ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2010
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДВУМЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СИСТЕМ ОДУ С КВАЗИОДНОРОДНЫМ МНОГОЧЛЕНОМ В НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТИ [1]

В. В. БАСОВ, А. Г. СЛУЦКАЯ

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28,
Санкт-Петербургский Государственный университет,
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru, syeym4@yandex.ru

Аннотация

Продолжено изучение почти тождественных формальных преобразований двумерных автономных систем ОДУ, невозмущенную часть которых образует произвольный невырожденный квазиоднородный многочлен первого порядка с весом $(1, 2)$.

Для систем с одной из канонических форм такого многочлена в невозмущенной части в явном виде получены резонансные уравнения, на основании которых доказаны теоремы о формальной эквивалентности систем и установлены все возможные структуры обобщенной нормальной формы, к которой любая исходная система может быть сведена при помощи почти тождественной замены переменных.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09–01–00734-а)

1 Введение

1⁰. В работе будет рассматриваться вещественная двумерная автономная система

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1^2 + x_2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = x_1 x_2 + X_2(x_1, x_2) \quad (\alpha \neq 0), \tag{1}$$

в которой невозмущенную часть образует векторный невырожденный квазиоднородный многочлен (НКОМ) $P = (\alpha x_1^2 + x_2, x_1 x_2)$ степени $\kappa = 1$ с весом $\gamma = (1, 2)$, т.е. $P = P_{(1,2)}^{[1]}$, а возмущение $X = (X_1, X_2)$ разложено в сумму квазиоднородных многочленов (КОМ), т.е. $X_i = \sum_{k=2}^{\infty} X_i^{[k]}(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2)$, где $X_i^{[k]} = \sum_{q_1+2q_2-i=k} X_i^{[q_1, 2q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ – КОМ степени k с тем же весом $\gamma = (1, 2)$, который здесь в дальнейшем в обозначениях будем опускать.

В случае необходимости все определения, касающиеся квазиоднородных многочленов, резонансных уравнений, резонансных наборов и обобщенных нормальных форм (ОНФ), можно найти в конце статьи в разделе 6.

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y_1, y_2) \quad (i = 1, 2), \tag{2}$$

где $h_i = \sum_{k=2}^{\infty} h_i^{[k-1]}$, а КОМ $h_i^{[k-1]} = \sum_{q_1+2q_2-i=k-1} h_i^{[q_1, 2q_2]} \; y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, переводит систему (1) в формально эквивалентную ей систему

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_2 + Y_1(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2 + Y_2(y_1, y_2). \tag{3}$$

в которой $Y_i = \sum_{k=2}^{\infty} Y_i^{[k]}(y_1, y_2)$.

2⁰. Работа преследует две цели, достижение которых основано на использовании конструктивного метода резонансных уравнений, описанного в [1, § 3] (см. также [2, § 2]).

1) Выписать в явном виде условия на коэффициенты КОМ $Y_i^{[k]}$ системы (3), при которых она формально эквивалентна исходной системе (1).

2) Выписать все возможные структуры наиболее простой системы (3), называемой обобщенной нормальной формой (ОНФ), которая может быть получена из произвольной системы (1) при помощи формального почти тождественного преобразования (2).

3⁰. Невозмущенная часть системы (1) – НКОМ $P_{(1,2)}^{[1]} = (\alpha x_1^2 + x_2, x_1 x_2)$ – является одной из канонических форм, к которой заменой

$$u_1 = \tau_1 x_1, \quad u_2 = \tau_2 x_2 - \gamma \tau_2^2 x_1^2 \qquad (\tau_1, \tau_2 \neq 0), \tag{4}$$

сохраняющей структуру квазиоднородных многочленов, сводится вещественная система

$$\dot{u} = Q_{(1,2)}^{[1]}(u) + \sum_{k=2}^{\infty} U^{[k]}(u) \qquad (u = (u_1, u_2)), \tag{5}$$

имеющая в невозмущенной части НКОМ общего вида

$$Q_{(1,2)}^{[1]} = (a\, u_2 + b\, u_1^2,\; 2c\, u_1 u_2 - d\, u_1^3) \qquad (a^2 + b^2 \neq 0,\; c^2 + d^2 \neq 0). \tag{6}$$

Канонической формой (КФ) в данном случае называем такой НКОМ, полученный из $Q_{(1,2)}^{[1]}$ заменой (4), в котором число ненулевых коэффициентов минимально и они должным образом нормированы.

Введем следующие константы:

$$D = (b-c)^2 - 2ad; \quad \eta_1 = (b+c-D^{1/2})/2, \quad \eta_2 = (b+c+D^{1/2})/2;$$
$$\gamma_1 = (b-c-D^{1/2})/(2a), \quad \gamma_2 = (b-c+D^{1/2})/(2a) \quad (a \neq 0).$$

Нетрудно убедиться, что если для коэффициентов $Q^{[1]}_{(1,2)}$ из (6) выполняются условия

$$a \neq 0, \quad D \geq 0, \quad \eta_1, \eta_2 \neq 0,$$

то можно достигнуть следующих результатов:

1) если $b+c<0$, то система (5) заменой (4) с $\gamma=\gamma_1$, $\tau_1=(2\eta_1)^{-1}$, $\tau_2=(2a\eta_1)^{-1}$ сводится к системе (1), у которой в КФ $P^{[1]}_{(1,2)}$ параметр $\alpha=\eta_2/(2\eta_1)$, а значит, $0<|\alpha|\leq 1/2$;

2) если $b+c>0$, то система (5) заменой (4) с $\gamma=\gamma_2$, $\tau_1=(2\eta_2)^{-1}$, $\tau_2=(2a\eta_2)^{-1}$ сводится к системе (1), у которой в КФ $P^{[1]}_{(1,2)}$ параметр $\alpha=\eta_1/(2\eta_2)$, а значит, $0<|\alpha|\leq 1/2$;

3) если $b+c=0$ и $D>0$ (при $D=0$ получится вырожденная КФ), то $-\eta_1=\eta_2=D^{1/2}/2>0$ и система (5) заменой (4) из п. 2) сводится к системе (1), у которой в КФ $P^{[1]}_{(1,2)}$ параметр $\alpha=-1/2$.

В результате всегда можно добиться, чтобы в (1) выполнялось условие $0<|\alpha|\leq 1/2$.

4⁰. Система (5) с некоторыми КФ, помимо НКОМ $(\alpha x_1^2+x_2, x_1x_2)$ из системы (1), была изучена ранее по той же схеме, что будет осуществлена здесь для системы (1).

В [1, часть 2] исследована формальная эквивалентность и конструктивно описаны структуры всех ОНФ для систем, в невозмущенной части которых стоит КФ $(x_2, -x_1^3)$, полученная при определенных условиях на коэффициенты НКОМ (6) из системы (5).

Аналогичные исследования проведены в [2, § 4] для систем с КФ (x_2, x_1x_2), в [2, § 6] для систем с КФ (x_1^2, x_1^3), в [3, § 5] для систем с КФ $(\alpha\, x_1^2, x_1x_2)$, правда, в этом случае КФ в невозмущенной части было удобно трактовать не как НКОМ первой степени с весом $(1,2)$, а как однородный полином второй степени.

Наконец, в [4, разд. 6] для систем с невозмущенной частью $(x_2, \alpha\, x_1x_2+\beta\, x_1^3)$ построен пример ОНФ, но при условии, что отношение d_2/b_2^2 не является алгебраическим числом.

2 Линейная система для коэффициентов замены

1⁰. Дифференцируя по t замену (2) в силу систем (1) и (3), получаем тождества

$$\alpha(y_1+h_1)^2+y_2+h_2+X_1(y_1+h_1,y_2+h_2)=\alpha y_1^2+y_2+Y_1+\frac{\partial h_1}{\partial y_1}(\alpha y_1^2+y_2+Y_1)+\frac{\partial h_1}{\partial y_2}(y_1y_2+Y_2),$$

$$(y_1+h_1)(y_2+h_2)+X_2(y_1+h_1,y_2+h_2)=y_1y_2+Y_2+\frac{\partial h_2}{\partial y_1}(\alpha y_1^2+y_2+Y_1)+\frac{\partial h_2}{\partial y_2}(y_1y_2+Y_2).$$

Выделяя в них для всякого $k\geq 2$ КОМ степени k, получаем систему

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h_1^{[k-1]}}{\partial y_1}(\alpha y_1^2+y_2)+y_1y_2\frac{\partial h_1^{[k-1]}}{\partial y_2}-2\alpha y_1 h_1^{[k-1]}(y)-h_2^{[k-1]}(y)=\widetilde{Y}_1^{[k]}(y)-Y_1^{[k]}(y),\\
&\frac{\partial h_2^{[k-1]}}{\partial y_1}(\alpha y_1^2+y_2)+y_1y_2\frac{\partial h_2^{[k-1]}}{\partial y_2}-y_1 h_2^{[k-1]}(y)-y_2 h_1^{[k-1]}(y)=\widetilde{Y}_2^{[k]}(y)-Y_2^{[k]}(y),
\end{aligned} \qquad (7)$$

где $\widetilde{Y}_1^{[k]} = \{X_1(y_1+h_1, y_2+h_2)+\alpha h_1^2 - Y_1\partial h_1/\partial y_1 - Y_2\partial h_1/\partial y_2\}^{[k]}$, $\widetilde{Y}_2^{[k]} = \{X_2(y_1+h_1, y_2+h_2)+ h_1h_2 - Y_1\partial h_2/\partial y_1 - Y_2\partial h_2/\partial y_2\}^{[k]}$, т.е. квазиоднородный многочлен $\widetilde{Y}^{[k]} = (\widetilde{Y}_1^{[k]}, \widetilde{Y}_2^{[k]})$ уже известен, так как содержит только предшествующие КОМ $Y^{[s]}$ и $h^{[s-\kappa]}$ $(\kappa+1 \le s \le k-1)$.

Приравнивая в системе (7) коэффициенты при $y_1^{q_1}y_2^{q_2}$, где $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $q_1+2q_2 = k+i$, $k \ge 2$, а $i \in \{1,2\}$ – номер тождества, получаем линейную систему

$$\begin{gathered}(q_1+1)h_1^{[q_1+1,2q_2-2]} + (\alpha q_1 + q_2 - 3\alpha)h_1^{[q_1-1,2q_2]} - h_2^{[q_1,2q_2]} = \widetilde{Y}_1^{[q_1,2q_2]} - Y_1^{[q_1,2q_2]},\\ (q_1+1)h_2^{[q_1+1,2q_2-2]} + (\alpha q_1 + q_2 - \alpha - 1)h_2^{[q_1-1,2q_2]} - h_1^{[q_1,2q_2-2]} = \widetilde{Y}_2^{[q_1,2q_2]} - Y_2^{[q_1,2q_2]}.\end{gathered}$$

Выражая q_1, q_2 через k и текущий параметр τ, введем следующие разложения

$$k = 2r+\nu \quad (r \in \mathbb{N},\ \nu = 0,1); \quad q_1 = 2\tau+\nu+i-2, \quad q_2 = r-\tau+1.$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{gathered}(2\tau+\nu)h_1^{[2\tau+\nu,2(r-\tau)]} + (2\alpha\tau + \alpha\nu + r - \tau - 4\alpha + 1)h_1^{[2\tau+\nu-2,2(r-\tau+1)]} - \\ -h_2^{[2\tau+\nu-1,2(r-\tau+1)]} = \widehat{Y}_1^{[2\tau+\nu-1,2(r-\tau+1)]} \qquad (1-\nu \le \tau \le r+1),\\ \\ (2\tau+\nu+1)h_2^{[2\tau+\nu+1,2(r-\tau)]} + (2\alpha\tau + \alpha\nu + r - \tau - \alpha)h_2^{[2\tau+\nu-1,2(r-\tau+1)]} - \\ -h_1^{[2\tau+\nu,2(r-\tau)]} = \widehat{Y}_2^{[2\tau+\nu,2(r-\tau+1)]} \qquad (0 \le \tau \le r+1),\end{gathered} \tag{8}$$

где $\widehat{Y}_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]} = \widetilde{Y}_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]} - Y_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]}$ $(i = 1,2)$. При этом все коэффициенты $\widetilde{Y}_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]}$ КОМ $\widetilde{Y}^{[2r+\nu]}$ уже известны согласно (7).

$\mathbf{2^0}$. Рассмотрим отдельно случай, когда $r = 1$.

Система (8) при $k = 2$ $(r = 1,\ \nu = 0)$ имеет вид

$$\begin{gathered}2h_1^{[2,0]} + (1-2\alpha)h_1^{[0,2]} - h_2^{[1,2]} = \widehat{Y}_1^{[1,2]},\ -h_2^{[3,0]} = \widehat{Y}_1^{[3,0]},\ h_2^{[1,2]} - h_1^{[0,2]} = \widehat{Y}_2^{[0,4]},\\ 3h_2^{[3,0]} + \alpha h_2^{[1,2]} - h_1^{[2,0]} = \widehat{Y}_2^{[2,2]},\ \ (3\alpha-1)h_2^{[3,0]} = \widehat{Y}_2^{[4,0]}.\end{gathered}$$

Из второго и пятого уравнений системы получаем первую резонансную связь:

$$(3\alpha-1)\widehat{Y}_1^{[3,0]} + \widehat{Y}_2^{[4,0]} = 0. \tag{8_1^2}$$

Из первых двух уравнений выразим $h_2^{[1,2]}$ и $h_2^{[3,0]}$ и, подставляя их в оставшиеся уравнения, перейдем к системе $2(h_1^{[2,0]} - \alpha h_1^{[0,2]}) = \widehat{Y}_2^{[0,4]} + \widehat{Y}_1^{[1,2]}$, $(2\alpha-1)(h_1^{[2,0]} - \alpha h_1^{[0,2]}) = \widehat{Y}_2^{[2,2]} + 3\widehat{Y}_1^{[3,0]} + \alpha\widehat{Y}_1^{[1,2]}$, дающей вторую резонансную связь при наличии свободной компоненты $h_1^{[0,2]}$:

$$\widehat{Y}_1^{[1,2]} + 6\widehat{Y}_1^{[3,0]} + (1-2\alpha)\widehat{Y}_2^{[0,4]} + 2\widehat{Y}_2^{[2,2]} = 0. \tag{8_2^2}$$

В свою очередь, система (8) при $k = 3$ $(r = 1,\ \nu = 1)$ имеет вид

$$\begin{gathered}h_1^{[1,2]} - h_2^{[0,4]} = \widehat{Y}_1^{[0,4]}, \quad 3h_1^{[3,0]} + (1-\alpha)h_1^{[1,2]} - h_2^{[2,2]} = \widehat{Y}_1^{[2,2]}, \quad \alpha h_1^{[3,0]} - h_2^{[4,0]} = \widehat{Y}_1^{[4,0]},\\ 2h_2^{[2,2]} + h_2^{[0,4]} - h_1^{[1,2]} = \widehat{Y}_2^{[1,4]}, \quad 4h_2^{[4,0]} + 2\alpha h_2^{[2,2]} - h_1^{[3,0]} = \widehat{Y}_2^{[3,2]}, \quad (4\alpha-1)h_2^{[4,0]} = \widehat{Y}_2^{[5,0]}.\end{gathered}$$

Из первых трех уравнений выразим коэффициенты $h_2^{[0,4]}$, $h_2^{[2,2]}$ и $h_2^{[4,0]}$ и, подставляя их в оставшиеся уравнения, перейдем к системе $6h_1^{[3,0]} + 2(1-\alpha)h_1^{[1,2]} = \widehat{Y}_2^{[1,4]} + 2\widehat{Y}_1^{[2,2]} + \widehat{Y}_1^{[0,4]}$,

$(10\alpha-1)h_1^{[3,0]}+2\alpha(1-\alpha)h_1^{[1,2]}=\widehat{Y}_2^{[3,2]}+4\widehat{Y}_1^{[4,0]}+2\alpha\widehat{Y}_1^{[2,2]}$, $\alpha(4\alpha-1)h_1^{[3,0]}=(4\alpha-1)\widehat{Y}_1^{[4,0]}+\widehat{Y}_2^{[5,0]}$, из которой получаем резонансную связь :

$$\alpha^2\widehat{Y}_1^{[0,4]}-\alpha\widehat{Y}_1^{[4,0]}+\alpha^2\widehat{Y}_2^{[1,4]}-\alpha\widehat{Y}_2^{[3,2]}+\widehat{Y}_2^{[5,0]}=0. \tag{8_1^3}$$

А при $\alpha=1$ имеем дополнительную резонансную связь и свободную компоненту $h_1^{[3,0]}$:

$$5\widehat{Y}_1^{[4,0]}-2\widehat{Y}_1^{[2,2]}-\widehat{Y}_2^{[3,2]}+3\widehat{Y}_2^{[5,0]}=0. \tag{8_2^3}$$

3⁰. В дальнейшем будем всегда предполагать, что $r\geq 2$. Это позволит избежать дополнительных технических трудностей.

Перепишем систему (8) в новых более удобных обозначениях:

$$\begin{aligned}&(\alpha(2\tau+\nu-4)+r-\tau+1)h_{1,\tau-1}^r+(2\tau+\nu)h_{1,\tau}^r-h_{2,\tau}^r=\widehat{Y}_{1,\tau}^r,\\&(\alpha(2\tau+\nu-1)+r-\tau)h_{2,\tau}^r+(2\tau+\nu+1)h_{2,\tau+1}^r-h_{1,\tau}^r=\widehat{Y}_{2,\tau}^r,\end{aligned} \tag{9}$$

где $h_{1,\tau}^r=h_1^{[2\tau+\nu,2(r-\tau)]}$ $(\tau=\overline{0,r})$, $h_{2,\tau}^r=h_2^{[2\tau+\nu-1,2(r-\tau+1)]}$, $\widehat{Y}_{1,\tau}^r=\widehat{Y}_1^{[2\tau+\nu-1,2(r-\tau+1)]}$ $(\tau=\overline{1,r+1})$, $\widehat{Y}_{2,\tau}^r=\widehat{Y}_2^{[2\tau+\nu,2(r-\tau+1)]}$ $(\tau=\overline{0,r+1})$.

Подставляя $h_{2,\tau}^r$ из первого уравнения (9) во второе, получаем систему

$$c_\tau h_{1,\tau-1}^r+a_\tau h_{1,\tau}^r+b_\tau h_{1,\tau+1}^r=Y_{0,\tau}^r \qquad (\tau=\overline{0,r+1}),$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}&a_\tau=2\alpha((2\tau+\nu)^2-2\tau-\nu-1)+(r-\tau)(4\tau+2\nu+1)-1,\quad b_\tau=(2\tau+\nu+1)(2\tau+\nu+2),\\&c_\tau=(\alpha(2\tau+\nu-1)+r-\tau)(\alpha(2\tau+\nu-4)+r-\tau+1),\\&Y_{0,\tau}^r=\widehat{Y}_{2,\tau}^r+(\alpha(2\tau+\nu-1)+r-\tau)\widehat{Y}_{1,\tau}^r+(2\tau+\nu+1)\widehat{Y}_{1,\tau+1}^r\end{aligned}$$

или в векторной записи систему

$$\Theta^r h_1^r=Y_0^r, \tag{10}$$

где $\Theta^r=\begin{pmatrix}a_0&b_0&0&\dots&0\\c_1&a_1&b_1&\dots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&c_{r-1}&a_{r-1}&b_{r-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&c_r&a_r\\0&0&\dots&0&c_{r+1}\end{pmatrix}$ – $(r+2)\times(r+1)$ матрица, а компоненты векторов $h_1^r=(h_{1,0}^r,\dots,h_{1,r}^r)$ и $Y_0^r=(Y_{0,0}^r,\dots,Y_{0,r+1}^r)$ введены в (9).

3 Условия совместности системы в случае $\mathbf{r}\geq 2,\ \nu=0$

1⁰. В рассматриваемом случае коэффициенты системы (10) принимают вид

$$\begin{aligned}&a_\tau=2\alpha(4\tau^2-2\tau-1)+(r-\tau)(4\tau+1)-1,\quad b_\tau=(2\tau+1)(2\tau+2),\\&c_\tau=(\alpha(2\tau-1)+r-\tau)(2\alpha(\tau-2)+r-\tau+1),\\&Y_{0,\tau}^r=\widehat{Y}_{2,\tau}^r+(\alpha(2\tau-1)+r-\tau)\widehat{Y}_{1,\tau}^r+(2\tau+1)\widehat{Y}_{1,\tau+1}^r.\end{aligned} \tag{10_0}$$

Методом Гаусса будем аннулировать, пока это возможно, поддиагональ $(c_1, \ldots, c_{r+1})$ матрицы Θ^r, для чего введем рекуррентную последовательность d_τ :

$$d_0 = a_0,\ d_\tau = a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/d_{\tau-1},\ \text{пока}\ \ d_{\tau-1} \neq 0\ \ (1 \leq \tau \leq r,\ r \geq 2). \tag{11}$$

Возможны два случая: 1) $\exists\ \breve{\tau}\ (1 \leq \breve{\tau} \leq r):\ d_0, \ldots, d_{\breve{\tau}-1} \neq 0,\ d_{\breve{\tau}} = 0$; 2) $d_0, \ldots, d_r \neq 0$. В случае 2) положим $d_{r+1} = 0$ и $\breve{\tau} = r + 1$.

Лемма 1. *Для элементов d_τ из (11) справедлива прямая формула*

$$d_\tau = (2\tau + 1)\frac{(-2\alpha + r - \tau - 1)(2\alpha(\tau - 1) + r - \tau)}{-2\alpha + r - \tau}, \tag{12}$$

где $\tau = \overline{0, \breve{\tau}}$ в случае 1) и $\tau = \overline{0, r}$ в случае 2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\tau = 0$ в (11) и (12) элемент $d_0 = -2\alpha + r - 1$.

Предположим, что $d_{\tau-1} = (2\tau-1)(2\alpha(\tau-2)+r-\tau+1)(-2\alpha+r-\tau)/(-2\alpha+r-\tau+1)$ при $\tau \geq 2$. Тогда согласно (11) $d_\tau = 2\alpha(4\tau^2-2\tau-1)+(r-\tau)(4\tau+1)-1-(\alpha(2\tau-4)+r-\tau+1)(\alpha(2\tau-1)+r-\tau)(2\tau-1)2\tau)/d_{\tau-1} = 2\alpha(4\tau^2-2\tau-1)+(r-\tau)(4\tau+1)-1-(\alpha(2\tau-1)+r-\tau)(-2\alpha+r-\tau+1)/(-2\alpha+r-\tau) = (2\tau+1)(2\alpha(\tau-1)+r-\tau)(-2\alpha+r-\tau-1)/(-2\alpha+r-\tau) = d_\tau$.$\square$

$\mathbf{2^0}$. Разобьем множество пар (α, r) $(\alpha \neq 0,\ r \geq 2)$ на четыре непересекающихся семейства $\{\alpha, r\}_j^d$ и для каждого введем константу τ_j^d $(j = \overline{0, 3})$:

$$\begin{aligned}
&\{\alpha, r\}_1^d = \{-1/2,\ 2n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \tau_1^d = 2n;\\
&\{\alpha, r\}_2^d = \{k/2,\ n\}_{k,n\in\mathbb{N},\ n\geq k+1}, \quad \tau_2^d = n - k - 1;\\
&\{\alpha, r\}_3^d = \{-k/2l,\ n(k + l) + 1\}_{k,l,n\in\mathbb{N}}, \quad \tau_3^d = ln + 1;\\
&\{\alpha, r\}_0^d = \{(\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_1^d \cup \{\alpha, r\}_2^d \cup \{\alpha, r\}_3^d\}, \quad \tau_0^d = r + 1.
\end{aligned}$$

Лемма 2. *Если пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_j^d$ $(j = \overline{1, 3})$, то для элементов d_τ из (12) реализуется случай 1) с $\breve{\tau} = \tau_j^d$; если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_0^d$, то реализуется случай 2) с $\breve{\tau} = \tau_0^d = r + 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение $d_\tau = 0$ $(0 \leq \tau \leq r)$.

Пусть $-2\alpha + r - \tau - 1 = 0$, тогда $\alpha = (r - \tau - 1)/2 = k/2 \neq 0$, т. е. $k = -1$ или $k \in \mathbb{N}$. Поэтому либо $\alpha = -1/2$, $r = 2n, \tau = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$, а значит, пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_d^1$ и $\tau = \tau_1^d$, либо $\alpha = k/2$, $r = n$, $\tau = n-k-1$ $(n, k \in \mathbb{N})$ и $n \geq k+1$, поскольку $\tau \geq 0$ и $r \geq 2$, а значит, пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^d$ и $\tau = \tau_2^d$, либо $\alpha = -1/2$, $r = \tau = 2n + 1$, но этот случай реализуется в множестве $\{\alpha, r\}_3^d$ при $k, l = 1$ и там $\tau_3^d = n + 1 < \tau$.

Пусть $2\alpha(\tau - 1) + r - \tau = 0$, тогда $\tau \neq 1$ (иначе $r = 1$).

Если $2 \leq \tau \leq r$, то $\alpha = -(r - \tau)/(2\tau - 2) < 0$, поэтому $2\tau - 2 = 2ln$, $r - \tau = kn$, $(k, l, n \in \mathbb{N}$, k и l взаимно-простые), значит, $\alpha = -k/(2l)$, $\tau = ln + 1$, $r = n(k + l) + 1$, т. е. $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^d$ и $\tau = \tau_3^d$.

Если $\tau = 0$, то множитель $2\alpha(\tau-1)+r-\tau$ сокращается со знаменателем $d_\tau = -2\alpha+r$.

Ясно, что знаменатель d_τ при $\tau = \overline{1, r}$ не равен нулю. Он на единицу больше первого сомножителя числителя и убывает с ростом τ.

Пусть, наконец, $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_0^d$, тогда все входящие в d_τ сомножители в нуль не обращаются при $\tau = \overline{0, r}$, т. е. реализуется случай 2). $\square$

В результате система (10) может быть преобразована в систему

$$\Theta_d^r h_1^r = Y_d^r, \tag{13}$$

где $\Theta_d^r = \begin{pmatrix} d_0 & b_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{\breve\tau-1} & b_{\breve\tau-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} & b_{\breve\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{\breve\tau+1} & a_{\breve\tau+1} & b_{\breve\tau+1} & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{\breve\tau+2} & a_{\breve\tau+2} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{r-1} & a_{r-1} & b_{r-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & c_r & a_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \end{pmatrix}$ $(r+2)\times(r+1)$ матрица,

Y_d^r имеет компоненты $Y_{d,0}^r = Y_{0,0}^r$, $Y_{d,\tau}^r = Y_{0,\tau}^r - (c_\tau/d_{\tau-1})Y_{d,\tau-1}^r$ $(\tau = \overline{1,\breve\tau})$, $Y_{d,\tau}^r = Y_{0,\tau}^r$ $(\tau = \overline{\breve\tau+1, r+1})$; a_τ, b_τ, c_τ описаны в (10_0), а d_τ в (12).

Очевидно, что

$$Y_{d,\tau}^r = \sum_{j=0}^{\tau} (-1)^{\tau-j} Y_{0,j}^r \prod_{\nu=j+1}^{\tau} c_\nu/d_{\nu-1} \qquad (\tau = \overline{0,\breve\tau})$$

и первые $\breve\tau$ уравнений системы (13) однозначно разрешимы относительно $h_{1,0}^r, \dots, h_{1,\breve\tau-1}^r$, а уравнение с номером $\breve\tau$ имеет вид

$$0 \cdot h_{1,\breve\tau-1}^r + 0 \cdot h_{1,\breve\tau}^r + b_{\breve\tau} h_{1,\breve\tau+1}^r = Y_{d,\breve\tau}^r \qquad (h_{1,r+1}^r, h_{1,r+2}^r = 0). \tag{14}$$

В частности, в случае 2) $\breve\tau = r+1$, поэтому Θ_d^r – двухдиагональная матрица с нулевой нижней строкой и уравнение (14) имеет вид $0 \cdot h_{1,r}^r = Y_{d,r+1}^r$.

3⁰. Разобьем множество пар (α, r) $(\alpha \neq 0,\ r \geq 2)$ другим способом на пять непересекающихся семейств с соответствующими константами τ_j^c $(j = \overline{0,4})$:

$$\begin{aligned}
&\{\alpha, r\}_1^c = \{-k/(2l-1),\ (k+l)(2n-1) - n + 1\}_{k,l,n\in\mathbb{N}},\ \tau_1^c = l(2n-1) - n + 1;\\
&\{\alpha, r\}_2^c = \{1/(2l+1),\ l\}_{l\geq 2},\ \tau_2^c = l+1;\\
&\{\alpha, r\}_3^c = \{-k/2l,\ (k+l)n + 1\}_{k,l,n\in\mathbb{N}},\ \ \tau_3^c = ln + 2;\\
&\{\alpha, r\}_4^c = \{k/2,\ k\}_{k\geq 2},\ \tau_4^c = 1;\\
&\{\alpha, r\}_0^c = \{(\alpha, r) \notin \cup_{j=1}^4 \{\alpha, r\}_j^c\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\{\alpha, r\}_3^c = \{\alpha, r\}_3^d,\ \ \tau_3^c = \tau_3^d + 1; \quad \{\alpha, r\}_j^c \subset \{\alpha, r\}_0^d \quad (j = 1, 2, 4). \tag{15}$$

Элементы c_τ из (10_0) и d_τ из (12) удобно записать в следующем виде:

$$c_\tau = c'_\tau c''_\tau \ \ (\tau = \overline{1, r+1}), \quad d_\tau = (2\tau+1) c''_{\tau+1} d'_{\tau+1} {d'_\tau}^{-1} \ \ (\tau = \overline{0, \breve{\tau}}), \tag{16}$$

где $c'_\tau = \alpha(2\tau - 1) + r - \tau$, $\ c''_\tau = 2\alpha(\tau - 2) + r - (\tau - 1)$, $d'_\tau = -2\alpha + r - \tau$.

Лемма 3. *Для элементов c_τ из (10_0) справедливы следующие утверждения:*

а) $c'_\tau = 0 \ \Leftrightarrow \ (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_j$ *и* $\tau = \tau^c_j$ $(j = 1, 2)$,

б) $c''_\tau = 0 \ \Leftrightarrow \ (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_j$ *и* $\tau = \tau^c_j$ $(j = 3, 4)$,

в) $c_1, \ldots, c_{r+1} \neq 0 \ \Leftrightarrow \ (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_0$.

Доказательство. а) Пусть $c'_\tau = 0$. Тогда $\tau \neq r$ (иначе $\alpha = 0$).

Если $1 \le \tau \le r - 1$, то $\alpha = -(r - \tau)/(2\tau - 1) < 0$, поэтому $2\tau - 1 = (2l - 1)(2n - 1)$, $r - \tau = k(2n - 1) \ \ (k, l, n \in \mathbb{N})$, а значит, $\alpha = -k/(2l - 1)$, $\tau = l(2n - 1) - n + 1$, $r = (k + l)(2n - 1) - n + 1$, т. е. $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_1$ и $\tau = \tau^c_1$.

Если $\tau = r + 1$, то $\alpha = 1/(2r + 1) > 0$, т. е. $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_2$ и $\tau = \tau^c_2$.

Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_j$ $(j = 1, 2)$, то, подставляя нужные α, r в c'_τ, получим $c'_\tau = 0$.

б) Пусть $c''_\tau = 0$. Тогда $\tau \neq 2$ (иначе $r = 1$).

Если $3 \le \tau \le r+1$, то $\alpha = -(r-\tau+1)/(2\tau-4) < 0$, поэтому $2\tau-4 = 2ln$, $r-\tau+1 = kn$, $(k, l, n \in \mathbb{N}$, k и l взаимно-простые), а значит, $\alpha = -k/(2l)$, $\tau = ln + 2$, $r = n(k + l) + 1$, т. е. $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_3$ и $\tau = \tau^c_3$.

Если $\tau = 1$, то $\alpha = r/2 > 0$, т.е. $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_4$ и $\tau = \tau^c_4$. Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_j$ $(j = 3, 4)$, то, подставляя соответствующие α, r в c''_τ, получим $c''_\tau = 0$.

В результате, утверждение в) стало очевидным. $\square$

В частности, из леммы 3 и (15) вытекает, что $\{\alpha, r\}^d_1 \cup \{\alpha, r\}^d_2 \subset \{\alpha, r\}^c_0$.

$\mathbf{4^0}$. В случае 1) выделим последние $r - \breve{\tau} + 1 \ge 1$ уравнений (13) в систему

$$\Theta^{r+}_d h^{r+}_1 = Y^{r+}_d, \tag{17}$$

где $\Theta^{r+}_d = \begin{pmatrix} c_{\breve{\tau}+1} & a_{\breve{\tau}+1} & b_{\breve{\tau}+1} & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & c_{\breve{\tau}+2} & a_{\breve{\tau}+2} & \ddots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{r-1} & a_{r-1} & b_{r-1} \\ 0 & 0 & \ldots & \ddots & c_r & a_r \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & c_{r+1} \end{pmatrix}$ – $(r - \breve{\tau} + 1) \times (r - \breve{\tau} + 1)$ матрица, а векторы $h^{r+}_1 = (h^r_{1,\breve{\tau}}, \ldots, h^r_{1,r})$, $Y^{r+}_d = (Y^r_{d,\breve{\tau}+1}, \ldots, Y^r_{d,r+1})$.

По лемме 3 все диагональные элементы $c_{\breve{\tau}+1}, \ldots, c_{r+1}$ матрицы Θ^{r+}_d отличны от нуля, кроме $c_{\breve{\tau}+1} = 0$ в случае, когда $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_3$. Поэтому (17) можно диагонализовать.

Для этого в случае 1) удобно ввести матрицу $G = \{g_{\tau j}\}^r_{\tau, j = \breve{\tau}+1}$:

$$\begin{aligned} &\forall\ \tau = \overline{\breve{\tau} + 1, r + 1} : \quad g_{\tau j} = 0 \quad (\breve{\tau} + 1 \le j \le \tau - 1) \qquad (g_{\breve{\tau}+1\, \breve{\tau}} = 0), \\ &g_{\tau\tau} = 1, \quad g_{\tau j} = -(g_{\tau j-1} a_{j-1} + g_{\tau j-2} b_{j-2})/c_j \quad (\tau + 1 \le j \le r + 1). \end{aligned} \tag{18}$$

Тогда $G\Theta^{r+}_d = \{g_{\tau j-2} b_{j-2} + g_{\tau j-1} a_{j-1} + g_{\tau j} c_j\}^r_{\tau, j = \breve{\tau}+1} = \operatorname{diag}\{c_{\breve{\tau}+1}, \ldots, c_{r+1}\}$.

Кроме того, для оценки элементов матрицы G, которая в дальнейшем неоднократно потребуется, удобно ввести рекуррентную последовательность чисел $f_{\tau j}$:

$$\forall\, \tau = \overline{\breve{\tau}+1, r}: \; f_{\tau\tau} = -a_\tau, \;\; f_{\tau j} = -a_j - b_{j-1}c_j/f_{\tau\, j-1} \;\; (\tau+1 \le j \le r), \;\; \text{пока} \;\; f_{\tau\, j-1} \neq 0. \tag{19}$$

Утверждение 1. *Для элементов $g_{\tau\, j}$ из (18) имеет место формула:*

$$g_{\tau\tau} = 1, \quad g_{\tau\, j} = g_{\tau\, j-1} f_{\tau\, j-1}/c_j \quad (j = \overline{\tau+1, r+1}). \tag{20}$$

Доказательство. Докажем формулу (20) индукцией по j. При $j = \tau+1$ согласно (18) и формуле (19) $g_{\tau\,\tau+1} = -(g_{\tau\tau}a_\tau + g_{\tau\,\tau-1}b_{\tau-1})/c_{\tau+1} = g_{\tau\tau}f_{\tau\tau}/c_{\tau+1}$, что дает базу индукции.

Предположим, что (20) справедлива, тогда $g_{\tau\, j+1} = -(g_{\tau j}a_j + g_{\tau\, j-1}b_{j-1})/c_{j+1} = -g_{\tau j}(a_j + c_j b_{j-1}/f_{\tau\, j-1})/c_{j+1} = g_{\tau j}f_{\tau j}/c_{j+1}$ согласно (19). $\square$

Итак, система (17), помноженная слева на матрицу G, равносильна системе

$$c_\tau h^r_{1,\tau-1} = \sum\nolimits_{j=\tau}^{r+1} g_{\tau j} Y^r_{0,j} \qquad (\tau = \overline{\breve{\tau}+1, r+1}). \tag{21}$$

Полученная система однозначно разрешима, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_1 \cup \{\alpha, r\}^d_2$, а если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_3 = \{\alpha, r\}^c_3$, то первое уравнение системы (21) с $\tau = \breve{\tau}+1 = \tau^d_3 + 1$ имеет вид

$$0 \cdot h^r_{1,\tau^d_3} = \sum\nolimits_{j=\tau^d_3+1}^{r+1} g_{\tau j} Y^r_{0,j}, \tag{22}$$

задавая резонансную связь, причем коэффициент h^r_{1,τ^d_3} не имеет ограничений.

5^0. Вернемся к уравнению (14). Подставляя в него прямую формулу для $Y^r_{d,\breve{\tau}}$ из (13), а в случае 1), когда $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_2 \cup \{\alpha, r\}^d_3$ и $\breve{\tau} \le r-1$, также $h^r_{1,\breve{\tau}+1}$ из уравнения (21) $(c_{\breve{\tau}+2} \neq 0)$, получаем резонансную связь

$$0 \cdot h^r_{1,\breve{\tau}+1} = \sum_{j=0}^{\breve{\tau}} (-1)^{\breve{\tau}-j} \prod_{\nu=j+1}^{\breve{\tau}} \frac{c_\nu}{d_{\nu-1}} Y^r_{0,j} - \frac{b_{\breve{\tau}}}{c_{\breve{\tau}+2}} \sum_{j=\breve{\tau}+2}^{r+1} g_{\breve{\tau}+2\, j} Y^r_{0,j}. \tag{23}$$

6^0. Выразим теперь в универсальной связи (23) и в дополнительной – (22) компоненты $Y^r_{0,j}$ через $\widehat{Y}^r_{i,j}$ $(i = 1, 2)$ с учетом (10_0), (12) и (16), для чего введем константы:

$$\begin{aligned}
&v^0_j = (-1)^{\breve{\tau}-j} \frac{d'_j}{d'_{\breve{\tau}}} \prod_{\nu=j+1}^{\breve{\tau}} \frac{c'_\nu}{2\nu-1} \;\; (j = \overline{0, \breve{\tau}}), \;\; u^0_0 = 0, \;\; u^0_j = -\frac{c'_j}{d'_j} v^0_j \;\; (j = \overline{1, \breve{\tau}}); \\
&v^0_{\breve{\tau}+1} = 0, \; u^0_{\breve{\tau}+1} = 2\breve{\tau}+1; \\
&v^0_j = -\frac{b_{\breve{\tau}} g_{\breve{\tau}+2\, j}}{c_{\breve{\tau}+2}}, \;\; u^0_j = -\frac{b_{\breve{\tau}}(c'_j g_{\breve{\tau}+2\, j} + (2j-1) g_{\breve{\tau}+2\, j-1})}{c_{\breve{\tau}+2}} \;\; (j = \overline{\breve{\tau}+2, r+1}); \\
&v^{0_3}_j = g_{\tau^d_3+1\, j}, \;\; u^{0_3}_j = c'_j g_{\tau^d_3+1\, j} + (2j-1) g_{\tau^d_3+1\, j-1} \;\; (j = \overline{\tau^d_3+1, r+1}).
\end{aligned} \tag{24}$$

Тогда при $j = \overline{1, \breve{\tau}}$ в (24) имеем:

$$v^0_j = -\frac{(2j-1)d'_j}{c'_j d'_{j-1}} v^0_{j-1}, \quad u^0_j = c'_j \left(1 - \frac{d'_j+1}{d'_j}\right) v^0_j = c'_j v^0_j - c'_j \frac{d'_{j-1}}{d'_j} v^0_j = c'_j v^0_j + (2j-1) v^0_{j-1}.$$

Теперь согласно (16), (23) и (10_0) $(-1)^{\breve\tau-j}\prod_{\nu=j+1}^{\breve\tau}c_\nu/d_{\nu-1}=v_j^0\ \ (j=\overline{0,\breve\tau})$,
$\sum_{j=0}^{\breve\tau}v_j^0Y_{0,j}^r=\sum_{j=0}^{\breve\tau}v_j^0(2j+1)\widehat{Y}_{1,j+1}^r+\sum_{j=0}^{\breve\tau}v_j^0(\alpha(2j-1)+r-j)\widehat{Y}_{1,j}^r+\sum_{j=0}^{\breve\tau}v_j^0\widehat{Y}_{2,j}^r=$
$\sum_{j=1}^{\breve\tau}(v_j^0(\alpha(2j-1)+r-j)+v_{j-1}^0(2j-1))\widehat{Y}_{1,j}^r+v_{\breve\tau}^0(2\breve\tau+1)\widehat{Y}_{1,\breve\tau+1}+\sum_{j=0}^{\breve\tau}v_j^0\widehat{Y}_{2,j}^r=$
$\sum_{j=1}^{\breve\tau}(v_j^0c_j'+v_{j-1}^0(2j-1))\widehat{Y}_{1,j}^r+v_{\breve\tau}^0(2\breve\tau+1)\widehat{Y}_{1,\breve\tau+1}+\sum_{j=0}^{\breve\tau}v_j^0\widehat{Y}_{2,j}^r=$
$\sum_{j=1}^{\breve\tau}u_j^0\widehat{Y}_{1,j}^r+u_{\breve\tau+1}^0\widehat{Y}_{1,\breve\tau+1}+\sum_{j=0}^{\breve\tau}v_j^0\widehat{Y}_{2,j}^r$, а согласно (18) и (23)
$\sum_{j=\breve\tau+2}^{r+1}g_{\breve\tau+2\,j}Y_{0,j}^r=\sum_{j=\breve\tau+2}^{r+1}g_{\breve\tau+2\,j}(c_j'\widehat{Y}_{1,j}^r+\widehat{Y}_{2,j}^r)+\sum_{j=\breve\tau+3}^{r+2}g_{\breve\tau+2\,j-1}(2j-1)\widehat{Y}_{1,j}^r$.

В результате универсальная связь (23) принимает вид

$$v_0^0\widehat{Y}_{2,0}^r+\sum_{j=1}^{\breve\tau}(u_j^0\widehat{Y}_{1,j}^r+v_j^0\widehat{Y}_{2,j}^r)+u_{\breve\tau+1}^0\widehat{Y}_{1,\breve\tau+1}^r+\sum_{j=\breve\tau+2}^{r+1}(u_j^0\widehat{Y}_{1,j}^r+v_j^0\widehat{Y}_{2,j}^r)=0, \tag{25}$$

а дополнительная связь (22) при свободной компоненте $h_{1,\tau_3^d}^r$ имеет вид

$$\sum_{j=\tau_3^d+1}^{r+1}(u_j^{0_3}\widehat{Y}_{1,j}^r+v_j^{0_3}\widehat{Y}_{2,j}^r)=0, \qquad (\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_3^d. \tag{26}$$

Отметим, что случае 1), когда $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_1^d$ с $\breve\tau=r$, и в случае 2), когда $\breve\tau=r+1$, вторая сумма в правой части (25) отсутствует.

7^0. Теперь предстоит разобраться, какие коэффициенты $\widehat{Y}_{i,j}^r$ реально присутствуют в связях (25) и (26), т. е. определить, какие множители u, v равны нулю, а какие нет.

Попутно, резонансные связи надо будет записать в виде резонансных уравнений.

Для этого, во-первых, необходимо заменить компоненты $\widehat{Y}_{i,j}^r$, входящие в (25) и (26) на коэффициенты системы (3) согласно обозначениям, введенным для систем (9) и (8):

$$\widehat{Y}_{i,\tau}^r=\widehat{Y}_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]}=\widetilde{Y}_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]}-Y_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]}\quad(i=1,2),$$

во-вторых, все известные слагаемые, содержащие коэффициенты предшествующих форм (они отмечены сверху волной), надо перенести в правые части уравнений и единообразно обозначить константой $\widetilde{c}$ (см. также определения раздела 6).

Из линейности c_j' в (16) и из формул (24) вытекают оценки:

$$\begin{array}{l} c_j'=0\ \ (1\le j\le\breve\tau)\ \Rightarrow\ v_0^0,...,v_{j-1}^0,u_0^0,...,u_j^0=0,\ \ v_j^0,...,v_{\breve\tau}^0\ne0,\ \ u_{j+1}^0,...,u_{\breve\tau}^0\ne0;\\ c_1',...,c_{\breve\tau}'\ne0\ \Rightarrow\ v_0^0,...,v_{\breve\tau}^0\ne0,\ \ u_1^0,...,u_{\breve\tau+1}^0\ne0. \end{array} \tag{27}$$

Утверждение 2. *Имеют место следующие оценки множителей:*

0_1) $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_1^c$, *тогда* $v_{\tau_1^c}^0,\ldots,v_{r+1}^0\ne0$ *и* $u_{\tau_1^c+1}^0,\ldots,u_{r+1}^0\ne0$.

0_2) $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_2^c$, *тогда* $v_0^0,\ldots,v_r^0=0$ *и* $u_1^0,\ldots,u_{r+1}^0=0$, *а* $v_{r+1}^0=1$.

0_*) $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_0^d\setminus(\{\alpha,r\}_1^c\cup\{\alpha,r\}_2^c)$, *тогда* $v_0^0,\ldots,v_{r+1}^0\ne0$ *и* $u_1^0,\ldots,u_{r+1}^0\ne0$.

1) $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_1^d$, *тогда* $v_0^0,\ldots,v_r^0\ne0$ *и* $u_1^0,\ldots,u_{r+1}^0\ne0$.

2) $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_2^d$, *тогда* $v_0^0,\ldots,v_{\tau_2^d}^0\ne0$ *и* $u_1^0,\ldots,u_{\tau_2^d+1}^0\ne0$.

3) $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_3^d$, *тогда* $v_0^0,\ldots,v_{\tau_3^d}^0\ne0$ *и* $u_1^0,\ldots,u_{\tau_3^d+1}^0\ne0$.

Доказательство. Пункты утверждения вытекают из следующих соображений.

$0_1)$ $\tau_1^c = l(2n-1)-n+1$ $(1 \le \tau_1^c \le r+1)$, $c'_{\tau_1^c} = 0$ и выполнено (27).

$0_2)$ $\tau_2^c = r+1$, $c'_{r+1} = 0$ и выполнено (27).

$0_*)$ $\breve{\tau} = r+1$, по лемме 3 $c'_1,\dots,c'_{r+1} \neq 0$ и выполнено (27).

i) $c'_1,\dots,c'_{r+1} \neq 0$ вытекает из (15), иначе $(\alpha,r) \in \{\alpha,r\}_0^d$; $\breve{\tau} = \tau_i^d$ $(i = 1,2)$ и выполнено (27).

3) $c'_1,\dots,c'_{r+1} \neq 0$ по лемме 3, так как $(\alpha,r) \in \{\alpha,r\}_3^d = \{\alpha,r\}_3^c$; $\breve{\tau} = \tau_3^d$ и – (27). □

Рассмотрим резонансную связь (25).

0) $(\alpha,r) \in \{\alpha,r\}_0^d$, тогда реализуется случай 2) и $\breve{\tau} = r+1$.

$0_1)$ Если $(\alpha,r) \in \{\alpha,r\}_1^c$, то $\tau_1^c = l(2n-1)-n+1$ $(1 \le \tau_1^c \le r+1)$ и (25) принимает вид

$$v^0_{\tau_1^c} Y_2^{[2\tau_1^c,2(r-\tau_1^c+1)]} + \sum_{j=\tau_1^c+1}^{r+1} \Big(u_j^0 Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]} + v_j^0 Y_2^{[2j,2(r-j+1)]} \Big) = \widetilde{c}, \tag{25_1^c}$$

где $v^0_{\tau_1^c},\dots,v^0_{r+1} \neq 0$ и $u^0_{\tau_1^c+1},\dots,u^0_{r+1} \neq 0$ согласно утверждению 2.

$0_2)$ Если $(\alpha,r) \in \{\alpha,r\}_2^c$, то $\tau_2^c = r+1$ и (25) принимает вид

$$Y_2^{[2(r+1),0]} = \widetilde{c}, \tag{25_2^c}$$

так как только $v^0_{r+1} = 1$ согласно утверждению 2.

$0_*)$ Если $(\alpha,r) \in \{\alpha,r\}_0^d \setminus (\{\alpha,r\}_1^c \cup \{\alpha,r\}_2^c)$, то $\breve{\tau} = r+1$ и (25) принимает вид

$$v_0^0 Y_2^{[0,2(r+1)]} + \sum_{j=1}^{r+1} \Big(u_j^0 Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]} + v_j^0 Y_2^{[2j,2(r-j+1)]} \Big) = \widetilde{c}, \tag{25_*^c}$$

где все входящие в него множители u, v отличны от нуля согласно утверждению 2.

Итак, если $(\alpha,r) \in \{\alpha,r\}_0^d$, то должно выполняться одно из резонансных уравнений (25_1^c), (25_2^c) или (25_*^c).

1) Если $(\alpha,r) \in \{\alpha,r\}_1^d$, то $\breve{\tau} = \tau_1^d = r = 2n$ и (25) принимает вид

$$v_0^0 Y_2^{[0,2(r+1)]} + \sum_{j=1}^{r} \Big(u_j^0 Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]} + v_j^0 Y_2^{[2j,2(r-j+1)]} \Big) + u^0_{r+1} Y_1^{[2r+1,0]} = \widetilde{c}, \tag{25_1^d}$$

где все входящие в него множители u, v отличны от нуля согласно утверждению 2.

2) $(\alpha,r) \in \{\alpha,r\}_2^d$, тогда $\breve{\tau} = \tau_2^d = n-k-1$ $(n \ge k+1)$.

Оценим u_j^0, v_j^0 из (25) при $\tau_2^d + 2 \le j \le r+1$.

При $k = 1$ имеем: $\tau_2^d = n-2$, $r = n$, $\alpha = 1/2$, в (16) $c_j = (n-1/2)(n-1) > 0$. Тогда $v_n^0 = -b_{n-2} g_{nn}/c_n < 0$, $u_n^0 = -b_{n-2} g_{nn}(n-1/2)/c_n < 0$, $v^0_{n+1} = b_{n-2} a_n g_{nn}/(c_n c_{n+1}) > 0$, $u^0_{n+1} = b_{n-2} g_{nn}(c'_{n+1} a_n - 2n - 1)/(c_n c_{n+1}) > 0$.

Пусть теперь $k \ge 2$. Поскольку $(\alpha,r) \in \{\alpha,r\}_2^d$, то $\alpha = k/2$, $r = n$. Поэтому в (10_0)

$$a_\tau = (n-\tau)(4\tau+1) + k(4\tau^2 - 2\tau - 1) - 1, \quad c_\tau = ((k-1)\tau + n - k/2)((k-1)\tau + n - 2k + 1).$$

При этом $c_\tau = 0$ при $\tau = (k/2 - n)/(k-1)$ за счет c'_τ и при $\tau = (2k-n-1)/(k-1)$ за счет c''_τ. Поэтому $c_\tau > 0$ при $\tau \ge 1$.

Лемма 4_2. *При* $\tau=\tau_2^d+2,\ j=\overline{\tau+1,r+1}$ *в (18)* $\operatorname{sign} g_{\tau j}=-\operatorname{sign} g_{\tau\, j-1}$, *а* $g_{\tau\tau}=1$.

Доказательство. Согласно (20) $g_{\tau_2^d+2\,j}=g_{\tau_2^d+2\,j-1}f_{\tau_2^d+2\,j-1}/c_j$ для тех $j=\overline{\tau_2^d+3,r+1}$, при которых $f_{\tau_2^d+2\,j-1}\neq 0$.

Для оценки сверху чисел $f_{\tau j}$ введем функцию

$$\xi_j=-(2j+2)(\alpha(2j-2)+r-j)=-(2j+2)(k(j-1)+n-j)\quad (j=\overline{\tau_2^d+2,r}).$$

Имеем: $\xi_j<0$ при $j\geq 0$, поскольку $\xi_j=0$ при $j=-1,\ -(n-k)(k-1)$.

Покажем методом индукции по j, что

$$f_{\tau j}<\xi_j\quad (\tau=\tau_2^d+2,\ j=\overline{\tau,r}).$$

При $j=\tau_2^d+2$ согласно (19) $f_{\tau\tau}-\xi_\tau=-2k(n-k+1)^2+2(n-k+1)<0$, что дает базу индукции.

Предположим, что $f_{\tau\, j-1}<\xi_{j-1}$. Тогда $f_{\tau j}=-a_j-b_{j-1}c_j/f_{\tau\, j-1}<-a_j-b_{j-1}c_j/\xi_{j-1}<\xi_j$, так как $b_{j-1}c_j>0$ и $-a_j-b_{j-1}c_j/\xi_{j-1}-\xi_j=1-\alpha=1-k/2\leq 0$ при $k\geq 2$.

Таким образом, индукционный переход доказан, а значит, все $f_{\tau j}<0$ и в формуле (20) $g_{\tau j}$ и $g_{\tau\, j-1}$ имеют разные знаки. $\square$

Согласно лемме 4_2 и (24) при $j=\overline{\tau_2^d+2,r+1}$ множители $v_j^0<0$, если $j-\tau_2^d$ четно и $v_j^0>0$, если $j-\tau_2^d$ нечетно $(\breve{\tau}=\tau_2^d)$.

Поскольку $c_j'=(k-1)\tau+n-k/2>0$ при $j\geq 0$, имеет место следующая оценка: если $g_{\tau j-1}>0$, то входящее в u_j^0 из (24) выражение $c_j'g_{\tau j}+(2j-1)g_{\tau j-1}=g_{\tau j-1}(c_j'f_{\tau j-1}/c_j+2j-1)<g_{\tau j-1}(c_j'\xi_{\tau j-1}/c_j+2j-1)=-g_{\tau j-1}<0$, если $g_{\tau j-1}<0$, то $c_j'g_{\tau j}+(2j-1)g_{\tau j-1}>-g_{\tau j-1}>0$ при $(j=\overline{\tau_2^d+2,r+1})$. Таким образом, $v_j^0\neq 0,\ u_j^0\neq 0$ $(j=\overline{\tau_2^d+2,r+1})$ и знакочередующиеся.

В результате, если $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_2^d$, то $\tau_2^d=n-k-1$ и (25) принимает вид

$$v_0^0Y_2^{[0,2(r+1)]}+\sum_{j=1}^{\tau_2^d}\left(u_j^0Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]}+v_j^0Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}\right)+u^0_{\tau_2^d+1}Y_1^{[2\tau_2^d+1,2(r-\tau_2^d)]}+$$
$$+\sum_{j=\tau_2^d+2}^{r+1}\left(u_j^0Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]}+v_j^0Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}\right)=\widetilde{c},\qquad (25_2^d)$$

где все входящие в него множители $v,\ u$ отличны от нуля согласно утверждению 2.

3) $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_3^d=\{\alpha,r\}_3^c$, тогда $\breve{\tau}=\tau_3^d=ln+1$.

Оценим $u_j^0,\ v_j^0$ при $\tau_3^d+2\leq j\leq r+1$ в (25) и $u_j^{0_3},v_j^{0_3}$ при $\tau_3^d+1\leq j\leq r+1$ в (26).

Поскольку $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_3^d$, то $\alpha=-k/2l,\ r=(k+l)n+1$, $\tau_3^d=ln+1$ и в (10_0)

$$a_\tau=(((k+l)n+1-\tau)l(4\tau+1)-k(4\tau^2-2\tau-1)-l)/l,$$
$$c_\tau=((((k+l)n+1)2l-k(2\tau-1)-2l\tau)/2l)((((k+l)n+2)l-l\tau-k(\tau-2))/l).$$

При этом $c_\tau=0$ при $\tau=ln+(2l+k)/(2l+2k)$ за счет c_τ' и при $\tau=ln+2$ за счет $c_\tau''=0$. Поэтому $c_\tau>0$ при $\tau\geq ln+3=\tau_3^d+2$.

Лемма 4_3. *При* $\tau=\tau_3^d+1,\ \tau_3^d+2,\ j=\overline{\tau,r+1}$ *в (18)* $g_{\tau j}>0$.

<u>*Доказательство.*</u> Согласно (20) $g_{\tau j}=g_{\tau\,j-1}f_{\tau\,j-1}/c_j$ для $\tau=\tau_3^d+1,\tau_3^d+2$ и тех $j=\overline{\tau_3^d+1,r+1}$, при которых $f_{\tau\,j-1}\neq 0$.

Для оценки снизу чисел $f_{\tau j}$ введем функцию

$$\xi_j=-2(j+1)(\alpha(2j-2)+r-j)=2(j+1)(k(j-1)/l-(k+l)n-1+j)\ (j=\overline{\tau_3^d+1,r}).$$

Имеем: $\xi_j>0$ при $j\geq ln+2=\tau_3^d+1$, поскольку $\xi_j=0$ при $j=-1,\ ln+1$.

Покажем методом индукции по j, что

$$f_{\tau j}>\xi_j\quad(\tau=\tau_3^d+1,\tau_3^d+2,\quad j=\overline{\tau,r}).$$

При $\tau=\tau_3^d+1=ln+2$ согласно (19) $f_{\tau\tau}=-a_\tau=(5k+4l)n+10+11k/l>(2k+2l)n+6+6k/l=\xi_\tau$ и при $\tau=\tau_3^d+2=ln+3$ $f_{\tau\tau}=(9k+8l)n+27+29k/l>(4k+4l)n+16+16k/l=\xi_\tau$, что дает базу индукции.

Предположим, что $f_{\tau\,j-1}>\xi_{j-1}$. Тогда $f_{\tau j}=-a_j-b_{j-1}c_j/f_{\tau\,j-1}>-a_j-b_{j-1}c_j/\xi_{j-1}>\xi_j$, так как $b_{j-1}c_j>0$ и $-a_j-b_{j-1}c_j/\xi_{j-1}-\xi_j=1-\alpha=1+k/2l>0$.

Таким образом, индукционный переход доказан, а значит, все $f_{\tau j}>0$ и в формуле (20) $g_{\tau\tau}=1,\ g_{\tau j}>0$ $(j=\overline{\tau+1,r+1})$. $\square$

По лемме 4_3 и (24) получаем, что $v_j^0<0$ $(j=\overline{\tau_3^d+2,r+1})$, $v_j^{0_3}>0$ $(j=\overline{\tau_3^d+1,r+1})$. Поскольку $c'_j=\alpha(2j-1)+r-j<0$ при $j\geq ln+1=\tau_3^d$, то входящее в u_j^0 и в $u_j^{0_3}$ из (24) выражение $c'_jg_{\tau j}+(2j-1)g_{\tau\,j-1}<g_{\tau\,j-1}(c'_j\xi_{j-1}/c_j+2j-1)=-g_{\tau\,j-1}<0$, а значит, $u_j^0>0$ при $\tau_3^d+2\leq j\leq r+1$ и $u_j^{0_3}<0$ при $\tau_3^d+1\leq j\leq r+1$.

В результате, если $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_3^d$, то $\tau_3^d=ln+1$ и (25) принимает вид

$$v_0^0Y_2^{[0,2(r+1)]}+\sum_{j=1}^{\tau_3^d}\left(u_j^0Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]}+v_j^0Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}\right)+u^0_{\tau_3^d+1}Y_1^{[2\tau_3^d+1,2(r-\tau_3^d)]}+ \\ +\sum_{j=\tau_3^d+2}^{r+1}\left(u_j^0Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]}+v_j^0Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}\right)=\widetilde{c},\tag{25_3^d}$$

где все множители $v,\ u$ отличны от нуля согласно утверждению 2, причем $v_j^0<0,\ u_j^0>0$ при $\tau_3^d+2\leq j\leq r+1$. В свою очередь, резонансная связь (26) принимает вид

$$\sum_{j=\tau_3^d+1}^{r+1}\left(u_j^{0_3}Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]}+v_j^{0_3}Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}\right)=\widetilde{c},\tag{26_3^d}$$

где все множители $v,\ u$ отличны от нуля, причем $v_j^{0_3}>0,\ u_j^{0_3}<0$ при $\tau_3^d+1\leq j\leq r+1$.

4 Условия совместности системы в случае $\mathbf{r \geq 2}$, $\nu = 1$

1⁰. В рассматриваемом случае коэффициенты системы (10) принимают вид

$$\begin{aligned}
&a_\tau = 2\alpha(4\tau^2 + 2\tau - 1) + (r - \tau)(4\tau + 3) - 1,\\
&b_\tau = (2\tau + 2)(2\tau + 3),\\
&c_\tau = (\alpha(2\tau - 3) + r - \tau + 1)(2\alpha\tau + r - \tau),\\
&Y^r_{0,\tau} = \widehat{Y}^r_{2,\tau} + (2\alpha\tau + r - \tau)\widehat{Y}^r_{1,\tau} + (2\tau + 2)\widehat{Y}^r_{1,\tau+1}.
\end{aligned} \tag{10_1}$$

Разобьем множество пар (α, r) $(\alpha \neq 0,\ r \geq 2)$ на три непересекающихся семейства (см. лемму 5) с соответствующими константами τ^c_j $(j = \overline{0,2})$:

$$\begin{aligned}
&\{\alpha, r\}^c_1 = \{-k/(2l - 1),\, (k + l)(2n - 1) - n + 1\}_{(k,l,n)\in M_0\cup M_1}, \quad \tau^c_1 = 2ln - l - n + 2;\\
&\{\alpha, r\}^c_2 = \{-k/2l,\, n(k + l)\}_{(k,l,n)\in M_0\cup M_2}, \quad \tau^c_2 = ln;\\
&\{\alpha, r\}^c_0 = \{(\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}^c_1 \cup \{\alpha, r\}^c_2\}, \quad \tau^c_0 = 0,
\end{aligned}$$

где $M_0 = \{k, l, n \in \mathbb{N}\}$, $M_1 = \{k \geq 2,\, l = 0,\, n = 1\}$, $M_2 = \{k = -1,\, l \geq 3,\, n = 1\}$.

Запишем элементы c_τ нижней диагонали матрицы Θ^r в виде:

$$c_\tau = c'_\tau c''_\tau \ \ (\tau = \overline{1, r + 1}), \tag{28}$$

где $c'_\tau = \alpha(2\tau - 3) + r - \tau + 1$, $c''_\tau = 2\alpha\tau + r - \tau$.

Лемма 5. *Для элементов c_τ из (10_1) справедливы следующие утверждения:*

а) $c'_\tau = 0 \Leftrightarrow (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_1$ и $\tau = \tau^c_1$,

б) $c''_\tau = 0 \Leftrightarrow (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_2$ и $\tau = \tau^c_2$,

в) $c_1, \ldots, c_{r+1} \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_0$,

г) $\{\alpha, r\}^c_1 \bigcap \{\alpha, r\}^c_2 = \emptyset$.

Доказательство. а) Пусть $c'_\tau = 0$. Тогда $\tau \neq r+1$ (иначе $\alpha = 0$). Если $2 \leq \tau \leq r$, то $\alpha = -(r - \tau + 1)/(2\tau - 3) < 0$, поэтому $2\tau - 3 = (2l - 1)(2n - 1)$, $r - \tau + 1 = k(2n - 1)$, $(k, l, n \in \mathbb{N})$, а значит, $\alpha = -k/(2l - 1)$, $\tau = l(2n - 1) - n + 2$, $r = (k + l)(2n - 1) - n + 1$, т. е. $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_1$, $\tau = \tau^c_1$ при $(k, l, n) \in M_0$. Если $\tau = 1$, то $\alpha = r \geq 2, \tau = \tau^c_1$, т. е. $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_1$ при $(k, l, n) \in M_1$. Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_1$, то, подставляя соответствующие α, r в c'_τ, получим $c'_\tau = 0$.

б) Пусть $c''_\tau = 0$. Тогда $\tau \neq r$ (иначе $\alpha = 0$). Если $1 \leq \tau \leq r-1$, то $\alpha = -(r-\tau)/2\tau < 0$, поэтому $2\tau = 2ln$, $r - \tau = kn$, $(k, l, n \in \mathbb{N}$, k и l взаимно-простые), а значит, $\alpha = -k/(2l)$, $\tau = ln$, $r = n(k + l)$, т. е. $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_2$, $\tau = \tau^c_2$ при $(k, l, n) \in M_0$. Если $\tau = r + 1$, то $\alpha = 1/(2r + 2) > 0, \tau = \tau^c_2$, т. е. $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_2$ при $(k, l, n) \in M_2$. Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_2$, то, подставляя соответствующие α, r в c''_τ, получим $c''_\tau = 0$.

в) Исходя из утверждений а) и б) утверждение в) очевидно.

г) Если найдется пара (α, r), для которой $c'_{\tau_1}, c''_{\tau_2} = 0$, т. е. $\alpha(2\tau_1 - 3) + r - \tau_1 + 1 = 0$ и $2\alpha\tau_2 + r - \tau_2 = 0$, то, избавляясь от α, получаем уравнение : $r(2(\tau_1 - \tau_2) - 3) + \tau_2 = 0$, что возможно только, если $\tau_1 - \tau_2 = 1$, а значит $r = \tau_2$. Тогда $\alpha = 0$ в равенстве $c''_{\tau_2} = 0$. Следовательно $\{\alpha, r\}^c_1 \cap \{\alpha, r\}^c_2 = \emptyset$. □

Следствие 1. *a) Если* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$ *и* $(k, l, n) \in M_0$, *то* $c_\tau > 0 \quad (1 \le \tau \le \tau_1^c - 2)$, *а* $c_{\tau_1^c - 1} < 0$. *b) Если* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^c$, *то* $c_\tau > 0 \quad (1 \le \tau < \tau_2^c)$.

Доказательство. Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$, то, подставляя эту пару в (28), получаем $c_\tau = (\tau_1^c - \tau)(\tau_1^c - 1 - k/(2k + 2l - 1) - \tau)$ и верно a). Если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^c$, то $c_\tau = ((k + l)(ln - \tau) + 3k/2 + l)(k + l)(ln - \tau)/l^2$. Поэтому $c_\tau > 0$ при $\tau < \tau_2^c$ и верно b). □

$\mathbf{2^0}$. Выделим последние $r - \tau_\mu^c + 2$ уравнений системы (10) в отдельную систему

$$\Theta_\mu^{r+} h_1^{r+} = Y_\mu^{r+} \quad (\mu = 0, 1, 2), \tag{29}$$

где $\Theta_\mu^{r+} = \begin{pmatrix} c_{\tau_\mu^c} & a_{\tau_\mu^c} & b_{\tau_\mu^c} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_{\tau_\mu^c+1} & a_{\tau_\mu^c+1} & b_{\tau_\mu^c+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_{r-1} & a_{r-1} & b_{r-1} \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & c_r & a_r \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & c_{r+1} \end{pmatrix}$ – $(r - \tau_\mu^c + 2) \times (r - \tau_\mu^c + 2)$ матрица,

а векторы $h_1^{r+} = (h_{1,\tau_\mu^c-1}^r, \dots, h_{1,r}^r)$, $Y_0^{r+} = (Y_{0,\tau_\mu^c}^r, \dots, Y_{0,r+1}^r)$.

При $\mu = 0$ система (29) совпадает с системой (10) с той разницей, что матрица Θ_0^{r+} имеет дополнительный нулевой первый столбец, порождающий элемент $c_0 = 0$, которому отвечает $\tau_0^c = 0$, и компоненту $h_{1,-1}^r$.

Домножая левую и правую части системы (29) слева на матрицу G, определенную в (18), в которой $\breve{\tau} = \tau_\mu^c$, получаем систему $c_\tau h_{1,\tau-1}^r = \sum_{j=\tau}^{r+1} g_{\tau j} Y_{0,j}^r \quad (\tau = \overline{\tau_\mu^c, r+1})$.

Выражая в ней компоненты $Y_{0,j}^r$ из (10_1) через $\widehat{Y}_{i,j}^r$, имеем

$$c_\tau h_{1,\tau-1}^r = \sum\nolimits_{j=\tau}^{r+1} (((2\alpha j + r - j) g_{\tau j} + 2j g_{\tau\, j-1}) \widehat{Y}_{1,j}^r + g_{\tau j} \widehat{Y}_{2,j}^r). \tag{30}$$

По лемме 5 в (30) только $c_{\tau_\mu^c} = 0$, поэтому первое уравнение системы (30) $(\tau = \tau_\mu^c)$ дает резонансную связь

$$\sum\nolimits_{j=\tau_\mu^c}^{r+1} (u_j^\mu \widehat{Y}_{1,j}^r + v_j^\mu \widehat{Y}_{2,j}^r) = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2), \tag{31}$$

где $u_j^\mu = (2\alpha j + r - j) g_{\tau_\mu^c j} + 2j g_{\tau_\mu^c j-1}$, $v_j^\mu = g_{\tau_\mu^c j}$. При этом $h_{1,\tau_\mu^c-1}^r \quad (\mu = 1, 2)$ свободна, а компонента $h_{1,-1}^r$ отсутствует, так как была введена искусственно.

$\mathbf{3^0}$. Пусть теперь $\mu = 1, 2$. Докажем разрешимость оставшихся в системе (10) первых τ_μ^c уравнений с τ_μ^c неизвестными $h_{1,0}^r, \dots, h_{1,\tau_\mu^c-1}^r$, в последнем из которых слагаемое перенесено в правую часть, так что оно имеет вид $c_{\tau_\mu^c-1} h_{1,\tau_\mu^c-2}^r + a_{\tau_\mu^c-1} h_{1,\tau_\mu^c-1}^r = Y_{0,\tau_\mu^c-1}^r - b_{\tau_\mu^c-1} h_{1,\tau_\mu^c}^r$.

Для этого достаточно показать, что $det \Theta_\mu^{r-} \ne 0$,

где $\Theta_\mu^{r-} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & c_{\tau_\mu^c-3} & a_{\tau_\mu^c-3} & b_{\tau_\mu^c-3} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_{\tau_\mu^c-2} & a_{\tau_\mu^c-2} & b_{\tau_\mu^c-2} \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & c_{\tau_\mu^c-1} & a_{\tau_\mu^c-1} \end{pmatrix}$ – $\tau_\mu^c \times \tau_\mu^c$ матрица.

Докажем методом Гаусса, что матрица Θ_μ^{r-} может быть преобразована в двухдиагональную матрицу $\breve{\Theta}_\mu^{r-}$ с главной диагональю $(d_0, ..., d_{\tau_\mu^c-1})$ и сохраненной наддиагональю $(b_0, ..., b_{\tau_\mu^c-2})$ по рекуррентным формулам

$$d_0 = a_0, \quad d_\tau = a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/d_{\tau-1} \quad (1 \le \tau \le \tau_\mu^c - 1). \tag{32}$$

Лемма 6. *В матрице* $\breve{\Theta}_\mu^{r-}$ $(\mu = 1, 2)$ *определяемые по формулам (32) диагональные элементы* $d_0, ..., d_{\tau_\mu^c-1}$ *отличны от нуля.*

Доказательство. Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$ и $(k, l, n) \in M_1$. Тогда $\alpha = k$, $r = k$, $\tau_1^c = 1$, $\breve{\Theta}_\mu^{r-} = a_0$. Поэтому в (32) $d_0 = a_0 = k - 1 \ne 0$, поскольку $k \ge 2$.

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$, и $(k, l, n) \in M_0$. Тогда $\alpha = -k/(2l-1),\ r = (k+l)(2n-1) - n + 1$.

Введем функцию

$$\xi_\tau = (2\tau + 2)(\alpha(2\tau - 1) + r - \tau)(r - \tau - \alpha - 1)/(r - \tau - \alpha).$$

Поскольку $\xi_\tau = 0$ при $\tau = -1,\ \tau_1^c - 1,\ \tau_1^*$, где $\tau_1^* = \tau_1^c - 2 + 2kn - k + k/(2l-1) > \tau_1^c - 2$, то $\xi_\tau > 0$ при $0 \le \tau \le \tau_1^c - 2$, так как $\xi_0 > 0$.

Покажем методом математической индукции, что $d_\tau > \xi_\tau$ при $\tau = \overline{0, \tau_1^c - 2}$.

Согласно (32) $d_0 = -2\alpha + 3r - 1 > 2(r - \alpha - 1) = \xi_0$, что является базой индукции.

Предположим, что $d_{\tau-1} > \xi_{\tau-1} = 2\tau(\alpha(2\tau-3)+r-\tau+1)(r-\tau-\alpha)/(r-\tau-\alpha+1)$. Тогда $d_\tau = a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/d_{\tau-1} > a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/\xi_{\tau-1}$, так как $c_\tau b_{\tau-1} > 0$ $(\tau = \overline{0, \tau_1^c - 2})$ по следствию 1. Но $a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/\xi_{\tau-1} > \xi_\tau \Leftrightarrow (8\tau^2 + 4\tau - 2)\alpha + (r - \tau)(4\tau + 3) - 1 - ((2\tau+1)(2\alpha\tau + r - \tau)(r - \tau - \alpha + 1) + (2\tau + 2)(\alpha(2\tau - 1) + r - \tau)(r - \tau - \alpha - 1))/(r - \tau - \alpha) > 0 \Leftrightarrow -\alpha/(r - \tau - \alpha) > 0$, что верно, так как $\alpha < 0$. Поэтому $d_\tau > \xi_\tau > 0$ при $0 \le \tau \le \tau_1^c - 2$.

Поскольку $c_{\tau_1^c-1} b_{\tau_1^c-2} < 0$, то $d_{\tau_1^c-1} = a_{\tau_1^c-1} - c_{\tau_1^c-1} b_{\tau_1^c-2}/d_{\tau_1^c-2} < a_{\tau_1^c-1} - c_{\tau_1^c-1} b_{\tau_1^c-2}/\xi_{\tau_1^c-2} = 2\alpha(4(\tau_1^c-1)^2 + 2(\tau_1^c-1) - 1) + (r - \tau_1^c + 1)(4\tau_1^c - 1) - 1 - (2\tau_1^c - 1)(2\alpha(\tau_1^c - 1) + r - \tau_1^c + 1)(r - \tau_1^c - \alpha + 2)/(r - \tau_1^c - \alpha + 1) = 2\alpha(2\tau_1^{c2} - 3\tau_1^c) + 2\tau_1^c(r - \tau_1^c) - \alpha(2\tau_1^c - 1)/(r - \tau_1^c - \alpha + 1) = -4nl + 2n + 2l - 3 + 2/(4nl - 2n - 2l + 1) = (3 - (4nl - 2n - 2l)^2)/(4nl - 2n - 2l + 1) < 0$.

Итак, доказано, что если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$, и $(k, l, n) \in M_0$, то $d_\tau \ne 0$ $(\tau = \overline{0, \tau_1^c - 2})$.

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^c$, и $(k, l, n) \in M_0$. Тогда $\alpha = -k/2l,\ r = n(k + l)$.

Введем функцию $\zeta_\tau = (2\tau + 3)(\alpha(2\tau - 1) + r - \tau)$. Имеем $\zeta_\tau < 0 \Leftrightarrow (2\tau + 3)(\alpha(2\tau - 1) + r - \tau) < 0 \Leftrightarrow \tau < (r - \alpha)/(1 - 2\alpha) = nl + k/2(k + l)$, а значит, $\zeta_\tau < 0$ при $\tau \le \tau_2^c$.

Покажем методом математической индукции, что $d_\tau < \zeta_\tau$ при $\tau = \overline{0, \tau_2^c - 1}$.

Согласно (32) $d_0 = -2\alpha + 3r - 1 < 3r - 3\alpha = \zeta_0$, что является базой индукции.

Предположим, что $d_{\tau-1} < \zeta_{\tau-1} = (2\tau + 1)(\alpha(2\tau - 3) + r - \tau + 1)$. Тогда $d_\tau = a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/d_{\tau-1} < a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/\zeta_{\tau-1}$, так как $b_{\tau-1} c_\tau > 0$ $(\tau = \overline{0, \tau_2^c - 1})$ по следствию 1.

Но $a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/\zeta_{\tau-1} < \zeta_\tau \Leftrightarrow a_\tau - \zeta_\tau < c_{\tau-1} b_\tau/\zeta_{\tau-1} \Leftrightarrow (8\tau^2 + 4\tau - 2)\alpha + (r - \tau)(4\tau + 3) - 1 - (2\tau + 3)(\alpha(2\tau - 1) + r - \tau) < 2\tau(2\tau + 1)((2\tau - 3)\alpha + r - \tau + 1)(2\alpha\tau + r - \tau)/(2\tau + 1)((2\tau - 3)\alpha + r - \tau + 1) \Leftrightarrow (4\tau^2 + 1)\alpha + (r - \tau)2\tau - 1 < 4\tau^2\alpha + (r - \tau)2\tau \Leftrightarrow \alpha - 1 < 0$. Поэтому $d_\tau < \zeta_\tau < 0$.

Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^c$, и $(k, l, n) \in M_2$. Тогда $\alpha = 1/2l,\ r = l - 1$.

Введем функцию $\xi_\tau = (2\tau+3)(\alpha(2\tau+2)+r-\tau-1)$. Имеем $\xi_\tau \ge 0 \Leftrightarrow \alpha(2\tau+2)+r-\tau-1 \ge 0 \Leftrightarrow \tau \le (r + 2\alpha - 1)/(1 - 2\alpha) = l - 1$, а значит, $\xi_\tau \ge 0$ при $\tau \le \tau_2^c - 1$.

Покажем методом индукции, что $d_\tau > \xi_\tau$ при $\tau = \overline{0, \tau_2^c - 1}$.

Согласно (32) $d_0 = -2\alpha + 3r - 1 > 3r + 6\alpha - 3 > \xi_0 \Leftrightarrow 1 - 4\alpha > 0 \Leftrightarrow 1 - 2/l > 0$, что верно, поскольку $l \geq 3$, и дает базу индукции.

Предположим, что $d_{\tau-1} > \xi_{\tau-1} = (2\tau+1)(2\alpha\tau + r - \tau)$. Тогда $d_\tau = a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/d_{\tau-1} > a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/\xi_{\tau-1}$, так как $b_{\tau-1}c_\tau > 0$ $(\tau = \overline{0, \tau_1^c - 1})$ по следствию 1.

Но $a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/\xi_{\tau-1} > \xi_\tau \Leftrightarrow (8\tau^2 + 4\tau - 2)\alpha + (r-\tau)(4\tau+3) - 1 - (2\tau+3)(\alpha(2\tau + 2) + r - \tau - 1) > 2\tau(2\tau+1)((2\tau-3)\alpha + r - \tau + 1)(2\alpha\tau + r - \tau)/(2\tau+1)(2\tau\alpha + r - \tau) \Leftrightarrow (4\tau^2 - 6\tau - 8)\alpha + (r-\tau)2\tau + 2\tau + 2 > (4\tau^2 - 6\tau)\alpha + (r-\tau)2\tau + 2\tau \Leftrightarrow 2 - 8\alpha > 0$. Поэтому $d_\tau > \xi_\tau > 0$. $\square$

$\mathbf{4^0}$. Возвращаясь к единственной резонансной связи (31), запишем ее в виде резонансного уравнения, предварительно разобравшись, какие множители v, u, входящие в нее, равны нулю. Будем действовать так же, как в в п.7^0 раздела 3.

0) $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_0^c$, $\tau_0^c = 0$.

Тогда при $j = 0$ в силу (18) $v_0^0 = 1$, $u_0^0 = r > 0$. Однако, уже при $j = 1$ имеем: $v_1^0 = -a_0/c_1 = (-3r + 2\alpha + 1)/((r-\alpha)(r + 2\alpha - 1))$, $u_1^0 = (1-r)/(r-\alpha)$ и $v_1^0 = 0$, например, при $(\alpha, r) = (5/2, 2)$. В результате резонансная связь (31) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{r+1} \left(u_j^0 Y_1^{[2j, 2(r-j+1)]} + v_j^0 Y_2^{[2j+1, 2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c}, \qquad (31_0)$$

где $v_0^0, u_0^0, u_1^0 \neq 0$, а остальные множители v_j^0, u_j^0 могут обращаться в нуль при определенных значениях α, r.

1) $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$.

Оценим u_j^1, v_j^1 из (31) при $\tau_1^c \leq j \leq r+1$.

1_0) $(k, l, n) \in M_0$.

Тогда $\alpha = -k/(2l-1)$, $r = (k+l)(2n-1) - n + 1$, $\tau_1^c = 2ln - l - n + 2$ и в (10_1)

$$a_\tau = ((k+l)(2n-1) - n + 1 - \tau)(4\tau+3) - 1 - 2k(4\tau^2 + 2\tau - 1)/(2l-1),$$
$$c_\tau = \left((k+l)(2n-1) - n + 2 - \tau - k\,\frac{2\tau - 3}{2l-1} \right) \left((k+l)(2n-1) - n + 1 - \tau - 2k\,\frac{\tau}{2l-1} \right).$$

При этом $c_\tau = 0$ при $\tau = 2ln - l - n + (2l + k - 1)/(2l + 2k - 1)$ за счет c''_τ и при $\tau = 2ln - l - n + 2$ за счет c'_τ. Поэтому $c_\tau > 0$ при $\tau \geq 2ln - l - n + 3 = \tau_1^c + 1$.

Лемма 7_0. *При $\tau = \breve{\tau} = \tau_1^c$, $j = \overline{\tau, r+1}$ в (18) $g_{\tau j} > 0$.*

Доказательство. Согласно (20) имеем: $g_{\tau_1^c j} = g_{\tau_1^c\, j-1} f_{\tau_1^c\, j-1}/c_j$ для тех $j = \overline{\tau_1^c, r+1}$, при которых $f_{\tau\, j-1} \neq 0$.

Для оценки снизу чисел $f_{\tau_1^c j}$ введем функцию

$$\xi_j = -2(j+1)(\alpha(2j-1) + r - j) =$$
$$= 2(j+1)(2k(1-j)/(2l-1) + (k+l)(2n-1) - n + 1 - j) \qquad (j = \overline{\tau_1^c, r}).$$

Имеем: $\xi_j > 0$ при $j \geq 2ln - l - n + 2 = \tau_1^c$, поскольку $\xi_j = 0$ при $j = -1$, $2ln - l - n + 1$.

Покажем методом индукции, что

$$f_{\tau_1^c j} > \xi_j \quad (j = \overline{\tau_1^c, r}).$$

При $\tau = \tau_1^c = 2ln - l - n + 2$ согласно (19) $f_{\tau\tau} = -a_\tau > \xi_\tau$, так как $-a_\tau - \xi_\tau = (2(2ln - l - n + 2) + 1)(k + (l+1)/(2l-1)) + 1 > 0$, что дает базу индукции.

Предположим, что $f_{\tau\, j-1} > \xi_{j-1}$. Тогда $f_{\tau j} = -a_j - b_{j-1}c_j/f_{\tau\, j-1} > -a_j - b_{j-1}c_j/\xi_{j-1} > \xi_j$, так как $b_{j-1}c_j > 0$ и $-a_j - b_{j-1}c_j/\xi_{j-1} - \xi_j = 1 > 0$.

Таким образом, индукционный переход доказан, а значит все $f_{\tau j} > 0$ и в формуле (18) $g_{\tau_1^c j} > 0$ $(j = \overline{\tau_1^c, r+1})$. $\square$

Согласно лемме 7_0 и (31) получаем, что $v_j^1 > 0$. Поскольку $2\alpha j + r - j < 0$ при $j \geq \tau_1^c$, то в (31) выражение $(2\alpha j + r - j)g_{\tau_1^c j} + 2jg_{\tau_1^c j-1} < g_{\tau_1^c j-1}(\xi_{j-1}(2\alpha j + r - j)/c_j + 2j) = 0$, а значит, $u_j^1 < 0$.

В результате, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$ и $(k, l, n) \in M_0$, то $\tau_1^c = 2ln - l - n + 2$ и (31) принимает вид

$$\sum_{j=\tau_1^c}^{r+1} \left(u_j^1 Y_1^{[2j, 2(r-j+1)]} + v_j^1 Y_2^{[2j+1, 2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c}, \tag{31_1^0}$$

где все входящие в него множители $v_j^1 > 0$, а $u_j^1 < 0$.

$1_1)$ $(k, l, n) \in M_1$. Тогда $\alpha = k,\ r = k,\ \tau_1^c = 1$ и в (10_1)

$$a_\tau = k(8\tau^2 + 8\tau + 1) - 4\tau^2 - 3\tau - 1, \quad c_\tau = (k(2\tau - 2) - \tau + 1)(k(2\tau + 1) - \tau).$$

При этом $c_\tau = 0$ при $\tau = 1$ за счет c'_τ и при $\tau = -k(2k-1)$ за счет c''_τ. Поэтому $c_\tau > 0$ при $\tau \geq 2$.

Лемма 7_1. *При $\tau = \breve{\tau} = \tau_1^c$, $j = \overline{\tau, r+1}$ в (18) $g_{\tau j} > 0$.*

Доказательство. Согласно (20) имеем: $g_{\tau_1^c j} = g_{\tau_1^c\, j-1} f_{\tau_1^c\, j-1}/c_j$ для тех $j = \overline{\tau_1^c, r+1}$, при которых $f_{\tau\, j-1} \neq 0$.

Для оценки снизу чисел $f_{\tau_1^c j}$ введем функцию

$$\xi_j = (2j + 3)(2kj - j) \qquad (j = \overline{\tau_1^c, r}).$$

Имеем: $\xi_j > 0$ при $j \geq 1$, поскольку $\xi_j = 0$ при $j = -3/2,\ 0$.

Покажем методом индукции, что

$$f_{\tau_1^c j} > \xi_j \quad (j = \overline{\tau_1^c, r}).$$

При $\tau = \tau_1^c = 1$ согласно (19) $f_{\tau\tau} = -a_\tau = 17k - 8 > 10k - 5 = \xi_\tau$, что дает базу.

Предположим, что $f_{\tau\, j-1} > \xi_{j-1}$. Тогда $f_{\tau j} = -a_j - b_{j-1}c_j/f_{\tau\, j-1} > -a_j - b_{j-1}c_j/\xi_{j-1} > \xi_j$, так как $b_{j-1}c_j > 0$ и $-a_j - b_{j-1}c_j/\xi_{j-1} - \xi_j = k - 1 > 0$.

Таким образом, индукционный переход доказан, а значит все $f_{\tau j} > 0$ и в формуле (18) $g_{\tau_1^c j} > 0$ $(j = \overline{\tau_1^c, r+1})$. $\square$

Согласно лемме 7_1 и (31) получаем, что $v_j^1 > 0$. Поскольку $2\alpha j + r - j > 0$ при $j \geq 0$, то в (31) $u_j^1 > 0$.

В результате, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$ и $(k, l, n) \in M_1$, то $\tau_1^c = 1$ и (31) принимает вид

$$\sum_{j=\tau_1^c}^{r+1} \left(u_j^1 Y_1^{[2j,2(r-j+1)]} + v_j^1 Y_2^{[2j+1,2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c}, \tag{31_1^1}$$

где все входящие в него множители $v_j^1 > 0,\ u_j^1 > 0$.

2) $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^c$.

2_0) $(k, l, n) \in M_0$. Тогда $\alpha = -k/2l,\ \ r = n(k+l)$, $\tau_2^c = ln$ и в (10_1)

$$a_\tau = -k(4\tau^2 + 2\tau - 1)/l - (nk + nl - \tau)(4\tau + 3) - 1,$$
$$c_\tau = (nk + nl + 3k/2l + 1 - (k/l + 1)\tau)(nk + nl - (k/l + 1)\tau).$$

При этом $c_\tau = 0$ при $\tau = nl + 1 + k/(2k+2l)$ за счет c'_τ и при $\tau = nl$ за счет c''_τ. Поэтому $c_\tau > 0$ при $\tau \geq ln + 2 = \tau_2^c + 2$.

Лемма 7_2. *При* $\tau = \breve{\tau} = \tau_2^c,\ j = \overline{\tau + 2, r+1}$ *в (18)* $g_{\tau j} > 0$.

Доказательство. Согласно (20) имеем: $g_{\tau_2^c j} = g_{\tau_2^c\, j-1} f_{\tau_2^c\, j-1}/c_j$ для тех $j = \overline{\tau_2^c, r+1}$, при которых $f_{\tau\, j-1} \neq 0$.

Для оценки снизу чисел $f_{\tau_2^c j}$ введем функцию

$$\xi_j = -(2j+2)(\alpha(2j-1) + r - j) \qquad (j = \overline{\tau_2^c + 2, r}).$$

Имеем: $\xi_j > 0$ при $j \geq \tau_2^c + 1$, поскольку $\xi_j = 0$ при $j = -1,\ nl + k/2l$.

Покажем методом индукции, что

$$f_{\tau_2^c j} > \xi_j \quad (j = \overline{\tau_2^c + 2, r}).$$

При $\tau = \tau_2^c + 2 = ln + 2$ согласно (19) $f_{\tau\tau} - \xi_\tau = 1 > 0$, что дает базу.

Предположим, что $f_{\tau\, j-1} > \xi_{j-1}$. Тогда $f_{\tau j} = -a_j - b_{j-1}c_j/f_{\tau\, j-1} > -a_j - b_{j-1}c_j/\xi_{j-1} > \xi_j$, так как $b_{j-1}c_j > 0$ $(j = \overline{\tau_2^c + 2, r+1})$ и $-a_j - b_{j-1}c_j/\xi_{j-1} - \xi_j = 1 > 0$.

Таким образом, индукционный переход доказан, а значит все $f_{\tau j} > 0$ $(j = \overline{\tau_2^c + 2, r})$ и в формуле (18) $g_{\tau_2^c j} > 0$ $(j = \overline{\tau_2^c + 2, r+1})$. $\square$

Рассмотрим v_j^2, u_j^2. Имеем: $v_{\tau_2^c}^2 = 1,\ v_{\tau_2^c+1}^2 = -a_{\tau_2^c}/c_{\tau_2^c+1} = 2l(lnk + k - l)/(k^2 + lk)$, $u_{\tau_2^c}^2 = 0,\ u_{\tau_2^c+1}^2 = 2l/k$. Согласно лемме 7_1 и (31) получаем, что $v_j^2 > 0$ $(j = \overline{\tau_2^c + 2, r+1})$. Поскольку $2\alpha j + r - j < 0$ при $j \geq ln + 1$, то в (31) выражение $(2\alpha j + r - j)g_{\tau_2^c j} + 2j g_{\tau_2^c\, j-1} < g_{\tau_2^c\, j-1}(\xi_{j-1}(2\alpha j + r - j)/c_j + 2j) = 0$, а значит, $u_j^2 < 0$ $(j = \overline{\tau_2^c + 2, r+1})$.

В результате, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^c$ и $(k, l, n) \in M_0$, то $\tau_2^c = ln$ и (31) принимает вид

$$Y_2^{[2\tau_2^c+1,2(r-\tau_2^c+1)]} + \sum_{j=\tau_2^c+1}^{r+1} \left(u_j^2 Y_1^{[2j,2(r-j+1)]} + v_j^2 Y_2^{[2j+1,2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c}, \tag{31_2^0}$$

где все входящие в него множители $v_j^2 > 0,\ u_j^2 < 0$, за исключением $u_{\tau_2^c+1}^2 > 0$.

2_2) $(k, l, n) \in M_2$. Тогда $\alpha = 1/2l,\ r = l-1,\ \tau_2^c = l$. Тогда $v_{\tau_2^c}^2 = 1,\ u_{\tau_2^c}^2 = 2\alpha\tau_2^c + r - \tau_2^c = 0$ и (31) принимает вид

$$Y_2^{[2r+3,0]} = \widetilde{c}. \tag{31_2^2}$$

5 Полученные результаты

1^0. Обозначим через $Y^{\{2r\}}$ и $Y^{\{2r+1\}}$ векторы коэффициентов КОМ $Y^{[k]} = (Y_1^{[k]}, Y_2^{[k]})$ соответственно при $k = 2r$ и $k = 2r+1$ $(r \geq 1)$, т. е.

$$Y^{\{2r\}} = (Y_1^{[1,2r]},\ Y_1^{[3,2r-2]}, \ldots, Y_1^{[2r+1,0]},\ Y_2^{[0,2r+2]},\ Y_2^{[2,2r]}, \ldots, Y_2^{[2r+2,0]}),$$
$$Y^{\{2r+1\}} = (Y_1^{[0,2r+2]},\ Y_1^{[2,2r]}, \ldots, Y_1^{[2r+2,0]},\ Y_2^{[1,2r+2]},\ Y_2^{[3,2r]}, \ldots, Y_2^{[2r+3,0]}).$$

Запишем резонансные связи (8_1^2), (8_2^2), (8_1^3) и (8_2^3), полученные для компонент векторов $Y^{\{2\}}$ и $Y^{\{3\}}$, в виде резонансных уравнений, используя обозначения для системы (8):

$$\begin{gathered}(3\alpha-1)Y_1^{[3,0]} + Y_2^{[4,0]} = \widetilde{c},\\ Y_1^{[1,2]} + 6Y_1^{[3,0]} + (1-2\alpha)Y_2^{[0,4]} + 2Y_2^{[2,2]} = \widetilde{c} \quad (h_1^{[0,2]} - \forall);\end{gathered} \tag{33^2}$$

$$\begin{gathered}\alpha^2 Y_1^{[0,4]} - \alpha Y_1^{[4,0]} + \alpha^2 Y_2^{[1,4]} - \alpha Y_2^{[3,2]} + Y_2^{[5,0]} = \widetilde{c},\\ \alpha = 1: \quad 5Y_1^{[4,0]} - 2Y_1^{[2,2]} - Y_2^{[3,2]} + 3Y_2^{[5,0]} = \widetilde{c} \quad (h_1^{[3,0]} - \forall).\end{gathered} \tag{33^3}$$

Перейдем непосредственно к формулировке утверждений, фактически, доказанных в предыдущих разделах. При необходимости определения понятий, которые встретятся ниже, можно найти в следующем разделе.

Теорема 1. *1) Система (1) формально эквивалентна системе (3), если после произвольного выбора резонансных коэффициентов* $h_1^{[0,2]}$, $h_1^{[3,0]}$ *при* $\alpha = 1$ *и* $h_1^{[2\tau_3^d, 2(r-\tau_3^d)]}$ *при* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^d$ *в замене (2), для любого* $k \geq 2$ *коэффициенты квазиоднородного многочлена* $Y^{[k]}$ *системы (3) удовлетворяют следующим резонансным уравнениям :*

а) При $k = 2$ $\ (r = 1,\ \nu = 0)$ – (8_1^2) *и* (8_2^2).

б) При $k = 3$ $\ (r = 1,\ \nu = 1)$ – (8_1^3), *а при* $\alpha = 1$ *дополнительно* – (8_2^3).

в) При $k = 2r$ $(r \geq 2,\ \nu = 0)$ *коэффициенты из* $Y^{\{2r\}}$ *в зависимости от* α *удовлетворяют одному из шести уравнений* (25_1^c), (25_2^c), (25_*^c), (25_1^d), (25_2^d), (25_3^d), *а при* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^d$ – *также уравнению* (26_3^d), *и имеют в них ненулевые множители.*

г) При $k = 2r+1$ $(r \geq 2,\ \nu = 1)$ *коэффициенты из* $Y^{\{2r+1\}}$ *в зависимости от* α *удовлетворяют одному из пяти уравнений* (31_0), (31_1^0), (31_1^1), (31_2^0), (31_2^2), *причем в уравнении* (31_0) *множители могут обращаться в нуль при определенных значениях пар* (α, r), *а в остальных уравнениях коэффициенты имеют ненулевые множители.*

2) Для любого $k \geq 2$ *коэффициенты КОМ* $Y^{[k]}$, *не входящие в выше перечисленные резонансные уравнения или имеющие в них только нулевые множители – нерезонансные и могут принимать любые значения.*

$$\text{Пусть } n_k = \begin{cases} 1, \text{ если } \ a)\ k = 3,\ \alpha \neq 1, \ \ b)\ k = 2r,\ (\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_3^d, \ \ c)\ k = 2r+1; \\ 2, \text{ если } \ a)\ k = 2, \ \ b)\ k = 3,\ \alpha = 1, \ \ c)\ k = 2r,\ (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^d. \end{cases}$$

Следствие 2. *В системе (3)* n_k *различных резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[k]}$ *образуют резонансный набор, если это коэффициенты:*

при $k = 2$ – *1)* $Y_1^{[3,0]}$ *или* $Y_2^{[4,0]}$, *2) любой из* (8_2^2), *кроме* $Y_1^{[3,0]}$, *если он выбран в 1);*

при $k = 3$ – *1) любой из* (8_1^3), *2) если* $\alpha = 1$, *то любой из* (8_2^3), *отличный от выбранного в* (8_1^3);

при $k = 2r \ \ (r \geq 2)$ – 1) любой коэффициент из $Y^{\{2r\}}$, входящий в соответствующее резонансное уравнение (25^c_1), (25^c_2), (25^c_*), (25^d_1), (25^d_2), (25^d_3), 2) если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_3$, то любой коэффициент из $Y^{\{2r\}}$, входящий в резонансное уравнение (26^d_3), отличный от выбранного в (25^d_3) и такой, что относительно выбранных коэффициентов уравнения (25^d_3) и (26^d_3) однозначно разрешимы;

при $k = 2r+1 \ \ (r \geq 2)$ – любой коэффициент из $Y^{\{2r+1\}}$, входящий в соответствующее резонансное уравнение (31_0), (31^0_1), (31^1_1), (31^0_2), (31^2_2) с ненулевым множителем.

Таким образом, система (3) по определению является обобщенной нормальной формой, если для каждого $k \geq 2$ все коэффициенты ее КОМ $Y^{[k]}(y)$ равны нулю, кроме n_k штук, т. е. одного или двух, принадлежащих любому резонансному набору, описанному в следствии 2, и имеющих произвольные значения.

Теорема 2. *Зафиксируем произвольным образом структуру ОНФ (3), т. е. для всякого $k \geq 2$ зафиксируем обобщенные порядки тех n_k КОМ $Y^{[k]}$, коэффициенты которых входят в выбранный для данного k резонансный набор, зафиксируем также в замене (2) коэффициенты $h_1^{[0,2]}$, $h_1^{[3,0]}$ при $\alpha = 1$ и $h_1^{[2\tau^d_3, 2(r-\tau^d_3)]}$ при $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_3$. Тогда существует и единственна почти тождественная нормализующая замена (2), преобразующая любую систему (1) в ОНФ(3) с выбранной структурой, в которой при каждом $k \geq 2$ коэффициенты из выбранного резонансного набора, описанного в следствии 2, однозначно находятся из тех резонансных уравнений в которые они входят.*

Пример 1. Выберем параметр α иррациональным числом. Тогда при $\nu = 0$ пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_0 \setminus (\{\alpha, r\}^c_1 \cup \{\alpha, r\}^c_2)$ и при $\nu = 1$ пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^c_0$, где семейство $\{\alpha, r\}^d_0$ описано в разд. 3 п.2^0, семейства $\{\alpha, r\}^c_1$, $\{\alpha, r\}^c_2$ – в разд. 3 п.3^0, а $\{\alpha, r\}^c_0$ – в разд. 4 п.1^0.

Поскольку $(\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}^d_3$, то для каждого обобщенного порядка $k \geq 4$, $(r \geq 2)$ резонансный набор состоит из одного коэффициента. Ситуация аналогична при $k = 3$, что видно из уравнений (33^3). Однако при $k = 2$ ситуация иная, поскольку имеются два резонансных уравнения (33^2), в первое из которых входят только коэффициенты $Y_1^{[3,0]}$ и $Y_2^{[4,0]}$, а значит, в резонансный набор обязательно входит один из них. Поэтому система (1) может быть формально эквивалентна обобщенным НФ (3) со следующими двумя структурами :

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_2 + Y_1^{[3,0]} y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{[1,2r]} y_1 y_2^r + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{[0,2(r+1)]} y_2^{r+1}, \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2;$$

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_2 + Y_1^{[3,0]} y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{[0,2(r+1)]} y_2^{r+1}, \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2 + \sum_{r=1}^{\infty} Y_2^{[0,2(r+1)]} y_2^{r+1}.$$

Это действительно возможно, поскольку выбранные в системах коэффициенты входят в резонансные уравнения (25^c_*) и (31_0) с ненулевыми множителями.

Приведенные примеры ОНФ интересны тем, что в первом уравнении первой ОНФ возмущение не содержит y_1 выше, чем в третьей степени, а во втором – вообще отсутствует. Во второй же ОНФ возмущение не зависит от y_1, кроме единственного слагаемого $Y_1^{[3,0]} y_1^3$. Невозможность избавиться от слагаемого $Y_1^{[3,0]} y_1^3$ во второй ОНФ наталкивает на мысль избавиться в возмущении от y_2. Попытка написать ОНФ, возмущение которой не зависит от y_2 для произвольного иррационального α, не удается, так как в уравнении (31_0) не установлено равны ли нулю множители u^0_{r+1}, v^0_{r+1}, стоящие при $Y_1^{[2(r+1),0]}$, $Y_2^{[2(r+1)+1,0]}$.

2⁰. Применим полученные результаты для системы (1) с $\alpha = -1/2$.

0) $r = 1$ ($\nu = 0$). Тогда имеется два резонансных уравнения (33^2)

$$(3\alpha-1)Y_1^{[3,0]} + Y_2^{[4,0]} = \widetilde{c}, \quad Y_1^{[1,2]} + 6Y_1^{[3,0]} + (1-2\alpha)Y_2^{[0,4]} + 2Y_2^{[2,2]} = \widetilde{c}.$$

1) $r = 1$ ($\nu = 1$). Тогда имеется единственное резонансное уравнение (33_1^3)

$$\alpha^2 Y_1^{[0,4]} - \alpha Y_1^{[4,0]} + \alpha^2 Y_2^{[1,4]} - \alpha Y_2^{[3,2]} + Y_2^{[5,0]} = \widetilde{c}.$$

2) $k = 2r$ ($r \geq 2,\ \nu = 0$). Тогда параметр $\alpha = -1/2$ встречается в семействах $\{\alpha, r\}_1^d$ и $\{\alpha, r\}_3^d$, причем в семействе $\{\alpha, r\}_1^d$, по-прежнему, $r = 2n$ и $\tau_1^d = 2n$, а в семействе $\{\alpha, r\}_3^d$ получаем, что $r = 2n+1$ и $\tau_3^d = n+1$.

2_0) $r = 2n$ $(k = 4n)$. Тогда имеется единственное резонансное уравнение (25_1^d)

$$v_0^0 Y_2^{[0,2(2n+1)]} + \sum_{j=1}^{2n} \Big(u_j^0 Y_1^{[2j-1,2(2n-j+1)]} + v_j^0 Y_2^{[2j,2(2n-j+1)]} \Big) + u_{2n+1}^0 Y_1^{[4n+1,0]} = \widetilde{c}.$$

2_1) $r = 2n+1$ $(k = 4n+2)$. Тогда к резонансному уравнению (25_3^d)

$$v_0^0 Y_2^{[0,2(2n+2)]} + \sum_{j=1}^{n+1} \Big(u_j^0 Y_1^{[2j-1,2(2n-j+2)]} + v_j^0 Y_2^{[2j,2(2n-j+2)]} \Big) + u_{n+2}^0 Y_1^{[2n+3,2n]} +$$
$$+ \sum_{j=n+3}^{2n+2} \Big(u_j^0 Y_1^{[2j-1,2(2n-j+2)]} + v_j^0 Y_2^{[2j,2(2n-j+2)]} \Big) = \widetilde{c},$$

добавляется дополнительное резонансное уравнение (26_3^d)

$$\sum_{j=n+2}^{2n+2} \Big(u_j^{0_3} Y_1^{[2j-1,2(2n-j+2)]} + v_j^{0_3} Y_2^{[2j,2(2n-j+2)]} \Big) = \widetilde{c}.$$

3) $k = 2r+1$ ($r \geq 2,\ \nu = 1$). Тогда параметр $\alpha = -1/2$ встречается в семействах $\{\alpha, r\}_2^c$ и $\{\alpha, r\}_0^c$, причем в семействе $\{\alpha, r\}_2^c$ получаем $r = 2n$ и $\tau_2^c = n$, а в семействе $\{\alpha, r\}_0^c$ – $r = 2n+1$ и $\tau_0^c = 0$.

3_0) $r = 2n$ $(k = 4n+1)$. Тогда резонансное уравнение (31_2^0) принимает вид

$$Y_2^{[2n+1,2(n+1)]} + \sum_{j=n+1}^{2n+1} \Big(u_j^2 Y_1^{[2j,2(2n-j+1)]} + v_j^2 Y_2^{[2j+1,2(2n-j+1)]} \Big) = \widetilde{c}.$$

3_1) $r = 2n+1$ $(k = 4n+3)$. Тогда резонансное уравнение (31_0) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{2n+2} \Big(u_j^0 Y_1^{[2j,2(2n-j+2)]} + v_j^0 Y_2^{[2j+1,2(2n-j+2)]} \Big) = \widetilde{c}.$$

Пример 2. Выпишем ОНФ, в первом уравнении которой отсутствует возмущение, а в возмущении второго уравнения степень y_1 сделана минимально возможной.

Для этого в каждом из семи выписанных резонансных уравнений должным образом выберем по одному коэффициенту КОМ $Y^{[k]} = (Y_1^{[k]}, Y_2^{[k]})$: при $k = 2$ коэффициенты $Y_2^{[4,0]}$ и $Y_2^{[0,4]}$ из (33^2), при $k = 3$ коэффициент $Y_2^{[1,4]}$ из (33_1^3), при $k = 4n$ коэффициент $Y_2^{[0,2(2n+1)]}$ из (25_1^d), при $k = 4n+1$ коэффициент $Y_2^{[2n+1,2(n+1)]}$ из (31_2^0), при $k = 4n+2$ коэффициент $Y_2^{[0,2(2n+2)]}$ из (25_3^d) и коэффициент $Y_2^{[2(n+2),2n]}$ из (26_3^d), при $k = 4n+3$ коэффициент $Y_2^{[1,2(2n+2)]}$ из (31_0).

Выбранные коэффициенты входят в соответствующие резонансные уравнения с ненулевыми множителями и образуют резонансные наборы.

Итак, система (1) формально эквивалентна ОНФ (3) со следующей структурой:

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_2, \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(Y_2^{[0,4n+2]} y_2^{2n+1} + Y_2^{[2n+1,2n+2]} y_1^{2n+1} y_2^{n+1} \right) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(Y_2^{[1,4n+4]} y_1 y_2^{2n+2} + Y_2^{[0,4n+4]} y_2^{2n+2} + Y_2^{[2n+4,2n]} y_1^{2n+4} y_2^{n} \right).$$

3⁰. В разд. 1 п.3^0 было установлено, что в системе (1) всегда можно добиться того, чтобы параметр α удовлетворял неравенству $0 < |\alpha| \le 1/2$.

Посмотрим, как при таком ограничении на параметр α изменятся семейства $\{\alpha, r\}$, введенные в разд. 3 п.$2^0, 3^0$ и разд. 4 п.1^0 и выпишем все возникшие изменения.

1) В разд. 3 п.2^0 при $0 < |\alpha| \le 1/2$

$$\{\alpha, r\}_2^d = \{1/2,\, n\}_{n\in\mathbb{N},\, n\ge 2}, \quad \tau_2^d = n-2;$$
$$\{\alpha, r\}_3^d = \{-k/2l,\, n(k+l)+1\}_{k,l,n\in\mathbb{N},\ k\le l}, \quad \tau_3^d = ln+1;$$

2) В разд. 3 п.3^0 при $0 < |\alpha| \le 1/2$ отсутствует семейство $\{\alpha, r\}_4^c = \{k/2,\, k\}_{k\ge 2}$ и

$$\{\alpha, r\}_1^c = \{-k/(2l-1),\, (k+l)(2n-1)-n+1\}_{k,l,n\in\mathbb{N},\, k<l}, \ \tau_1^c = l(2n-1)-n+1;$$
$$\{\alpha, r\}_3^c = \{-k/2l,\, (k+l)n+1\}_{k,l,n\in\mathbb{N},\, k\le l}, \ \tau_3^c = ln+2;$$

3) В разд. 4 п. 1^0 при $0 < |\alpha| \le 1/2$ отсутствует та часть семейства $\{\alpha, r\}_1^c = \{-k/(2l-1),\, (k+l)(2n-1)-n+1\}_{(k,l,n)\in M_0\cup M_1}$, у которой $(k,l,n) \in M_1$, и

$$\{\alpha, r\}_1^c = \{-k/(2l-1),\, (k+l)(2n-1)-n+1\}_{(k,l,n)\in M_0,\, k<l}, \quad \tau_1^c = 2ln-l-n+2;$$
$$\{\alpha, r\}_2^c = \{-k/2l,\, n(k+l)\}_{(k,l,n)\in M_0,\, k\le l\cup M_2}, \quad \tau_2^c = ln;$$

где $M_0 = \{k,l,n \in \mathbb{N}\}, \quad M_1 = \{k \ge 2,\, l = 0,\, n = 1\}, \quad M_2 = \{k = -1,\, l \ge 3,\, n = 1\}$.

Указанные изменения не вносят существенных корректив в уже найденные резонансные уравнения, поэтому их можно не принимать во внимание.

6 Используемые в работе определения и метод

1⁰. Пусть $z = (z_1, \ldots, z_n)$ – вектор переменных.

Вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ назовем весом переменной z, если компоненты γ_i $(i = \overline{1,n})$ – натуральные и взаимно простые в совокупности.

Обобщенным порядком монома $Z_i^{(q)} z^q$ с $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $q_i \in \mathbb{Z}_+$, $|q| = q_1 + \ldots + q_n \geq 1$, $z^q = z_1^{q_1} \ldots z_n^{q_n}$, назовем скалярное произведение $(q - e_i, \gamma)$ $(e_i = (0, \ldots, 1_{(i)}, \ldots, 0))$.

В этом случае коэффициент $Z_i^{(q_1,\ldots,q_n)}$ будем обозначать $Z_i^{[q_1\gamma_1,\ldots,q_n\gamma_n]}$.

В частности, любой моном $Z_i^{(e_j)} z_j$ $(j = \overline{1,n})$ с естественным весом $\gamma = (1, \ldots, 1)$ имеет нулевой обобщенный порядок так же, как и моном $Z_i^{(e_i)} z_i$ с произвольным весом.

Векторный многочлен $Q(z)$ будем называть квазиоднородным многочленом (КОМ) степени k с весом γ и обозначать $Q_\gamma^{[k]}(z)$, если он содержит только мономы обобщенного порядка k, т. е. компоненты КОМ $Q_{\gamma,i}^{[k]}(z) = \sum_{q:\,(q-e_i,\gamma)=k} Q_i^{[q_1\gamma_1,\ldots,q_n\gamma_n]} z_1^{q_1} \ldots z_n^{q_n}$ $(i = \overline{1,n})$.

Квазиоднородный многочлен $Q_\gamma^{[k]}(z)$ будем называть невырожденным (НКОМ), если $Q_{\gamma,i}^{[k]}(z) \not\equiv 0$ для всякого $i = \overline{1,n}$.

В результате для произвольного веса γ векторный степенной ряд $Z(z) = \sum_{q:\,|q|\geq 1} Z^{(q)} z^q$ можно однозначно переразложить не только в сумму однородных многочленов $Z_i(z) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_i^{(k)}(z)$, но и в сумму КОМ: $Z_i(z) = \sum_{k=k_i^0}^{\infty} Z_{\gamma,i}^{[k]}(z)$, где $k_i^0 = \min\{(q,\gamma) - \gamma_i\} > -\gamma_i$.

2⁰. Следуя [2, § 2], изложим кратко метод резонансных уравнений для двумерных автономных вещественных систем.

Исходную формальную систему

$$\dot{x}_i = P_{\gamma,i}^{[\kappa]}(x) + \sum_{k=\kappa+1}^{\infty} X_{\gamma,i}^{[k]}(x) \qquad (i = 1,2), \tag{A}$$

в которой $X_{\gamma,i}^{[k]} = \sum_{(q,\gamma)-\gamma_i=k} X_i^{[q_1\gamma_1,q_2\gamma_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$, произвольной почти тождественной заменой

$$x_i = y_i + \sum_{k=1}^{\infty} h_{\gamma,i}^{[k]}(y) \tag{B}$$

преобразуем в систему того же вида

$$\dot{y}_i = P_{\gamma,i}^{[\kappa]}(y) + \sum_{k=\kappa+1}^{\infty} Y_{\gamma,i}^{[k]}(y) \qquad (i = 1,2). \tag{C}$$

Дифференцируя замену (B) в силу систем (A), (C) и выделяя в i-м уравнении члены обобщенного порядка $k + \gamma_i$, в которых опускаем индекс γ, получаем систему

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial h_i^{[k-\kappa]}(y)}{\partial y_j} P_j^{[\kappa]}(y) - \frac{\partial P_i^{[\kappa]}(y)}{\partial y_j} h_j^{[k-\kappa]}(y) \right) = \widehat{Y}_i^{[k]}(y) \qquad (k \geq \kappa + 1), \tag{D}$$

где $\widehat{Y}_i^{[k]} = \widetilde{Y}_i^{[k]}(y) - Y_i^{[k]}(y)$, а КОМ $\widetilde{Y}_i^{[k]}$ уже известен, так как содержит только предшествующие квазиоднородные многочлены $Y^{[s]}$ и $h^{[s-\kappa]}$ $(\kappa + 1 \leq s \leq k - 1)$.

Пусть k_i^γ – число различных решений $q^{(i)}$ уравнения $(q,\gamma)-\gamma_i=k$.

Располагая векторы $q^{(i)}$ в лексикографическом порядке, будем ставить во взаимно однозначное соответствие любому КОМ $Z^{[k]}=Z_\gamma^{[k]}$ вектор-столбец его коэффициентов $Z^{\{k\}}=(Z_1^{\{k\}},Z_2^{\{k\}})$ размерности $|k^\gamma|=k_1^\gamma+k_2^\gamma$.

Таким образом, вектор $Z_i^{\{k\}}$ имеет компоненты $Z_{ij}^{\{k\}}$ $(j=\overline{1,k_i^\gamma})$.

Теперь линейную систему (D) удобно переписать в матричном виде:

$$A^k(P_\gamma^{[\kappa]})h^{\{k-\kappa\}}=Y^{\{k\}}-\widetilde{Y}^{\{k\}}\qquad (k\geq\kappa+1), \tag{D_m}$$

где $A^k=A^k(P_\gamma^{[\kappa]})$ – постоянная $|k^\gamma|\times|(k-\kappa)^\gamma|$ матрица.

Пусть $n_k=|k^\gamma|-r_k$, где $r_k=|(k-\kappa)^\gamma|-k_0^\gamma$ – это ранг матрицы A^k $(k_0^\gamma\geq 0)$.

Очевидно, что для всякого $k>\kappa$ после фиксирования k_0^γ свободных коэффициентов КОМ $h^{[k-\kappa]}$ условия совместности системы (D_m) можно записать в виде n_k линейно независимых линейных уравнений, связывающих коэффициенты КОМ $(Y_1^{[k]},Y_2^{[k]})$:

$$(\mathfrak{a}_1^{k,\nu},Y_1^{\{k\}})+(\mathfrak{a}_2^{k,\nu},Y_2^{\{k\}})=\widetilde{c}\qquad (\nu=\overline{1,n_k},\quad k\geq\kappa+1), \tag{E}$$

в которых $\mathfrak{a}_i^{k,\nu}$ – постоянные векторы размерности k_i^γ $(i=1,2)$, определяемые НКОМ $P_\gamma^{[\kappa]}$, а $\widetilde{c}=(\mathfrak{a}_1^{k,\nu},\widetilde{Y}_1^{\{k\}})+(\mathfrak{a}_2^{k,\nu},\widetilde{Y}_2^{\{k\}})$ – рекуррентно вычисляемые константы.

Уравнения (E) будем называть резонансными.

Попутно отметим, что получение резонансных уравнений в явном виде, т. е. вычисление множителей $\mathfrak{a}_{ij}^{k,\nu}$ $(j=\overline{1,n_i})$ является основной целью описываемого одноименного метода. Однако, решение этой задачи наталкивается на значительные технические трудности тем большие, чем больше ненулевых коэффициентов имеют многочлены P_1, P_2.

Поэтому в первую очередь требуется максимально упростить невозмущенную часть системы (A), сведя ее при помощи сохраняющей структуру неособой замены к наиболее простой невозмущенной части, так называемой канонической форме (КФ).

Коэффициенты $Y_{ij}^{\{k\}}$ $(1\leq j\leq k_i^\gamma)$ КОМ $Y^{[k]}$системы (C), входящие хотя бы в одно из уравнений (E) с ненулевым множителем, будем называть резонансными, а остальные коэффициенты – нерезонансными.

Оставшиеся свободными при решении системы (D_m) k_0^γ коэффициентов КОМ $h^{[k-\kappa]}$ из замены (B) будем называть резонансными.

Произвольному набору из n_k коэффициентов $Y_{i_mj_m}^{\{k\}}$ КОМ $(Y_1^{[k]},Y_2^{[k]})$, где $m=\overline{1,n_k}$, $i_m\in\{1,2\}$, $j_m\in\{1,\ldots,k_{i_m}^\gamma\}$, сопоставим матрицу множителей $\mathfrak{A}^k=\{\mathfrak{a}_{i_mj_m}^{k,\nu}\}_{\nu,m=1}^{n_k}$.

Набор из n_k коэффициентов $Y_{i_mj_m}^{\{k\}}$ КОМ $(Y_1^{[k]},Y_2^{[k]})$ будем называть резонансным, если $\det\mathfrak{A}^k\neq 0$.

Таким образом, для любого $k\geq\kappa+1$ резонансный набор – это минимальный набор коэффициентов из КОМ $Y^{[k]}$, каждый из которых реально присутствует хотя бы в одном из уравнений (E) и относительно которых резонансные уравнения однозначно разрешимы. При этом в резонансный набор могут входить только различные резонансные коэффициенты, иначе в $\mathfrak{A}^k$ будут одинаковые столбцы или нулевой столбец.

Следовательно для того, чтобы система (C) была формально эквивалентна исходной системе (A), достаточно в каждом КОМ $Y^{[k]}$ возмущения системы (C) должным образом зафиксировать n_k коэффициентов из любого резонансного набора, а остальные коэффициенты можно выбирать произвольным образом.

Систему (C) будем называть обобщенной нормальной формой (ОНФ), если при любом $k > \varkappa$ все коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ равны нулю, за исключением коэффициентов из какого-либо резонансного набора, которые могут быть любыми.

Очевидно, что система (C) является ОНФ системы (A), если все ее нерезонансные коэффициенты равны нулю, а среди резонансных отлично от нуля не более чем n_k коэффициентов, принадлежащих какому-либо резонансному набору и однозначно определяемых из резонансных уравнений (E) после того, как резонансные коэффициенты замены (B) произвольным образом зафиксированы.

Предложенное определение ОНФ соответствует понятию обобщенной нормальной формы первого порядка, введенному в [4].

Таким образом, знание резонансных уравнений снимает все вопросы о структуре ОНФ и существовании нормализующей замены, которые стоят весьма актуально при операторных определениях ОНФ.

Список литературы

[1] *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами // Дифференц. уравнения, 2003, т. 39, N 2, с. 154–170.

[2] *Басов В. В., Федотов А. А.* Обобщенная нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2007, вып. 1, с. 13–33.

[3] *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, I // Дифференц. уравнения, 2003, т. 39, N 8, с. 1016–1029.

[4] *Kokubu H., Oka H., Wang D.* Linear grading function and further redaction of normal forms // J. Diff. Eq., 1996, v. 132, p. 293–318.