ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СИСТЕМ ОДУ С ЛИНЕЙНО-КУБИЧЕСКОЙ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТЬЮ

В. В. БАСОВ, Л. С. МИХЛИН

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28,
Санкт-Петербургский Государственный университет,
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru, mikhlin@bk.ru

Аннотация

Конструктивным методом получены все структуры обобщенных нормальных форм, к которым может быть сведена формальным обратимым преобразованием двумерная автономная система ОДУ с линейно-кубическим многочленом в невозмущенной части, линейно эквивалентным какому-либо квазиоднородному многочлену. Также осуществлена классификация систем, невозмущенную часть которых образует квазиоднородный многочлен второй обобщенной степени с весом $(1,3)$.

1 Введение

В работе будет рассматриваться вещественная система

$$\dot{x}_i = P_i(x) + X_i(x) \qquad (i = 1, 2, \quad P_i \not\equiv 0), \tag{1}$$

в которой полиномы $P_1(x) = a_1x_1 + d_1x_2$ и $P_2(x) = a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3$ образуют линейно-кубическую невозмущенную часть, возмущение $X_i(x) = \sum_{p_1+p_2=2i}^{\infty} X_i^{(p_1,p_2)} x_1^{p_1} x_2^{p_2}$.

Задача заключается в том, чтобы при помощи формальных обратимых замен переменных максимальным образом упростить систему (1), сохраняя линейно-кубическую структуру ее невозмущенной части.

Эта задача естественным образом распадается на две: сначала при помощи линейных обратимых замен упростить невозмущенную часть системы (1), а затем при помощи формальных почти тождественных замен упростить полученное возмущение, сводя исходную систему к так называемой обобщенной нормальной форме (ОНФ).

Нормализация возмущений системы будет осуществляться конструктивно методом резонансных уравнений, впервые описанным и примененном первым из авторов в [1], а затем в [2], [3] и еще целом ряде работ. Метод позволяет, во всяком случае, если степень невозмущенной части системы не превосходит трех, в явном виде выписать все возможные структуры ОНФ, к которым исходная система с фиксированной невозмущенной частью может быть сведена формальной почти тождественной заменой. Это подразумевает, что для каждого порядка возмущения ОНФ будет указано не только максимальное число ненулевых слагаемых данного порядка, но и конкретно все показатели степеней, которые эти слагаемые могут иметь, а если надо, то и их коэффициенты.

Метод резонансных уравнений удобно применять, если невозмущенная часть системы является векторным однородным многочленом, например, второго порядка (см. [3]–[8]) или третьего порядка (см. [9]). В противном случае, например, как в системе (1), необходимо сначала выровнять порядки невозмущенной части, вводя для переменных вес, обобщенную степень и рассматривая только квазиоднородные многочлены (КОМ). А это удается сделать далеко не для любого векторного многочлена.

Поэтому при решении задачи нормализации невозмущенной части системы (1) надо сначала выделить все возможные КОМ линейно-кубической структуры и указать условия на коэффициенты многочленов P_1 и P_2, при которых линейной неособой заменой они сводятся к соответствующим КОМ. И только затем приступить к последовательной нормализации возмущений систем с различными линейно-кубическими КОМ в невозмущенной части.

В работе показано, что невозмущенная часть системы (1) может быть сведена к двум различным каноническим КОМ: КОМ1 обобщенной степени один с весом (1,2) и КОМ2 обобщенной степени два с весом (1,3). И далее в явном виде получены все возможные ОНФ систем с КОМ1 и КОМ2 в невозмущенной части.

Существует другой подход к классификации невозмущенных частей системы, при котором невозмущенную часть образует произвольный КОМ с заданными обобщенной степенью и весом. При таком подходе первичной задачей является разбиение невозмущенной системы части на классы эквивалентности относительно обратимых квазиоднородных замен с выделением в каждом классе простейшего представителя – канонической формы для того, чтобы в дальнейшем последовательно получать ОНФ систем с каждой из канонических форм в невозмущенной части.

Для произвольных КОМ обобщенной степени один с весом (1,2) это сделано в [2], [10], а для КОМ обобщенной степени два с весом (1,3) – в настоящей работе.

В заключение отметим, что классификация двумерных систем с векторным однородным многочленом второго порядка в невозмущенной части осуществлена в [3] и уточнена в [4], а с векторным однородным многочленом третьего порядка, компоненты которого имеют общий множитель, – в [11].

2 Выделение квазиоднородного многочлена

1^0. Следуя, например, [1] или [2], дадим следующие определения.

Пусть $z=(z_1,z_2)$, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$, $q=(q_1,q_2)$, $Q(z)=(Q_1(z),Q_2(z))$, $Z=(Z_1(z),Z_2(z))$.

Определение 1. *Весом* переменной z назовем вектор γ, если его компоненты γ_1,γ_2 — натуральные и взаимно простые. *Обобщенной степенью (о.с.) монома* $z_1^{q_1}z_2^{q_2}$ $(q_1,q_2\in\mathbb{Z}_+,$ $|q|=q_1+q_2\geq 1)$ назовем скалярное произведение $\langle q,\gamma\rangle$.

Определение 2. Векторный многочлен $Q(z)$ назовем *квазиоднородным многочленом (КОМ) о.с.* $k\in\mathbb{N}$ *с весом* γ и обозначим $Q_\gamma^{[k]}(z)$, если для $\forall\, i=1,2$ в Q_i входят только мономы о.с. $k+\gamma_i$, т.е. в КОМ компонента $Q_{\gamma,i}^{[k]}(z)=\sum_{q\colon \langle q,\gamma\rangle-\gamma_i=k} Q_i^{[q_1\gamma_1,q_2\gamma_2]}z_1^{q_1}z_2^{q_2}$. КОМ $Q_\gamma^{[k]}(z)$ назовем *невырожденным (НКОМ),* если обе его компоненты $Q_{\gamma,1}^{[k]}(z),Q_{\gamma,2}^{[k]}(z)\not\equiv 0$.

В приведенных терминах векторный однородный многочлен степени $k+1$, обозначаемый $Q^{(k+1)}(z)=\sum_{q\colon |q|=k+1} Q_i^{(q_1,q_2)}z_1^{q_1}z_2^{q_2}$, имеет стандартный вес $\gamma=(1,1)$ и о.с. k.

В результате компоненты векторного степенного ряда $Z(z)=\sum_{q\colon |q|\geq 1} Z^{(q_1,q_2)}z_1^{q_1}z_2^{q_2}$ можно записать как в виде суммы однородных многочленов: $Z_i=\sum_{k=0}^\infty Z_i^{(k+1)}(z)$, так и для произвольного веса γ в виде суммы КОМ: $Z_i=\sum_{k=1}^\infty Z_{\gamma,i}^{[k]}(z)$, разумеется, при условии, что все коэффициенты $Z_i^{(q_1,q_2)}=0$, если $\langle q,\gamma\rangle-\gamma_i\leq 0$ $(i=1,2)$.

В дальнейшем при наличии такой возможности нижний индекс γ будем опускать.

2^0. Установим, в каких случаях линейно-кубический многочлен $Q(z)=(\breve a_1z_1+\breve d_1z_2,$ $\breve a_2z_1^3+\breve b_2z_1^2z_2+\breve c_2z_1z_2^2+\breve d_2z_2^3)$ оказывается НКОМ некоторой о.с. с каким-либо весом.

Утверждение 1. *Векторный многочлен $Q(z)$ является НКОМ $Q_\gamma^\chi(z)$ в двух случаях:*

$$1)\ Q_{(1,2)}^{[1]}=(\breve d_1z_2,\breve a_2z_1^3),\quad 2)\ Q_{(1,3)}^{[2]}=(\breve d_1z_2,\breve b_2z_1^2z_2)\qquad(\breve d_1,\breve a_2,\breve b_2\neq 0).\tag{2}$$

Доказательство. По определению 2 показатели q_1^i, q_2^i любого слагаемого $Q_{\gamma,i}^{[q_1^i\gamma_1,\,q_2^i\gamma_2]}z_1^{q_1^i}z_2^{q_2^i}$, входящего в $Q_i^{[\chi]}(z)$ $(\chi\geq 1,\ i=1,2)$, удовлетворяют системе

$$q_1^i\gamma_1+q_2^i\gamma_2-\gamma_i=\chi\qquad(q_1^i+q_2^i=2i-1).\tag{3}$$

Если Q_i имеет хотя бы два монома $(\alpha_iz_1^{q_1^i}z_2^{q_2^i}$ и $\beta_iz_1^{s_1^i}z_2^{s_2^i})$, то $(q_1^i-s_1^i)\gamma_1=(s_2^i-q_2^i)\gamma_2$, откуда $\gamma_1=\gamma_2$, так как $q_1^i-s_1^i=s_2^i-q_2^i\neq 0$. Тогда в (3) $\chi=0$ при $i=1$, что невозможно.

Таким образом, НКОМ $Q(z)$ должен иметь вид:

$$Q_1(z)=\alpha_1z_1^pz_2^{1-p},\ Q_2(z)=\alpha_2z_1^qz_2^{3-q}\quad(p=\overline{0,1},\ q=\overline{0,3},\ \alpha_1\alpha_2\neq 0).$$

При этом система (3) примет вид: $p\gamma_1+(1-p)\gamma_2=\chi+\gamma_1$, $q\gamma_1+(3-q)\gamma_2=\chi+\gamma_2$ или $(p-q-1)\gamma_1=(p-q+1)\gamma_2$, $\chi=(1-p)(\gamma_2-\gamma_1)\neq 0$, откуда $p=0$, а значит, $(q+1)\gamma_1=(q-1)\gamma_2$, $\chi=\gamma_2-\gamma_1$, и $q=2,3$, так как $\gamma_i>0$, что дает $Q_{(1,2)}^{[1]}$ или $Q_{(1,3)}^{[2]}$. $\square$

$\mathbf{3^0}$. Линейная замена $z_i = \tau_i y_i$ $(\tau_i \neq 0,\ i = 1,2)$ преобразует линейно-кубическую невозмущенную систему $\dot z_i = Q_i(z)$ в систему $\dot y_i = \breve Q_i(y)$, у которой $\breve Q_1 = \breve a_1 y_1 + \breve d_1 \tau_1^{-1}\tau_2 y_2$, $\breve Q_2 = \breve a_2 \tau_1^3 \tau_2^{-1} y_1^3 + \breve b_2 \tau_1^2 y_1^2 y_2 + \breve c_2 \tau_1\tau_2 y_1 y_2^2 + \breve d_2 \tau_2^2 y_2^3$. Поэтому

1) $Q^{[1]}_{(1,2)}$ из (2) при $\tau_1 = |\breve d_1 \breve a_2|^{-1/2}, \tau_2 = \breve d_1^{-1}|\breve d_1\breve a_2|^{-1/2}$ сводится к $\breve Q^{[1]}_{(1,2)} = (y_2, \mathrm{sign}(\breve d_1 \breve a_2) y_1^3)$;
2) $Q^{[2]}_{(1,3)}$ из (2) при $\tau_1 = |\breve b_2|^{-1/2},\ \tau_2 = |\breve b_2|^{-1/2}\breve d_1^{-1}$ сводится к $\breve Q^{[2]}_{(1,3)} = \mathrm{sign}\,\breve b_2 (y_2, y_1^2 y_2)$.

Определение 3. *Каноническими невырожденными квазиоднородными многочленами линейно-кубической структуры* (*КНКОМ*$_{лк}$) будем называть два НКОМ $R^{[\chi]}_\gamma(y)$:

$$1)\ R^{[1]}_{(1,2)} = (y_2, \sigma y_1^3), \quad 2)\ R^{[2]}_{(1,3)} = \sigma(y_2, y_1^2 y_2) \qquad (\sigma = \pm 1).$$

$\mathbf{4^0}$. Установим условия на коэффициенты системы (1) $\dot x_i = P_i(x) + X_i(x)$, при которых она линейной неособой заменой

$$x_1 = py_1 + qy_2, \quad x_2 = ry_1 + sy_2 \quad (ps - qr \neq 0), \tag{4}$$

может быть сведена к системе

$$\dot y_i = \widetilde P_i(y) + Y_i(y) \quad (\widetilde P_i \not\equiv 0,\ i = 1,2) \tag{5}$$

с $\widetilde P_1 = \tilde a_1 y_1 + \tilde d_1 y_2$, $\widetilde P_2 = \tilde a_2 y_1^3 + \tilde b_2 y_1^2 y_2 + \tilde c_2 y_1 y_2^2 + \tilde d_2 y_2^3$, $Y_i = \sum_{p_1+p_2=2i}^\infty Y_i^{(p_1,p_2)} y_1^{p_1} y_2^{p_2}$, невозмущенная часть которой является КНКОМ$_{\text{ЛК}}$ $R^{[\chi]}_\gamma(y)$, т.е. $\widetilde P$ – это $R^{[1]}_{(1,2)}$ или $R^{[2]}_{(1,3)}$, а члены возмущения имеют о.с. более высокую чем χ.

Иными словами, система (5) после перегруппировки по о.с. должна иметь вид

$$\dot y_i = R^{[\chi]}_{\gamma,i}(y) + \sum_{k=\chi+1}^{\infty} Y^{[k]}_{\gamma,i}(y). \tag{6}$$

Поскольку в возмущении системы (5) должны отсутствовать те члены, о.с. которых не превосходит χ, необходимо предположить, что

$$R^{[1]}_{(1,2)}:\ Y_1^{(2,0)} = 0\ \ (k=1); \quad R^{[2]}_{(1,3)}:\ Y_1^{(2,0)}, Y_2^{(4,0)} = 0\ \ (k=1),\ \ Y_1^{(3,0)}, Y_2^{(5,0)} = 0\ \ (k=2). \tag{7}$$

Дифференцируя замену (4) в силу систем (1) и (5), получаем тождества:

$$P_1(py_1+qy_2, ry_1+sy_2) + X_1(py_1+qy_2, ry_1+sy_2) = p(\widetilde P_1 + Y_1(y_1,y_2)) + q(\widetilde P_2(y) + Y_2(y)),$$
$$P_2(py_1+qy_2, ry_1+sy_2) + X_2(py_1+qy_2, ry_1+sy_2) = r(\widetilde P_1 + Y_1(y_1,y_2)) + s(\widetilde P_2(y) + Y_2(y)).$$

Во втором из них линейные члены имеются только в $r\widetilde P_1$, а значит, $r = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&a_1(py_1+qy_2) + d_1 s y_2 + X_1(py_1+qy_2, sy_2) = \\
&\quad = p(\tilde a_1 y_1 + \tilde d_1 y_2 + Y_1(y)) + q(\tilde a_2 y_1^3 + \tilde b_2 y_1^2 y_2 + \tilde c_2 y_1 y_2^2 + \tilde d_2 y_2^3 + Y_2(y)),\\
&a_2(py_1+qy_2)^3 + b_2 s(py_1+qy_2)^2 y_2 + c_2 s^2(py_1+qy_2)y_2^2 + d_2 s^3 y_2^3 + X_2(py_1+qy_2, sy_2) = \\
&\quad = s(\tilde a_2 y_1^3 + \tilde b_2 y_1^2 y_2 + \tilde c_2 y_1 y_2^2 + \tilde d_2 y_2^3 + Y_2(y)) \qquad (p, s \neq 0).
\end{aligned} \tag{8}$$

Приравнивая коэффициенты при линейных членах в первом уравнении (8) и при кубических во втором, находим формулы для коэффициентов $\widetilde P(y)$ системы (5):

$$\begin{aligned}
&\tilde a_1 = a_1,\ \tilde d_1 = (a_1 q + d_1 s)p^{-1}; \quad \tilde a_2 = a_2 p^3 s^{-1},\ \tilde b_2 = (3a_2 q s^{-1} + b_2)p^2,\\
&\tilde c_2 = (3a_2 q^2 s^{-1} + 2b_2 q + c_2 s)p, \quad \tilde d_2 = a_2 q^3 s^{-1} + b_2 q^2 + c_2 qs + d_2 s^2 \quad (p, s \neq 0).
\end{aligned} \tag{9}$$

Лемма 1. *Если в системе* (1)

1) $a_1,\ X_1^{(2,0)}=0,\ c_2=(3a_2)^{-1}b_2^2,\ d_2=3^{-3}a_2^{-2}b_2^3\ \ (a_2d_1\neq 0,\ b_2-\forall)$, *то заменой* (4) *с* $p=|a_2d_1|^{-1/2},\ q=-3^{-1}b_2|a_2d_1|^{-3/2}\mathrm{sign}\,(a_2d_1),\ r=0,\ s=d_1^{-1}|a_2d_1|^{-1/2}$ *она сводится к системе* (5) *с* $\widetilde{P}=R^{[1]}_{(1,2)}$, *в котором* $\sigma=\mathrm{sign}\,(a_2d_1)$,

2) $a_1,a_2,X_1^{(2,0)},X_1^{(3,0)},X_2^{(4,0)},X_2^{(5,0)}=0,\ d_2=2^{-2}b_2^{-1}c_2^2\ \ (b_2d_1\neq 0,\ c_2-\forall)$, *то заменой* (4) *с* $p=|b_2|^{-1/2},\ q=-2^{-1}|b_2|^{-3/2}c_2d_1^{-1},\ r=0,\ s=|b_2|^{-1/2}d_1^{-1}\mathrm{sign}\,b_2$ *она сводится к системе* (5) *с* $\widetilde{P}=R^{[2]}_{(1,3)}$, *в котором* $\sigma=\mathrm{sign}\,b_2$;

3) В остальных случаях невозмущенная часть системы (1) *линейно неэквивалентна никакой КНКОМ$_{лк}$.*

Доказательство. 1) Пусть в системе (5) $\widetilde{P}=R^{[1]}_{(1,2)}$, т.е. $\tilde{d}_1=1,\ \tilde{a}_2=\sigma,\ \tilde{d}_1,\tilde{b}_2,\tilde{c}_2,\tilde{d}_2$ и с учетом (7_1) $Y_1^{(2,0)}=0$. Тогда из (9) получаем равенства: $a_1=0,\ (a_1q+d_1s)p^{-1}=1$; $a_2p^3s^{-1}=\sigma,\ 3a_2qs^{-1}+b_2=0,\ 3a_2q^2s^{-1}+2b_2q+c_2s=0,\ a_2q^3s^{-1}+b_2q^2+c_2qs+d_2s^2=0$.

Поскольку $a_1=0$, то $d_1,a_2\neq 0$. Из пятого и шестого равенств найдем, что $c_2=-(3a_2)^{-1}(qs^{-1})^2-2b_2qs^{-1},\ d_2=-a_2(qs^{-1})^3-b_2(qs^{-1})^2-c_2qs^{-1}$ и подставим $s=d_1^{-1}|a_2d_1|^{-1/2}$, $q=-3^{-1}b_2|a_2d_1|^{-3/2}\mathrm{sign}\,(a_2d_1)$, найденные из второго-четвертого равенств, получая п.1 леммы.

Условие $Y_1^{(2,0)}=0$ из (7_1) для системы (5) влечет за собой $X_1^{(2,0)}=0$. Действительно, приравнивая коэффициенты при y_1^2 в (8_1), получаем $p^2X_1^{(2,0)}=pY_1^{(2,0)}=0\ (p\neq 0)$.

2) Пусть в системе (5) $\widetilde{P}=R^{[2]}_{(1,3)}$, т.е. $\tilde{d}_1,\tilde{b}_2=\sigma,\ \tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\tilde{c}_2,\tilde{d}_2=0$ и с учетом (7_2) $Y_1^{(2,0)},Y_1^{(3,0)},Y_2^{(4,0)},Y_2^{(5,0)}=0$. Тогда из (9) получаем равенства: $a_1=0,\ (a_1q+d_1s)p^{-1}=\sigma$; $a_2p^3s^{-1}=0,\ (3a_2qs^{-1}+b_2)p^2=\sigma,\ 3a_2q^2s^{-1}+2b_2q+c_2s=0,\ a_2q^3s^{-1}+b_2q^2+c_2qs+d_2s^2=0$.

Поскольку $a_1=0$, а $p,s\neq 0$, то $a_2=0,\ d_1,b_2\neq 0$. Из шестого равенства найдем: $d_2=-b_2(qs^{-1})^2-c_2qs^{-1}$ и подставим сюда $q=-2^{-1}|b_2|^{-3/2}c_2d_1^{-1},\ s=|b_2|^{-1/2}d_1^{-1}\mathrm{sign}\ b_2$, найденные из второго, четвертого и пятого равенств, получая п.2 леммы.

Условия $Y_1^{(2,0)},Y_1^{(3,0)},\ Y_2^{(4,0)},Y_2^{(5,0)}=0$ из (7_2) для системы (5) накладывают четыре связи на коэффициенты возмущения X системы (1). Действительно, приравнивая коэффициенты при $y_1^2,\ y_1^3,\ y_1^4,\ y_1^5$ в (8_1) и (8_2), получаем соответственно равенства: $p^2X_1^{(2,0)}=pY_1^{(2,0)}=0,\ p^3X_1^{(3,0)}=pY_1^{(3,0)}=0;\ \ p^4X_2^{(4,0)}=sY_2^{(4,0)}=0,\ p^5X_2^{(5,0)}=sY_2^{(5,0)}=0$. Из этого следует, что $X_1^{(2,0)},X_1^{(3,0)},X_2^{(4,0)},X_2^{(5,0)}=0$. □

5⁰. Если отказаться от линейно-кубической структуры невозмущенной части системы, то оба КНКОМ$_{\text{ЛК}}$ окажутся частными случаями двух квазиоднородных многочленов $Q^{[1]}_{(1,2)}=(Q_1^{[2,0]}y_1^2+Q_1^{[0,2]}y_2,\ Q_2^{[1,2]}y_1y_2+Q_2^{[3,0]}y_1^3),\ Q^{[2]}_{(1,3)}=(Q_1^{[3,0]}y_1^3+Q_1^{[0,3]}y_2,\ Q_2^{[5,0]}y_1^5+Q_2^{[2,3]}y_1^2y_2)$.

Прежде, чем начинать работать с системами с указанными невозмущенными частями, надо нормализовать сами $Q^{[1]}_{(1,2)}$ и $Q^{[2]}_{(1,3)}$, сводя их к различным каноническим формам.

Для КОМ $Q^{[1]}_{(1,2)}$ канонические формы получены в [2], и нормализация систем с различными каноническими формами в невозмущенной части осуществлена в [2] и [10].

3 Канонические формы КОМ $\mathbf{Q}^{[2]}_{(1,3)}$

$\mathbf{1^0}$. Рассмотрим невозмущенную систему

$$\dot y = Q^{[2]}_{(1,3)}(y), \quad Q^{[2]}_{(1,3)} = (ay_2 + by_1^3,\, cy_1^2y_2 - dy_1^5), \tag{10}$$

которую будем отождествлять с матрицей $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Система (10) – вырожденная, если в ней $a^2 + b^2 = 0$ или $c^2 + d^2 = 0$, т. е. матрица M имеет нулевую строку. В противном случае система (10) или НКОМ $Q^{[2]}_{(1,3)}$ невырождены.

В дальнейшем будем использовать две замены, сохраняющие структуру системы (10).

Легко проверить, что квазиоднородная замена

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - \gamma x_1^3 \tag{11}$$

преобразует систему (10) в систему

$$\widetilde M = \begin{pmatrix} \widetilde a & \widetilde b \\ \widetilde c & \widetilde d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b - a\gamma \\ c + 3a\gamma & 3a\gamma^2 - (3b - c)\gamma + d \end{pmatrix}, \tag{12}$$

т. е. в систему $\dot x_1 = ax_2 + (b - a\gamma)x_1^3, \;\; \dot x_2 = (c + 3a\gamma)x_1^2x_2 - (3a\gamma^2 - (3b - c)\gamma + d)x_1^5.$

В свою очередь, нормирующая замена

$$x_1 = \tau_1 z_1, \quad x_2 = \tau_2 z_2 \qquad (\tau_1, \tau_2 \neq 0) \tag{13}$$

преобразует систему (12) в систему

$$\breve M = \begin{pmatrix} \breve a & \breve b \\ \breve c & \breve d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^{-1}\tau_2 \widetilde a & \tau_1^2 \widetilde b \\ \tau_1^2 \widetilde c & \tau_1^5 \tau_2^{-1} \widetilde d \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Для систем вида (10) введем константу κ и дискриминант D :

$$\kappa = 3b + c, \;\; D = (3b - c)^2 - 12ad = \kappa^2 - 12(bc + ad). \tag{15}$$

Утверждение 2. *Для дискриминантов систем* (12), (14), *полученных из системы* (10), *справедливы следующие равенства:* $\widetilde D = D, \quad \breve D = \tau_1^4 \widetilde D.$

$\mathbf{2^0}$. Разобьем множество систем (10) на классы эквивалентности относительно квазиоднородных замен (11) и нормировок (13). Основным представителем каждого класса будем считать невырожденную систему (10), называемую канонической формой (CF – canonical form) и выбираемую в соответствии с тремя иерархическими принципами:

1) число нулевых коэффициентов (элементов M) максимально;

2) при одном нулевом элементе предпочтительнее иметь $d = 0$, затем $c = 0$, $b = 0$;

3) число единичных элементов максимально.

***Замечание* 1.** Предложенные в определении CF принципы призваны максимально сократить технические трудности, связанные в последующей нормализацией возмущений систем, имеющих в своей невозмущенной части какой-либо НКОМ $Q^{[2]}_{(1,3)}$. В то же время требование невырожденности КОМ или, что то же самое, отсутствия нулевой строки у матрицы M вызвано желанием осуществить полноценную нормализацию возмущения системы, т. е. иметь максимальное число нулевых коэффициентов в возмущении системы получаемой из исходной при помощи почти тождественных преобразований.

Список невырожденных канонических форм системы (10) $(\sigma=\pm1)$:

$$CF_1=\begin{pmatrix}0&\sigma\\0&1\end{pmatrix}:\ \begin{pmatrix}\sigma y_1^3\\-y_1^5\end{pmatrix},\quad CF_2=\begin{pmatrix}0&u\\\sigma&0\end{pmatrix}:\ \begin{pmatrix}uy_1^3\\\sigma y_1^2y_2\end{pmatrix}\quad (u\neq0),$$
$$CF_3=\begin{pmatrix}0&\sigma\\3\sigma&1\end{pmatrix}:\ \begin{pmatrix}\sigma y_1^3\\3\sigma y_1^2y_2-y_1^5\end{pmatrix},\quad CF_4=\begin{pmatrix}1&0\\\sigma&0\end{pmatrix}:\ \begin{pmatrix}y_2\\\sigma y_1^2y_2\end{pmatrix},$$
$$CF_5=\begin{pmatrix}3&\sigma\\-3\sigma&1\end{pmatrix}:\ \begin{pmatrix}3y_2+\sigma y_1^3\\-3\sigma y_1^2y_2-y_1^5\end{pmatrix},\quad CF_6=\begin{pmatrix}1&u\\\sigma&0\end{pmatrix}:\ \begin{pmatrix}y_2+uy_1^3\\\sigma y_1^2y_2\end{pmatrix}\quad (0<|u|\le1),$$
$$CF_7=\begin{pmatrix}1&0\\0&\sigma\end{pmatrix}:\ \begin{pmatrix}y_2\\-\sigma y_1^5\end{pmatrix},\quad CF_8=\begin{pmatrix}-1&u\\0&1\end{pmatrix}:\ \begin{pmatrix}-y_2+uy_1^3\\-y_1^5\end{pmatrix}\quad (0<|u|<2/3^{1/2}).$$

$\mathbf{3^0}$. Установим условия на коэффициенты исходной системы и выпишем замены, которые сводят ее к различным каноническим формам.

1) $a=0\ \ (b\neq0)$, т. е. в (10) $M=\begin{pmatrix}0&b\\c&d\end{pmatrix}$.

В результате замены (11) получаем систему (12) вида $\widetilde{M}=\begin{pmatrix}0&b\\c&d-(3b-c)\gamma\end{pmatrix}$.

$\mathbf{1_1}$) $c=0\ \ (d\neq0)$. Выбирая $\gamma=0$, чтобы сохранить невырожденность, имеем: $M=\widetilde{M}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}$. После нормировки (13) с $\tau_1=|b|^{-1/2}$, $\tau_2=|b|^{-5/2}d$, получаем CF_1 с $\sigma=\operatorname{sign} b$.

$\mathbf{1_2}$) $c\neq0$.

$\mathbf{1_2^a}$) $c\neq3b$. Тогда при $\gamma=(3b-c)^{-1}d$ матрица $\widetilde{M}=\begin{pmatrix}0&b\\c&0\end{pmatrix}$ и ее нормировка (13) с $\tau_1=|c|^{-1/2}$ и любым τ_2 дает CF_2 с $u=b|c|^{-1}\neq0$, $\sigma=\operatorname{sign} c$.

$\mathbf{1_2^b}$) $c=3b$. Тогда при любом γ матрица $\widetilde{M}=\begin{pmatrix}0&b\\3b&d\end{pmatrix}$ и ее нормировка (13) с $\tau_1=|b|^{-1/2}$, $\tau_2=|b|^{-5/2}d$ дает CF_3 с $\sigma=\operatorname{sign} b$.

2) $a\neq0$. Из системы (10) заменой (11) получена система (12).

Рассмотрим дискриминант D из (15).

$\mathbf{2_1}$) В (15) $D=(3b-c)^2-12ad\ge0$. Введем константы

$$\gamma_1=(3b-c-D^{1/2})/(6a),\ \gamma_2=(3b-c+D^{1/2})/(6a),\ \ \eta_1=(\kappa-D^{1/2})/2,\ \eta_2=(\kappa+D^{1/2})/2,\quad (16)$$

тогда $\eta_1=c+3a\gamma_1=3(b-a\gamma_2)$, $\eta_2=c+3a\gamma_2=3(b-a\gamma_1)$.

$\mathbf{2_1^a}$) В матрице $\widetilde{M}$ из (3) можно, и это предпочтительнее всего по определению CF, аннулировать элемент $\widetilde{d} = 3a\gamma^2 - (3b-c)\gamma + d$. Это можно сделать, выбрав в замене (11) $\gamma = \gamma_1$ или $\gamma = \gamma_2$. Тогда система (12) примет один из двух видов:

$$\widetilde{M}_i = \begin{pmatrix} a & b - a\gamma_i \\ c + 3a\gamma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2), \tag{17}$$

причем элемент $\widetilde{c}_i$ не должен обращаться в нуль, иначе система (12) – вырожденная.

$\mathbf{2_1^{a1}}$) $d = -a^{-1}bc \;\Leftrightarrow\; D = \kappa^2$ согласно (15).

1) $\kappa < 0$, тогда $3(b - a\gamma_1) = \eta_2 = 0$, $c + 3a\gamma_1 = \eta_1 = \kappa$, т. е. $\widetilde{M}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$.

2) $\kappa > 0$, тогда $3(b - a\gamma_2) = \eta_1 = 0$, $c + 3a\gamma_2 = \eta_2 = \kappa$, т. е. $\widetilde{M}_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$.

Полученные в 1), 2) системы после нормировки (13) с $\tau_1 = |\kappa|^{-1/2}$, $\tau_2 = a^{-1}|\kappa|^{-1/2}$ превращаются в CF_4 с $\sigma = \operatorname{sign} \kappa$.

3) $\kappa = 0 \;\Leftrightarrow\; D = 0$, тогда $\gamma_1, \gamma_2 = a^{-1}b, -(3a)^{-1}c$, $\eta_1, \eta_2 = 0$ и $\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. система (17) оказывается вырожденной. Поэтому в $\widetilde{M}$ из (12) аннулировать $\widetilde{d}$ нельзя. Зато исходная матрица $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & 3a^{-1}b^2 \end{pmatrix}$, причем $b \neq 0$. И сама система (10) после нормировки (13) с $\tau_1 = |b|^{-1/2}$, $\tau_2 = 3a^{-1}|b|^{-1/2}$ превращается в CF_5 с $\sigma = \operatorname{sign} b$.

$\mathbf{2_1^{a2}}$) $d \neq -a^{-1}bc \;\Leftrightarrow\; \eta_1, \eta_2 \neq 0$.

1) $\kappa < 0$. Выберем $\gamma = \gamma_1$, тогда согласно (16) $3(b - a\gamma_1) = \eta_2 = (\kappa + D^{1/2})/2$, $c + 3a\gamma_1 = \eta_1 = (\kappa - D^{1/2})/2 < 0 \quad (-\eta_1 > |\eta_2|)$.

Сделаем нормировку (13) с $\tau_1 = (-\eta_1)^{-1/2}$, $\tau_2 = a^{-1}(-\eta_1)^{-1/2}$, которая преобразует $\widetilde{M}_1$ из (17) в CF_6 с $u = -3(b - a\gamma_1)(c + 3a\gamma_1)^{-1} = (-\eta_1)^{-1}\eta_2$, $\sigma = -1$.

2) $\kappa > 0$. Выберем $\gamma = \gamma_2$, тогда согласно (16) $c + 3a\gamma_2 = \eta_2 = (\kappa + D^{1/2})/2 > 0$, $3(b - a\gamma_1) = \eta_1 = (\kappa - D^{1/2})/2 \quad (\eta_2 > |\eta_1|)$.

Сделаем нормировку (13) с $\tau_1 = \eta_2^{-1/2}$, $\tau_2 = a^{-1}\eta_1^{-1/2}$, которая преобразует $\widetilde{M}_1$ из (17) в CF_6 с $u = 3(b - a\gamma_2)(c + 3a\gamma_2)^{-1} = \eta_1\eta_2^{-1}$, $\sigma = 1$.

В случаях 1), 2) $0 < |u| < 1$ при $D > 0$, а при $D = 0$ $\eta_1, \eta_2 = \kappa/2$ и $u = 1$, $\sigma = \operatorname{sign} \kappa$.

3) $\kappa = 0$, тогда $D > 0$ и согласно (16) $-\eta_1 = \eta_2 = D^{1/2}/2 > 0$. Взяв $\gamma = \gamma_1$ и сделав нормировку из случая 1, получим CF_6 с $u = -1$, $\sigma = 1$.

$\mathbf{2_1^b}$) Отказаться от аннулирования элемента $\widetilde{d}$ в матрице $\widetilde{M}$ из (12) имеет смысл только в том случае, если удастся сделать $\widetilde{b} = 0$ и $\widetilde{c} = 0$. Это возможно, если $\gamma = a^{-1}b$, $c = -3b$ и $ad < 0$, так как тогда $D = -12ad > 0$. А система (12) с $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - 3a^{-1}b^2 \end{pmatrix}$ после нормировки (13) с $\tau_1 = (3b^2 - ad)^{-1/4}$, $\tau_2 = a^{-1}(3b^2 - ad)^{-1/4}$ – это CF_7 с $\sigma = -1$.

$\mathbf{2_2}$) $D < 0$ $(ad > 0)$, причем $a, d > 0$, иначе – нормировка (13) с $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = -1$.

Положив в замене (11) $\gamma = -(3a)^{-1}c$, сделаем в $\widetilde{M}$ из (12) элемент $\widetilde{c} = 0$, что предпочтительнее с точки зрения определения CF обращения в нуль элемента $\widetilde{b}$.

При $\gamma = -(3a)^{-1}c$ (12) примет вид $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} a & \kappa/3 \\ 0 & a^{-1}bc + d \end{pmatrix}$, причем $\widetilde{d} = a^{-1}(bc + ad) > (12a)^{-1}\kappa^2 \geq 0$, так как согласно (15) $D = (3b - c)^2 - 12ad = \kappa^2 - 12(bc + ad) < 0$.

$\mathbf{2_2^a}$) $\kappa = 0$. Тогда $\widetilde{d} = a^{-1}(-3b^2 + ad)$ и нормировка (13) с $\tau_1 = (ad - 3b^2)^{-1/4}$, $\tau_2 = a^{-1}(ad - 3b^2)^{-1/4}$ сводит $\widetilde{M}$ к CF_7 с $\sigma = 1$.

$\mathbf{2_2^b}$) $\kappa \neq 0$. Нормировка (13) с $\tau_1 = (bc + ad)^{-1/4}$, $\tau_2 = a^{-1}(bc + ad)^{-1/4}$ сводит $\widetilde{M}$ к CF_8 с $u = (b + 3^{-1}c)(bc + ad)^{-1/2}$. При этом $0 < |u| < 2/3^{1/2}$, так как по утверждению 2 $\breve{D} = 9u^2 - 12 < 0$.

В результате доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Невырожденная система* (10) *с* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $D = (3b - c)^2 - 12ad$, $\kappa = 3b + c$ *сводится к соответствующей* CF_i *при следующих условиях на коэффициенты:*

1) $a = 0$, $c = 0$ $(bd \neq 0)$, тогда (10) заменой $y_1 = |b|^{-1/2}z_1$, $y_2 = |b|^{-5/2}dz_2$ сводится к CF_1 с $\sigma = \operatorname{sign} b$.

2) $a = 0$, $c \neq 0$, $c \neq 3b$ $(bd \neq 0)$, тогда (10) заменой $y_1 = |c|^{-1/2}z_1$, $y_2 = z_2 - (3b - c)^{-1}|c|^{-3/2}dz_1^3$ сводится к CF_2 с $u = b|c|^{-1} \neq 0$, $\sigma = \operatorname{sign} c$.

3) $a = 0$, $c = 3b$ $(bd \neq 0)$, тогда (10) заменой $y_1 = |b|^{-1/2}z_1$, $y_2 = |b|^{-5/2}dz_2$ сводится к CF_3 с $\sigma = \operatorname{sign} b$.

4) $a \neq 0$, $D \geq 0$, $d = -a^{-1}bc$, $\kappa \neq 0$ $(c \neq 0)$, тогда (10) заменой $y_1 = |\kappa|^{-1/2}z_1$, $y_2 = a^{-1}|\kappa|^{-1/2}z_2 - a^{-1}b|\kappa|^{-3/2}z_1^3$ сводится к CF_4 с $\sigma = \operatorname{sign} \kappa$.

5) $a \neq 0$, $D \geq 0$, $d = -a^{-1}bc$, $\kappa = 0$ $(c \neq 0)$, тогда (10) заменой $y_1 = |b|^{-1/2}z_1$, $y_2 = 3a^{-1}|b|^{-1/2}z_2$ сводится к CF_5 с $\sigma = \operatorname{sign} b$.

6_1) $a \neq 0$, $D \geq 0$, $d \neq -a^{-1}bc$, $\kappa \neq 0$, тогда (10) заменой $y_1 = 2^{1/2}(|\kappa| + D^{1/2})^{-1/2}z_1$, $y_2 = 2^{1/2}a^{-1}(|\kappa| + D^{1/2})^{-1/2}z_2 - 2^{1/2}(3a)^{-1}(3b - c + D^{1/2}\operatorname{sign} \kappa)(|\kappa| + D^{1/2})^{-3/2}z_1^3$ сводится к CF_6 с $u = ((\kappa - D^{1/2})(\kappa + D^{1/2})^{-1})^{\operatorname{sign} \kappa}\operatorname{sign} \kappa$ $(0 < |u| \leq 1)$, $\sigma = \operatorname{sign} \kappa$.

6_2) $a \neq 0$, $D \geq 0$, $d \neq -a^{-1}bc$, $\kappa = 0$, тогда (10) заменой $y_1 = 2^{1/2}D^{-1/4}z_1$, $y_2 = 2^{1/2}a^{-1}D^{-1/4}z_2 - 2^{3/2}a^{-1}D^{-3/4}(b - 6^{-1}D^{1/2})z_1^3$ сводится к CF_6 с $u = -1$, $\sigma = 1$.

7_1) $a \neq 0$, $c = -3b$, $ad < 0$, тогда (10) заменой $y_1 = (3b^2 - ad)^{-1/2}z_1$, $y_2 = a^{-1}(3b^2 - ad)^{-1/2}z_2 - a^{-1}b(3b^2 - ad)^{-3/2}z_1^3$ сводится к CF_7 с $\sigma = -1$.

7_2) $a \neq 0$, $D < 0$, $\kappa = 0$, тогда (10) заменой $y_1 = (|ad - 3b^2|^{-1/4}\operatorname{sign} a)z_1$, $y_2 = |a|^{-1}|ad - 3b^2|^{-1/4}z_2 + (3|a|)^{-1}c|ad - 3b^2|^{-3/4}z_1^3$ сводится к CF_7 с $\sigma = 1$.

8) $a \neq 0$, $D < 0$, $\kappa \neq 0$, тогда (10) заменой $y_1 = (|ad + bc|^{-1/4}\operatorname{sign} a)z_1$, $y_2 = |a|^{-1}|ad + bc|^{-1/4}z_2 + (3|a|)^{-1}c|ad + bc|^{-3/4}z_1^3$ сводится к CF_8 с $u = (b + 3^{-1}c)|ad + bc|^{-1/2}\operatorname{sign} a$ $(0 < |u| < 2/3^{1/2})$.

***Замечание* 2.** Наряду с невырожденными CF_i можно использовать вырожденные CF_{di} :

$$CF_{d1} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \sigma y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad CF_{d2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} y_1^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что при наличии у матрицы M двух нулей в одной строке, в другой либо также присутствует нуль, либо его можно получить за счет выбора γ.

В частности, к CF_{d1} сводится CF_1 заменой (11) с $\gamma = 3^{-1}\sigma$, а к CF_{d2} сводится CF_4 заменой (11) с $\gamma = -3^{-1}\sigma$ и CF_5 заменами (11) с $\gamma = 3^{-1}\sigma$ и (13) с $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 1$.

4 Метод резонансных уравнений и ОНФ

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = P_{\gamma,i}^{[\chi]}(x) + X_i(x) \quad (i = 1, 2), \tag{18}$$

в которой $P_\gamma^{[\chi]}$ – произвольный КОМ о.с. χ с весом γ, а возмущение $X_i = \sum_{k=\chi+1}^{\infty} X_{\gamma,i}^{[k]}(x)$. Ее частным случаем является система (6).

Пусть почти тождественная формальная замена

$$x_i = y_i + h_i(y), \tag{19}$$

где $h_i = \sum_{k=1}^{\infty} h_{\gamma,i}^{[k]}(y)$, переводит систему (18) в систему с аналогичной структурой

$$\dot{y}_i = P_{\gamma,i}^{[\chi]}(y) + Y_i(y). \tag{20}$$

Дифференцируя замену (19) в силу систем (18) и (20), получаем тождества $P_{\gamma,i}^{[\chi]}(y+h) + X_i(y+h) = P_{\gamma,i}^{[\chi]}(y) + Y_i(y) + \sum_{j=1}^{2} \partial h_i/\partial y_j \big(P_{\gamma,j}^{[\chi]}(y) + Y_j(y)\big) \qquad (i = 1, 2).$

Поскольку $P_{\gamma,i}^{[\chi]}(y+h) - P_{\gamma,i}^{[\chi]}(y) = \sum_{j=1}^{2} h_j(y)\, \partial P_{\gamma,i}^{[\chi]}/\partial y_j + P_i^*(y,h)$, где P^* содержит члены ряда h как минимум во второй степени, эти тождества принимают вид

$$\sum_{j=1}^{2} \Big(\frac{\partial h_i}{\partial y_j}\, P_{\gamma,j}^{[\chi]}(y) - \frac{\partial P_{\gamma,i}^{[\chi]}}{\partial y_j}\, h_j(y) \Big) \equiv -Y_i(y) + X_i(y+h) - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial h_i}{\partial y_j}\, Y_j(y) + P_i^*(y,h).$$

Выделим в них члены, имеющие о.с. $k \geq \chi + 1$:

$$\sum_{j=1}^{2} \Big(\frac{\partial h_{\gamma,i}^{[k-\chi]}}{\partial y_j}\, P_{\gamma,j}^{[\chi]}(y) - \frac{\partial P_{\gamma,i}^{[\chi]}}{\partial y_j}\, h_{\gamma,j}^{[k-\chi]}(y) \Big) = \widetilde{Y}_{\gamma,i}^{[k]}(y) - Y_{\gamma,i}^{[k]}(y), \tag{21}$$

где $\widetilde{Y}_{\gamma,i}^{[k]} = \{X_i(y+h) + P_i^*(y,h) - \sum_{j=1}^{2} \partial h_i/\partial y_j\; Y_j(y)\}_\gamma^{[k]}$.

КОМ $\widetilde{Y}_\gamma^{[k]}$ может содержать только квазиоднородные многочлены $h_\gamma^{[s]}$ и $Y_\gamma^{[s+\chi]}$, у которых $1 \leq s \leq k - \chi - 1$. Следовательно, при последовательном вычислении $h_\gamma^{[k-\chi]}$ и $Y_\gamma^{[k]}$ в КОМ $\widetilde{Y}_\gamma^{[k]}$ оказываются уже известные величины.

Левая часть (21) является линейным оператором $A_{k-\chi}^P$ (скобкой Ли), переводящим линейное пространство $H_{k-\chi}$ КОМ степени $k - \chi$ в линейное пространство H_k.

В дальнейшем γ остается неизменным, поэтому нижний индекс γ у КОМ опускаем.

Рассмотрим КОМ $Z^{[k]}$. Вектор показателей степеней q^i $(i = 1, 2)$ любого слагаемого его i-й компоненты удовлетворяет уравнению $\langle q^i, \gamma \rangle = k + \gamma_i$.

Пусть k^i_γ – это число различных векторов q^i, удовлетворяющих этому уравнению.

Расположив q^i в лексико-графическом порядке, сопоставим квазиоднородному многочлену $Z^{[k]}$ вектор его коэффициентов $Z^{\{k\}} = (Z^{\{k\}}_1,\ Z^{\{k\}}_2)$ размерности $|k_\gamma| = k^1_\gamma + k^2_\gamma$.

С учетом сказанного выше, система (21) может быть переписана в матричном виде

$$A^{\{k\}} h^{\{k-\chi\}} = \widetilde{Y}^{\{k\}} - Y^{\{k\}} \qquad (k \geq \chi + 1), \tag{22}$$

где $A^{\{k\}} = A^{\{k\}}(P^{[\chi]}_\gamma)$ – постоянная матрица размерности $|k_\gamma| \times |(k - \chi)_\gamma|$, являющаяся представлением линейного оператора $A^P_{k-\chi}$.

Предположим, что матрица $A^{\{k\}}$ имеет ранг $r_k = r_k(\chi) = |(k - \chi)_\gamma| - k^0_\gamma$, где $k^0_\gamma \geq 0$. Выделяя из системы (22) линейную подсистему порядка r_k с ненулевым определителем, однозначно найдем r_k компонент вектора коэффициентов $h^{\{k-\chi\}}$ замены (19), а оставшиеся k^0_γ свободных компонент произвольным образом зафиксируем. После этого подставим $h^{\{k-\chi\}}$ в оставшиеся уравнения системы (21), получая $n_k = n_k(\chi) = |k_\gamma| - r_k$ линейно независимых линейных уравнений, связывающих компоненты вектора коэффициентов $Y^{\{k\}}$:

$$\langle \alpha^{\{k\}}_\mu, Y^{\{k\}}_1 \rangle + \langle \beta^{\{k\}}_\mu, Y^{\{k\}}_2 \rangle = \tilde{c} \qquad (\mu = \overline{1, n_k}), \tag{23}$$

где $\tilde{c} = \langle \alpha^{\{k\}}_\mu, \widetilde{Y}^{\{k\}}_1 \rangle + \langle \beta^{\{k\}}_\mu, \widetilde{Y}^{\{k\}}_2 \rangle$ – известная константа, а n_k пар постоянных векторов $\alpha^{\{k\}}_\mu$, $\beta^{\{k\}}_\mu$ размерностей k^1_γ, k^2_γ определяются только КОМ $P^{[\chi]}_\gamma$ системы (18).

Определение 4. Уравнения (23) называем *резонансными.* Коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ системы (20), входящие хотя бы в одно из резонансных уравнений (23), называем *резонансными,* а остальные – *нерезонансными. Резонансными* называем k^0_γ коэффициентов КОМ $h^{[k-\chi]}$, остающихся свободными при решении системы (22).

Покажем, что резонансные уравнения позволяют установить наличие формальной эквивалентности между любыми двумя системами, имеющими невозмущенную часть $P^{[\chi]}_\gamma$, и конструктивно выделить из них наиболее простые системы, называемые обобщенными нормальными формами, указав все их возможные структуры.

Любым n_k различным резонансным коэффициентам $Y^{k,\eta} = Y^{[q^\eta_1 \gamma_1,\, q^\eta_2 \gamma_2]}_{i_\eta}$ квазиоднородных многочленов $Y^{[k]}_1, Y^{[k]}_2$, где $\eta = \overline{1, n_k}$, $i_\eta \in \{0, 1\}$, $q^\eta_1 \gamma_1 + q^\eta_2 \gamma_2 - \gamma_{i_\eta} = k$, сопоставим матрицу множителей $\Upsilon^k = \{\upsilon^k_{\mu\eta}\}^{n_k}_{\mu,\eta=1}$, элемент $\upsilon^k_{\mu\eta}$ которой, если $i_\eta = 1$, равен компоненте вектора $\alpha^{\{k\}}_\mu$, являющейся множителем при $Y^{k,\eta}$ в μ-ом уравнении (23), а если $i_\eta = 2$, равен соответствующей компоненте вектора $\beta^{\{k\}}_\mu$.

Определение 5. Для $\forall\, k \geq 2$ семейство резонансных коэффициентов $\mathcal{Y}^k = \{Y^{k,\eta}\}^{n_k}_{\eta=1}$ называем *резонансным k-набором,* если $det\, \Upsilon^k \neq 0$. Для любых $\mathcal{Y}^2, \mathcal{Y}^3, \ldots$ семейство $\mathcal{Y} = \bigcup^\infty_{k=2} \mathcal{Y}^k$ называем *резонансным набором.*

Использование для $\forall\, k \geq 2$ резонансных k-наборов $\mathcal{Y}^k$ позволяет однозначно разрешать резонансные уравнения (23) относительно коэффициентов любого из них.

Определение 6. Систему (20) называем *обобщенной нормальной формой (ОНФ),* если при $\forall\, k \geq 2$ все коэффициенты КОМ $Y_1^{[k]}, Y_2^{[k]}$ как резонансные, так и не резонансные, равны нулю, за исключением коэффициентов из какого-либо резонансного k-набора $\mathcal{Y}^k$, имеющих произвольные значения.

Тем самым, структуру любой ОНФ порождает какой-либо резонансный набор $\mathcal{Y}$.

Знание резонансных уравнений (23) делает очевидными следующие утверждения.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (20) *была формально эквивалентна исходной системе (18), необходимо и достаточно, чтобы для* $\forall\, k \geq 2$ *коэффициенты ее КОМ* $Y_1^{[k]}$, $Y_2^{[k]}$ *удовлетворяли резонансным уравнениям (23).*

Теорема 3. *Для любой системы (18), и для любого выбранного по ее невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}$ *существует и единственна почти тождественная замена (19) с заранее произвольным образом зафиксированными резонансными коэффициентами, преобразующая систему (18) в ОНФ* (20)*, структура которой порождена* $\mathcal{Y}$.

***Замечание* 3.** В определении КОМ предполагается, что его о.с. $\chi \geq 1$. Если допустить, что о.с. КОМ $\chi = 0$, то матрица линейной части будет иметь ненулевое собственное число и возмущенную систему в этом случае эффективнее сводить к резонансной нормальной форме, используя для ее нормализации вырожденную линейную невозмущенную часть.

Пример 1. В системе $\dot{x}_1 = ax_1 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_1^{[k]}(x)$, $\dot{x}_2 = x_1^3 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_2^{[k]}(x)$, невозмущенная часть является КФлк$_0 = R^0_{(1,3)}$. Она не включена в список КФлк определения 3, поскольку имеет нулевую о.с., что противоречит определению 2. ОНФ такой системы имеет вид $\dot{y}_1 = y_1(a + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{[1,\,3r]} y_2^r)$, $\dot{y}_2 = y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty} Y_2^{[0,\,3r+3]} y_2^{r+1}$.

В то же время, относя x_1^3 во втором уравнении к возмущению, методом резонансных нормальных форм получим ту же НФ, только слагаемое с y_1^3 в ней будет аннулировано.

5 ОНФ систем с $\mathbf{R}^{[1]}_{(1,2)}$ в невозмущенной части

5.1 Получение связующей системы

Рассмотрим систему (1) с канонической невозмущенной частью $R^{[1]}_{(1,2)} = (x_2, \sigma x_1^3)$:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sum_{k=2}^{\infty} X_1^{[k]}(x), \qquad \dot{x}_2 = \sigma x_1^3 + \sum_{k=2}^{\infty} X_2^{[k]}(x), \tag{24}$$

где в возмущении КОМ $X_i^{[k]} = \sum_{q_1+2q_2=k+i} X_i^{[q_1,2q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ $(i = 1, 2)$.

***Замечание* 4.** Случай, когда $\sigma = -1$, был рассмотрен в [1].

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y) \quad (i = 1, 2), \tag{25}$$

где $h_i(y)=\sum_{k=2}^{\infty} h_i^{[k-1]}(y)$, $h_i^{[k-1]}=\sum_{q_1+2q_2=k-1+i} h_i^{[q_1,2q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, переводит (24) в систему:

$$\dot y_1 = y_2 + \sum_{k=2}^{\infty} Y_1^{[k]}(y), \qquad \dot y_2 = \sigma y_1^3 + \sum_{k=2}^{\infty} Y_2^{[k]}(y), \tag{26}$$

где возмущение $Y_i^{[k]}=\sum_{q_1+2q_2=k+i} Y_i^{[q_1,\,2q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$.

Тождества (21) с $\chi=1$, $\gamma=(1,2)$ для систем (24), (26) и замены (25) имеют вид:

$$\frac{\partial h_1^{[k-1]}}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial h_1^{[k-1]}}{\partial y_2} \sigma y_1^3 - h_2^{[k-1]} = \widetilde{Y}_1^{[k]} - Y_1^{[k]}, \quad \frac{\partial h_2^{[k-1]}}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial h_2^{[k-1]}}{\partial y_2} \sigma y_1^3 - 3\sigma y_1^2 h_1^{[k-1]} = \widetilde{Y}_2^{[k]} - Y_2^{[k]},$$

где $\widetilde{Y}_i^{[k]}$ $(i=1,2)$ находится по формуле, указанной в (21).

Приравнивая коэффициенты при $y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, получим линейную связующую систему:

$$\begin{array}{l} (q_1+1)h_1^{[q_1+1,\,2(q_2-1)]} + \sigma(q_2+1)h_1^{[q_1-3,\,2(q_2+1)]} - h_2^{[q_1,\,2q_2]} = \widehat{Y}_1^{[q_1,2q_2]} \ \ (q_1+2q_2=k+1), \\ -3\sigma h_1^{[q_1-2,\,2q_2]} + (q_1+1)h_2^{[q_1+1,\,2(q_2-1)]} + \sigma(q_2+1)h_2^{[q_1-3,\ 2(q_2+1)]} = \widehat{Y}_2^{[q_1,2q_2]} \ \ (q_1+2q_2=k+2), \end{array} \tag{27}$$

в которой $\widehat{Y}_i^{[q_1,2q_2]} = \widetilde{Y}_i^{[q_1,2q_2]} - Y_i^{[q_1,2q_2]}$.

Поскольку $k\ge 2$, положим $k=4r+\nu-2$ $(r\in\mathbb{N},\ \nu=0,1,2,3)$.

Система (27) распадается на две независимые подсистемы.

Пусть $q_2=2(r-s)+i-1$ $(s\le r)$, тогда при $i=1,2$ в уравнении (27_i) $q_1=4s+\nu-i\ge 0$ и для $\forall\,\nu=\overline{0,3}$ получаем подсистему

$$\begin{array}{ll} -h_2^{[4s+\nu-1,4(r-s)]} + (4s+\nu)h_1^{[4(s+1)+\nu-4,4(r-(s+1))+2]} + & \\ +\sigma(2(r-s)+1)h_1^{[4s+\nu-4,4(r-s)+2]} = \widehat{Y}_1^{[4s+\nu-1,4(r-s)]} & (s=\overline{[(3-\nu)/3],r}), \\ -3\sigma h_1^{[4s+\nu-4,4(r-s)+2]} + (4s+\nu-1)h_2^{[4s+\nu-1,4(r-s)]} + & \\ +\sigma(2(r-s)+2)h_2^{[4(s-1)+\nu-1,4(r-(s-1))]} = \widehat{Y}_2^{[4s+\nu-2,4(r-s)+2]} & (s=\overline{[(3-\nu)/2],r}). \end{array} \tag{28}$$

Пусть теперь $q_2=2(r-s)+2-i$ $(s\le r)$, тогда при $i=1,2$ в уравнении (27_i) $q_1=4s+\nu+3i-6\ge 0$ и для $\forall\,\nu=\overline{0,3}$ получаем подсистему

$$\begin{array}{ll} -h_2^{[4s+\nu-3,4(r-s)+2]} + (4s+\nu-2)h_1^{[4s+\nu-2,4(r-s)]} + & \\ +\sigma(2(r-s)+2)h_1^{[4(s-1)+\nu-2,4(r-(s-1))]} = \widehat{Y}_1^{[4s+\nu-3,4(r-s)+2]} & (s=\overline{[(7-\nu)/5],r}), \\ -3\sigma h_1^{[4s+\nu-2,4(r-s)]} + (4s+\nu+1)h_2^{[4(s+1)+\nu-3,4(r-(s+1))+2]} + & \\ +\sigma(2(r-s)+1)h_2^{[4s+\nu-3,4(r-s)+2]} = \widehat{Y}_2^{[4s+\nu,4(r-s)]} & (s=\overline{0,r}). \end{array} \tag{29}$$

5.2 Структура связующей системы при нечетных $(\mathbf{q_2-i})$

Вводя новые обозначения, запишем систему (28) в следующем виде:

$$\begin{array}{rl} \sigma(2(r-s)+1)h_{1,s}^{\nu 1} + (4s+\nu)h_{1,s+1}^{\nu 1} - h_{2,s}^{\nu 1} = Y_{1,s}^{\nu 1} & (s=\overline{[(3-\nu)/3],r}), \\ -3\sigma h_{1,s}^{\nu 1} + (4s+\nu-1)h_{2,s}^{\nu 1} + \sigma(2(r-s)+2)h_{2,s-1}^{\nu 1} = Y_{2,s}^{\nu 1} & (s=\overline{[(3-\nu)/2],r}), \end{array} \tag{30}$$

где $h_{1,s}^{\nu 1} = h_1^{[4s+\nu-4,\,4(r-s)+2]}$ $(s=\overline{1,r})$, $h_{2,s}^{\nu 1} = h_2^{[4s+\nu-1,\,4(r-s)]}$, $Y_{1,s}^{\nu 1} = \widehat{Y}_1^{[4s+\nu-1,\,4(r-s)]}$ $(s=\overline{[(3-\nu)/3],r})$, $Y_{2,s}^{\nu 1} = \widehat{Y}_2^{[4s+\nu-2,\,4(r-s)+2]}$ $(s=\overline{[(3-\nu)/2],r})$. При этом любой элемент равен нулю, если его индекс s не лежит в заданных границах.

Подставляя $h_{2,s}^{\nu 1}$ и $h_{2,s-1}^{\nu 1}$ из (30_1) в (30_2), получаем трехдиагональную систему:

$$a_s^{\nu 1} h_{1,s-1}^{\nu 1} + b_s^{\nu 1} h_{1,s}^{\nu 1} + c_s^{\nu 1} h_{1,s+1}^{\nu 1} = Y_{0,s}^{\nu 1} \qquad (s = \overline{[(3-\nu)/2], r}), \tag{31}$$

в которой $a_s^{\nu 1} = (2(r-s)+2)(2(r-s)+3)$ $(s = \overline{2, r})$,
$b_s^{\nu 1} = \sigma((4s+\nu)(4(r-s)+3) - 10(r-s) - 12)$ $(s = \overline{1, r})$,
$c_s^{\nu 1} = (4s+\nu-1)(4s+\nu)$ $(s = \overline{0, r-1}\,)$;
$Y_{0,s}^{\nu 1} = \sigma(2(r-s)+2) Y_{1,s-1}^{\nu 1} + (4s+\nu-1) Y_{1,s}^{\nu 1} + Y_{2,s}^{\nu 1}$ $(s = \overline{[(3-\nu)/2], r})$.

Для $\nu = 0, 1$ введем $Y_{0,0}^{01}, Y_{0,0}^{11} = 0$, тогда систему (31) можно рассматривать для $s = \overline{0, r}$ при всех ν, так как $c_0^{01}, c_0^{11} = 0$, и записать ее в матричном виде:

$$A^{\nu 1} h_1^{\nu 1} = Y_0^{\nu 1} \quad (\nu = \overline{0, 3}), \tag{32}$$

где $A^{\nu 1} = \begin{pmatrix} c_0^{\nu 1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1^{\nu 1} & c_1^{\nu 1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^{\nu 1} & b_2^{\nu 1} & c_2^{\nu 1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3^{\nu 1} & b_3^{\nu 1} & c_3^{\nu 1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r-1}^{\nu 1} & b_{r-1}^{\nu 1} & c_{r-1}^{\nu 1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_r^{\nu 1} & b_r^{\nu 1} \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, $\begin{array}{l} h_1^{\nu 1} = (h_{1,1}^{\nu 1}, \dots, h_{1,r}^{\nu 1}), \\ Y_0^{\nu 1} = (Y_{0,0}^{\nu 1}, Y_{0,1}^{\nu 1}, \dots, Y_{0,r}^{\nu 1}). \end{array}$

Для решения системы (32) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-1}^{\nu 1}$, $c_{r-2}^{\nu 1}, \dots$ матрицы $A^{\nu 1}$ получая элементы d_s^{ν} вместо $b_s^{\nu 1}$ и $\overline{Y}_{0,s}^{\nu 1}$ вместо $Y_{0,s}^{\nu 1}$, пока $d_{s+1}^{\nu} \neq 0$ $(s \geq 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d_r^{\nu} = b_r^{\nu 1}, \;\; \overline{Y}_{0,r}^{\nu 1} = Y_{0,r}^{\nu 1}; \;\; d_s^{\nu} = b_s^{\nu 1} - \frac{a_{s+1}^{\nu 1} c_s^{\nu 1}}{d_{s+1}^{\nu}}, \;\; \overline{Y}_{0,s}^{\nu 1} = Y_{0,s}^{\nu 1} - \frac{\overline{Y}_{0,s+1}^{\nu 1} c_s^{\nu 1}}{d_{s+1}^{\nu}} \;\; (s = r-1, r-2 \dots). \tag{33}$$

Лемма 2. *Для элементов d_s^{ν} из* (33) *верна следующая прямая формула:*

$$d_s^{\nu} = \sigma(2(r-s)+3)(4s+\nu-4) \qquad (s = \overline{r, 1}). \tag{34}$$

Доказательство. В (34) $d_r^{\nu} = 3\sigma(4r+\nu-4)$, что совпадает с d_r^{ν} из (33) и дает базу индукции. Пусть для некоторого $s = \overline{r, 2}$ верна формула (34). Тогда согласно (33) имеем $d_{s-1}^{\nu} = b_{s-1}^{\nu 1} - a_s^{\nu 1} c_{s-1}^{\nu 1} (d_s^{\nu})^{-1} = \sigma((4s+\nu-4)(4(r-s)+7) - 10(r-s) - 22 - (2(r-s)+2)(4s+\nu-5)) = \sigma(2(r-s)+5)(4s+\nu-8)$. □

Следствие 1. *В формуле* (34) *все элементы $d_s^{\nu} \neq 0$, за исключением $d_1^0 = 0$.*

В результате система (32) равносильна системе

$$\overline{A}^{\nu 1} h_1^{\nu 1} = \overline{Y}_0^{\nu 1}, \tag{35}$$

в которой $\overline{A}^{\nu 1}$ – двухдиагональная $(r+1)\times r$-матрица с элементами d_s^{ν} и $a_s^{\nu 1}$ на диагоналях и нулевой первой строкой, а $\overline{Y}_0^{\nu 1} = (\overline{Y}_{0,0}^{\nu 1}, \overline{Y}_{0,1}^{\nu 1}, \dots, \overline{Y}_{0,r}^{\nu 1})$ и $\overline{Y}_{0,s}^{\nu 1}$ определены в (33), кроме $\overline{Y}_{0,0}^{01}$, который положим равным нулю.

5.3 Совместность связующей системы при нечетных $(\mathbf{q_2 - i})$

Согласно следствию 1 из формулы (33) получаем: $\overline{Y}^{\nu 1}_{0,1} = \sum_{m=1}^{r} \theta^{\nu}_m Y^{\nu 1}_{0,m}$, где $\theta^{\nu}_m = (-1)^{m-1} \prod_{j=2}^{m} (c^{\nu 1}_{j-1}/d^{\nu 1}_j)$. Тогда с учетом (31) и (34), имеем:

$$\theta^{\nu}_m = (-\sigma)^{m-1} \prod_{j=2}^{m} \frac{4j+\nu-5}{2(r-j)+3} \neq 0 \quad (m = \overline{1,r},\ \nu = \overline{0,3}). \tag{36}$$

В обозначениях для (31): $\overline{Y}^{\nu 1}_{0,1} = \sum_{m=1}^{r} \theta^{\nu}_m Y^{\nu 1}_{0,m} = \sum_{m=1}^{r} \theta^{\nu}_m (\sigma(2(r-m)+2)) Y^{\nu 1}_{1,m-1} + (4m+\nu-1) Y^{\nu 1}_{1,m} + Y^{\nu 1}_{2,m}) = -\sigma \sum_{m=1}^{r-1} (4(r-m)+1) \theta^{\nu}_{m+1} Y^{\nu 1}_{1,m} + \theta_r Y^{\nu}_{1,r} + \sum_{m=1}^{r} \theta^{\nu}_m Y^{\nu 1}_{2,m}$, причем $2\sigma(r-m)\theta^{\nu 1}_{m+1} + (4m+\nu-1)\theta^{\nu 1}_m = -\sigma(4(r-m)+1)\theta^{\nu 1}_{m+1}$ $(m = \overline{1, r-1})$.

Пусть $\nu = 0$. Тогда в системе (35) при $s = 0, 1$ имеем уравнения $0 = 0$ и $0 \cdot h^{01}_{1,1} = \overline{Y}^{01}_{0,1}$, что позволяет, возвращаясь к системе (28), выписать для нее резонансную связь:

$$\sum_{m=1}^{r} \left(\alpha^0_{1,m} \widehat{Y}^{[4m-1,\,4(r-m)]}_1 + \beta^0_{1,m} \widehat{Y}^{[4m-2,\,4(r-m)+2]}_2 \right) = 0 \qquad (\nu = 0), \tag{37}$$

где $\alpha^0_{1,m} = -\sigma(4(r-m)+1)\theta^0_{m+1}$ $(m = \overline{1, r-1})$, $\alpha^0_{1,r} = \theta^0_r$, $\beta^0_{1,m} = \theta^0_m$ $(m = \overline{1,r})$, а θ^0_m определены в (36), причем $h^{01}_{1,1}$ не имеет ограничений.

При $\nu = 1$ система (35), очевидно, однозначно разрешима.

Пусть теперь $\nu = 2, 3$. Тогда первое уравнение системы (35) $(s = 0)$ имеет вид: $0 = \overline{Y}^{\nu 1}_{0,0}$. Согласно (33): $\overline{Y}^{\nu 1}_{0,0} = Y^{\nu 1}_{0,0} - \overline{Y}^{\nu 1}_{0,1} c^{\nu 1}_0 (d^{\nu}_1)^{-1} = (\nu-1) Y^{\nu 1}_{1,0} + Y^{\nu 1}_{2,0} -\ \sigma(\nu-1)(2r+1)^{-1} \big(-\sigma \sum_{m=1}^{r-1} (4(r-m)+1) \theta^{\nu}_{m+1} Y^{\nu 1}_{1,m} + \theta_r Y^{\nu 1}_{1,r} + \sum_{m=1}^{r} \theta^{\nu}_m Y^{\nu 1}_{2,m} \big)$, что позволяет, возвращаясь к системе (28), выписать для нее резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r} \left(\alpha^{\nu}_{1,m} \widehat{Y}^{[4m+\nu-1,\,4(r-m)]}_1 + \beta^{\nu}_{1,m} \widehat{Y}^{[4m+\nu-2,\,4(r-m)+2]}_2 \right) = 0 \qquad (\nu = 2, 3), \tag{38}$$

в которой $\alpha^{\nu}_{1,0} = \nu - 1$, $\alpha^{\nu}_{1,m} = (\nu-1)(2r+1)^{-1}(4(r-m)+1)\theta^{\nu}_{m+1}$ $(m = \overline{1, r-1})$, $\alpha^{\nu}_{1,r} = -\sigma(\nu-1)(2r+1)^{-1}\theta^{\nu}_r$, $\beta^{\nu}_{1,0} = 1$, $\beta^{\nu}_{1,m} = -\sigma(\nu-1)(2r+1)^{-1}\theta^{\nu}_m$ $(m = \overline{1,r})$, а θ^{ν}_m из (36).

5.4 Структура связующей системы при четных $(\mathbf{q_2 - i})$

Вводя новые обозначения, запишем систему (29) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma(2(r-s)+2) h^{\nu 2}_{1,s-1} + (4s+\nu-2) h^{\nu 2}_{1,s} - \quad h^{\nu 2}_{2,s} &= Y^{\nu 2}_{1,s} \quad (s = \overline{[(7-\nu)/5], r}), \\ -3\sigma h^{\nu 2}_{1,s} + (4s+\nu+1) h^{\nu 2}_{2,s+1} + \sigma(2(r-s)+1) h^{\nu 2}_{2,s} &= Y^{\nu 2}_{2,s} \qquad\qquad (s = \overline{0,r}), \end{aligned} \tag{39}$$

где $h^{\nu 2}_{1,s} = h^{[4s+\nu-2,\,4(r-s)]}_1$ $(s = \overline{[(3-\nu)/2], r}\ )$, $h^{\nu 2}_{2,s} = h^{[4s+\nu-3,\,4(r-s)+2]}_2$, $Y^{\nu 2}_{1,s} = \widehat{Y}^{[4s+\nu-3,\,4(r-s)+2]}_1$ $(s = \overline{[(7-\nu)/5], r}\ )$, $Y^{\nu 2}_{2,s} = \widehat{Y}^{[4s+\nu,\,4(r-s)]}_2$ $(s = \overline{0,r}\ )$. При этом любой элемент равен нулю, если его индекс s не лежит в заданных границах.

Положим $\tau_\nu = [(3-\nu)/2]$, т. е. $\tau_\nu = \{1$ при $\nu = 0, 1;$ 0 при $\nu = 2, 3\}$.

Подставляя $h^{\nu 2}_{2,s}$ и $h^{\nu 2}_{2,s+1}$ из (39_1) в (39_2), получаем трехдиагональную систему:

$$a^{\nu 2}_s h^{\nu 1}_{1,s-1} + b^{\nu 2}_s h^{\nu 1}_{1,s} + c^{\nu 2}_s h^{\nu 1}_{1,s+1} = Y^{\nu 2}_{0,s} \qquad (s = \overline{0,r}), \tag{40}$$

в которой $a_s^{\nu 2}=(2(r-s)+1)(2(r-s)+2)\ \ (s=\overline{\tau_\nu+1,r})$,
$b_s^{\nu 2}=\sigma((4s+\nu)(4(r-s)+1)-2(r-s)-5)\ \ (s=\overline{\tau_\nu,r})$,
$c_s^{\nu 2}=(4s+\nu+1)(4s+\nu+2)\ \ (s=\overline{0,r-1})$;
$Y_{0,s}^{\nu 2}=\sigma(2(r-s)+1)Y_{1,s}^{\nu 2}+(4s+\nu+1)Y_{1,s+1}^{\nu 2}+Y_{2,s}^{\nu 2}\ \ (s=\overline{0,r})$.

Запишем (40) в матричном виде, выделив в ней для $\nu=0,1$ первое уравнение $(s=0)$

$$(\nu+1)(\nu+2)h_{1,1}^{\nu 2}=Y_{0,0}^{\nu 2}\quad (\nu=0,1),\qquad A^{\nu 2}h_1^{\nu 2}=Y_0^{\nu 2}\quad (\nu=\overline{0,3}),\tag{41}$$

где $A^{\nu 2}=\begin{pmatrix} b_{\tau_\nu}^{\nu 2} & c_{\tau_\nu}^{\nu 2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_{\tau_\nu+1}^{\nu 2} & b_{\tau_\nu+1}^{\nu 2} & c_{\tau_\nu+1}^{\nu 2} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{\tau_\nu+2}^{\nu 2} & b_{\tau_\nu+2}^{\nu 2} & c_{\tau_\nu+2}^{\nu 2} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & a_{\tau_\nu+3}^{\nu 2} & b_{\tau_\nu+3}^{\nu 2} & c_{\tau_\nu+3}^{\nu 2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{r-1}^{\nu 2} & b_{r-1}^{\nu 2} & c_{r-1}^{\nu 2}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_r^{\nu 2} & b_r^{\nu 2}\end{pmatrix}_{(r-\tau_\nu+1)}$, $\begin{matrix} h_1^{\nu 2}=(h_{1,\tau_\nu}^{\nu 2},\dots,h_{1,r}^{\nu 2}),\\ Y_0^{\nu 2}=(Y_{0,\tau_\nu}^{\nu 2},\dots,Y_{0,r}^{\nu 2}).\end{matrix}$

Для решения системы (41) будем методом Гаусса в матрице $A^{\nu 2}$ аннулировать элементы $a_{\tau_\nu+1}^{\nu 2}$, $a_{\tau_\nu+2}^{\nu 2},\dots,$ получая элементы e_s^ν вместо $b_s^{\nu 2}$ и $\overline{Y}_{0,s}^{\nu 2}$ вместо $Y_{0,s}^{\nu 2}$, пока $e_{s-1}^\nu\neq 0$ $(s\geq\tau_\nu)$, по рекуррентным формулам:

$$e_{\tau_\nu}^\nu=b_{\tau_\nu}^{\nu 2},\ \overline{Y}_{0,\tau_\nu}^{\nu 2}=Y_{0,\tau_\nu}^{\nu 2};\ e_s^\nu=b_s^{\nu 2}-\frac{a_s^{\nu 2}c_{s-1}^{\nu 2}}{e_{s-1}^\nu},\ \overline{Y}_{0,s}^{\nu 2}=Y_{0,s}^{\nu 2}-\frac{\overline{Y}_{0,s-1}^{\nu 2}a_s^{\nu 2}}{e_{s-1}^\nu}\ (s=\tau_\nu+1,\tau_\nu+2,\dots).\tag{42}$$

Лемма 3. *В формуле* (42) *элементы* $e_s^\nu\neq 0$ *при* $s=\overline{\tau_\nu,r}$ $(\nu=\overline{0,3})$, *причем при* $r\geq 2$

$$\sigma e_s^\nu\geq(2(r-s)-1)(4s+\nu+1)\ \ (s=\overline{\tau_\nu,r-1}),\quad \sigma e_s^\nu<2(r-s)(4s+\nu+4)\ \ (s=\overline{\tau_\nu,r}).$$

Доказательство. При $\sigma=1$, сменив a на c, b на a, b на c, получаем элементы, для которых лемма доказана в [1, часть II]. При $\sigma=-1$ формулы (42) не меняются, так как $b_s^{\nu 2}$ содержит множитель σ, отсюда получаем утверждение леммы для $\sigma=-1$. □

В результате система (41) равносильна системе

$$(\nu+1)(\nu+2)h_{1,1}^{\nu 2}=Y_{0,0}^{\nu 2}\quad (\nu=0,1),\qquad \overline{A}^{\nu 2}h_1^{\nu 2}=\overline{Y}_0^{\nu 2}\quad (\nu=\overline{0,3}),\tag{43}$$

в которой $\overline{A}^{\nu 2}$ – двухдиагональная $(r-\tau_\nu+1)$ матрица с элементами e_s^ν и $c_s^{\nu 2}$ на диагоналях, а $\overline{Y}_0^{\nu 2}=(\overline{Y}_{0,\tau_\nu}^{\nu 2},\overline{Y}_{0,\tau_\nu+1}^{\nu 2},\dots,\overline{Y}_{0,r}^{\nu 2})$ и $\overline{Y}_{0,s}^{\nu 2}$ определены в (42).

5.5 Совместность связующей системы при четных $(\mathbf{q_2}-\mathbf{i})$

Пусть $\nu=0,1$, тогда $\tau_\nu=1$. Выразим $h_{1,1}^{\nu 2}$ из выделенного уравнения (41_1) :

$$h_{1,1}^{\nu 2}=((\nu+1)(\nu+2))^{-1}Y_{0,0}^{\nu 2}=Y_{1,1}^{\nu 2}(\nu+2)^{-1}+Y_{2,0}^{\nu 2}(\nu+1)^{-1}(\nu+2)^{-1}.$$

Теперь найдем $h_{1,1}^{\nu 2}$ по формулам Крамера из системы (41_2).

Пусть $\overline{A}^{\nu}_{s,1}$ $(s=\overline{1,r})$ – алгебраическое дополнение элемента s-ой строки и первого столбца матрицы $\overline{A}^{\nu 2}$, т. е. $\overline{A}^{\nu}_{s,1}=(-1)^{s+1}\prod_{j=1}^{s-1}c_j^{\nu 2}\prod_{j=s+1}^{r}e_j^{\nu}$. Тогда компонента

$$h_{1,1}^{\nu 2}=(\Delta^\nu)^{-1}\sum_{s=1}^{r}\overline{A}^{\nu}_{s,1}\overline{Y}^{\nu 2}_{0,s},\quad \Delta^\nu=\prod_{s=1}^{r}e_s^\nu .$$

Из формулы (42) с учетом леммы 3 получаем: $\overline{Y}^{\nu 2}_{0,s}=\sum_{m=1}^{s}\theta^{\nu}_{s,m}Y^{\nu 2}_{0,m}$, где

$$\theta^{\nu}_{s,m}=(-1)^{s-m}\prod_{j=m+1}^{s}(a_j^{\nu 2}/e_{j-1}^{\nu})\qquad (s=\overline{1,r},\ m=\overline{1,s}). \tag{44}$$

Согласно (40) $\sum_{m=1}^{s}\theta^{\nu}_{s,m}Y^{\nu 2}_{0,m}=\sum_{m=1}^{s}\theta^{\nu}_{s,m}(\sigma(2(r-m)+1)Y^{\nu 2}_{1,m}+(4m+\nu+1)Y^{\nu 2}_{1,m+1}+Y^{\nu 2}_{2,m})$, поэтому

$$\overline{Y}^{\nu 2}_{0,s}=\sum_{m=1}^{s}(\overline{\alpha}^{\nu}_{s,m}Y^{\nu 2}_{1,m}+\overline{\beta}^{\nu}_{s,m}Y^{\nu 2}_{2,m})+(4s+\nu+1)Y^{\nu 2}_{1,s+1}, \tag{45}$$

где $\overline{\alpha}^{\nu}_{s,m}=\sigma(2(r-m)+1)\theta^{\nu}_{s,m}+(4m+\nu-3)\theta^{\nu}_{s,m-1}$ $(m=\overline{2,s})$, $\overline{\alpha}^{\nu}_{s,1}=\sigma(2r-1)\theta^{\nu}_{s,1}$, $\overline{\beta}^{\nu}_{s,m}=\theta^{\nu}_{s,m}$ $(m=\overline{1,s})$, а $\theta^{\nu}_{s,m}$ определены в (44).

Итак, $\sum_{s=1}^{r}\overline{A}^{\nu}_{s,1}\overline{Y}^{\nu 2}_{0,s}=\sum_{s=1}^{r}\overline{A}^{\nu}_{s,1}\big(\sum_{m=1}^{s}(\overline{\alpha}^{\nu}_{s,m}Y^{\nu 2}_{1,m}+\overline{\beta}^{\nu}_{s,m}Y^{\nu 2}_{2,m})+(4s+\nu+1)Y^{\nu 2}_{1,s+1}\big)=\sum_{m=2}^{r}\big(Y^{\nu 2}_{1,m}(\sum_{s=m}^{r}\overline{A}^{\nu}_{s,1}\overline{\alpha}^{\nu}_{s,m}+\overline{A}^{\nu}_{m-1,1}(4m+\nu-3))+Y^{\nu 2}_{2,m}\sum_{s=m}^{r}\overline{A}^{\nu}_{s,1}\overline{\beta}^{\nu}_{s,m}\big)+Y^{\nu 2}_{1,1}\sum_{s=1}^{r}\overline{A}^{\nu}_{s,1}\overline{\alpha}^{\nu}_{s,1}+Y^{\nu 2}_{2,1}\sum_{s=1}^{r}\overline{A}^{\nu}_{s,1}\overline{\beta}^{\nu}_{s,1}$.

Избавившись в двух полученных уравнениях от $h^{\nu 2}_{1,1}$, выпишем резонансную связь:

$$\beta^{\nu}_{2,0}Y_2^{[\nu,4r]}+\sum_{m=1}^{r}(\alpha^{\nu}_{2,m}Y_1^{[4m+\nu-3,4(r-m)+2]}+\beta^{\nu}_{2,m}Y_2^{[4m+\nu,4(r-m)]})=0\qquad(\nu=0,1), \tag{46}$$

где $\alpha^{\nu}_{2,1}=\sum_{s=1}^{r}\overline{A}^{\nu}_{s,1}\overline{\alpha}^{\nu}_{s,1}-(\nu+2)^{-1}\Delta^\nu$, $\alpha^{\nu}_{2,m}=\overline{A}^{\nu}_{m-1,1}(4m+\nu-3)+\sum_{s=m}^{r}\overline{A}^{\nu}_{s,1}\overline{\alpha}^{\nu}_{s,m}$ $(m=\overline{2,r})$, $\beta^{\nu}_{2,0}=-(\nu+1)^{-1}(\nu+2)^{-1}\Delta^\nu\neq 0$, $\beta^{\nu}_{2,m}=\sum_{s=m}^{r}\overline{A}^{\nu}_{s,1}\overline{\beta}^{\nu}_{s,m}$ $(m=\overline{1,r})$, а $\overline{\alpha}^{\nu}_{s,m},\overline{\beta}^{\nu}_{s,m}$ из (45). При этом $\alpha^{\nu}_{2,r}=(-1)^r(-3\sigma)(4r+\nu-3)\prod_{s=1}^{r-2}c_s^{\nu 2}\neq 0$, $\beta^{\nu}_{2,r}=(-1)^{r+1}\prod_{s=1}^{r-1}c_s^{\nu 2}\neq 0$, $\beta^{\nu}_{2,r-1}=(-1)^r b_r^{\nu 2}\prod_{s=1}^{r-2}c_s^{\nu 2}\neq 0$, $\beta^{\nu}_{2,r-2}=(-1)^{r+1}(b_r^{\nu 2}b_{r-1}^{\nu 2}-a_r^{\nu 2}c_{r-1}^{\nu 2})\prod_{s=1}^{r-3}c_s^{\nu 2}=(-1)^{r+1}(48r^2+24r\nu-168r+3\nu^2-42\nu+123)\prod_{s=1}^{r-3}c_s^{\nu 2}\neq 0$, а про остальные множители этого утверждать нельзя.

При $\nu=2,3$ система (43), очевидно, однозначно разрешима.

5.6 Полученные результаты

Возвращаясь к обозначениям, введенным для системы (27), согласно (37), (38) и (46), заключаем, что коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ (здесь и далее $k\ge 2$, т. е. $r\ge 1$) связующих систем (30) и (39) удовлетворяют следующим резонансным уравнениям:

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{r}\big(\alpha^{0}_{1,m}Y_1^{[4m-1,\,4(r-m)]}+\beta^{0}_{1,m}Y_2^{[4m-2,\,4(r-m)+2]}\big)=\tilde c,\\ \beta^{0}_{2,0}Y_2^{[0,\,4r]}+\sum_{m=1}^{r}\big(\alpha^{0}_{2,m}Y_1^{[4m-3,\,4(r-m)+2]}+\beta^{0}_{2,m}Y_2^{[4m,\,4(r-m)]}\big)=\tilde c\qquad(k=4r-2),\end{gathered} \tag{47}$$

где $\alpha^0_{1,m} = -\sigma(4(r-m)+1)\theta^0_{m+1}$ $(m=\overline{1,r-1})$, $\alpha^0_{1,r}=\theta^0_r$, $\beta^0_{1,m}=\theta^0_m$ $(m=\overline{1,r})$, $\theta^0_m = (-\sigma)^{m-1}\prod_{j=2}^m(4j-5)(2(r-j)+3)^{-1}\neq 0$; $\alpha^0_{2,1}=\sum_{s=1}^r\sigma(2r-1)\overline{A}^0_{s,1}\theta^0_{s,1}-\Delta^0/2$, $\alpha^0_{2,m}=(4m-3)\overline{A}^0_{m-1,1}+\sum_{s=m}^r\overline{A}^0_{s,1}(\sigma(2(r-m)+1)\theta^0_{s,m}+(4m-3)\theta^0_{s,m-1})$ $(m=\overline{2,r-1})$, $\alpha^0_{2,r}=(-1)^r(-3\sigma)(4r-3)\prod_{s=1}^{r-2}(4s+1)(4s+2)\neq 0$, $\beta^0_{2,0}=-\Delta^0/2\neq 0$, $\beta^0_{2,m}=\sum_{s=m}^r\overline{A}^0_{s,1}\theta^0_{s,m}$ $(m=\overline{1,r-3})$, $\beta^0_{2,r-2}=(-1)^{r+1}(48r^2-168r+123)\prod_{s=1}^{r-3}(4s+1)(4s+2)\neq 0$, $\beta^0_{2,r-1}=(-1)^r\sigma(4r-5)\prod_{s=1}^{r-2}(4s+1)(4s+2)\neq 0$, $\beta^0_{2,r}=(-1)^{r+1}\prod_{s=1}^{r-1}(4s+1)(4s+2)\neq 0$, $\theta^0_{s,m}=(-1)^{s-m}\prod_{j=m+1}^s(2(r-j)+1)(2(r-j)+2)/e^0_{j-1}$, $\overline{A}^0_{s,1}=(-1)^{s+1}\prod_{j=1}^{s-1}(4j+1)(4j+2)\prod_{j=s+1}^r e^0_j$, $\Delta^0=\prod_{s=1}^r e^0_s$, а e^0_s определены в (42);

$$\beta^1_{2,0}Y_2^{[1,\,4r]}+\sum_{m=1}^r\left(\alpha^1_{2,m}Y_1^{[4m-2,\,4(r-m)+2]}+\beta^1_{2,m}Y_2^{[4m+1,\,4(r-m)]}\right)=\tilde c \qquad (k=4r-1), \tag{48}$$

где $\alpha^1_{2,1}=\sum_{s=1}^r\sigma(2r-1)\overline{A}^1_{s,1}\theta^1_{s,1}-\Delta^1/3$, $\alpha^1_{2,m}=(4m-2)\overline{A}^1_{m-1,1}+\sum_{s=m}^r\overline{A}^1_{s,1}(\sigma(2(r-m)+1)\theta^1_{s,m}+(4m-2)\theta^1_{s,m-1})$ $(m=\overline{2,r-1})$, $\alpha^1_{2,r}=(-1)^r(-3\sigma)(4r-2)\prod_{s=1}^{r-2}(4s+2)(4s+3)\neq 0$, $\beta^1_{2,0}=-\Delta^1/6\neq 0$, $\beta^1_{2,m}=\sum_{s=m}^r\overline{A}^1_{s,1}\theta^1_{s,m}$ $(m=\overline{1,r-3})$, $\beta^1_{2,r-2}=(-1)^{r+1}(48r^2-144r++84)\prod_{s=1}^{r-3}(4s+2)(4s+3)\neq 0$, $\beta^1_{2,r-1}=(-1)^r\sigma(4r-4)\prod_{s=1}^{r-2}(4s+1)(4s+2)\neq 0$, $\beta^1_{2,r}=(-1)^{r+1}\prod_{s=1}^{r-1}(4s+2)(4s+3)\neq 0$, $\theta^1_{s,m}=(-1)^{s-m}\prod_{j=m+1}^s(2(r-j)+1)(2(r-j)+2)/e^1_{j-1}$, $\overline{A}^1_{s,1}=(-1)^{s+1}\prod_{j=1}^{s-1}(4j+2)(4j+3)\prod_{j=s+1}^r e^0_j$, $\Delta^1=\prod_{s=1}^r e^1_s$, а e^1_s определены в (42);

$$\sum_{m=0}^r\left(\alpha^2_{1,m}Y_1^{[4m+1,\,4(r-m)]}+\beta^2_{1,m}Y_2^{[4m,\,4(r-m)+2]}\right)=\tilde c \qquad (k=4r), \tag{49}$$

где $\alpha^2_{1,0}=1$, $\alpha^2_{1,m}=(2r+1)^{-1}(4(r-m)+1)\theta^2_{m+1}$ $(m=\overline{1,r-1})$, $\alpha^2_{1,r}=-\sigma(2r+1)^{-1}\theta^2_r$, $\beta^2_{1,0}=1$, $\beta^2_{1,m}=-\sigma(2r+1)^{-1}\theta^2_m$ $(m=\overline{1,r})$, а $\theta^2_m=(-\sigma)^{m-1}\prod_{j=2}^m(4j-3)(2(r-j)+3)^{-1}\neq 0$;

$$\sum_{m=0}^r\left(\alpha^3_{1,m}Y_1^{[4m+2,\,4(r-m)]}+\beta^3_{1,m}Y_2^{[4m+1,\,4(r-m)+2]}\right)=\tilde c \qquad (k=4r+1), \tag{50}$$

где $\alpha^3_{1,0}=2$, $\alpha^3_{1,m}=2(2r+1)^{-1}(4(r-m)+1)\theta^3_{m+1}$ $(m=\overline{1,r-1})$, $\alpha^3_{1,r}=-2\sigma(2r+1)^{-1}\theta^3_r$, $\beta^3_{1,0}=1$, $\beta^3_{1,m}=-2\sigma(2r+1)^{-1}\theta^3_m$ $(m=\overline{1,r})$, а $\theta^3_m=(-\sigma)^{m-1}\prod_{j=2}^m(4j-2)(2(r-j)+3)^{-1}\neq 0$.

В частности, при $r=1$ резонансные уравнения имеют вид:

$$3Y_1^{[1,\,2]}+Y_2^{[0,\,4]}+2\sigma Y_2^{[4,\,0]}=\tilde c,\quad 3Y_1^{[3,\,0]}+Y_2^{[2,\,2]}=\tilde c\quad (k=2);$$
$$Y_1^{[2,\,2]}+\sigma Y_2^{[5,\,0]}=\tilde c\quad (k=3);\quad -\sigma Y_1^{[1,\,4]}+5Y_1^{[5,\,0]}-3\sigma Y_2^{[0,\,6]}+Y_2^{[4,\,2]}=\tilde c\quad (k=4);$$
$$-2\sigma Y_1^{[2,\,4]}+12Y_1^{[6,\,0]}+(2-\sigma)Y_2^{[1,\,6]}+2Y_2^{[5,\,2]}=\tilde c\quad (k=5).$$

Теорема 4. *Для того чтобы система* (26) *была формально эквивалентна исходной системе* (24)*, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ее КОМ* $(Y_1^{[k]},Y_2^{[k]})$ *при* $k=4r-1,\,4r,\,4r+1$ *удовлетворяли уравнениям* (48), (49), (50) *соответственно, а при* $k=4r-2$ *– двум уравнениям* (47).

Следствие 2. *В КОМ* $Y^{[k]}$ *системы* (26) *для* $\forall\, r\in\mathbb{N}$:
1) при $k=4r-2$ *резонансными являются коэффициенты* $Y_1^{[4m-1,\,4(r-m)]}$, $Y_2^{[4m-2,\,4(r-m)+2]}$ $(m=\overline{1,r})$, $Y_1^{[4r-3,\,2]}$, $Y_2^{[0,\,4r]}$, $Y_2^{[4r-8,\,8]}$, $Y_2^{[4r-4,\,4]}$, $Y_2^{[4r,\,0]}$, *а также* $Y_1^{[4m-3,\,4(r-m)+2]}$ $(m=\overline{1,r-1})$ *и* $Y_2^{[4m,\,4(r-m)]}$ $(m=\overline{1,r-3})$ *при условии, что соответствующие* $\alpha^0_{2,m},\beta^0_{2,m}\neq 0$, *при этом коэффициент* $h_1^{[0,4r-2]}$ *КОМ* $h_1^{[k-1]}$ *также является резонансным;*

2) при $k=4r-1$ *резонансными являются* $Y_1^{[4r-2,2]}$, $Y_2^{[1,4r]}$, $Y_2^{[4r-7,8]}$, $Y_2^{[4r-3,4]}$, $Y_2^{[4r+1,0]}$, *а также* $Y_1^{[4m-2,4(r-m)+2]}$ $(m=\overline{1,r-1})$ *и* $Y_2^{[4m+1,4(r-m)]}$ $(m=\overline{1,r-3})$, *при условии, что соответствующие* $\alpha^1_{2,m},\beta^1_{2,m}\neq 0$, *а нерезонансными –* $Y_1^{[4m,\,4(r-m)]}$ $(m=\overline{0,r})$, $Y_2^{[4m-1,\,4(r-m)+2]}$ $(m=\overline{1,r})$;
3) при $k=4r$ *и* $k=4r+1$ *резонансными являются* $Y_1^{[4m+1,4(r-m)]}$, $Y_2^{[4m,4(r-m)+2]}$ *и* $Y_1^{[4m+2,4(r-m)]}$, $Y_2^{[4m+1,4(r-m)+2]}$ $(m=\overline{0,r})$ *соответственно, а нерезонансными –* $Y_1^{[4m-1,4(r-m)+2]}$ $(m=\overline{1,r})$, $Y_2^{[4m+2,4(r-m)]}$ $(m=\overline{0,r})$ *и* $Y_1^{[4m,4(r-m)+2]}$, $Y_2^{[4m+3,4(r-m)]}$ $(m=\overline{0,r})$ *соответственно.*

Для $\forall\ k\geq 2$ положим $n_k=\{2$ при $k=4r-2,\ 1$ при всех остальных $k\}$.

Следствие 3. *В системе* (26) n_k *различных резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[k]}$ *образуют резонансный* k*-набор* $\mathcal{Y}^k$, *если это:*
1) для $\mathcal{Y}^{4r-2}:$ $Y_1^{[4l_1-1,\,4(r-l_1)]}$ *или* $Y_2^{[4l_2-2,\,4(r-l_2)+2]}$ $(l_1,l_2\in\{1,\ldots,r\})$ *и* $Y_1^{[4r-3,\,2]}$ *или* $Y_1^{[4m-3,\,4(r-m)+2]}$ $(m\in\{1,\ldots,r-1\})$, *если* $\alpha^0_{2,m}\neq 0$, *или* $Y_2^{[0,\,4r]}$, *или* $Y_2^{[4r-8,\,8]}$, *или* $Y_2^{[4r-4,\,4]}$, *или* $Y_2^{[4r,\,0]}$, *или* $Y_2^{[4m,\,4(r-m)]}$ $(m\in\{1,\ldots,r-3\})$, *если* $\beta^0_{2,m}\neq 0$;
2) для $\mathcal{Y}^{4r-1}:$ $Y_1^{[4r-2,2]}$ *или* $Y_1^{[4m-2,\,4(r-m)+2]}$ $(m\in\{1,\ldots,r\})$, *если* $\alpha^1_{2,m}\neq 0$, *или* $Y_2^{[1,4r]}$, *или* $Y_2^{[4r-7,\,8]}$, *или* $Y_2^{[4r-3,\,4]}$, *или* $Y_2^{[4r+1,0]}$, *или* $Y_2^{[4m+1,\,4(r-m)]}$ $(m\in\{1,\ldots r-3\})$, *если* $\beta^1_{2,m}\neq 0$;
3) для $\mathcal{Y}^{4r}:Y_1^{[4l_5+1,\,4(r-l_5)]}$ *или* $Y_2^{[4l_6,\,4(r-l_6)+2]}$ $(l_5,l_6\in\{0,\ldots r\})$;
4) для $\mathcal{Y}^{4r+1}:Y_1^{[4l_7+2,\,4(r-l_7)]}$ *или* $Y_2^{[4l_8+1,\,4(r-l_8)+2]}$ $(l_7,l_8\in\{0,\ldots r\})$.

Таким образом, система (26) по определению 6 является ОНФ, если для каждого k все коэффициенты ее КОМ $Y^{[k]}$ равны нулю, кроме n_k штук, принадлежащих любому резонансному k-набору, описанному в следствии 3, и имеющих произвольные значения.

Следствие 4. *Для системы* (26) *неполное семейство резонансных наборов* $\mathcal{Y}_*$ *имеет вид:* $\big\{\rho_1^rY_1^{[4l_1-1,\,4(r-l_1)]}$, $\rho_2^rY_1^{[4r-3,\,2]}$, $\rho_3^rY_1^{[4r-2,2]}$, $\rho_4^rY_1^{[4l_5+1,4(r-l_5)]}$, $\rho_5^rY_1^{[4l_7+2,4(r-l_7)]}$, $(1-\rho_1^r)Y_2^{[4l_2-2,\,4(r-l_2)+2]}$, $(1-\rho_2^r)Y_2^{[4l_3,4(r-l_3)]}$, $(1-\rho_3^r)Y_2^{[4l_4+1,4(r-l_4)]}$ $(1-\rho_4^r)Y_2^{[4l_6,4(r-l_6)+2]}$, $(1-\rho_5^r)Y_2^{[4l_8+1,4(r-l_8)+2]}\big\}$, *где* $l_1,l_2\in\{1,\ldots,r\}$, $l_3,l_4\in\{0,r-1,r-2,r\}$, $l_5,l_6,l_7,l_8\in\{0,\ldots,r\}$, $\rho_j\in\{0,1\}$ $(j=\overline{1,5})$, $r\geq 1$, *причем элемент* $Y_i^{[s,k-s]}$ *в семействе отсутствует, если множитель при нем равен нулю.*

Теорема 5. *Для любой системы* (24) *и для любого выбранного по ее невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}_*$ *из следствия* 4 *существует и единственна почти тождественная замена* (25) *с заранее произвольным образом фиксированными резонансными коэффициентами, преобразующая систему* (24) *в ОНФ* (26)*:*

$$\dot y_1=y_2+\sum_{r=1}^{\infty}\big(\rho_1^rY_1^{[4l_1-1,\,4(r-l_1)]}y_1^{4l_1-1}y_2^{2(r-l_1)}+\rho_2^rY_1^{[4r-3,\,2]}y_1^{4r-3}y_2+\rho_3^rY_1^{[4r-2,2]}y_1^{4r-2}y_2+$$
$$\rho_4^rY_1^{[4l_5+1,4(r-l_5)]}y_1^{4l_5+1}y_2^{2(r-l_5)}+\rho_5^rY_1^{[4l_7+2,4(r-l_7)]}y_1^{4l_7+2}y_2^{2(r-l_7)}\big),$$
$$\dot y_2=\sigma y_1^3+\sum_{r=1}^{\infty}\big((1-\rho_1^r)Y_2^{[4l_2-2,\,4(r-l_2)+2]}y_1^{4l_2-2}y_2^{2(r-l_2)+1}+(1-\rho_2^r)Y_2^{[4l_3,4(r-l_3)]}y_1^{4l_3}y_2^{2(r-l_3)}+$$
$$(1-\rho_3^r)Y_2^{[4l_4+1,4(r-l_4)]}y_1^{4l_4+1}y_2^{2(r-l_4)}+(1-\rho_4^r)Y_2^{[4l_6,4(r-l_6)+2]}y_1^{4l_6}y_2^{2(r-l_6)+1}+$$
$$(1-\rho_5^r)Y_1^{[4l_8+1,4(r-l_8)+2]}y_1^{4l_8+1}y_2^{2(r-l_8)+1}\big).$$

Пример 2. ОНФ, полученная из (24), может иметь, например, такие две структуры:

$$\begin{aligned}
&\dot y_1 = y_2, \qquad \dot y_2 = \sigma y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty}\big(Y_2^{[4l_2-2,\,4(r-l_2)+2]}y_1^{4l_2-2}y_2^{2(r-l_2)+1} + Y_2^{[4l_3,4(r-l_3)]}y_1^{4l_3}y_2^{2(r-l_3)}+\\
&Y_2^{[4l_4+1,4(r-l_4)]}y_1^{4l_4+1}y_2^{2(r-l_4)} + Y_2^{[4l_6,4(r-l_6)+2]}y_1^{4l_6}y_2^{2(r-l_6)+1} + Y_2^{[4l_8+1,4(r-l_8)+2]}y_1^{4l_8+1}y_2^{2(r-l_8)+1}\big)\\
&\qquad (l_2\in\{1,\ldots,r\},\ l_3,l_4\in\{0,r-1,r-2,r\},\ l_6,l_8\in\{0,\ldots,r\});\\
&\dot y_1 = y_2 + \sum_{r=1}^{\infty}\big(Y_1^{[4r-1,\,0]}y_1^{4r-1} + Y_1^{[4r+1,0]}y_1^{4r+1} + Y_1^{[4r+2,0]}y_1^{4r+2}\big),\\
&\dot y_2 = \sigma y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty}\big(Y_2^{[4r,0]}y_1^{4r} + Y_2^{[4r+1,0]}y_1^{4r+1}\big).
\end{aligned} \tag{51}$$

В ОНФ (51_1) в первом уравнении отсутствует возмущение (все $\rho_j^r=0$), в ОНФ (51_2) возмущение не зависит от y_2 ($\rho_1^r,\rho_4^r,\rho_5^r=1,\ \rho_2^r,\rho_3^r=0,\ l_j=r.$)

6 ОНФ систем с $\mathbf{R}^{[2]}_{(1,3)}$ в невозмущенной части

6.1 Получение связующей системы

Рассмотрим систему (1) с канонической невозмущенной частью $R^{[2]}_{(1,3)}=(x_2,x_1^2x_2)$:

$$\dot x_1 = x_2 + \sum_{k=3}^{\infty}X_1^{[k]}(x), \qquad \dot x_2 = x_1^2x_2 + \sum_{k=3}^{\infty}X_2^{[k]}(x), \tag{52}$$

где в возмущении КОМ $X_i^{[k]}=\sum_{q_1+3q_2=k+2i-1}X_i^{[q_1,3q_2]}x_1^{q_1}x_2^{q_2}\quad (i=1,2).$

***Замечание* 5.** Вообще говоря, $R^{[2]}_{(1,3)}=\sigma(x_2,x_1^2x_2)$, но при $\sigma=-1$ можно сделать замену времени $t=-\tau$ и получить систему (52), возмущение в которой сменит знак.

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y) \quad (i=1,2), \tag{53}$$

где $h_i(y)=\sum_{k=3}^{\infty}h_i^{[k-2]}(y),\ \ h_i^{[k-2]}=\sum_{q_1+3q_2=k+2i-3}h_i^{[q_1,3q_2]}y_1^{q_1}y_2^{q_2}$, переводит (52) в систему:

$$\dot y_1 = y_2 + \sum_{k=3}^{\infty}Y_1^{[k]}(y), \qquad \dot y_2 = y_1^2y_2 + \sum_{k=3}^{\infty}Y_2^{[k]}(y), \tag{54}$$

где возмущение $Y_i^{[k]}=\sum_{q_1+3q_2=k+2i-1}Y_i^{[q_1,\,3q_2]}y_1^{q_1}y_2^{q_2}$.

Тождества (21) с $\chi=2,\ \gamma=(1,3)$ для систем (52), (54) и замены (53) имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h_1^{[k-2]}}{\partial y_1}y_2 + \frac{\partial h_1^{[k-2]}}{\partial y_2}y_1^2y_2 - h_2^{[k-2]} = \widetilde Y_1^{[k]} - Y_1^{[k]},\\
&\frac{\partial h_2^{[k-2]}}{\partial y_1}y_2 + \frac{\partial h_2^{[k-2]}}{\partial y_2}y_1^2y_2 - 2y_1y_2h_1^{[k-2]} - y_1^2h_2^{[k-2]} = \widetilde Y_2^{[k]} - Y_2^{[k]}
\end{aligned} \quad (k\ge 3), \tag{55}$$

где $\widetilde Y_i^{[k]}\ \ (i=1,2)$ находится по формуле, указанной в (21).

Приравнивая коэффициенты при $y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, получаем линейную связующую систему:

$$
\begin{aligned}
&(q_1+1)h_1^{[q_1+1,\,3(q_2-1)]} + q_2 h_1^{[q_1-2,\,3q_2]} - h_2^{[q_1,\,3q_2]} = \widehat{Y}_1^{[q_1,3q_2]} \quad (q_1+3q_2=k+1),\\
&(q_1+1)h_2^{[q_1+1,\,3(q_2-1)]} + (q_2-1)h_2^{[q_1-2,\;3q_2]} - 2h_1^{[q_1-1,\,3(q_2-1)]} = \widehat{Y}_2^{[q_1,3q_2]} \quad (q_1+3q_2=k+3),
\end{aligned}
\tag{56}
$$

в которой $\widehat{Y}_i^{[q_1,3q_2]} = \widetilde{Y}_i^{[q_1,3q_2]} - Y_i^{[q_1,3q_2]}$.

Поскольку $k \geq 3$, положим:

$$
k = 3r+\nu \quad (r \in \mathbb{N},\ \nu = 0,1,2), \quad q_2 = r-s \quad (s \leq r), \quad q_1 = 3s+\nu+(2i-1),
$$

тогда связующая система (56) перепишется в виде:

$$
\begin{aligned}
&(3s+\nu+2)h_1^{[3(s+1)+\nu-1,\,3(r-(s+1))]} + (r-s)h_1^{[3s+\nu-1,\,3(r-s)]} -\\
&-h_2^{[3s+\nu+1,\,3(r-s)]} = \widehat{Y}_1^{[3s+\nu+1,\,3(r-s)]} \qquad (s=\overline{[(1-\nu)/2],r}\ ),\\
&(3s+\nu+4)h_2^{[3(s+1)+\nu+1,\,3(r-(s+1))]} + (r-1-s)h_2^{[3s+\nu+1,\,3(r-s)]} -\\
&-2h_1^{[3(s+1)+\nu-1,\,3(r-(s+1))]} = \widehat{Y}_2^{[3s+\nu+3,\,3(r-s)]} \qquad (s=\overline{-1,r}\ )
\end{aligned}
\tag{57}
$$

или

$$
\begin{aligned}
(r-s)h_{1,s}^{\nu} + (3s+\nu+2)h_{1,s+1}^{\nu} - \quad h_{2,s}^{\nu} &= Y_{1,s}^{\nu} \quad (s=\overline{[(1-\nu)/2],r}),\\
-2h_{1,s+1}^{\nu} + (3s+\nu+4)h_{2,s+1}^{\nu} + (r-1-s)h_{2,s}^{\nu} &= Y_{2,s}^{\nu} \qquad\qquad (s=\overline{-1,r}),
\end{aligned}
\tag{58}
$$

где $h_{1,s}^{\nu} = h_1^{[3s+\nu-1,\,3(r-s)]}$ $(s=\overline{[1-\nu/2],r}\ )$, $h_{2,s}^{\nu} = h_2^{[3s+\nu+1,\,3(r-s)]}$, $Y_{1,s}^{\nu} = \widehat{Y}_1^{[3s+\nu+1,\,3(r-s)]}$ $(s=\overline{[(1-\nu)/2],r}\ )$, $Y_{2,s}^{\nu} = \widehat{Y}_2^{[3s+\nu+3,\,3(r-s)]}$ $(s=\overline{-1,r}\ )$.

Подставляя $h_{2,s}^{\nu}$ и $h_{2,s+1}^{\nu}$ из (58_1) в (58_2), получаем трехдиагональную систему:

$$
a_s^{\nu} h_{1,s}^{\nu} + b_s^{\nu} h_{1,s+1}^{\nu} + c_s^{\nu} h_{1,s+2}^{\nu} = Y_{0,s}^{\nu} \qquad (s=\overline{-1,r}\ ),
\tag{59}
$$

в которой $a_s^{\nu} = (r-1-s)(r-s)$ $(s=\overline{[1-\nu/2],r}\ )$,
$b_s^{\nu} = 2((3s+\nu+3)(r-1-s)-1)$ $(s=\overline{[1-\nu/2]-1,r-1}\ )$,
$c_s^{\nu} = (3s+\nu+4)(3s+\nu+5)$ $(s=\overline{-1,r-2}\ )$;
$Y_{0,s}^{\nu} = (r-1-s)Y_{1,s}^{\nu} + (3s+\nu+4)Y_{1,s+1}^{\nu} + Y_{2,s}^{\nu}$ $(s=\overline{-1,r}\ )$.

При $s=r$ в (59) имеем: $0 \cdot h_{1,r}^{\nu} = Y_{0,r}^{\nu} = -Y_{1,r}^{\nu} + Y_{2,r}^{\nu}$, что для системы (57) дает возможность выписать первую резонансную связь:

$$
\widehat{Y}_1^{[3r+\nu+1,\,0]} - \widehat{Y}_2^{[3r+\nu+3,\,0]} = 0.
\tag{60}
$$

Теперь систему (59) при $s=\overline{-1,r-1}$ запишем в матричном виде:

$$
A^{\nu} h_1^{\nu} = Y_0^{\nu},
\tag{61}
$$

где
$$
A^{\nu} = \begin{pmatrix}
b_{-1}^{\nu} & c_{-1}^{\nu} & 0 & 0 & \dots & 0\\
a_0^{\nu} & b_0^{\nu} & c_0^{\nu} & 0 & \dots & 0\\
0 & a_1^{\nu} & b_1^{\nu} & c_1^{\nu} & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & a_{r-2}^{\nu} & b_{r-2}^{\nu} & c_{r-2}^{\nu}\\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{r-1}^{\nu} & b_{r-1}^{\nu}
\end{pmatrix}_{(r+1)}, \qquad
\begin{aligned}
&h_1^{\nu} = (h_{1,0}^{\nu},..,h_{1,r}^{\nu}),\\
&Y_0^{\nu} = (Y_{0,-1}^{\nu}, Y_{0,0}^{\nu},..,Y_{0,r-1}^{\nu}),
\end{aligned}
$$

причем при $\nu=0$ считаем отсутствующие в (59) элементы b_{-1}^0, a_0^0 и $h_{1,0}^0$ равными нулю.

6.2 Структура связующей системы

Для решения системы (61) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c^\nu_{r-2}, c^\nu_{r-3}, \ldots$ матрицы A^ν, получая элементы d^ν_s вместо b^ν_s и $\overline{Y}^\nu_{0,s}$ вместо $Y^\nu_{0,s}$, пока $d^\nu_{s+1} \neq 0$ $(s \geq -1)$, по рекуррентным формулам:

$$d^\nu_{r-1} = b^\nu_{r-1},\ \overline{Y}^\nu_{0,r-1} = Y^\nu_{0,r-1};\ d^\nu_s = b^\nu_s - \frac{a^\nu_{s+1}\, c^\nu_s}{d^\nu_{s+1}},\ \overline{Y}^\nu_{0,s} = Y^\nu_{0,s} - \frac{\overline{Y}^\nu_{0,s+1}\, c^\nu_s}{d^\nu_{s+1}}\ \ (s = r-2, r-3, \ldots) \quad (62)$$

Лемма 4. *Для элементов* d^ν_s *из* (62) *верна следующая прямая формула:*

$$d^\nu_s = (r-s)(3s+\nu+2) \qquad (s = \overline{r-2, -1}\ ). \quad (63)$$

Доказательство. В (62) $d^\nu_{r-2} = 2(3r+\nu-4)$, что совпадает с d^ν_{r-2} из (63) и дает базу индукции. Пусть для некоторого $s = \overline{r-2, 0}$ верна формула (63). Тогда согласно (62) имеем $d^\nu_{s-1} = b^\nu_{s-1} - a^\nu_s c^\nu_{s-1} (d^\nu_s)^{-1} = 2((3s+\nu)(r-s)-1) - (r-1-s)(3s+\nu+1) = (r-s+1)(3s+\nu-1)$. □

В результате система (61) равносильна системе

$$\overline{A}^\nu h^\nu_1 = \overline{Y}^\nu_0, \quad (64)$$

в которой $\overline{A}^\nu$ – двухдиагональная $(r+1)$ матрица с элементами d^ν_s и a^ν_s на диагоналях, а $\overline{Y}^\nu_0 = (\overline{Y}^\nu_{0,-1}, \overline{Y}^\nu_{0,0}, \ldots, \overline{Y}^\nu_{0,r-1})$ и $\overline{Y}^\nu_{0,s}$ определены в (62).

Следствие 5. *В системе* (64) *все элементы* $d^\nu_s \neq 0$, *за исключением* d^1_{-1} *и* d^0_{-1}.

6.3 Условия совместности связующей системы

Согласно следствию 5 из формул (62) получаем: $\overline{Y}^\nu_{0,-1} = \sum_{m=-1}^{r-1} \theta^\nu_m Y^\nu_{0,m}$, где $\theta^\nu_m = (-1)^{m+1} \prod_{j=0}^{m} (c^\nu_{j-1}/d^\nu_j)$. Тогда, с учетом (59) и (63) $(\, b^\nu_{r-1}, d^\nu_{r-1} = -2\,)$, имеем:

$$\theta^\nu_m = (-1)^{m+1} \prod_{j=0}^{m} \frac{3j+\nu+1}{r-j} \neq 0\ (m = \overline{-1, r-2}\ ),\ \theta^\nu_{r-1} = \frac{(3r+\nu-2)(3r+\nu-1)}{2} \theta^\nu_{r-2}. \quad (65)$$

В обозначениях (59): $\sum_{m=-1}^{r-1} \theta^\nu_m Y^\nu_{0,m} = \sum_{m=-1}^{r-1} \theta^\nu_m ((r-1-m)Y^\nu_{1,m} + (3m+\nu+4)Y^\nu_{1,m+1} + Y^\nu_{2,m}) = \sum_{m=0}^{r-2} (-\theta^\nu_m) Y^\nu_{1,m} + (3r+\nu-2)\theta^\nu_{r-2} Y^\nu_{1,r-1} + (3r+\nu+1)\theta^\nu_{r-1} Y^\nu_{1,r} + \sum_{m=-1}^{r-1} \theta^\nu_m Y^\nu_{2,m}$, причем $\theta^\nu_m (r-1-m) + \theta^\nu_{m-1}(3m+\nu+1) = -\theta^\nu_m$ $(m = \overline{-1, r-2}\ )$.

При $\nu = 0, 1$ первое уравнение (64) $(s = -1)$ примет вид: $0 = \overline{Y}^0_{0,-1}$, $0 \cdot h^1_{1,0} = \overline{Y}^1_{0,-1}$, что дает возможность выписать, возвращаясь к системе (57), вторую резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha^\nu_{2,m} \widehat{Y}_1^{[3m+\nu+1,\, 3(r-m)]} - \sum_{m=-1}^{r-1} \beta^\nu_{2,m} \widehat{Y}_2^{[3m+\nu+3,\, 3(r-m)]} = 0 \qquad (\nu = 0, 1), \quad (66)$$

где $\alpha^\nu_{2,m}, \beta^\nu_{2,m} = -\theta^\nu_m$ $(m = \overline{-1, r-2}\ )$, $\alpha^\nu_{2,r-1} = (3r+\nu-2)\theta^\nu_{r-2}$, $\alpha^\nu_{2,r} = (3r+\nu+1)\theta^\nu_{r-1}$, $\beta^\nu_{2,r-1} = -\theta^\nu_{r-1}$, а θ^ν_m определены в (65), при этом $h^1_{1,0}$ не имеет ограничений.

При $\nu = 2$ система (64), очевидно, однозначно разрешима.

6.4 Полученные результаты

Возвращаясь к обозначениям, введенным для системы (56), согласно (60) и (66) заключаем, что коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ связующей системы (57) (здесь и далее $k \geq 3$, т. е. $r \geq 1$) удовлетворяют следующим резонансным уравнениям:

$$\begin{gathered}\sum_{m=0}^{r} \alpha_{2,m}^{\nu} Y_1^{[3m+\nu+1,\,3(r-m)]} - \sum_{m=-1}^{r-1} \beta_{2,m}^{\nu} Y_2^{[3m+\nu+3,\,3(r-m)]} = \tilde{c}, \\ Y_1^{[3r+\nu+1,\,0]} - Y_2^{[3r+\nu+3,\,0]} = \tilde{c} \qquad (k = 3r+\nu, \ \ \nu = 0,1), \quad h_{1,0}^{1} - \forall;\end{gathered} \tag{67}$$

где $\alpha_{2,m}^{\nu}, \beta_{2,m}^{\nu} = -\theta_m^{\nu}$ $(m = \overline{-1, r-2}\,)$, $\alpha_{2,r-1}^{\nu} = (3r+\nu-2)\theta_{r-2}^{\nu}$, $\alpha_{2,r}^{\nu} = (3r+\nu+1)\theta_{r-1}^{\nu}$, $\beta_{2,r-1}^{\nu} = -\theta_{r-1}^{\nu}$, $\theta_m^{\nu} = (-1)^{m+1}\prod_{j=0}^{m}(3j+\nu+1)(r-j)^{-1} \neq 0$ $(m = \overline{-1, r-2})$, $\theta_{r-1}^{\nu} = (1/2)(3r+\nu-2)(3r+\nu-1)\theta_{r-2}^{0} \neq 0$;

$$Y_1^{[3r+3,\,0]} - Y_2^{[3r+5,\,0]} = \tilde{c} \qquad (k = 3r+2). \tag{68}$$

В частности, при $r = 1$ резонансные уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}Y_1^{[4,\,0]} - Y_2^{[6,\,0]} = \tilde{c}, \quad Y_1^{[1,\,3]} + 4Y_1^{[4,\,0]} + Y_2^{[0,\,6]} + Y_2^{[3,\,3]} = \tilde{c} \quad (k = 3); \\ Y_1^{[5,\,0]} - Y_2^{[7,\,0]} = \tilde{c}, \quad 2Y_1^{[2,\,3]} + 10Y_1^{[5,\,0]} + Y_2^{[1,\,6]} + 3Y_2^{[4,\,3]} = \tilde{c} \quad (k = 4); \\ Y_1^{[6,\,0]} - Y_2^{[8,\,0]} = \tilde{c} \quad (k = 5).\end{gathered}$$

Теорема 6. *Для того чтобы система* (54) *была формально эквивалентна исходной системе* (52)*, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты КОМ* $Y^{[k]}$ *при* $k = 3r+\nu$ $(\nu = 0,1)$ *удовлетворяли двум уравнениям* (67)*, а при* $k = 3r+2$ *– уравнению* (68).

Следствие 6. *В КОМ* $Y^{[k]}$ *системы* (54) *для* $\forall\, r \in \mathbb{N}$:
1) при $k = 3r,\ 3r+1$ *все коэффициенты – резонансные, при этом коэффициент* $h_1^{[0,3r]}$ *КОМ* $h_1^{[k-2]}$ $(k = 3r+1)$ *также является резонансным;*
2) при $k = 3r+2$ *коэффициенты* $Y_1^{[3r+3,0]}$, $Y_2^{[3r+5,0]}$ *являются резонансными, а* $Y_1^{[3m+3,3(r-m)]}$, $Y_2^{[3m+5,3(r-m)]}$ $(m = \overline{-1, r-1})$ *– нерезонансными.*

Для $\forall\, k \geq 3$ положим $n_k = \{1$ при $k = 3r+2, \ \ 2$ при $k = 3r, 3r+1\}$.

Следствие 7. *В системе* (54) n_k *различных резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[k]}$ *образуют резонансный* k*-набор* $\mathcal{Y}^k$, *если это:*
1) для $\mathcal{Y}^{3r}$: $Y_1^{[3r+1,\,0]}$ *или* $Y_2^{[3r+3,\,0]}$ *и* $Y_1^{[3l_1+1,3(r-l_1)]}$ $(l_1 \in \{0,\ldots,r\})$ *или* $Y_2^{[3l_2+3,3(r-l_2)]}$ $(l_2 \in \{-1,\ldots,r\})$;
2) для $\mathcal{Y}^{3r+1}$: $Y_1^{[3r+2,\,0]}$ *или* $Y_2^{[3r+4,\,0]}$ *и* $Y_1^{[3l_3+2,3(r-l_3)]}$ $(l_3 \in \{0,\ldots,r\})$ *или* $Y_2^{[3l_4+4,3(r-l_4)]}$ $(l_4 \in \{-1,\ldots,r\})$;
3) для $\mathcal{Y}^{3r+2}$: $Y_1^{[3r+3,\,0]}$ *или* $Y_2^{[3r+5,\,0]}$.

Таким образом, система (54) по определению 6 является ОНФ, если для каждого k все коэффициенты ее КОМ $Y^{[k]}$ равны нулю, кроме n_k штук, принадлежащих любому резонансному k-набору, описанному в следствии 7, и имеющих произвольные значения.

Следствие 8. *Для системы* (54) *семейство резонансных наборов* $\mathcal{Y}$ *имеет вид:* $\{\rho_{11}^r Y_1^{[3r+1,0]},\ \rho_{12}^r Y_1^{[3l_1+1,3(r-l_1)]},\ \rho_{13}^r Y_1^{[3r+2,0]},\ \rho_{14}^r Y_1^{[3l_3+2,3(r-l_3)]},\ \rho_5^r Y_1^{[3r+3,\,0]},\ \rho_{21}^r Y_2^{[3r+3,0]},\ \rho_{22}^r Y_2^{[3l_2+3,3(r-l_2)]},\ \rho_{23}^r Y_2^{[3r+4,0]},\ \rho_{24}^r Y_2^{[3l_4+4,3(r-l_4)]}\ (1-\rho_5^r) Y_2^{[3r+5,\,0]}\}$, *где* $l_1, l_3 \in \{0,\dots,r\}$, $l_2, l_4 \in \{-1, r\}$, $\rho_j^r, \rho_{ij}^r \in \{0,1\}$ $(i = 1,2,\ j = \overline{1,5})$; $\rho_{11}^r + \rho_{21}^r,\ \rho_{13}^r + \rho_{23}^r \in \{1,2\}$, $\sum_{i=1}^2(\rho_{i1}^r+\rho_{i2}^r) = 2,\ \sum_{i=1}^2(\rho_{i3}^r+\rho_{i4}^r) = 2,\ r \ge 1$, *причем* $Y_i^{[s,k-s]}$ *в семействе отсутствует, если множитель при нем равен нулю, и все входящие в семейство* $Y_i^{[s,k-s]}$ *различны.*

Теорема 7. *Для любой системы* (52) *и для любого выбранного по ее невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}$ *из следствия* 8 *существует и единственна почти тождественная замена* (53) *с заранее произвольным образом фиксированными резонансными коэффициентами, преобразующая систему* (52) *в ОНФ* (54)*:*

$$\dot y_1 = y_2 + \sum_{r=1}^{\infty}\big(\rho_{11}^r Y_1^{[3r+1,0]} y_1^{3r+1} + \rho_{12}^r Y_1^{[3l_1+1,3(r-l_1)]} y_1^{3l_1+1} y_2^{r-l_1} +$$
$$+\rho_{13}^r Y_1^{[3r+2,0]} y_1^{3r+2} + \rho_{14}^r Y_1^{[3l_3+2,3(r-l_3)]} y_1^{3l_3+2} y_2^{r-l_3} + \rho_5^r Y_1^{[3r+3,\,0]} y_1^{3r+3}\big),$$
$$\dot y_2 = y_1^2 y_2 + \sum_{r=1}^{\infty}\big(\rho_{21}^r Y_2^{[3r+3,0]} y_1^{3r+3} + \rho_{22}^r Y_2^{[3l_2+3,3(r-l_2)]} y_1^{3l_2+3} y_2^{r-l_2} +$$
$$+\rho_{23}^r Y_2^{[3r+4,0]} y_1^{3r+4} + \rho_{24}^r Y_2^{[3l_4+4,3(r-l_4)]} y_1^{3l_4+4} y_2^{r-l_4} + (1-\rho_5^r) Y_2^{[3r+5,\,0]} y_1^{3r+5}\big).$$

Пример 3. ОНФ, полученная из (52), может иметь, например, такие две структуры:

$$\begin{aligned}
&\dot y_1 = y_2, \qquad \dot y_2 = y_1^2 y_2 + \sum_{r=1}^{\infty}\big(Y_2^{[3r+3,0]} y_1^{3r+3} + Y_2^{[3l_2+3,3(r-l_2)]} y_1^{3l_2+3} y_2^{r-l_2} + Y_2^{[3r+4,0]} y_1^{3r+4} +\\
&\qquad +Y_2^{[3l_4+4,3(r-l_4)]} y_1^{3l_4+4} y_2^{r-l_4} + Y_2^{[3r+5,\,0]} y_1^{3r+5}\big) \qquad \big(l_2, l_4 \in \{-1,\dots,r\}\big);\\
&\dot y_1 = y_2 + \sum_{r=1}^{\infty}\big(Y_1^{[3r+1,0]} y_1^{3r+1} + Y_1^{[3r+2,0]} y_1^{3r+2}\big),\\
&\dot y_2 = y_1^2 y_2 + \sum_{r=1}^{\infty}\big(Y_2^{[3r+3,0]} y_1^{3r+3} + Y_2^{[3r+4,0]} y_1^{3r+4} + Y_2^{[3r+5,\,0]} y_1^{3r+5}\big).
\end{aligned} \tag{69}$$

В ОНФ (69_1) в первом уравнении отсутствует возмущение (все $\rho_{1j}^r, \rho_5^r = 0$), в ОНФ (69_2) возмущение не зависит от y_2 (все $\rho_{i2}^r, \rho_{i4}^r, \rho_5^r = 0$).

Список литературы

[1] *Басов В.В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами // Дифференц. уравнения. — 2003.— Т. 39, № 2.— С. 154–170.

[2] *Басов В.В., Федотов А.А.* ОНФ двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // Вестник СПбГУ. Сер. 1.— 2007.— вып. 1.— С. 25–30.

[3] *Басов В.В., Скитович А.В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, I // Дифференц. уравнения.— 2003.— Т. 39, № 8.— С. 1016–1029.

[4] *Басов В.В., Федорова Е.В.* Двумерные вещественные системы ОДУ с квадратичной невозмущенной частью: классификация и вырожденные обобщенные нормальные формы // Дифференциальные уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal).—2010.— № 4.— С. 49–85.

[5] *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, II // Дифференц. уравнения.— 2005.— Т. 41. № 8.— С. 1011–1023.

[6] *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, III // Дифференц. уравнения.— 2006.— Т. 42. № 3.— С. 308–319.

[7] *Басов В. В., Федорова Е. В.* Нормализация двумерных систем с невозмущенной частью $(\alpha x_1^2 + x_1x_2,\, x_1x_2)$ // Труды XII Межд. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения).— 2007.— С. 24–32.

[8] *Басов В. В., Федорова Е. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, IV // Дифференц. уравнения.— 2009.— Т. 45. № 3.— С. 297–313.

[9] *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевым приближением $(x_2^3, -x_1^3)$ // Дифференц. уравнения.— 2004.— Т. 40. № 8.— С. 1011–1022.

[10] *Басов В. В., Слуцкая А. Г.* Обобщенные нормальные формы двумерных вещественных систем ОДУ с квазиоднородным многочленом в невозмущенной части // Дифференциальные уравнения и процессы управления (Эл. журнал http:// www.math.spbu.ru/diffjournal).— 2010.— № 4.— С. 108–133.

[11] *Басов В. В., Федорова Е. В.* Классификация двумерных однородных кубических систем ОДУ при наличии общего множителя // Дифференциальные уравнения и процессы управления (Эл. журнал http:// www.math.spbu.ru/diffjournal).— 2012.— № 2.— С. 218–276.