 + 2\tilde{q}_1\tilde{p}_2)\tilde{p}_2^{-2}}$, и при $s_1 = |\tilde{p}_1|^{-1/2}$ система является $CSF_{a,28}^{4,1}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{p}_1$, $u = (3\tilde{p}_1^2 + 2\tilde{q}_1\tilde{p}_2)\tilde{p}_1^{-2}$.

4_2) Пусть $s_2 \neq 0$. Положим $s_1 = \theta s_2$ $(\theta \neq 0)$. Система уравнений $\breve{b}_1, \breve{c}_1, \breve{b}_2 = 0$, равносильна системе $\tilde{t}_1(2\tilde{t}_2 + \tilde{q}_1 + 3\tilde{p}_1\theta) = -\theta\tilde{t}_2(\tilde{t}_2 + 2\tilde{q}_1)$, $\tilde{p}_2\tilde{t}_2(2\tilde{t}_2 + \tilde{q}_1 + 3\tilde{p}_1\theta) = (9\tilde{p}_1^3\theta^3 + 15\tilde{p}_1^2\tilde{t}_2\theta^2 + 15\tilde{p}_1^2\tilde{q}_1\theta^2 + 7\tilde{p}_1\tilde{q}_1^2\theta + 11\tilde{p}_1\tilde{q}_1\tilde{t}_2\theta + 6\tilde{p}_1\tilde{t}_2^2\theta + \tilde{t}_2^3 + 2\tilde{q}_1^2\tilde{t}_2 + 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2^2 + \tilde{q}_1^3)\theta^{-2}$, $\tilde{q}_2(2\tilde{t}_2 + \tilde{q}_1 + 3\tilde{p}_1\theta) = -(9\tilde{p}_1^2\theta^2 + 9\tilde{p}_1\tilde{q}_1\theta + 12\tilde{p}_1\tilde{t}_2\theta + 4\tilde{q}_1\tilde{t}_2 + 3\tilde{t}_2^2 + 2\tilde{q}_1^2)\theta^{-1}$.

4_2^1) $\underline{\tilde{q}_1 \neq -2\tilde{t}_2}$. Первое уравнение системы равносильно $\theta æ_{43} = -\tilde{t}_1(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)$. Подставив левую часть полученного равенства во второе и третье уравнения системы, получим $\underline{\tilde{p}_2 = (\tilde{t}_2^6 + 6\tilde{q}_1\tilde{t}_2^5 + (14\tilde{q}_1^2 - 3\tilde{t}_1\tilde{p}_1)\tilde{t}_2^4 + \tilde{q}_1(17\tilde{q}_1^2 - 16\tilde{p}_1\tilde{t}_1)\tilde{t}_2^3 + 3(5\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - 4\tilde{q}_1^2)(\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2)\tilde{t}_2^2 +}$ $\underline{2\tilde{q}_1(3\tilde{p}_1^2\tilde{t}_1^2 + 2\tilde{q}_1^4 - 6\tilde{p}_1\tilde{q}_1^2\tilde{t}_1)\tilde{t}_2 + \tilde{p}_1\tilde{t}_1(3\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2)(9\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - 4\tilde{q}_1^2))(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-3}\tilde{t}_1^{-2}}$, $\underline{\tilde{q}_2 = (3\tilde{t}_2^4 + 10\tilde{q}_1\tilde{t}_2^3 - (6\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - 10\tilde{q}_1^2)\tilde{t}_2^2 + 2\tilde{q}_1(2\tilde{q}_1^2 - 3\tilde{p}_1\tilde{t}_1)\tilde{t}_2 - 3\tilde{p}_1\tilde{t}_1(3\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2))(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-2}\tilde{t}_1^{-1}}$.

Замена (16) с $s_1 = -\tilde{t}_1(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)|\tilde{t}_1 æ_{44} æ_{16}|^{-1/2}$, $r_2 = (2\tilde{q}_1^2 - 6\tilde{p}_1\tilde{t}_1 + \tilde{q}_1\tilde{t}_2)|\tilde{t}_1 æ_{44} æ_{16}|^{-1/2}$, $s_2 = æ_{43}|\tilde{t}_1 æ_{44} æ_{16}|^{-1/2}$ $(\delta = -\tilde{t}_1(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2))æ_{44}|\tilde{t}_1 æ_{44} æ_{16}|^{-1}$, $æ_{16} æ_{44} æ_{45} \neq 0$, иначе $R_2 = 0$) сводит (69) к $CSF^{4,1}_{a,28}$ с $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde{t}_1 æ_{44} æ_{16})$, $u = -æ_{45} æ_{16}^{-1}$ $(u \neq -3$, так как $\tilde{q}_1 \neq -2\tilde{t}_2)$.

4_2^2) $\underline{\tilde{q}_1 = -2\tilde{t}_2}$. Решив систему уравнений $\breve{b}_1, \breve{c}_1, \breve{b}_2 = 0$ относительно $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2$, получим $\underline{\tilde{p}_1 = \tilde{t}_2^2\tilde{t}_1^{-1}}$, $\tilde{p}_2 = -(\tilde{t}_1^3 - 4\tilde{t}_1^2\tilde{t}_2\theta + 5\tilde{t}_1\tilde{t}_2^2\theta^2 - 3\tilde{t}_2^3\theta^3)\tilde{t}_1^{-2}\theta^{-3}$, $\tilde{q}_2 = (-\tilde{t}_1^2\theta^{-2} + 2\tilde{t}_1\tilde{t}_2\theta^{-1} - 3\tilde{t}_2^2)\tilde{t}_1^{-1}$. Выразим θ из второго равенства и подставим в третье, тогда $\underline{\tilde{q}_2 = (-\tilde{t}_1^2\theta_*^{-2} + 2\tilde{t}_1\tilde{t}_2\theta_*^{-1} -}$ $\underline{3\tilde{t}_2^2)\tilde{t}_1^{-1}}$, где θ_*^{-1} – вещественный корень уравнения $\tilde{t}_1^3\theta^3 - 4\tilde{t}_1^2\tilde{t}_2\theta^2 + 5\tilde{t}_1\tilde{t}_2^2\theta + \tilde{t}_1^2\tilde{p}_2 - 3\tilde{t}_2^3 = 0$. Тогда замена (16) с $s_1 = \theta_* s_2$, $r_2 = |\tilde{t}_1|^{1/2}(3\tilde{t}_2\theta_* - 2\tilde{t}_1)\tilde{t}_1^{-1}(\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\theta_*)^{-1}$, $s_2 = |\tilde{t}_1|^{1/2}(\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\theta_*)^{-1}$ $(\delta = 3\theta_*|\tilde{t}_1|\tilde{t}_1^{-1}(\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\theta_*)^{-1}$, $\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\theta_* \neq 0$, иначе $R_2 = 0)$ сводит систему (69) к $CSF^{4,1}_{a,28}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{t}_1$, $u = -3$, линейно эквивалентную согласно п. 16) утверждения 9 $CSF^{3,1}_{a,22}$.

5) Из (69) получаем $CSF^{4,1}_{32} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{12}$, $CSF^{4,1}_{36} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & u & u \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{13}$, причем в (69) согласно замечанию 13 $\underline{\tilde{t}_1 \neq 0}$.

При $r_1 = s_1$ в $\breve{A}$ элементы $\breve{a}_1, \breve{b}_1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\tilde{p}_2 = (\tilde{p}_1 s_1^2 s_2 + \tilde{t}_2 r_2^2 s_1 - \tilde{t}_1 r_2^2 s_2)s_1^{-3}$, $\tilde{q}_2 = (2\tilde{t}_1 r_2 s_2 - 2\tilde{t}_2 r_2 s_1 + \tilde{q}_1 s_1 s_2)s_1^{-2}$. Тогда $\breve{b}_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $s_2 = -(\tilde{t}_1 r_2^2 + 2\tilde{q}_1 r_2 s_1 + 3\tilde{p}_1 s_1^2)(2\tilde{t}_1 r_2 + \tilde{q}_1 s_1)^{-1}$.

5_1) Элемент $\breve{c}_2 = 0$ при $r_2 = -s_1(\tilde{t}_2 + \tilde{q}_1)\tilde{t}_1^{-1}$. Тогда $æ_{45} = 3\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_1\tilde{t}_2 - \tilde{t}_2^2 \neq 0$, $æ_{16} = \tilde{p}_1\tilde{t}_1 + \tilde{q}_1\tilde{t}_2 + \tilde{t}_2^2 \neq 0$, $\underline{\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2 \neq 0}$ (иначе $R_2 = 0$ или знаменатель в s_2 обращается в нуль). При $s_1 = |\tilde{t}_1|^{1/2}|æ_{16}|^{-1/2}$ элементы $\underline{\tilde{q}_2 = (\tilde{q}_1^2 + 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2 - 3\tilde{p}_1\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2^2)\tilde{t}_1^{-1}}$, $\underline{\tilde{p}_2 = (\tilde{t}_2^4 + 3\tilde{q}_1\tilde{t}_2^3 + (4\tilde{q}_1^2 - 2\tilde{p}_1\tilde{t}_1)\tilde{t}_2^2 - 3\tilde{q}_1(2\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2)\tilde{t}_2 + (3\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2)(\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{q}_1^2))\tilde{t}_1^{-2}(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-1}}$. Тогда выбранная замена (16) сводит (69) к $CSF^{4,1}_{32}$ с $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde{t}_1 æ_{16})$, $u = 3æ_{45}(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-2}$.

5_2) Элемент $\breve{d}_2 = 0$ при $r_2 = -s_1(2\tilde{q}_1 + 3\tilde{t}_2)\tilde{t}_1^{-1}$. Тогда $æ_{16} = \tilde{p}_1\tilde{t}_1 + \tilde{q}_1\tilde{t}_2 + \tilde{t}_2^2 \neq 0$, $æ_{46} = \tilde{p}_1\tilde{t}_1 + 2\tilde{q}_1^2 + 9\tilde{t}_2(\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2) \neq 0$, $\underline{\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2 \neq 0}$ (иначе $R_2 = 0$ или знаменатель в s_2 обращается в нуль). При $s_1 = |\tilde{t}_1|^{1/2}|æ_{46}|^{-1/2}$ элементы $\underline{\tilde{q}_2 = -(2\tilde{q}_1\tilde{t}_2 + 3\tilde{t}_2^2 + 3\tilde{p}_1\tilde{t}_1)\tilde{t}_1^{-1}}$, $\underline{\tilde{p}_2 = (-9\tilde{t}_2^4 - 21\tilde{q}_1\tilde{t}_2^3 - (16\tilde{q}_1^2 + 6\tilde{p}_1\tilde{t}_1)\tilde{t}_2^2 - 2\tilde{q}_1(2\tilde{q}_1^2 + 5\tilde{p}_1\tilde{t}_1)\tilde{t}_2 + \tilde{p}_1\tilde{t}_1(\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - 4\tilde{q}_1^2))\tilde{t}_1^{-2}(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-1}}$. Тогда выбранная замена (16) сводит (69) к $CSF^{4,1}_{36}$ с $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde{t}_1 æ_{46})$, $u = æ_{16}(\tilde{q}_1 + 2\tilde{t}_2)^{-2}$.

6) Из (69) с $\underline{\tilde{t}_1 \neq 0}$ в силу замечания 13 получаем $CSF^{5,1}_6 = \sigma\begin{pmatrix} u & v & 0 & u-v \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{11}$.

В полученной из (69) системе элементы $\breve{c}_1, \breve{a}_2, \breve{c}_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\tilde{p}_1 = -(\tilde{q}_1 r_2 s_1 + 2\tilde{t}_1 r_2 s_2 + 2\tilde{q}_1 s_1 s_2 + \tilde{t}_1 s_2^2)s_1^{-2}/3$, $\tilde{p}_2 = -(2\tilde{q}_1 r_2 s_1 + 7\tilde{t}_1 r_2 s_2 + 4\tilde{q}_1 s_2 s_1 + 2\tilde{t}_1 s_2^2 + 3\tilde{t}_1 r_2^2 - 3\tilde{t}_2 r_2 s_1 - 3\tilde{t}_2 s_1 s_2)r_2 s_1^{-3}/6$, $\tilde{q}_2 = (3\tilde{t}_1 r_2^2 + 2\tilde{q}_1 s_1 r_2 - 3\tilde{t}_2 s_1 r_2 + \tilde{t}_1 r_2 s_2 - \tilde{t}_2 s_1 s_2)s_1^{-2}/2$.

Из $\tilde{q}_2$ выразим $s_2 = (3\tilde{t}_1 r_2^2 + 2\tilde{q}_1 r_2 s_1 - 3\tilde{t}_2 r_2 s_1 - 2\tilde{q}_2 s_1^2)(\tilde{t}_2 s_1 - \tilde{t}_1 r_2)^{-1}$ и подставим в $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$.

Пусть $\underline{\theta_* \ne \tilde t_2 \tilde t_1^{-1}}$ – вещественный корень (если существует) уравнения $3\tilde t_1^3\theta^4 + 3\tilde t_1^2(\tilde q_1 - 2\tilde t_2)\theta^3 + \tilde t_1(3\tilde p_1\tilde t_1 - 8\tilde t_1\tilde q_2 + 2\tilde q_1\tilde t_2 + 3\tilde t_2^2)\theta^2 + (4\tilde q_1^2\tilde t_2 + 8\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2 - 5\tilde q_1\tilde t_2^2 - 4\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_1 - 6\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2)\theta + 4\tilde q_2^2\tilde t_1 - 4\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_2 + 3\tilde p_1\tilde t_2^2 = 0,$ либо уравнения $3\theta^4\tilde t_1^2\tilde t_2 + \tilde t_1(8\tilde q_1\tilde t_2 - 5\tilde q_2\tilde t_1 - 6\tilde t_2^2)\theta^3 + (2\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2 - 4\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_1 - 8\tilde q_1\tilde t_2^2 + 3\tilde p_2\tilde t_1^2 + 3\tilde t_2^3 + 4\tilde q_1^2\tilde t_2)\theta^2 + (4\tilde q_2^2\tilde t_1 - 4\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_2 - 6\tilde p_2\tilde t_1\tilde t_2 + 3\tilde t_2^2\tilde q_2)\theta + 3\tilde p_2\tilde t_2^2 = 0.$

Положим $r_2 = \theta_* s_1,$ тогда $\tilde p_1$ остается произвольным, а $\underline{\tilde p_2 = -\theta_*(3\tilde t_1^2\tilde t_2\theta_*^3 + \tilde t_1(8\tilde q_1\tilde t_2 - 5\tilde q_2\tilde t_1 - 6\tilde t_2^2)\theta_*^2 + (2\tilde q_1 - \tilde t_2)(2\tilde q_1\tilde t_2 - 3\tilde t_2^2 - 2\tilde q_2\tilde t_1)\theta_* - \tilde q_2(4\tilde q_1\tilde t_2 - 4\tilde q_2\tilde t_1 - 3\tilde t_2^2))(\tilde t_1\theta_* - \tilde t_2)^{-2}/3},$ если θ_* – корень первого уравнения, либо $\tilde p_2$ остается произвольным, а $\underline{\tilde p_1 = -(3\tilde t_1^3\theta_*^4 + 3\tilde t_1^2(\tilde q_1 - 2\tilde t_2)\theta_*^3 + \tilde t_1(2\tilde q_1\tilde t_2 - 8\tilde q_2\tilde t_1 + 3\tilde t_2^2)\theta_*^2 + (8\tilde t_1\tilde q_2\tilde t_2 - 4\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_1 - 5\tilde q_1\tilde t_2^2 + 4\tilde q_1^2\tilde t_2)\theta_* - -4\tilde q_2(\tilde q_1\tilde t_2 - \tilde q_2\tilde t_1))(\tilde t_1\theta_* - \tilde t_2)^{-2}/3}$ – если θ_* – корень второго уравнения.

Пусть $\underline{æ_{48} \ne 0} \ \Leftrightarrow \ \breve b_1 \ne 0,$ $\underline{æ_{48} \ne -4æ_{15}/3} \ \Leftrightarrow \ \breve d_1 \ne 0.$ Тогда при $s_1 = |æ_{47}|^{-1/2}$ $(æ_{15} \ne 0,$ $æ_{47} = 2\theta_*^2\tilde t_1 + \theta_*(\tilde q_1 - 2\tilde t_2) - \tilde q_2 \ne 0,$ иначе $\widetilde R_2 = 0),$ $s_2 = -(3\theta_*^2\tilde t_1 + 2\theta_*\tilde q_1 - 3\theta_*\tilde t_2 - 2\tilde q_2)(-\tilde t_2 + \tilde t_1\theta_*))^{-1}|æ_{47}|^{-1/2})$ получаем $CSF_6^{5,1}$ с $\sigma = -\operatorname{sign} æ_{47},$ $u = -4æ_{15}(\tilde t_1\theta_* - \tilde t_2)^{-2}/3,$ $v = æ_{48}(\tilde t_1\theta_* - \tilde t_2)^{-2}.$ $\square$

Следствие 8. *Система* (31) *с* $R_2 = \delta_{pt}^2 - \delta_{pq}\delta_{qt} \ne 0$ *линейной неособой заменой* (16) *сводится к соответствующей* $CF_i^{m,1}$ $(m = 2, 3, 4)$ *или* $CSF_i^{5,1}$ *из списка 11, если шесть элементов* $\tilde p_i, \tilde q_i, \tilde t_i$ $(i = 1, 2,\ \tilde R_2 = \delta_{\tilde p\tilde t}^2 - \delta_{\tilde p\tilde q}\delta_{\tilde q\tilde t} \ne 0)$ *матрицы* $\tilde G$, *однозначно выраженные в* (69) *через семь параметров системы* (31) : *коэффициент* β *общего множителя* P_0^1 $(\alpha = 1)$ *и элементы* p_i, q_i, t_i *матрицы* G, *удовлетворяют следующим условиям:*

$CF_2^{2,1}$: $\tilde q_1 = 0,$ $\tilde t_1 = 0,$ $æ_1 = 0,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde p_1;$

$CF_9^{2,1}$: $\tilde t_1 \ne 0,$ $\tilde q_1 = -2\tilde t_2,$ $\tilde p_1 = \tilde t_1^{-1}\tilde t_2^2,$ $æ_{20} = 0,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde t_1;$

$CF_3^{3,1}$: $\tilde q_1 \ne 0,$ $\tilde t_1 = 0,$ *1)* $\tilde p_2 = 0,$ $\tilde q_2 = 0,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde p_1,$ $u = \tilde q_1\tilde t_2^{-1},$
2) $\tilde q_2 = 0,$ $æ_3 > 0,$ $\tilde q_1 = 2\tilde t_2,$ *тогда* $\sigma = 1,$ $u = 2,$
3) $\tilde q_2 \ne 0,$ $æ_3 \ge 0,$ $æ_4 = 0,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}((\tilde q_1 - 2\tilde t_2)æ_5),$ $u = \tilde q_1\tilde t_2^{-1};$
при этом, если при $u = 2$ *получаем* $\sigma = 1$, *то в п. 1 утверждения 10 указано, как сделать* $\sigma = 1;$

$CF_5^{3,1}$: $\tilde q_1 = 0,$ $\tilde t_1 = 0,$ $æ_1 \ne 0,$ $æ_2 \ge 0,$ *кроме того,* $u_0 = 1 + æ_2^{1/2}|\tilde p_1|^{-1} \ne 2,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde p_1,$ $u = u_0;$

$CF_6^{3,1}$: $\tilde t_1 \ne 0,$ $\tilde q_1 \ne -2\tilde t_2,$ $æ_{15} = 0,$ $æ_{23} = 0,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde t_1,$ $u = æ_{12}(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-2};$

$CF_8^{3,1}$: $\tilde q_1 = 0,$ $\tilde t_1 = 0,$ $æ_1 \ne 0,$ $æ_2 < 0,$ *кроме того,* $u_0 = (2\tilde p_1)^{-2}æ_1 > 1/4,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde p_1,$ $u = u_0;$

$CF_{9,\kappa}^{3,1}$: $\tilde t_1 \ne 0,$ $\tilde q_1 = -2\tilde t_2,$ $æ_{19} = 0,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} æ_{20},$ $u = æ_{18}æ_{20}^{-1},$ $\kappa = \sigma \operatorname{sign} \tilde t_1;$

$CF_{14,\kappa}^{3,1}$: $\tilde t_1 = 0,$ $\tilde q_1 \ne 0,$ $æ_5 = 0,$ *кроме того,* $u_0 = \tilde q_1^{-1}\tilde t_2$ *и* $u_0 \ne 1/2$ *при* $\kappa = 1,$ *тогда* $\sigma = \kappa = \operatorname{sign} æ_6,$ $u = u_0;$

$CF_{17}^{3,1}$: $\tilde t_1 \ne 0,$ $\tilde q_1 = -2\tilde t_2,$ $æ_{18} \ne 0,$ $æ_{20} = 0,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde t_1,$ $u = æ_{18}æ_{21}^{-2/3}\tilde t_1^{-2/3};$

$CF_{19}^{3,1}$: $\tilde t_1 \ne 0,$ $\tilde q_1 \ne -2\tilde t_2,$ $æ_{12}, æ_{15} = 0,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde t_1,$ $u = (\tilde q_1 + 2\tilde t_2)(2æ_{13})^{-1/3};$

$CF_{21}^{3,1}$: $\tilde t_1 \ne 0,$ $\tilde q_1 \ne -2\tilde t_2,$ $æ_{15}, æ_{16} = 0,$ *кроме того,* $u_0 = (\tilde q_1 + 2\tilde t_2)æ_{25}^{-1/3} \ne 2,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde t_1,$ $u = u_0;$

$CF_{22}^{3,1}$: $\tilde t_1 \ne 0,$ $\tilde q_1 = -2\tilde t_2,$ $æ_{18} = 0,$ $æ_{20} \ne 0,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde t_1,$ $u = æ_{20}æ_{22}^{-2/3};$

$CF_1^{4,1}$: *1)* $\tilde t_1 \ne 0,$ $\tilde q_2 = 0,$ $\tilde p_2 = 0,$ $\tilde p_1 = \tilde q_1(\tilde q_1 - 2\tilde t_2)(4\tilde t_1)^{-1},$ *кроме того,* $u_0 = -\tilde q_1(2\tilde t_2)^{-1} \ne \pm 1,$ *тогда* $\sigma = -\operatorname{sign}(\tilde t_1\tilde t_2(\tilde q_1 - 2\tilde t_2)),$ $u = u_0,$

2) $\tilde t_1 \neq 0$, $\tilde q_2 \neq 0$, $\text{æ}_{26} > 0$, $\tilde p_1 = (4(4\tilde q_2\tilde t_1 - 8\tilde q_1\tilde t_2 + 3\tilde q_1^2 + 4\tilde t_2^2)\tilde q_2\tilde t_1 + 2\tilde q_1^4 - 12\tilde q_1^3\tilde t_2 + 24\tilde q_1^2\tilde t_2^2 - 16\tilde q_1\tilde t_2^3 \pm \text{æ}_{26}^{1/2}(3\tilde q_1^2\tilde t_2 - \tilde q_1^3 + 4\tilde q_2\tilde t_1\tilde q_1 - 4\tilde t_2^3 + \tilde t_2\text{æ}_{26} - \tilde q_1\text{æ}_{26}))\text{æ}_{27}^{-2}(4\tilde t_1)^{-1}$, $\tilde p_2 = \tilde q_1\tilde q_2(4\tilde t_1)^{-1}$, *кроме того,* $u_0 = -(\tilde q_1^3 - 4\tilde q_1^2\tilde t_2 + 4\tilde q_1\tilde t_2^2 + 6\tilde q_2\tilde t_1\tilde q_1 - 4\tilde q_2\tilde t_2\tilde t_1 \pm \text{æ}_{26}^{1/2}(2\tilde q_1\tilde t_2 - \tilde q_1^2 - 2\tilde q_2\tilde t_1))\text{æ}_{27}(\tilde q_1^3\tilde t_2 - 6\tilde q_1^2\tilde t_2^2 - \tilde q_2\tilde t_1\tilde q_1^2 + 12\tilde q_1\tilde t_2^3 + 10\tilde q_2\tilde t_1\tilde q_1\tilde t_2 - 8\tilde t_2^4 - 4\tilde q_2^2\tilde t_1^2 - 16\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^2 \pm \text{æ}_{26}^{1/2}(\tilde q_2\tilde t_1\tilde q_1 + 4\tilde q_1\tilde t_2^2 - 4\tilde t_2^3 - 4\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2 - \tilde q_1^2\tilde t_2))^{-1}/4 \neq \pm 1$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\text{æ}_{28}$, $u = u_0$;
при этом, если получаем $|u| > 1$, *то в п. 4 утверждения 10 указано, как сделать* $|u| < 1$;

$CF_3^{4,1}$: *1)* $\tilde p_2 \neq 0$, $\text{æ}_{29} \geq 0$, $\hat p_1 = \hat q_2\text{æ}_{30}$, $\text{æ}_{32} = 0$, *где* $\hat p_1, \hat q_1, \hat t_1, \hat q_2, \hat t_2$ *из* (80), *кроме того,* $u_0 = -(\hat q_2 + \hat t_2)^2(2\text{æ}_{33})^{-1} \neq -1/2, -2$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(\hat q_2\text{æ}_{33})$, $u = u_0$,
2) $\tilde p_2 = 0$, $\text{æ}_{29} \geq 0$, $\hat p_1 = \hat q_2\text{æ}_{34}$, $\text{æ}_{35} = \text{æ}_{34}$, *кроме того,* $u_0 = -\hat t_2^2(2\hat t_1\hat q_2 + \hat t_2^2)^{-1}/2 \neq -1/2, -2$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(\hat q_2(2\hat t_1\hat q_2 + \hat t_2^2))$, $u = u_0$;

$CF_5^{4,1}$: $\tilde t_1 \neq 0$, $\text{æ}_{26} \geq 0$, *вещественный корень* (70) $\theta_* = (2\tilde t_2 - \tilde q_1 \pm \text{æ}_{26}^{1/2})(4\tilde t_1)^{-1}$, $\tilde q_1 \neq -2\tilde t_2 + \text{æ}_{26}^{1/2}, -2\tilde t_2 - \text{æ}_{26}^{1/2}$, $\tilde p_2 = (8\tilde p_1\tilde t_2\tilde t_1 - 4\tilde p_1\tilde q_1\tilde t_1 + 4\tilde q_1\tilde t_2^2 - 4\tilde q_1^2\tilde t_2 + 6\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_1 - 4\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2 + \tilde q_1^3 \pm (2\tilde q_1\tilde t_2 + 4\tilde p_1 t_1 - \tilde q_1^2 - 2\tilde q_2\tilde t_1)\text{æ}_{26}^{1/2})(4\tilde t_1)^{-2}$, *кроме того,* $u_0 = 2(4\tilde t_1(2\tilde p_1 + \tilde q_2) - \tilde q_1^2 + 4\tilde t_2^2 \pm (\tilde q_1 + 2\tilde t_2)\text{æ}_{26}^{1/2})(\tilde q_1 + 2\tilde t_2 \mp \text{æ}_{26}^{1/2})^{-2}$, $v_0 = 2(\tilde q_1 + 2\tilde t_2 \pm \text{æ}_{26}^{1/2})(\tilde q_1 + 2\tilde t_2 \mp \text{æ}_{26}^{1/2})^{-1}$ *и* $u_0 \neq v_0(v_0 - 2)/4$, $u_0 \neq 1$ *при* $v_0 = -2$, $u_0 \neq -1/9$ *при* $v = 1$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = u_0$, $v = v_0$;

$CF_7^{4,1}$: $\tilde t_1 = 0$, $\tilde q_1 \neq 0$, $\text{æ}_7 \geq 0$, $\text{æ}_9 \neq 0$, *кроме того,* $u_0 = \text{æ}_{10}\text{æ}_9^{-1}$, $v_0 = \tilde q_1\tilde t_2^{-1}$ *и* $v_0 \neq (2u_0 - 1)u_0^{-1}, 2u_0(u_0 + 1)^{-1}$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(\text{æ}_8\text{æ}_9)$, $u = u_0$, $v = v_0$; *при этом, если получаем* $u < u_v$, *где* $u_v = \max\{u, (v - u)(uv - 2u + 1)^{-1}\}$, *то в п. 5 утверждения 10 указано, как сделать* $u > u_v$;

$CF_{11}^{4,1}$: $\tilde t_1 \neq 0$, $\tilde q_1 \neq -2\tilde t_2$, $\text{æ}_{17} = 0$, *кроме того,* $u_0 = \text{æ}_{16}\text{æ}_{15}^{-1}$, $v_0 = \text{æ}_{15}(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-2}$ *и* $v_0 \neq u_0(2u_0 - 1)^{-2}$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(\text{æ}_{15}\tilde t_1)$, $u = u_0$, $v = v_0$;

$CF_{12}^{4,1}$: $\tilde t_1 = 0$, $\tilde q_1 \neq 0$, $\tilde q_1 \neq 2\tilde t_2$, $\text{æ}_4, \text{æ}_5 \neq 0$, *кроме того,* $u_0 = \tilde q_1^{-1}\tilde t_2$, $v_0 = \tilde q_1\text{æ}_4\text{æ}_5^{-2}$ *и* $4v_0(u_0 - 1) - 1 \geq 0$, $u_0 \neq 1/2, -v_0$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}((\tilde q_1 - 2\tilde t_2)\text{æ}_5)$, $u = u_0$, $v = v_0$;

$CF_{13}^{4,1}$: *1)* $\tilde p_2 \neq 0$, $\tilde t_1 \neq 0$, $\tilde t_2 \neq 0$, $\tilde p_2 = \tilde q_2^2\tilde t_2^{-1}/3$, $\tilde p_1 = \tilde q_2(\tilde q_1\tilde t_2^{-1} - \tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-2} - 1/3)$, $\tilde q_1 = (3\tilde q_2\tilde t_1 + \tilde t_2^2)(2\tilde t_2)^{-1}$, *кроме того,* $u_0 = 2\tilde t_2^2(\tilde q_2\tilde t_1 + \tilde t_2^2)^{-1}/3 \neq -1/3, 2/3$, *тогда* $\sigma = -\operatorname{sign}(\tilde q_2(\tilde t_1\tilde q_2 + \tilde t_2^2))$, $u = u_0$,
2) $\tilde p_2 = 0$, $\tilde t_1 \neq 0$, $\text{æ}_{36} \neq 0$, $\tilde p_1 = -(\tilde t_1^2\theta_*^4 + \tilde t_1(\tilde t_2 + \tilde q_1)\theta_*^3 + (-2\tilde t_2^2 + 5\tilde q_1\tilde t_2 - 7\tilde q_2\tilde t_1 - 2\tilde q_1^2)\theta_*^2 + \tilde q_2(\tilde t_2 + \tilde q_1)\theta_* + \tilde q_2^2)(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1} \neq 0$, θ_* – *любой ненулевой вещественный корень* (83) *(если* $\tilde q_2\tilde t_2 \neq 0$, *он существует всегда, если* $\tilde q_2 = 0$ $(\tilde t_2 \neq 0)$, *то он существует при* $\tilde q_1^2 - 18\tilde q_1\tilde t_2 + 9\tilde t_2^2 \geq 0$, *если* $\tilde t_2 = 0$ $(\tilde q_2 \neq 0)$, – *то при* $\tilde q_1^2 + 32\tilde t_1\tilde q_2 \geq 0)$, $\text{æ}_{37} = 0$, *кроме того,* $u_0 = -3\theta_*^2\tilde t_1(2\tilde t_1\theta_*^2 + (\tilde q_1 - 2\tilde t_2)\theta_* - \tilde q_2)\text{æ}_{36}^{-1} \neq -1/3, 2/3$, *тогда* $\sigma = -\operatorname{sign}(\tilde t_1\text{æ}_{36})$, $u = u_0$,
3) $\tilde p_2 = 0$, $\tilde t_1 \neq 0$, $\tilde q_1 \neq 0$, $\tilde q_2 \neq 3\tilde p_1$, $\tilde t_2 = (3\tilde p_1\tilde q_1^2 - \tilde t_1(3\tilde p_1 - \tilde q_2)^2)(3\tilde p_1 - \tilde q_2)^{-1}\tilde q_1^{-1}$, $\tilde t_1 = (3\tilde p_1 - 2\tilde q_2)(3\tilde p_1 - \tilde q_2)^{-2}\tilde q_1^2$, *кроме того,* $u_0 = \tilde p_1\tilde q_2^{-1} \neq -1/3, 2/3$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde q_2$, $u = u_0$,
4) $\tilde p_2 = 0$, $\tilde t_1 \neq 0$, $\tilde q_1 = 0$, $\tilde q_2 = 3\tilde p_1\,(\neq 0)$, $\text{æ}_{40} \geq 0$, $\text{æ}_{42} = 0$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde p_1$, $u = 1/3$;

$CF_{14}^{4,1}$: $\tilde t_1 \neq 0$, $\tilde q_1 \neq -2\tilde t_2$, $\text{æ}_{14} = 0$, $\text{æ}_{15} \neq 0$ *кроме того,* $u_0 = 4\text{æ}_{15}(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-2}$, $v_0 = \text{æ}_{12}(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-2}$ *и* $u_0 \neq v_0$, $v_0 \neq u_0/2$ *при* $u_0 > -1/2$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = u_0$, $v = v_0$;

$CF_{19}^{4,1}$: $\tilde t_1 \neq 0$, $\tilde q_1 \neq -2\tilde t_2$, $\text{æ}_{16} \neq 0$, $\text{æ}_{15} = 0$, *кроме того,* $u_0 = \text{æ}_{16}\text{æ}_{21}^{-2/3}|\tilde t_1|^{-2/3}$, $v_0 = -(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)\text{æ}_{21}^{-1/3}\tilde t_1^{-1/3}$ *и* $u_0 \neq (v_0^3 - 8)(4v_0)^{-1}, v_0^2/4$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1$, $u = u_0$, $v = v_0$;

$CF_{24}^{4,1}$: $\tilde t_1 = 0$, $\tilde q_1 \neq 0$, $\tilde q_2 \neq 0$, $\tilde q_1 = 2\tilde t_2$, $(\tilde p_1 - \tilde q_2)^2 + 2\tilde p_2\tilde q_1 < 0$, *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde q_2$, $u = 1/2$, $v = (\tilde p_1^2/2 - \tilde p_1\tilde q_2 + \tilde q_1\tilde p_2)\tilde q_2^{-2}$;

$CF_{27}^{4,1}$: $\tilde t_1 \neq 0$, $\tilde q_1 = -2\tilde t_2$, $\text{æ}_{18} \neq 0$, $\text{æ}_{19} \neq 0$, $\text{æ}_{20} \neq 0$, *кроме того,* $u_0 = \text{æ}_{20}\text{æ}_{19}^{-2/3}$, $v_0 = \text{æ}_{18}\text{æ}_{19}^{-2/3}$ *и* $v_0 \neq (u_0^{3/2} \pm 2\sqrt{2})u_0^{-1/2}/2$, *а также* $u_0 \neq 3 \cdot 4^{-2/3}$ *при* $v_0 = 4^{-2/3}$, *тогда*

$\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1,\ \ u = u_0,\ \ v = v_0;$

$CF_{28}^{4,1}:\ \tilde t_1 \ne 0,$ *1)* $\tilde p_1\tilde p_2 \ne 0,\ \tilde q_2 = -3\tilde p_1,\ \tilde t_2 = 3\tilde p_1^2\tilde p_2^{-1},\ \tilde t_1 = -\tilde p_1(3\tilde p_1^2 + 2\tilde q_1\tilde p_2)\tilde p_2^{-2},$ *кроме того,* $u_0 = (3\tilde p_1^2 + 2\tilde q_1\tilde p_2)\tilde p_1^{-2} \ne -3,\ -3/4,\ 3/2,\ 6,\ (92+4\sqrt{29})^{1/3} + 20\cdot(92+4\sqrt{29})^{-1/3} + 5,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde p_1,\ \ u = u_0,$

2) $\tilde q_1 \ne -2\tilde t_2,\ \tilde p_2 = (\tilde t_2^6 + 6\tilde q_1\tilde t_2^5 + (14\tilde q_1^2 - 3\tilde t_1\tilde p_1)\tilde t_2^4 + \tilde q_1(17\tilde q_1^2 - 16\tilde t_1\tilde p_1)\tilde t_2^3 + 3(5\tilde t_1\tilde p_1 - 4\tilde q_1^2)(\tilde t_1\tilde p_1 - \tilde q_1^2)\tilde t_2^2 + 2\tilde q_1(3\tilde t_1^2\tilde p_1^2 + 2\tilde q_1^4 - 6\tilde t_1\tilde p_1\tilde q_1^2)\tilde t_2 + \tilde t_1\tilde p_1(3\tilde t_1\tilde p_1 - \tilde q_1^2)(9\tilde t_1\tilde p_1 - 4\tilde q_1^2))(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-3}\tilde t_1^{-2},\ \tilde q_2 = (3\tilde t_2^4 + 10\tilde t_2^3\tilde q_1 - (6\tilde t_1\tilde p_1 - 10\tilde q_1^2)\tilde t_2^2 + 2\tilde q_1(2\tilde q_1^2 - 3\tilde t_1\tilde p_1)\tilde t_2 - 3\tilde t_1\tilde p_1(3\tilde t_1\tilde p_1 - \tilde q_1^2))(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-2}\tilde t_1^{-1},$ *кроме того,* $u_0 = -æ_{45}æ_{16}^{-1} \ne -3,\ -3/4,\ 3/2,\ 6,\ (92+4\sqrt{29})^{1/3} + 20\cdot(92+4\sqrt{29})^{-1/3} + 5,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde t_1 æ_{44}æ_{16}),\ \ u = u_0;$

$CF_{29}^{4,1}:\ \tilde t_1 \ne 0,\ æ_{12} > 0,\ q_2 = (2q_1t_2 + æ_{12} \mp (q_1 + 2t_2)æ_{12}^{1/2})(2t_1)^{-1},\ q_1 + 2t_2 \mp æ_{12}^{1/2} \ne 0,$ *кроме того,* $u_0 = (\pm\tilde q_1 \pm 2\tilde t_2 - æ_{12}^{1/2})æ_{12}^{-1/2}/2 \ne -1/2,\ v_0 = \pm(2t_1(t_1p_2 - p_1t_2) - (q_1 + t_2)æ_{12} \pm (q_1^2 - 2t_1p_1 + q_1t_2)æ_{12}^{1/2})æ_{12}^{-3/2}/2 \ne u_0^2,\ (1-2u_0)/8,\ (1-2u_0)^2/8,$ *а также* $u_0 \ne -2/3 + (\sqrt{29}/6 - 1)(108 + 20\sqrt{29})^{1/3} + (\sqrt{29}/8 - 17/24)(108+20\sqrt{29})^{2/3}$ *при* $v_0 = 2 + (59/36 - \sqrt{29}/4)(108 + 20\sqrt{29})^{1/3} + (2 - 13\sqrt{29}/36)(108+20\sqrt{29})^{2/3},$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign} t_1,\ \ u = u_0,\ \ v = v_0;$

$CF_{30}^{4,1}:\ \tilde t_1 \ne 0,\ \tilde q_1 \ne -2\tilde t_2,\ æ_{12} = 0,\ æ_{15} \ne 0,$ *кроме того,* $u_0 = (\tilde q_1 + 2\tilde t_2)æ_{24}^{-1/3},$ $v_0 = 4æ_{15}æ_{24}^{-2/3}$ *и* $u_0 \ne -v_0^{-1},\ (v_0^3 - 8)(4v_0)^{-1},$ *а также* $u_0 \ne 3$ *при* $v_0 = -3,\ u_0 \ne 2$ *при* $v_0 = 3,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1,\ \ u = u_0,\ \ v = v_0;$

$CF_{32}^{4,1}:\ \tilde t_1 \ne 0,\ \tilde q_1 + 2\tilde t_2 \ne 0,\ \tilde q_2 = (\tilde q_1^2 + 2\tilde q_1\tilde t_2 - 3\tilde p_1\tilde t_1 + \tilde t_2^2)\tilde t_1^{-1},\ \tilde p_2 = (\tilde t_2^4 + 3\tilde q_1\tilde t_2^3 + (4\tilde q_1^2 - 2\tilde p_1\tilde t_1)\tilde t_2^2 - 3\tilde q_1(2\tilde p_1\tilde t_1 - \tilde q_1^2)\tilde t_2 + (3\tilde p_1\tilde t_1 - \tilde q_1^2)(\tilde p_1\tilde t_1 - \tilde q_1^2))\tilde t_1^{-2}(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-1},$ *кроме того,* $u_0 = 3æ_{45}(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-2} \ne -3,\ -3/4,\ 3/8,\ 6,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde t_1æ_{16}),\ \ u = u_0;$

$CF_{33}^{4,1}:\ \tilde t_1 \ne 0,\ \tilde q_1 \ne -2\tilde t_2,\ æ_{16} = 0,\ æ_{15} \ne 0,$ *кроме того,* $u_0 = æ_{15}(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-2} \ne 1,$ $v_0 = æ_{22}(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-3} \ne (4u_0+1)/8,\ (6u_0 + 1 \pm (2u_0+1)(8u_0+1)^{1/2})/16,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\tilde t_1,$ $u = u_0,\ \ v = v_0;$

$CF_{36}^{4,1}:\ \tilde t_1 \ne 0,\ \tilde q_1 + 2\tilde t_2 \ne 0,\ \tilde q_2 = -(2\tilde q_1\tilde t_2 + 3\tilde t_2^2 + 3\tilde p_1\tilde t_1)\tilde t_1^{-1},\ \tilde p_2 = (-9\tilde t_2^4 - 21\tilde q_1\tilde t_2^3 - (16\tilde q_1^2 + 6\tilde p_1\tilde t_1)\tilde t_2^2 - 2\tilde q_1(2\tilde q_1^2 + 5\tilde p_1\tilde t_1)\tilde t_2 + \tilde p_1\tilde t_1(\tilde p_1\tilde t_1 - 4\tilde q_1^2))\tilde t_1^{-2}(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-1},$ *кроме того,* $u_0 = æ_{16}(\tilde q_1 + 2\tilde t_2)^{-2} \ne -2,\ -1/8,\ 1 \pm 3\sqrt2/4,\ 1/4,\ 4,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde t_1æ_{46}),\ \ u = u_0;$

$CSF_3^{5,1}:$ *1)* $\tilde p_2 \ne 0,\ æ_{29} \ge 0,\ \hat p_1 = \hat q_2æ_{30},\ æ_{32} \ne 0,$ *кроме того,* $u_0 = æ_{30} \ne -1,$ $v_0 = æ_{31}(\hat t_2 + \hat q_2)(\hat t_2 - \hat q_2)^{-1} \ne u_0,\ (u_0-1)^2u_0^{-1},\ 2u_0 - 2,\ 2u_0,\ u_0 - 3,\ 3u_0 - 1,\ 4u_0,\ u_0 + 1,\ 3u_0 + 3,\ (2u_0^2 + 1 \pm (2u_0+1)(5-4u_0)^{1/2})(u_0+1)^{-1}/2,\ u_0 - 1 \pm 2\sqrt{-u_0},\ 2(u_0+1)^2(u_0+2)^{-1},$ *где* $\hat p_1, \hat q_2, \hat t_2$ *из* (80), *а также* $u_0 \ne 17/3 + (3\sqrt{57} - 1)(1 + 3\sqrt{57})^{1/3}/12 + 2(1+3\sqrt{57})^{2/3}/3$ *при* $v_0 = 20/3 + (\sqrt{57} - 1)(1 + 3\sqrt{57})^{1/3}/3 + (85 + \sqrt{57})(1+3\sqrt{57})^{2/3}/96,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\hat q_2,$ $u = u_0,\ \ v = v_0,$

2) $\tilde p_2 = 0,\ æ_{29} \ge 0,\ \hat p_1 = \hat q_2æ_{34},$ *где* $\hat p_1, \hat q_2$ *из* (80), $æ_{35} \ne æ_{34},$ *кроме того,* $u_0 = æ_{34} \ne -1,$ $v_0 = æ_{35} \ne u_0,\ (u_0-1)^2u_0^{-1},\ 2u_0 - 2,\ 2u_0,\ u_0 - 3,\ 3u_0 - 1,\ 4u_0,\ u_0 + 1,\ 3u_0 + 3,\ (2u_0^2 + 1 \pm (2u_0+1)(5-4u_0)^{1/2})(u_0+1)^{-1}/2,\ u_0 - 1 \pm 2\sqrt{-u_0},\ 2(u_0+1)^2(u_0+2)^{-1},$ *а также* $u_0 \ne 17/3 + (3\sqrt{57} - 1)(1 + 3\sqrt{57})^{1/3}/12 + 2(1+3\sqrt{57})^{2/3}/3$ *при* $v_0 = 20/3 + (\sqrt{57} - 1)(1 + 3\sqrt{57})^{1/3}/3 + (85 + \sqrt{57})(1+3\sqrt{57})^{2/3}/96,$ *тогда* $\sigma = \operatorname{sign}\hat q_2,\ \ u = u_0,\ \ v = v_0;$

$CSF_6^{5,1}:\ \tilde t_1 \ne 0,\ æ_{48} \ne 0,\ æ_{48} \ne -4æ_{15}/3,$ *существует* $\theta_* \ne \tilde t_2\tilde t_1^{-1}$ *– вещественный корень уравнения* $3\tilde t_1^3\theta^4 + 3\tilde t_1^2(\tilde q_1 - 2\tilde t_2)\theta^3 + \tilde t_1(3\tilde p_1\tilde t_1 - 8\tilde t_1\tilde q_2 + 2\tilde q_1\tilde t_2 + 3\tilde t_2^2)\theta^2 + (4\tilde q_1^2\tilde t_2 + 8\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2 - 5\tilde q_1\tilde t_2^2 - 4\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_1 - 6\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2)\theta + 4\tilde q_2^2\tilde t_1 - 4\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_2 + 3\tilde p_1\tilde t_2^2 = 0$ *или уравнения* $3\theta^4\tilde t_1^2\tilde t_2 + \tilde t_1(8\tilde q_1\tilde t_2 - 5\tilde q_2\tilde t_1 - 6\tilde t_2^2)\theta^3 + (2\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2 - 4\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_1 - 8\tilde q_1\tilde t_2^2 + 3\tilde p_2\tilde t_1^2 + 3\tilde t_2^3 + 4\tilde q_1^2\tilde t_2)\theta^2 + (4\tilde q_2^2\tilde t_1 - 4\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_2 - 6\tilde p_2\tilde t_1\tilde t_2 + 3\tilde t_2^2\tilde q_2)\theta + 3\tilde p_2\tilde t_2^2 = 0,$ $\tilde p_2 = -\theta_*(3\tilde t_1^2\tilde t_2\theta_*^3 + \tilde t_1(8\tilde q_1\tilde t_2 - 5\tilde q_2\tilde t_1 - 6\tilde t_2^2)\theta_*^2 + (2\tilde q_1 - \tilde t_2)(2\tilde q_1\tilde t_2 - 3\tilde t_2^2 - 2\tilde q_2\tilde t_1)\theta_* - \tilde q_2(4\tilde q_1\tilde t_2 - 4\tilde q_2\tilde t_1 - 3\tilde t_2^2))(\tilde t_1\theta_* - \tilde t_2)^{-2}/3,$ *если* θ_* *– корень первого уравнения, либо* $\tilde p_1 = -(3\tilde t_1^3\theta_*^4 + 3\tilde t_1^2(\tilde q_1 - 2\tilde t_2)\theta_*^3 + \tilde t_1(2\tilde q_1\tilde t_2 - 8\tilde q_2\tilde t_1 + 3\tilde t_2^2)\theta_*^2 + (8\tilde t_1\tilde q_2\tilde t_2 - 4\tilde q_1\tilde q_2\tilde t_1 - 5\tilde q_1\tilde t_2^2 + 4\tilde q_1^2\tilde t_2)\theta_* - 4\tilde q_2(\tilde q_1\tilde t_2 - \tilde q_2\tilde t_1))(\tilde t_1\theta_* - \tilde t_2)^{-2}/3,$ *если*

θ_* *– корень второго уравнения, кроме того,* $u_0=-4æ_{15}(\tilde t_1\theta_*-\tilde t_2)^{-2}/3$, $v_0=æ_{48}(\tilde t_1\theta_*-\tilde t_2)^{-2}$ *и* $v_0\neq 2-3u_0,\ (3u_0-2)/2,\ (3u_0+1)/2,\ 3u_0-1,\ 3u_0+3,\ u_0-1,\ -3u_0-1,\ (\pm(3u_0^2-4u_0+5)+4(u_0^2-u_0+1)^{1/2})(u_0+1\pm 2(u_0^2-u_0+1)^{1/2})^{-1},\ (3u_0^2+4u_0+2)(u_0+1)^{-1}/2,\ -1\pm\sqrt{3},\ (4u_0^3+3u_0^2+6u_0+5\pm(4u_0^2+u_0+4)(u_0^2+u_0+1)^{1/2})(4u_0^2+7u_0+4\pm(4u_0+5)(u_0^2+u_0+1)^{1/2})^{-1}$, *а также* $u_0\neq -5/9$ *при* $v_0=17/12$, $u_0\neq -7/12$ *при* $v_0=3/2$, $u_0\neq 35/3$ *при* $v_0=12$, $u_0\neq -35/3$ *при* $v_0=-41/4$, *тогда* $\sigma=-\operatorname{sign}æ_{47}$, $u=u_0$, $v=v_0$;

$CSF_7^{5,1}$: *1)* $\tilde p_2\neq 0$, $\tilde t_1\neq 0$, $\tilde t_2\neq 0$, $\tilde p_2=\tilde q_2^2\tilde t_2^{-1}/3$, $\tilde p_1=\tilde q_2(\tilde q_1\tilde t_2^{-1}-\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-2}-1/3)$, $\tilde q_1\neq\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-1}$, $\tilde q_1\neq(3\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)(2\tilde t_2)^{-1}$, $\tilde q_1\neq(2\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)\tilde t_2^{-1}$, *кроме того,* $u_0=3(\tilde q_2\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2)\tilde t_2^{-2}$, $v_0=3(3\tilde q_2\tilde t_1-2\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2)\tilde t_2^{-2}$ *и выполнены условия (*), тогда* $\sigma=-\operatorname{sign}\tilde q_2$, $u=u_0, v=v_0$,
2) $\tilde p_2=0$, $\tilde t_1\neq 0$, $æ_{36}\neq 0$, $æ_{36}\neq 3æ_{37}$, $\tilde p_1=-(\tilde t_1^2\theta_*^4+\tilde t_1(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*^3+(-2\tilde t_2^2+5\tilde q_1\tilde t_2-7\tilde q_2\tilde t_1-2\tilde q_1^2)\theta_*^2+\tilde q_2(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*+\tilde q_2^2)(9\tilde t_1\theta_*^2)^{-1}\neq 0$, *где* θ_* *– любой ненулевой вещественный корень уравнения* (83) *(если* $\tilde q_2\tilde t_2\neq 0$, *то он существует всегда, если* $\tilde q_2=0$ $(\tilde t_2\neq 0)$, *то он существует при* $\tilde q_1^2-18\tilde q_1\tilde t_2+9\tilde t_2^2\geq 0$, *если* $\tilde t_2=0$ $(\tilde q_2\neq 0)$, *то при* $\tilde q_1^2+32\tilde t_1\tilde q_2\geq 0$), $æ_{37}\neq 0$, *кроме того,* $u_0=æ_{36}(3\tilde t_1æ_{39})^{-1}\theta_*^{-2}$, $v_0=æ_{37}(\tilde t_1æ_{39})^{-1}\theta_*^{-2}$ *и выполнены условия (*), тогда* $\sigma=\operatorname{sign}æ_{39}$, $u=u_0$, $v=v_0$,
3) $\tilde p_2=0$, $\tilde t_1\neq 0$, $\tilde q_1\neq 0$, $\tilde q_2\neq 3\tilde p_1$, $\tilde q_2\neq 0$, $\tilde t_2=(3\tilde p_1\tilde q_1^2-\tilde t_1(3\tilde p_1-\tilde q_2)^2)(3\tilde p_1-\tilde q_2)^{-1}\tilde q_1^{-1}$, $\tilde q_2\neq(3\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2)\tilde t_1^{-1}$, $\tilde t_1\neq(3\tilde p_1-2\tilde q_2)(3\tilde p_1-\tilde q_2)^{-2}\tilde q_1^2$, *кроме того,* $u_0=(3\tilde p_1-\tilde q_2)((3\tilde p_1-\tilde q_2)\tilde t_1-\tilde q_1^2)\tilde p_1^{-1}\tilde q_1^{-2}$, $v_0=((3\tilde p_1-\tilde q_2)^2\tilde t_1-(3\tilde p_1-2\tilde q_2)\tilde q_1^2)\tilde p_1^{-1}\tilde q_1^{-2}$ *и выполнены условия (*), тогда* $\sigma=-\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=u_0$, $v=v_0$,
4) $\tilde p_2=0$, $\tilde t_1\neq 0$, $\tilde q_1=0$, $\tilde q_2=3\tilde p_1$, $æ_{40}\geq 0$, $æ_{42}\neq 0$, *кроме того,* $u_0=æ_{41}(2\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$, $v_0=æ_{42}(2\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$ *и выполнены условия (*), тогда* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=u_0$, $v=v_0$;
при этом для каждого из условий 1) – 4) попадания в $CSF_7^{5,1}$ *условия (*) имеют вид:* $u_0\neq(v_0-1)(v_0-3)(v_0-2)^{-1},\ v_0(3v_0-10\pm(v_0^2+12v_0-12)^{1/2})(4v_0-8)^{-1}$, $v_0\neq 2u_0,\ 2u_0+3,\ 3-u_0,\ u_0+3,\ 3u_0-3,\ (2u_0^2-4u_0+3)(u_0-2)^{-1},\ u_0+1\pm 2(u_0+1)^{1/2},\ (3u_0^2+14u_0+7\pm(3u_0+5)(u_0^2+6u_0+1)^{1/2})(u_0+3\pm(u_0^2+6u_0+1)^{1/2})^{-1},\ (4u_0+16\pm 9(1+4u_0)^{1/2}\mp(1+4u_0)^{3/2})(-3\mp(1+4u_0)^{1/2})^{-1}/4$, *а также* $u_0\neq -5+(\sqrt{17}-9)(2+2\sqrt{17})^{2/3}/8-(1+\sqrt{17})(2+2\sqrt{17})^{1/3}/2$ *при* $v_0=u_0-3$ *и* $u_0\neq -4+(36+4\sqrt{77})^{2/3}/4+(9-\sqrt{77})(36+4\sqrt{77})^{1/3}/4$ *при* $v_0=3(4-6(36+4\sqrt{77})^{1/3}+(36+4\sqrt{77})^{2/3})(36+4\sqrt{77})^{2/3}(9-\sqrt{77})/32$;

$CSF_8^{5,1}$: $\tilde t_1\neq 0$, *в* (79) $b_{1*}\neq 0$, $b_{2*}\neq 0$, $c_{2*}\neq 0$, *кроме того,* $u_0=a_{1*}b_{2*}^{-1}$, $v_0=b_{1*}c_{2*}^{-1}$, $w_0=c_{1*}b_{2*}c_{2*}^{-2}$ *и* $v_0\neq -2$, $w_0\neq v_0,\ v_0(u_0v_0-2u_0+1)(2u_0-1)^{-2},\ v_0(1-u_0)^{-1},\ (v_0^2-2v_0)(4u_0-4)^{-1},\ (u_0v_0^2+v_0^2+2v_0-4u_0)(2u_0+1)^{-2},\ v_0^2(4u_0)^{-1},\ -(v_0+1)u_0^{-1},\ (2v_0-u_0-1)/4,\ v_0-3u_0/4,\ v_0(3u_0v_0-3u_0+1)(3u_0-1)^{-2},\ v_0(2u_0v_0-3u_0+1)(3u_0-1)^{-2},\ (v_0-1)^2(2u_0-1)\theta_0+(v_0-1)(u_0-1)(2u_0+v_0-1)(2u_0-2+\theta_0v_0-\theta_0)^{-1}u_0^{-2}/2$, *где* $\theta_0=((u_0+1)(1-v_0)\pm((v_0-1)(v_0-9)u_0^2+2(v_0+3)(v_0-1)u_0+(v_0-1)^2)^{1/2})(2v_0-2)^{-1}$, *а также* $u_0\neq(w_0^{3/2}\mp 1)(w_0^{1/2}\pm 2)^{-2}w_0^{-1/2}$ *при* $v_0=(2w_0+1)(\pm w_0^{1/2}+2)^{-1}$, $u_0\neq(v_0^2+2\pm(v_0^2+v_0-2)^{1/2}(v_0+1))(v_0-2)^{-1}/3$ *при* $w_0=-v_0^2-v_0\pm(v_0^2+v_0-2)^{1/2}(v_0+1)$, $v_0\neq-(2u_0^2+4u_0+1)(3u_0+1)^{-1}(u_0+1)^{-1}$ *при* $w_0=-(5u_0^2+4u_0+1)(3u_0+1)^{-2}(u_0+1)^{-1}$, *тогда* $\sigma=\operatorname{sign}b_{2*}$, $u=u_0$, $v=v_0$, $w=w_0$.

Здесь $æ_j$ $(j=\overline{1,11})$ *из* (73), $æ_j$ $(j=\overline{12,26})$ *из* (73_2), $æ_j$ $(j=\overline{27,48})$ *из* (73_3).

Заключение

Список 12. Шестьдесят одна CF_i^m (CSF_i^m) системы (14) при $l=1,2,3$ $(\sigma,\kappa=\pm1)$

$CF_2^{2,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_3$; $CF_3^{2,2,=}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_4$;

$CF_4^{2,2,>}=\begin{pmatrix}0&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_4,\ \begin{matrix}|u|\le1\\ [|u|>1]\end{matrix}$; $CF_5^{2,3,=,>}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_5$;

$CF_6^{2,3,=,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_5$; $CF_{7,\kappa}^{2,2,=}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_6$;

$CF_{8,\kappa}^{2,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&\kappa&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_4,\ \begin{matrix}\sigma=1\\ [\sigma=-1]\end{matrix}$ при $\kappa=-1$; $CF_9^{2,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_7$;

$CF_3^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_5,\ \begin{matrix}\sigma=1\\ [\sigma=-1]\end{matrix}$ при $u=2$; $CF_5^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}_6,\ \begin{matrix}u\ge1,\ u\ne2\\ [u<1];\end{matrix}$

$CF_6^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_6$; $CF_7^{3,2,=}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_6,\ \begin{matrix}u\ne-1\\ [|u|>1]\end{matrix}$;

$CF_8^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}_7,\ u>1/4$; $CF_{9,\kappa}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&\kappa&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_7$;

$CF_{10}^{3,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_7$; $CF_{12}^{3,2,=}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_7,\ u<-1/4$;

$CF_{13}^{3,2,=}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}_8$; $CF_{14,\kappa}^{3,1}=\begin{pmatrix}0&u&0&\kappa\\0&0&1&0\end{pmatrix}_8,\ \begin{matrix}u\ne1/2 \text{ при } \kappa=1\\ [\sigma=-1];\end{matrix}$

$CF_{16}^{3,2,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_8$; $CF_{17}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_8$; $CF_{19}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_9$;

$CF_{21}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_9,\ u\ne2$; $CF_{22}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{10}$;

$CF_1^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&u&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_6,\ \begin{matrix}|u|<1\\ [|u|>1]\end{matrix}$; $CF_3^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&-u&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}_7,\ u\ne-1/2,-2$;

$CF_5^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_8,\quad u\ne v(v-2)/4,\quad u\ne1$ при $v=-2,\quad u\ne-1/9$ при $v=1$;

$CF_7^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}_8,\ v\ne u,\ (2u-1)u^{-1},\ 2u(u+1)^{-1},\ \begin{matrix}u\ge u_v\\ [u<u_v]\end{matrix},\ u_v=\max\left\{u,\ \dfrac{v-u}{uv-2u+1}\right\}$;

$CF_{8,\kappa}^{4,2}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&\kappa u&0\\0&1&0&\kappa\end{pmatrix}_8,\ \begin{matrix}|u|\le1\\ [|u|>1]\end{matrix},\quad |u|\ne1$ при $\kappa=-1$;

$CF_{11}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&v&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_9,\quad v\ne u(2u-1)^{-2}$; $CF_{12}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&v\\0&0&1&1\end{pmatrix}_9,\ \begin{matrix}u\ne1/2,\ -v,\\ 4v(u-1)-1\ge0;\end{matrix}$

$CF_{13}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&u\\0&1&0&-1\end{pmatrix}_9,\quad u\ne-1/3,\ 2/3$;

$CF_{14}^{4,l}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&u&0\\0&1&0&v\end{pmatrix}_9,$ при $l=1:\ \ v\ne u,\ -u^2,\ \ v\ne u/2$ при $u>-1/2$;
при $l=2:\ \ v=-u^2,\ \ u\ne-1,-1/2,-1/3$;

$CF_{18,-}^{4,3,=,=}=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}_{10},\quad [\sigma=-1]$; $CF_{19}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{10},\ \begin{matrix}u\ne(v^3-8)(4v)^{-1},\\ u\ne v^2/4;\end{matrix}$

$CF_{20}^{4,3} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & u \end{pmatrix}_{10}, \quad \begin{matrix} u \in (-\infty, -1/9] \cup (0, +\infty) \\ [u \in (-1/9, 0)] \end{matrix}, \quad \sigma = -1$ при $u = -1$;

$CF_{21,\kappa}^{4,3,<} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \kappa \\ 1 & 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}_{10}, \quad \begin{matrix} \sigma = 1 \\ [\sigma = -1] \end{matrix}$ при $\kappa = -1$; $\quad CF_{24}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{11}, \quad v < -1/2$;

$CF_{23}^{4,2,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{10}, \quad \begin{matrix} |u| \le 1 \\ [|u| > 1] \end{matrix}, \quad v < 0$ при $u = 1, \quad v \ne u,\ u(2-u)/4,\ (2u-1)/4$;

$CF_{27}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & 1 \\ 0 & 1 & 0 & v \end{pmatrix}_{11}, \quad v \ne -u^{-2},\ (u^{3/2} \pm 2\sqrt{2})u^{-1/2}/2, \quad u \ne 2^{2/3} \cdot 3/4$ при $v = 2^{2/3}/4$;

$CF_{28}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & -u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{11}, \quad u \ne -3,\ -3/4,\ 3/2,\ 6,\ (92 + 4\sqrt{29})^{1/3} + 20 \cdot (92 + 4\sqrt{29})^{-1/3} + 5$;

$CF_{29}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{11}, \quad u \ne -1/2, \quad v \ne -u,\ u^2,\ (1-2u)/8,\ (1-2u)^2/8,$
$u \ne -2/3 + (\sqrt{29}/6 - 1)(108 + 20\sqrt{29})^{1/3} + (\sqrt{29}/8 - 17/24)(108 + 20\sqrt{29})^{2/3}$
при $v = 2 + (59/36 - \sqrt{29}/4)(108 + 20\sqrt{29})^{1/3} + (2 - 13\sqrt{29}/36)(108 + 20\sqrt{29})^{2/3}$;

$CF_{30}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & v & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{12}, \quad \begin{matrix} u \ne -v^{-1},\ (v^3 - 8)(4v)^{-1}, \\ u \ne 3 \text{ при } v = -3, \quad u \ne 2 \text{ при } v = 3; \end{matrix}$

$CF_{32}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{12}, \quad u \ne -3,\ -3/4,\ 3/8,\ 6$;

$CF_{33}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{12}, \quad u \ne 1, \quad v \ne u,\ (4u+1)/8,\ (6u + 1 \pm (2u+1)(8u+1)^{1/2})/16$;

$CF_{34,+}^{4,2,<} = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & +u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{12}, \quad \begin{matrix} |u| < 1,\ u = -1 \\ [u > 1] \end{matrix};$

$CF_{36}^{4,1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & u \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{13}, \quad u \ne -2,\ -1/8,\ 1 \pm 3\sqrt{2}/4,\ 1/4,\ 4$;

$CSF_3^{5,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{10}, \quad \begin{matrix} u \ne -1, \quad v \ne u,\ (u-1)^2 u^{-1},\ 2u-2,\ 2u,\ u-3,\ 3u-1,\ 4u, \\ u+1,\ 3u+3,\ (2u^2 + 1 \pm (2u+1)(5-4u)^{1/2})(u+1)^{-1}/2, \\ u - 1 \pm 2\sqrt{-u},\ 2(u+1)^2(u+2)^{-1}, \end{matrix}$
$u \ne 17/3 + (3\sqrt{57} - 1)(1 + 3\sqrt{57})^{1/3}/12 + 2(1 + 3\sqrt{57})^{2/3}/3$ при
$v = 20/3 + (\sqrt{57} - 1)(1 + 3\sqrt{57})^{1/3}/3 + (85 + \sqrt{57})(1 + 3\sqrt{57})^{2/3}/96$;

$CSF_6^{5,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & 0 & u-v \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{11}, \quad v \ne u,\ 2-3u,\ (3u-2)/2,\ (3u+1)/2,\ 3u-1,\ 3u+3,\ u-1,\ -3u-1,$
$(\pm(3u^2 - 4u + 5) + 4(u^2 - u + 1)^{1/2})(u + 1 \pm 2(u^2 - u + 1)^{1/2})^{-1},\ (3u^2 + 4u + 2)(u+1)^{-1}/2,\ -1 \pm \sqrt{3},$
$(4u^3 + 3u^2 + 6u + 5 \pm (4u^2 + u + 4)(u^2 + u + 1)^{1/2})(4u^2 + 7u + 4 \pm (4u+5)(u^2 + u + 1)^{1/2})^{-1},$
$u \ne -5/9$ при $v = 17/12, \quad u \ne -7/12$ при $v = 3/2$,
$u \ne 35/3$ при $v = 12, \quad u \ne -35/3$ при $v = -41/4$;

$CSF_7^{5,l} = \sigma \begin{pmatrix} u & v_0 & w_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{11}, \quad \begin{matrix} \text{при } l = 2:\ -v_0,\ w_0 = u, \quad u \ne -1, 3 \quad (CSF_7^{5,2} = CF_7^{5,2}); \\ \text{при } l = 1:\ v_0 = v,\ w_0 = v - u, \quad u \ne (v-1)(v-3)(v-2)^{-1},\ u \ne \end{matrix}$
$v(3v - 10 \pm (v^2 + 12v - 12)^{1/2})(4v - 8)^{-1},\ v \ne u,\ 2u,\ 2u+3,\ 3 \mp u,\ 3u-3,\ (2u^2 - 4u + 3)(u-2)^{-1},$
$u + 1 \pm 2(u+1)^{1/2},\ (3u^2 + 14u + 7 \pm (3u+5)(u^2 + 6u + 1)^{1/2})(u + 3 \pm (u^2 + 6u + 1)^{1/2})^{-1},$
$(4u + 16 \pm 9(1+4u)^{1/2} \mp (1+4u)^{3/2})(-3 \mp (1+4u)^{1/2})^{-1}/4, \ u \ne -5 + (\sqrt{17} - 9)(2 + 2\sqrt{17})^{2/3}/8 -$
$(1 + \sqrt{17})(2 + 2\sqrt{17})^{1/3}/2$ при $v = u - 3, \ u \ne -4 + (36 + 4\sqrt{77})^{2/3}/4 + (9 - \sqrt{77})(36 + 4\sqrt{77})^{1/3}/4$
при $v = 3(4 - 6(36 + 4\sqrt{77})^{1/3} + (36 + 4\sqrt{77})^{2/3})(36 + 4\sqrt{77})^{2/3}(9 - \sqrt{77})/32$;

$CSF_8^{5,1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & w & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{11}$, $v \neq -2$, $w \neq v$, $v-u$, $v(uv-2u+1)(2u-1)^{-2}$, $v(1-u)^{-1}$, $(v^2-2v)(4u-4)^{-1}$, $(uv^2+v^2+2v-4u)(2u+1)^{-2}$, $v^2(4u)^{-1}$, $-(v+1)u^{-1}$, $(2v-u-1)/4$, $v-3u/4$, $v(3uv-3u+1)(3u-1)^{-2}$, $v(2uv-3u+1)(3u-1)^{-2}$, $(v-1)^2(2u-1)\theta_*+(v-1)(u-1)(2u+v-1)(2u-2+\theta_*v-\theta_*)^{-1}u^{-2}/2$, где $\theta_* = ((u+1)(1-v) \pm ((v-1)(v-9)u^2 + 2(v+3)(v-1)u + (v-1)^2)^{1/2})(2v-2)^{-1}$,
$u \neq (w^{3/2} \mp 1)(w^{1/2} \pm 2)^{-2}w^{-1/2}$ при $v = (2w+1)(\pm w^{1/2}+2)^{-1}$,
$u \neq (v^2 + 2 \pm (v^2+v-2)^{1/2}(v+1))(v-2)^{-1}/3$ при $w = -v^2 - v \pm (v^2+v-2)^{1/2}(v+1)$,
$v \neq -(2u^2+4u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}$ при $w = -(5u^2+4u+1)(3u+1)^{-2}(u+1)^{-1}$;

$CF_{22}^{5,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}$, $u \neq 3/2$;

$CF_1^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{12}$, $\begin{matrix} |u| \leq 1 \\ [|u| > 1] \end{matrix}$, $\begin{matrix} v > 1/4,\ v \neq (3u^2+3u+1)(u^2+3u+3)(3u^2+8u+3)^{-2}, \\ v \neq (u^2-3u+3)(u-3)^{-2},\ (3u^2-3u+1)(3u-1)^{-2}; \end{matrix}$

$CF_3^{6,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1-v & 0 & -v^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{13}$, $v > 1/4$, $v \neq (49 \pm 7\sqrt{46})/6,\ 1/3,\ 1$ $(u = 1)$;

$CF_4^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & v & 1 & v \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{14}$, $\begin{matrix} 0 < v < 1 \\ [-1 < v < 0] \end{matrix}$;

$CSF_6^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}_{14}$, $\begin{matrix} v \in (0,1),\ u \in (u_-, u_+)\ \ (u < 0), \\ u_\mp = v^3 - 2 \mp 2(1-v^3)^{1/2})v^{-2}; \end{matrix}$

$CSF_7^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{15}$, $v < -(u+1)^2/4$, $u \neq -v,\ -v/3-1,\ (2v-3)(3-v)^{-1}$;

$CF_9^{6,3,=,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{15}$;

$CSF_{11}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{16}$, $\begin{matrix} u > 0,\ [u < 0],\ v < -u^2/4;\ v \neq \sqrt{3}u(3u^2+\sqrt{3}u-2)(4-3u^2)^{-1} \\ \text{при } u \in (0; \sqrt{6}(43-7\sqrt{37})^{1/2}/3) \cup (2/\sqrt{3}; \sqrt{6}(43+7\sqrt{37})^{1/2}/3); \end{matrix}$

$CSF_{13}^{6,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & uv & uv^2(1+v) \\ 1 & 1 & 0 & v(1+v)^2 \end{pmatrix}_{16}$, $v < -4/3$, $u \in (((-v)^{1/2}-1)^2, ((-v)^{1/2}+1)^2)$;

$CSF_2^{7,2,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1}-v(uv+w) & u+wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}_{17}$, $0 < v < \sqrt[3]{4}$, $v \neq 1$, $w < -(u+v)^2/4 \leq 0$,
$w \neq -uv, uv^{-2}-uv$, $4v^2w^2 - 4v(2v^3-3uv^2-2)w + (v^3-3uv^2+2)^2 < 0$;

$CF_1^{8,3,=,=} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{20}$.

Замечание 14. Согласно списку 12 имеются всего две структурные формы: $SF_{14}^{4,\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}_9$ и $SF_7^{5,\{0,1,2\}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}_{11}$, которые при определенных значениях коэффициентов оказываются каноническими с различными значениями l ($l \in \{1,2,3\}$), т.е. различные степени может иметь многочлен P_0^l, являющийся общим множителем максимальной степени многочленов P_1 и P_2 исходной системы (1).

Список литературы

[1] Басов В.В., Федорова Е.В. Классификация двумерных однородных кубических систем ОДУ при наличии общего множителя - I // Дифференциальные уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal).—2012.— № 2.— С. 218–276.