ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СИСТЕМ ОДУ С КВАДРАТИЧНО-КУБИЧЕСКОЙ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТЬЮ

В. В. БАСОВ, С. Е. ПЕТРОВА

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28,
Санкт-Петербургский Государственный университет,
математико-механический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru, sveta.e.petrova@gmail.com

Аннотация

Конструктивным методом получены все структуры обобщенных нормальных форм, к которым может быть сведена формальным обратимым преобразованием двумерная автономная система ОДУ с квадратично-кубическим многочленом в невозмущенной части, линейно эквивалентным какому-либо квазиоднородному многочлену.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение

В работе будет рассматриваться двумерная автономная система

$$\dot{x}_i = P_i(x) + X_i(x) \quad (i = 1, 2, \quad P_i \not\equiv 0), \tag{1}$$

в которой невозмущенную часть образуют полиномы $P_1(x) = a_1x_1^2 + b_1x_1x_2 + c_1x_2^2$ и $P_2(x) = a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3$. А возмущение $X_i(x) = \sum_{p_1+p_2=i+2}^{\infty} X_i^{(p_1,p_2)} x_1^{p_1} x_2^{p_2}$.

Задача заключается в том, чтобы при помощи формальных обратимых замен переменных максимальным образом упростить систему (1), сохраняя квадратично-кубическую структуру ее невозмущенной части.

Эта задача естественным образом распадается на две: сначала при помощи линейных обратимых замен упростить невозмущенную часть системы (1), а затем при помощи формальных почти тождественных замен упростить полученное возмущение, сводя исходную систему к так называемой обобщенной нормальной форме (ОНФ).

Нормализация возмущений системы будет осуществляться конструктивно методом резонансных уравнений, впервые описанным и примененном первым из авторов в [1], а затем в [2], [3] и еще целом ряде работ. Метод позволяет, во всяком случае, если степень возмущения не превосходит трех, в явном виде выписать все возможные структуры ОНФ, к которым исходная система с фиксированной невозмущенной частью может быть сведена формальной почти тождественной заменой. Это подразумевает, что для каждого порядка возмущения ОНФ будет указано не только максимальное число ненулевых слагаемых данного порядка, но и конкретно все показатели степеней, которые эти слагаемые могут иметь, а если надо, то и их коэффициенты.

Метод резонансных уравнений можно сразу применять, если невозмущенная часть системы является векторным однородным многочленом, например, второго порядка (см. [3]–[7]) или третьего порядка (см. [8]). В противном случае, например, как в системе (1), необходимо сначала выровнять порядки невозмущенной части, вводя для переменных вес, обобщенную степень и рассматривая только квазиоднородные многочлены (КОМ). А это удается сделать далеко не для любого векторного многочлена.

Поэтому при решении задачи нормализации невозмущенной части системы (1) надо сначала выделить все возможные КОМ квадратично-кубической структуры и указать условия на коэффициенты многочленов $P_1, P_2,$ при которых линейной неособой заменой они сводятся к соответствующим КОМ. И только затем приступить к последовательной нормализации возмущений систем с различными квадратично-кубическими КОМ в невозмущенной части.

В работе показано, что невозмущенная часть системы (1) может быть сведена к семи различным каноническим КОМ. И далее в явном виде получены все возможные ОНФ систем с каждым из выделенных невырожденных канонических КОМ в невозмущенной части, кроме системы с КОМ $(y_1^2, y_1^3),$ исследованной ранее в [2].

2 Выделение квазиоднородного многочлена

$\mathbf{1^0}$. Пусть $z=(z_1,z_2)$, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$, $q=(q_1,q_2)$, $Q=(Q_1(z),Q_2(z))$, $Z=(Z_1(z),Z_2(z))$.

Определение 1. *Весом* переменной z назовем вектор γ, если его компоненты γ_1,γ_2 — натуральные и взаимно простые. *Обобщенной степенью (о.с.) монома* $z_1^{q_1}z_2^{q_2}$ $(q_1,q_2\in\mathbb{Z}_+,$ $|q|=q_1+q_2\geq 1)$ назовем скалярное произведение $\langle q,\gamma\rangle$.

Определение 2. Векторный многочлен $Q(z)$ назовем *квазиоднородным многочленом (КОМ) о.с.* $k\in\mathbb{N}$ *с весом* γ и обозначим $Q_\gamma^{[k]}(z)$, если для $\forall\, i=1,2$ в Q_i входят только мономы о.с. $k+\gamma_i$, т.е. в КОМ компонента $Q_{\gamma,i}^{[k]}(z)=\sum_{q\colon\langle q,\gamma\rangle-\gamma_i=k}Q_i^{[q_1\gamma_1,q_2\gamma_2]}z_1^{q_1}z_2^{q_2}$. КОМ $Q_\gamma^{[k]}(z)$ назовем *невырожденным (НКОМ),* если обе его компоненты $Q_{\gamma,1}^{[k]}(z),Q_{\gamma,2}^{[k]}(z)\not\equiv 0$.

В приведенных терминах векторный однородный многочлен степени $k+1$, обозначаемый $Q^{(k+1)}(z)=\sum_{q\colon|q|=k+1}Q_i^{(q_1,q_2)}z_1^{q_1}z_2^{q_2}$, имеет стандартный вес $\gamma=(1,1)$ и о.с. k.

В результате компоненты векторного степенного ряда $Z(z)=\sum_{q\colon|q|\geq 1}Z^{(q_1,q_2)}z_1^{q_1}z_2^{q_2}$ можно записать как в виде суммы однородных многочленов: $Z_i=\sum_{k=0}^{\infty}Z_i^{(k+1)}(z)$, так и для произвольного веса γ в виде суммы КОМ: $Z_i=\sum_{k=1}^{\infty}Z_{\gamma,i}^{[k]}(z)$, разумеется, при условии, что все коэффициенты $Z_i^{(q_1,q_2)}=0$, если $\langle q,\gamma\rangle-\gamma_i\leq 0$ $(i=1,2)$.

В дальнейшем при наличии такой возможности нижний индекс γ будем опускать.

$\mathbf{2^0}$. Пусть $Q(z)$, как и $P(x)$ в системе (1), имеет квадратично-кубическую структуру: $Q_1=\breve a_1z_1^2+\breve b_1z_1z_2+\breve c_1z_2^2$, $Q_2=\breve a_2z_1^3+\breve b_2z_1^2z_2+\breve c_2z_1z_2^2+\breve d_2z_2^3$. Установим, какие из его членов могут образовывать НКОМ.

Утверждение 1. $Q(z)$ *является НКОМ* $Q_\gamma^\chi(z)$ *в следующих семи случаях:*

$$\begin{array}{lll}1)\ Q_{(2,1)}^{[2]}(z)=(\breve a_1z_1^2,\breve d_2z_2^3), & 2)\ Q_{(1,2)}^{[1]}(z)=(\breve a_1z_1^2,\breve a_2z_1^3), & 3)\ Q_{(1,2)}^{[2]}(z)=(\breve b_1z_1z_2,\breve b_2z_1^2z_2),\\ 4)\ Q_{(1,2)}^{[3]}(z)=(\breve c_1z_2^2,\breve c_2z_1z_2^2), & 5)\ Q_{(2,3)}^{[3]}(z)=(\breve b_1z_1z_2,\breve a_2z_1^3), & 6)\ Q_{(2,3)}^{[4]}(z)=(\breve c_1z_2^2,\breve b_2z_1^2z_2),\\ & 7)\ Q_{(3,4)}^{[5]}(z)=(\breve c_1z_2^2,\breve a_2z_1^3). & \end{array}\qquad(2)$$

Доказательство. По определению 2 векторный полином $Q(z)$ является КОМ степени χ с весом γ, если для каждого слагаемого $Q_{\gamma,i}^{[q_1^i\gamma_1,\,q_2^i\gamma_2]}z_1^{q_1}z_2^{q_2}$, входящего в Q, показатели q_1^i, q_2^i, $(i=1,2)$ удовлетворяют следующей системе:

$$\chi+\gamma_i=q_1^i\gamma_1+q_2^i\gamma_2\quad(q_1^i+q_2^i=i+1).\qquad(3)$$

В рассматриваемом случае Q_1 и Q_2 должны иметь по одному члену. Действительно, допустим, что это не так. Пусть Q_1 имеет хотя бы два монома $(\alpha_1z_1^{q_1^1}z_2^{q_2^1}$ и $\beta_1z_1^{\overline q_1^1}z_2^{\overline q_2^1})$, тогда $(q_1^1-\overline q_1^1)\gamma_1=(\overline q_2^1-q_2^1)\gamma_2$ и, следовательно, $\gamma_1=\gamma_2$, т.к. $q_1^1-\overline q_1^1=\overline q_2^1-q_2^1\neq 0$. Тогда в (3) при $i=1$ получится $\gamma_1=\chi$, а при $i=2$: $\gamma_1=2\chi$, значит, $\chi=0$, что невозможно.

Таким образом, НКОМ $Q(z)$ должен иметь вид:

$$Q_1(z)=\alpha_1z_1^pz_2^{2-p},\ Q_2(z)=\alpha_2z_1^qz_2^{3-q}\quad(p=\overline{0,2},\ q=\overline{0,3},\ \alpha_1\alpha_2\neq 0).$$

При этом система (3) примет вид: $p\gamma_1+(2-p)\gamma_2=\chi+\gamma_1,\ \ q\gamma_1+(3-q)\gamma_2=\chi+\gamma_2$ или $(p-q-1)\gamma_1=(p-q)\gamma_2,\ \ \chi=(p-1)\gamma_1+(2-p)\gamma_2$. А значит, если $p>q+1$, то $\gamma_1=p-q$, $\gamma_2=p-q-1,\ \ \chi=2p-q-2$; если $p<q$, то $\gamma_1=q-p,\ \ \gamma_2=q-p+1,\ \ \chi=q-2p+2$, что дает (2). □

3^0. Линейная замена $z_i=\tau_i y_i\ \ (\tau_i\neq 0,\ i=1,2)$ переводит систему $\dot z_i=Q_i(z)$ в систему $\dot y_i=\breve Q_i(y)$ с $\breve Q_1=\breve a_1\tau_1y_1^2+\breve b_1\tau_2y_1y_2+\breve c_1\tau_1^{-1}\tau_2^2y_2^2,\ \ \breve Q_2=\breve a_2\tau_1^3\tau_2^{-1}y_1^3+\breve b_2\tau_1^2y_1^2y_2+\breve c_2\tau_1\tau_2y_1y_2^2+\breve d_2\tau_2^2y_2^3$.

Предположим, что $Q(z)$ – НКОМ вида $(2_1)-(2_7)$. Тогда $\breve Q(y)=(\breve Q_1(y),\breve Q_2(y))$ тоже НКОМ той же степени и с тем же весом. Выбирая должным образом коэффициенты замены, пронормируем НКОМ $\breve Q$, соответственно получая:

1) $\breve Q^{[2]}_{(2,1)}=(y_1^2,y_2^3)\,\mathrm{sign}\,\breve d_2$ при $\tau_1=\breve a_1^{-1}\mathrm{sign}\,\breve d_2,\ \ \tau_2=|\breve d_2|^{-1/2}$;
2) $\breve Q^{[1]}_{(1,2)}=(y_1^2,y_1^3)$ при $\tau_1=\breve a_1^{-1},\ \ \tau_2=\breve a_1^{-3}\breve a_2$;
3) $\breve Q^{[2]}_{(1,2)}=(y_1y_2,y_1^2y_2)\,\mathrm{sign}\,\breve b_2$ при $\tau_1=|\breve b_2|^{-1/2},\ \ \tau_2=\breve b_1^{-1}\mathrm{sign}\,\breve b_2$;
4) $\breve Q^{[3]}_{(1,2)}=(y_2^2,y_1y_2^2)$ при $\tau_1=\breve c_1^{1/3}\breve c_2^{-2/3},\ \ \tau_2=(\breve c_1\breve c_2)^{-1/3}$;
5) $\breve Q^{[3]}_{(2,3)}=(y_1y_2,y_1^3)$ при $\tau_1=(\breve b_1\breve a_2)^{-1/3},\ \ \tau_2=\breve b_1^{-1}$;
6) $\breve Q^{[4]}_{(2,3)}=(y_2^2,y_1^2y_2)\,\mathrm{sign}\,\breve b_2$ при $\tau_1=|\breve b_2|^{-1/2}\mathrm{sign}\,(\breve b_2\breve c_1),\ \ \tau_2=|\breve c_1^2\breve b_2|^{-1/4}$;
7) $\breve Q^{[5]}_{(3,4)}=(y_2^2,y_1^3)$ при $\tau_1=(\breve c_1\breve a_2)^{-1/5},\ \ \tau_2=\breve a_2^{2/5}\breve c_1^{-3/5}$.

Определение 3. *Каноническими невырожденными квазиоднородными многочленами квадратично-кубической структуры* ($КНКОМ_{кк}$) будем называть такие НКОМ $R^{[\chi]}_\gamma(y)$:

$$1)\ R^{[2]}_{(2,1)}=\sigma(y_1^2,y_2^3),\qquad 2)\ R^{[1]}_{(1,2)}=(y_1^2,y_1^3),\qquad 3)\ R^{[2]}_{(1,2)}=\sigma(y_1y_2,y_1^2y_2),$$
$$4)\ R^{[3]}_{(1,2)}=(y_2^2,y_1y_2^2),\qquad 5)\ R^{[3]}_{(2,3)}=(y_1y_2,y_1^3),\qquad 6)\ R^{[4]}_{(2,3)}=\sigma(y_2^2,y_1^2y_2),$$
$$7)\ R^{[5]}_{(3,4)}=(y_2^2,y_1^3)\qquad (\sigma=\pm1).$$

4^0. Установим условия на коэффициенты системы (1) $\dot x_i=P_i(x)+X_i(x)$, при которых она линейной неособой заменой

$$x_1=py_1+qy_2,\quad x_2=ry_1+sy_2\quad (pq-rs\neq 0),\tag{4}$$

может быть сведена к системе

$$\dot y_i=\widetilde P_i(y)+Y_i(y)\quad (\widetilde P_i\not\equiv 0,\ i=1,2)\tag{5}$$

с $\widetilde P_1=\tilde a_1y_1^2+\tilde b_1y_1y_2+\tilde c_1y_2^2,\ \widetilde P_2=\tilde a_2y_1^3+\tilde b_2y_1^2y_2+\tilde c_2y_1y_2^2+\tilde d_2y_2^3,\ Y_i=\sum_{p_1+p_2=i+2}^\infty Y_i^{(p_1,p_2)}y_1^{p_1}y_2^{p_2}$, невозмущенная часть которой является $КНКОМ_{кк}$, т. е. $\widetilde P=R^{[\chi]}_\gamma$, а члены возмущения имеют о.с. более высокую чем χ.

Иными словами, система (5) после перегруппировки по о.с. должна иметь вид

$$\dot y_i=R^{[\chi]}_{\gamma,i}(y)+\sum_{k=\chi+1}^\infty Y^{[k]}_{\gamma,i}(y).\tag{6}$$

У четырех КНКОМ$_{\text{кк}}$ вес и порядок таковы, что возмущение Y может иметь члены, обобщенный порядок которых не превосходит χ. Поэтому будем предполагать, что

$$\begin{array}{l} 1)\ R^{[2]}_{(2,1)}:\ Y_1^{(0,3)}=0\ \ (k=1),\ \ Y_1^{(1,2)},Y_1^{(0,4)}=0\ \ (k=2);\\ 3)\ R^{[2]}_{(1,2)}:\ Y_1^{(3,0)},Y_2^{(4,0)}=0\ \ (k=2);\\ 4)\ R^{[3]}_{(1,2)}:\ Y_1^{(3,0)},Y_2^{(4,0)}=0\ \ (k=2),\ \ Y_1^{(2,1)},Y_1^{(4,0)},Y_2^{(5,0)},Y_2^{(3,1)}=0\ \ (k=3);\\ 6)\ R^{[4]}_{(2,3)}:\ Y_1^{(3,0)}=0\ \ (k=4). \end{array} \tag{7}$$

Дифференцируя замену (4) в силу (1) и (5), получаем тождества:

$$\begin{array}{l} P_1(py_1+qy_2,ry_1+sy_2)+X_1(py_1+qy_2,ry_1+sy_2)=p(\widetilde{P}_1+Y_1(y_1,y_2))+q(\widetilde{P}_2+Y_2(y_1,y_2)),\\ P_2(py_1+qy_2,ry_1+sy_2)+X_2(py_1+qy_2,ry_1+sy_2)=r(\widetilde{P}_1+Y_1(y_1,y_2))+s(\widetilde{P}_2+Y_2(y_1,y_2)). \end{array}$$

Во втором из них квадратичные члены встречаются только в слагаемом $r\widetilde{P}_1$, а значит, $r=0$. Поэтому

$$\begin{array}{l} a_1(py_1+qy_2)^2+b_1s(py_1+qy_2)y_2+c_1s^2y_2^2+X_1(py_1+qy_2,sy_2)=\\ \quad =p(\tilde{a}_1y_1^2+\tilde{b}_1y_1y_2+\tilde{c}_1y_2^2+Y_1)+q(\tilde{a}_2y_1^3+\tilde{b}_2y_1^2y_2+\tilde{c}_2y_1y_2^2+\tilde{d}_2y_2^3+Y_2),\\ a_2(py_1+qy_2)^3+b_2s(py_1+qy_2)^2y_2+c_2s^2(py_1+qy_2)y_2^2+d_2s^3y_2^3+\\ +X_2(py_1+qy_2,sy_2)=s(\tilde{a}_2y_1^3+\tilde{b}_2y_1^2y_2+\tilde{c}_2y_1y_2^2+\tilde{d}_2y_2^3+Y_2)\quad (p,s\neq 0). \end{array} \tag{8}$$

Приравнивая коэффициенты при квадратичных членах в первом уравнении (8) и при кубических во втором, находим формулы для коэффициентов $\widetilde{P}(y)$ системы (5):

$$\begin{array}{c} \tilde{a}_1=a_1p,\ \tilde{b}_1=2a_1q+b_1s,\ \tilde{c}_1=(a_1q^2+b_1qs+c_1s^2)p^{-1};\\ \tilde{a}_2=a_2p^3s^{-1},\ \tilde{b}_2=(3a_2qs^{-1}+b_2)p^2,\ \tilde{c}_2=(3a_2q^2s^{-1}+2b_2q+c_2s)p,\\ \tilde{d}_2=a_2q^3s^{-1}+b_2q^2+c_2qs+d_2s^2\quad (p,s\neq 0). \end{array} \tag{9}$$

Лемма 1. *Если в системе* (1)*:*
1) для $\forall\, a_1,d_2\neq 0,\ \forall\, b_1:\ a_2,b_2,c_2=0,\ c_1=a_1^{-1}b_1^2/4,\ X_1^{(0,3)}=a_1^{-3}b_1(-2a_1^2d_2+a_1b_1X_1^{(2,1)}-b_1^2X_1^{(3,0)})/4,\ X_1^{(1,2)}=a_1^{-2}b_1(4a_1X_1^{(2,1)}-3b_1X_1^{(3,0)})/4,\ X_1^{(0,4)}=a_1^{-5}b_1(16a_1^4(X_1^{(1,3)}-X_2^{(0,4)})-8a_1^3b_1(X_1^{(2,2)}-X_2^{(1,3)})+4a_1^2b_1^2(X_1^{(3,1)}-X_2^{(2,2)})-2a_1b_1^3(X_1^{(4,0)}-X_2^{(3,1)})-b_1^4X_2^{(4,0)})/32,$ *то она заменой* (4) *сводится к системе* (5) *с* $\widetilde{P}=R^{[1]}_{(2,1)}$, *в котором* $\sigma=\operatorname{sign} d_2$;
2) для $\forall\, a_1,a_2\neq 0,\ \forall\, b_1:\ c_1=a_1^{-1}b_1^2/4,\ b_2=3a_1^{-1}a_2b_1/2,\ c_2=3a_1^{-2}a_2b_1^2/4,\ d_2=a_1^{-3}a_2b_1^3/8,$ *то она заменой* (4) *сводится к системе* (5) *с* $\widetilde{P}=R^{[1]}_{(1,2)}$;
3) для $\forall\, b_1,b_2\neq 0,\ \forall\, c_1:\ a_1,a_2,X_1^{(3,0)},\ X_2^{(4,0)}=0,\ c_2=2b_1^{-1}b_2c_1,\ d_2=b_1^{-2}b_2c_1^2,$ *то она заменой* (4) *сводится к системе* (5) *с* $\widetilde{P}=R^{[2]}_{(1,2)}$, *в котором* $\sigma=\operatorname{sign} b_2$;
4) для $\forall\, c_1,c_2\neq 0,\ \forall\, d_2:\ a_1,a_2,b_1,b_2,X_1^{(3,0)},X_1^{(4,0)},X_1^{(2,1)},X_2^{(3,1)},X_2^{(4,0)},X_2^{(5,0)}=0,$ *то она заменой* (4) *сводится к системе* (5) *с* $\widetilde{P}=R^{[3]}_{(1,2)}$;
5) для $\forall\, b_1,a_2\neq 0,\ \forall\, c_1:\ a_1=0,\ b_2=3a_2b_1^{-1}c_1,\ c_2=3a_2b_1^{-2}c_1^2,\ d_2=a_2b_1^{-3}c_1^3,$ *то она заменой* (4) *сводится к системе* (5) *с* $\widetilde{P}=R^{[3]}_{(2,3)}$;
6) для $\forall\, c_1,b_2\neq 0,\ \forall\, c_2:\ a_1,a_2,b_1,X_1^{(3,0)}=0,\ d_2=b_2^{-1}c_2^2/4,$ *то она заменой* (4) *сводится к системе* (5) *с* $\widetilde{P}=R^{[4]}_{(2,3)}$, *в котором* $\sigma=\operatorname{sign} b_2$;
7) для $\forall\, c_1,a_2\neq 0,\ \forall\, b_2:\ a_1,b_1=0,\ c_2=a_2^{-1}b_2^2/3,\ d_2=a_2^{-2}b_2^3/27,$ *то она заменой* (4) *сводится к системе* (5) *с* $\widetilde{P}=R^{[5]}_{(3,4)}$.

Доказательство. 1) Пусть в системе (5) $\widetilde{P} = R^{[1]}_{(2,1)}$, т. е. $\tilde{a}_1 = 1$, $\tilde{a}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 = 0$, $\tilde{d}_2 = \sigma = \pm 1$; $Y_1^{(0,3)}, Y_1^{(1,2)}, Y_1^{(0,4)} = 0$. Тогда из (9) получаем равенства: $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $c_2 = 0$; $p = a_1^{-1}$, $s = \pm 1/|d_2|^{1/2}$, $\sigma = \mathrm{sign\ d_2}$, $\mathrm{q} = \mp \mathrm{b_1}/(2\mathrm{a_1}|\mathrm{d_2}|^{1/2})$, $\mathrm{r} = 0$; $\mathrm{b_1^2 - 4a_1c_1} = 0$.

Условия $Y_1^{(0,3)}, Y_1^{(1,2)}, Y_1^{(0,4)} = 0$ из (7_1) для системы (5) накладывают три связи на коэффициенты возмущения $X = (X_1(x), X_2(x))$ системы (1). Действительно, приравнивая коэффициенты при y_2^3, $y_1 y_2^2$ в (8_1) и при y_2^4 в (8_1) и (8_2), получаем равенства:

$$q^3 X_1^{(3,0)} + q^2 s X_1^{(2,1)} + q s^2 X_1^{(1,2)} + s^3 X_1^{(0,3)} = q\tilde{d}_2 = \sigma q;$$
$$3pq^2 X_1^{(3,0)} + 2pqs X_1^{(2,1)} + p s^2 X_1^{(1,2)} = q\tilde{c}_2 = 0;$$
$$q^4 X_1^{(4,0)} + q^3 s X_1^{(3,1)} + q^2 s^2 X_1^{(2,2)} + q s^3 X_1^{(1,3)} + s^4 X_1^{(0,4)} = q Y_2^{(0,4)},$$
$$q^4 X_2^{(4,0)} + q^3 s X_2^{(3,1)} + q^2 s^2 X_2^{(2,2)} + q s^3 X_2^{(1,3)} + s^4 X_2^{(0,4)} = s Y_2^{(0,4)}.$$

Подставляя $X_1^{(1,2)}$ из второго равенства в первое и $Y_2^{(0,4)}$ из четвертого в третье, имеем: $-2q^3 X_1^{(3,0)} - q^2 s X_1^{(2,1)} + s^3 X_1^{(0,3)} = \sigma q$, $3q^2 X_1^{(3,0)} + 2qs X_1^{(2,1)} + s^2 X_1^{(1,2)} = 0$, $q^4 s X_1^{(4,0)} + q^3 s^2 X_1^{(3,1)} + q^2 s^3 X_1^{(2,2)} + q s^4 X_1^{(1,3)} + s^5 X_1^{(0,4)} - q^5 X_2^{(4,0)} - q^4 s X_2^{(3,1)} - q^3 s^2 X_2^{(2,2)} - q^2 s^3 X_2^{(1,3)} - s^4 X_2^{(0,4)} = 0$. Подставляя в эти равенства формулы для p, q, s, получаем:

$$a_1^{-3} b_1^3 |d_2|^{-3/2} X_1^{(3,0)}/4 - a_1^{-2} b_1^2 |d_2|^{-3/2} X_1^{(2,1)}/4 + |d_2|^{-3/2} X_1^{(0,3)} - \sigma a_1^{-1} b_1 |d_2|^{-1/2}/2 = 0,$$
$$3a_1^{-2} b_1^2 |d_2|^{-1} X_1^{(3,0)}/4 - a_1^{-1} b_1^2 |d_2|^{-1} X_1^{(2,1)} + |d_2|^{-1} X_1^{(1,2)} = 0,$$
$$|d_2|^{-5/2} (a_1^{-4} b_1^4 X_1^{(4,0)}/16 - a_1^{-3} b_1^3 X_1^{(3,1)}/8 + a_1^{-2} b_1^2 X_1^{(2,2)}/4 - a_1^{-1} b_1 X_1^{(1,3)}/2 + X_1^{(0,4)} +$$
$$+ a_1^{-5} b_1^5 X_2^{(4,0)}/32 - a_1^{-4} b_1^4 X_2^{(3,1)}/16 + a_1^{-3} b_1^3 X_2^{(2,2)}/8 - a_1^{-2} b_1^2 X_2^{(1,3)}/4 + a_1^{-1} b_1 X_2^{(0,4)}) = 0.$$

Отсюда, производя необходимые упрощения, приходим к равенствам из п.1 леммы.

2) Пусть в системе (5) $\widetilde{P} = R^{[1]}_{(1,2)}$, т. е. $\tilde{a}_1 = 1$, $\tilde{a}_2 = 1$, $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{d}_2 = 0$. Дополнительных условий на члены возмущения Y в данном случае нет, так как Y не имеет членов порядка ≥ 1. Из равенств (9) получим:

$$a_1 p = 1,\ a_2 p^3 s^{-1} = 1,\ 2a_1 q + b_1 s = 0;\ a_1 q^2 + b_1 qs + c_1 s^2 = 0,$$
$$3a_2 q s^{-1} + b_2 = 0,\ 3a_2 q^2 s^{-1} + 2b_2 q + c_2 s = 0,\ a_2 q^3 s^{-1} + b_2 q^2 + c_2 qs + d_2 s^2 = 0.$$

Поскольку $p, s \neq 0$, то $a_1, a_2 \neq 0$. Из первых трех равенств получим: $p = a_1^{-1}$, $s = a_1^{-3} a_2$, $q = -b_2/(3a_1^3)$. Подставим в оставшиеся равенства формулы для $p, q, s:$ $3a_1^{-1} a_2 b_1 - 2b_2 = 0$, $a_1 b_2^2 - 3a_2 b_1 b_2 + 9a_2^2 c_1 = 0$, $3a_2 c_2 - b_2^2 = 0$, $2b_2^3 - 9a_2 b_2 c_2 + 27a_2^2 d_2 = 0$. Выражая b_2, c_1, c_2, d_2 получим условия п.2 леммы.

4) Пусть в системе (5) $\widetilde{P} = R^{[3]}_{(1,2)}$, т. е. $\tilde{c}_1 = 1$, $\tilde{c}_2 = 1$, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{d}_2 = 0$; $Y_1^{(3,0)}, Y_2^{(4,0)}, Y_1^{(2,1)}, Y_1^{(4,0)}, Y_2^{(5,0)}, Y_2^{(3,1)} = 0$. Из равенств (9) получим: a_1, a_2, b_1, $b_2 = 0$; $s = c_1^{-1/3} c_2^{-1/3}$, $p = c_1^{1/3} c_2^{-2/3}$, $q = -c_1^{-1/3} c_2^{-4/3} d_2$.

Условия $Y_1^{(3,0)}, Y_2^{(4,0)}, Y_1^{(2,1)}, Y_1^{(4,0)}, Y_2^{(5,0)}, Y_2^{(3,1)} = 0$ из (7_4) для системы (5) накладывают шесть связей на коэффициенты возмущения X системы (1). Действительно, приравнивая коэффициенты при y_1^3, y_1^4, $y_1^2 y_2$, $y_1^5, y_1^3 y_2$ в (8_1) и (8_2), получаем равенства:

$$p^3 X_1^{(3,0)} = p Y_1^{(3,0)} = 0;\ p^4 X_1^{(4,0)} = p Y_1^{(4,0)} + q Y_2^{(4,0)} = 0,\ p^4 X_2^{(4,0)} = s Y_2^{(4,0)} = 0;$$
$$p^2 s X_1^{(2,1)} + 3p^2 q X_1^{(3,0)} = p Y_1^{(2,1)};\ p^5 X_2^{(5,0)} = s Y_2^{(5,0)} = 0;\ p^3 s X_2^{(3,1)} + 4p^3 q X_2^{(4,0)} = s Y_2^{(3,1)} = 0.$$

Из них имеем: $X_1^{(3,0)}, X_1^{(4,0)}, X_1^{(2,1)}, X_2^{(4,0)}, X_2^{(5,0)}, X_2^{(3,1)} = 0$.

Остальные случаи доказываются аналогично. □

5⁰. Если отказаться от квадратично-кубической структуры невозмущенной части системы, то все КНКОМ$_{\text{кк}}$ окажутся частными случаями следующих НКОМ:

1) $Q^{[2]}_{(2,1)}(y) = (Q_1^{[0,4]}y_2^4 + Q_1^{[2,2]}y_1y_2^2 + Q_1^{[4,0]}y_1^2,\ \ Q_2^{[0,3]}y_2^3 + Q_2^{[2,1]}y_1y_2);$
2) $Q^{[1]}_{(1,2)}(y) = (Q_1^{[0,2]}y_2 + Q_1^{[2,0]}y_1^2,\ \ Q_2^{[1,2]}y_1y_2 + Q_2^{[3,0]}y_1^3);$
3) $Q^{[2]}_{(1,2)}(y) = (Q_1^{[1,2]}y_1y_2 + Q_1^{[3,0]}y_1^3,\ \ Q_2^{[0,4]}y_2^2 + Q_2^{[2,2]}y_1^2y_2 + Q_2^{[4,0]}y_1^4);$
4) $Q^{[3]}_{(1,2)}(y) = (Q_1^{[0,4]}y_2^2 + Q_1^{[2,2]}y_1^2y_2 + Q_1^{[4,0]}y_1^4,\ \ Q_2^{[1,4]}y_1y_2^2 + Q_2^{[3,2]}y_1^3y_2 + Q_2^{[5,0]}y_1^5);$
5) $Q^{[3]}_{(2,3)}(y) = (Q_1^{[2,3]}y_1y_2,\ \ Q_2^{[0,6]}y_2^2 + Q_2^{[6,0]}y_1^3);$
6) $Q^{[4]}_{(2,3)}(y) = (Q_1^{[0,6]}y_2^2 + Q_1^{[6,0]}y_1^3,\ \ Q_2^{[4,3]}y_1^2y_2);$
7) $Q^{[5]}_{(3,4)}(y) = (Q_1^{[0,8]}y_2^2,\ \ Q_2^{[9,0]}y_1^3).$

При этом прежде, чем начинать работать с системами с указанными невозмущенными частями, надо нормализовать сами $Q^{[\chi]}_\gamma$, сводя их к различным каноническим формам.

3 Метод резонансных уравнений и ОНФ

Рассмотрим систему

$$\dot x_i = P^{[\chi]}_{\gamma,i}(x) + X_i(x) \quad (i = 1,2), \tag{10}$$

в которой $P^{[\chi]}_\gamma$ – произвольный КОМ о.с. χ с весом γ, а возмущение $X_i = \sum_{k=\chi+1}^\infty X^{[k]}_{\gamma,i}(x)$. Ее частным случаем является система (6).

Пусть почти тождественная формальная замена

$$x_i = y_i + h_i(y), \tag{11}$$

где $h_i = \sum_{k=1}^\infty h^{[k]}_{\gamma,i}(y)$, переводит систему (10) в систему с аналогичной структурой:

$$\dot y_i = P^{[\chi]}_{\gamma,i}(y) + Y_i(y) \quad (i = 1,2). \tag{12}$$

Дифференцируя замену (11) в силу систем (10) и (12), получаем тождества:

$$P^{[\chi]}_{\gamma,i}(y+h) + X_i(y+h) = P^{[\chi]}_{\gamma,i}(y) + Y_i(y) + \sum_{j=1}^2 \partial h_i/\partial y_j (P^{[\chi]}_{\gamma,j}(y) + Y_j(y)).$$

Поскольку $P^{[\chi]}_{\gamma,i}(y+h) - P^{[\chi]}_{\gamma,i}(y) = \sum_{j=1}^2 \partial P^{[\chi]}_{\gamma,i}/\partial y_j\ h_j(y) + P^*_i(y,h)$, где P^* содержит члены ряда h как минимум во 2-й степени, эти тождества принимают вид

$$\sum_{j=1}^2 (\frac{\partial h_i}{\partial y_j}\ P^{[\chi]}_{\gamma,j}(y) - \frac{\partial P^{[\chi]}_{\gamma,i}}{\partial y_j}\ h_j(y)) \equiv -Y_i(y) + X_i(y+h) - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial h_i}{\partial y_j}\ Y_j(y) + P^*_i(y,h).$$

Выделим в последнем тождестве члены, имеющие обобщенный порядок $k \ge \chi + 1$:

$$\sum_{j=1}^2 (\frac{\partial h^{[k-\chi]}_{\gamma,i}}{\partial y_j}\ P^{[\chi]}_{\gamma,j}(y) - \frac{\partial P^{[\chi]}_{\gamma,i}}{\partial y_j}\ h^{[k-\chi]}_{\gamma,j}(y)) = \widetilde Y^{[k]}_{\gamma,i}(y) - Y^{[k]}_{\gamma,i}(y), \tag{13}$$

где $\widetilde Y^{[k]}_{\gamma,i} = \{X_i(y+h) + P^*_i(y,h) - \sum_{j=1}^2 \partial h_i/\partial y_j\ Y_j(y)\}^{[k]}_\gamma$.

КОМ $\widetilde{Y}_\gamma^{[k]}$ может содержать лишь квазиоднородные многочлены $h_\gamma^{[s]}$ и $Y_\gamma^{[s+\chi]}$, у которых $1 \le s \le k-\chi-1$. Следовательно, при последовательном по мере возрастания k вычислении $h_\gamma^{[k-\chi]}$ и $Y_\gamma^{[k]}$ в КОМ $\widetilde{Y}_\gamma^{[k]}$ оказываются уже известные величины.

Левая часть (13) является линейным оператором $L_{k-\chi}^P$ (скобкой Ли), переводящим линейное пространство $H_{k-\chi}$ КОМ степени $k-\chi$ в линейное пространство H_k.

В дальнейшем γ остаётся неизменным, поэтому нижний индекс γ у КОМ опускаем.

Рассмотрим КОМ $Z^{[k]}$. Вектор показателей степеней q^i $(i=1,2)$ любого слагаемого его i-й компоненты удовлетворяет уравнению $(q^i,\gamma)=k+\gamma_i$.

Пусть k_γ^i – это число различных векторов q^i, удовлетворяющих этому уравнению.

Располагая q^i в лексико-графическом порядке, взаимно-однозначно сопоставим КОМ $Z^{[k]}$ вектор его коэффициентов $Z^{\{k\}}=(Z_1^{\{k\}},\ Z_2^{\{k\}})$ размерности $|k_\gamma|=k_\gamma^1+k_\gamma^2$.

С учетом сказанного выше, система (13) может быть переписана в матричном виде

$$L^{\{k\}}h^{\{k-\chi\}}=\widetilde{Y}^{\{k\}}-Y^{\{k\}}\quad (k\ge\chi+1), \tag{14}$$

где $L^{\{k\}}=L^{\{k\}}(P_\gamma^{[\chi]})$ – постоянная матрица размерности $|k_\gamma|\times|(k-\chi)_\gamma|$, являющаяся представлением линейного оператора $L_{k-\chi}^P$.

Предположим, что матрица $L^{\{k\}}$ имеет ранг $r_k=r_k(\chi)=|(k-\chi)_\gamma|-k_\gamma^0$, где $k_\gamma^0\ge 0$. Выделяя из системы (14) линейную подсистему порядка r_k с ненулевым определителем, однозначно найдем r_k компонент вектора коэффициентов $h^{\{k-\chi\}}$ замены (11), а оставшиеся k_γ^0 свободных компонент произвольным образом зафиксируем. После этого подставим $h^{\{k-\chi\}}$ в оставшиеся уравнения системы (13), получая $n_k=n_k(\chi)=|k_\gamma|-r_k$ линейно независимых линейных уравнений, связывающих компоненты вектора коэффициентов $Y^{\{k\}}$:

$$\langle\alpha_\mu^{\{k\}},Y_1^{\{k\}}\rangle+\langle\beta_\mu^{\{k\}},Y_2^{\{k\}}\rangle=\tilde{c}\ \ (\mu=\overline{1,n_k}), \tag{15}$$

где $\tilde{c}=\langle\alpha_\mu^{\{k\}},\widetilde{Y}_1^{\{k\}}\rangle+\langle\beta_\mu^{\{k\}},\widetilde{Y}_2^{\{k\}}\rangle$ – известная константа, а n_k пар постоянных векторов $\alpha_\mu^{\{k\}}$, $\beta_\mu^{\{k\}}$ размерностей k_γ^1, k_γ^2 определяются только КОМ $P_\gamma^{[\chi]}$ системы (10).

Определение 4. Уравнения (15) называем *резонансными.* Коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ системы (12), входящие хотя бы в одно из резонансных уравнений (15), называем *резонансными,* а остальные – *нерезонансными. Резонансными* называем k_γ^0 коэффициентов КОМ $h^{[k-\chi]}$, остающихся свободными при решении системы (14).

Покажем, что резонансные уравнения позволяют установить наличие формальной эквивалентности между любыми двумя системами, имеющими невозмущенную часть $P_\gamma^{[\chi]}$, и конструктивно выделить из них наиболее простые системы, называемые обобщенными нормальными формами, указав все их возможные структуры.

Любым n_k различным резонансным коэффициентам $Y^{k,\eta}=Y_{i_\eta}^{[q_1^\eta\gamma_1,\,q_2^\eta\gamma_2]}$ квазиоднородных многочленов $Y_1^{[k]},Y_2^{[k]}$, где $\eta=\overline{1,n_k}$, $i_\eta\in\{0,1\}$, $q_1^\eta\gamma_1+q_2^\eta\gamma_2-\gamma_{i_\eta}=k$, сопоставим матрицу множителей $\Upsilon^k=\{\upsilon_{\mu\eta}^k\}_{\mu,\eta=1}^{n_k}$, элемент $\upsilon_{\mu\eta}^k$ которой, если $i_\eta=1$, равен компоненте вектора $\alpha_\mu^{\{k\}}$, являющейся множителем при $Y^{k,\eta}$ в μ-ом уравнении (15), а если $i_\eta=2$, равен соответствующей компоненте вектора $\beta_\mu^{\{k\}}$.

Определение 5. Для $\forall\, k\ge 2$ семейство резонансных коэффициентов $\mathcal{Y}^k=\{Y^{k,\eta}\}_{\eta=1}^{n_k}$ называем *резонансным k-набором,* если $det\,\Upsilon^k\ne 0$. Для любых $\mathcal{Y}^2,\mathcal{Y}^3,\ldots$ семейство $\mathcal{Y}=\bigcup_{k=2}^\infty\mathcal{Y}^k$ называем *резонансным набором.*

Использование для $\forall\, k \geq 2$ резонансных k-наборов $\mathcal{Y}^k$ позволяет однозначно разрешать резонансные уравнения (15) относительно коэффициентов любого из них.

Определение 6. Систему (12) называем *обобщенной нормальной формой (ОНФ),* если при $\forall\, k \geq 2$ все коэффициенты КОМ $Y_1^{[k]}, Y_2^{[k]}$ как резонансные, так и не резонансные, равны нулю, за исключением коэффициентов из какого-либо резонансного k-набора $\mathcal{Y}^k$, имеющих произвольные значения.

Тем самым, структуру любой ОНФ порождает какой-либо резонансный набор $\mathcal{Y}$.

Знание резонансных уравнений (15) делает очевидными следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (12) *была формально эквивалентна исходной системе* (10)*, необходимо и достаточно, чтобы для* $\forall\, k \geq 2$ *коэффициенты ее КОМ* $Y_1^{[k]}, Y_2^{[k]}$ *удовлетворяли резонансным уравнениям* (15).

Теорема 2. *Для любой системы* (10) *и для любого выбранного по её невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}$ *существует и единственна почти тождественная замена* (11) *с заранее произвольным образом зафиксированными резонансными коэффициентами, преобразующая* (10) *в ОНФ* (12)*, структура которой порождена* $\mathcal{Y}$.

4 ОНФ систем с $\mathbf{R}^{[2]}_{(2,1)}$ в невозмущенной части.

4.1 Получение связующей системы

Рассмотрим систему (10) с канонической невозмущенной частью $R^{[2]}_{(2,1)} = (x_1^2, x_2^3)$:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + \sum_{k=3}^{\infty} X_1^{[k]}(x), \quad \dot{x}_2 = x_2^3 + \sum_{k=3}^{\infty} X_2^{[k]}(x), \tag{16}$$

где в возмущении КОМ $X_i^{[k]} = \sum_{2q_1+q_2=k+\gamma_i} X_i^{[2q_1,q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$.

***Замечание* 1.** Вообще говоря, $R^{[2]}_{(2,1)} = \sigma(x_1^2, x_2^3)$, но при $\sigma = -1$ можно сделать замену времени $t = -\tau$ и получить систему (16), возмущение в которой сменит знак.

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y) \quad (i = 1, 2), \tag{17}$$

где $h_i(y) = \sum_{k=3}^{\infty} h_i^{[k-2]}(y)$, $h_i^{[k-2]} = \sum_{2q_1+q_2=k+\gamma_i-2} h_i^{[2q_1,q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$ переводит (16) в систему:

$$\dot{y}_1 = y_1^2 + \sum_{k=3}^{\infty} Y_1^{[k]}(y), \quad \dot{y}_2 = y_2^3 + \sum_{k=3}^{\infty} Y_2^{[k]}(y), \tag{18}$$

где возмущение $Y_i^{[k]} = \sum_{2q_1+q_2=k+\gamma_i} Y_i^{[2q_1,q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$.

Тождества (13) с $\chi = 2$ и $\gamma = (2, 1)$ для систем (16), (18) и замены (17) имеют вид:

$$\frac{\partial h_1^{[k-2]}}{\partial y_1} y_1^2 + \frac{\partial h_1^{[k-2]}}{\partial y_2} y_2^3 - 2y_1 h_1^{[k-2]} = \widetilde{Y}_1^{[k]} - Y_1^{[k]}, \quad \frac{\partial h_2^{[k-2]}}{\partial y_1} y_1^2 + \frac{\partial h_2^{[k-2]}}{\partial y_2} y_2^3 - 3y_2^2 h_2^{[k-2]} = \widetilde{Y}_2^{[k]} - Y_2^{[k]},$$

где $\widetilde{Y}_i^{[k]}$ $(i = 1, 2)$ находится по формуле, указанной в (13).

Приравняв в них коэффициенты при $y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, получим линейную связующую систему:

$$\begin{array}{ll} (q_1-3)h_1^{[2q_1-2,q_2]}+(q_2-2)h_1^{[2q_1,q_2-2]}=\widehat{Y}_1^{[2q_1,q_2]} & (2q_1+q_2=k+2), \\ (q_1-1)h_2^{[2q_1-2,q_2]}+(q_2-5)h_2^{[2q_1,q_2-2]}=\widehat{Y}_2^{[2q_1,q_2]} & (2q_1+q_2=k+1), \end{array} \tag{19}$$

в которой $\widehat{Y}_i^{[2q_1,q_2]}=\widetilde{Y}_i^{[2q_1,q_2]}-Y_i^{[2q_1,q_2]}$.

Положим $k=2r+v$ $(r\in\mathbb{N},\ v=1,2)$, $q_1=l$ $(l\in\mathbb{Z}_+)$, тогда в $\widehat{Y}_i^{[2q_1,q_2]}$ индекс $q_2=2(r-l)+v+\gamma_i\ge 0$ и связующая система (19) перепишется в виде:

$$\begin{array}{ll} (l-3)h_1^{[2l-2,2(r-l)+2+v]}+(2(r-l)+v)h_1^{[2l,2(r-l)+v]}=\widehat{Y}_1^{[2l,2(r-l)+2+v]} & (l=\overline{0,r+v}), \\ (l-1)h_2^{[2l-2,2(r-l)+1+v]}+(2(r-l)+v-4)h_2^{[2l,2(r-l)-1+v]}=\widehat{Y}_2^{[2l,2(r-l)+1+v]} & (l=\overline{0,r+1}). \end{array} \tag{20}$$

4.2 Случай r=1 (k=3, 4)

1⁰. $k=3$ $(v=1)$. Система (20) имеет вид: $3h_1^{[0,3]}=\widehat{Y}_1^{[0,5]}$, $-2h_1^{[0,3]}+h_1^{[2,1]}=\widehat{Y}_1^{[2,3]}$, $-h_1^{[2,1]}=\widehat{Y}_1^{[4,1]}$, $-h_2^{[0,2]}=\widehat{Y}_2^{[0,4]}$, $-3h_2^{[2,0]}=\widehat{Y}_2^{[2,2]}$, $h_2^{[2,0]}=\widehat{Y}_2^{[4,0]}$ и дает две резонансные связи:

$$2\widehat{Y}_1^{[0,5]}+3\widehat{Y}_1^{[2,3]}+3\widehat{Y}_1^{[4,1]}=0,\quad 3\widehat{Y}_2^{[4,0]}+\widehat{Y}_2^{[2,2]}=0. \tag{21}$$

2⁰. $k=4$ $(v=2)$. Система (20) имеет вид: $4h_1^{[0,4]}=\widehat{Y}_1^{[0,6]}$, $-2h_1^{[0,4]}+2h_1^{[2,2]}=\widehat{Y}_1^{[2,4]}$, $-h_1^{[2,2]}=\widehat{Y}_1^{[4,2]}$, $0=\widehat{Y}_1^{[6,0]}$, $0=\widehat{Y}_2^{[0,5]}$, $-2h_2^{[2,1]}=\widehat{Y}_2^{[2,3]}$, $h_2^{[2,1]}=\widehat{Y}_2^{[4,1]}$ и дает четыре резонансные связи:

$$\widehat{Y}_1^{[0,6]}+2\widehat{Y}_1^{[2,4]}+4\widehat{Y}_1^{[4,2]}=0,\quad \widehat{Y}_1^{[6,0]}=0,\quad \widehat{Y}_2^{[0,5]}=0,\quad \widehat{Y}_2^{[2,3]}+2\widehat{Y}_2^{[4,1]}=0. \tag{22}$$

4.3 Случай r ≥ 2 (k ≥ 5)

1⁰. Вводя новые обозначения, запишем (20_1) в следующем виде:

$$a_l^v h_{1,l-1}^v+b_l^v h_{1,l}^v=Y_{1,l}^v \quad (l=\overline{0,r+v}), \tag{23}$$

где $a_l^v=l-3$, $b_l^v=2(r-l)+v$, $h_{1,l}^v=h_1^{[2l,2(r-l)+v]}$ $(l=\overline{0,r+v-1})$, $Y_{1,l}^v=\widehat{Y}_1^{[2l,2(r-l)+2+v]}$.

Решая систему (23) методом Гаусса, аннулируем элементы $b_{r+v-1}^v,\dots,b_3^v$ в матрице $\begin{pmatrix} b_0^v & 0 & \dots & 0 \\ a_1^v & b_1^v & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{r+v-1}^v & b_{r+v-1}^v \\ 0 & \dots & 0 & a_{r+v}^v \end{pmatrix}_{(r+v+1)\times(r+v)}$, получая $\overline{Y}_{1,l}^v$ вместо $Y_{1,l}^v$ по рекуррентным формулам: $\overline{Y}_{1,r+v}^v=Y_{1,r+v}^v$, $\overline{Y}_{1,l}^v=Y_{1,l}^v-\dfrac{\overline{Y}_{1,l+1}^v b_l^v}{a_{l+1}^v}$ $(l=\overline{r+v-1,3})$.

Поскольку $a_3^v=0$, четвертое уравнение системы $(l=3)$, полученной из (23) имеет вид: $0\cdot h_{1,2}^v+0\cdot h_{1,3}^v=\overline{Y}_{1,3}^v$, где $\overline{Y}_{1,3}^v=\sum_{m=3}^{r+v}\alpha_{1,m}^v Y_{1,m}^v$ и $\alpha_{1,m}^v=(-1)^{m-1}\prod_{j=3}^{m-1}(b_j^v/a_{j+1}^v)$.

В результате находим первую резонансную связь:

$$\sum_{m=3}^{r+v} \alpha_{1,m}^v \widehat{Y}_1^{[2m,2(r-m+1)+v]} = 0, \quad \alpha_{1,m}^v = (-1)^{m-1} \prod_{j=3}^{m-1} \frac{2(r-j)+v}{j-2}. \tag{24}$$

А оставшаяся подсистема 3×3 однозначно разрешима, так как $h_{1,2}^v$ не имел ограничений.

2⁰. Вводя новые обозначения, запишем (20_2) в следующем виде:

$$a_l^v h_{2,l-1}^v + b_l^v h_{2,l}^v = Y_{2,l}^v \quad (\, l = \overline{0, r+1}), \tag{25}$$

где $a_l^v = l-1$, $b_l^v = 2(r-l)+v-4$, $h_{2,l}^v = h_2^{[2l,\,2(r-l)-1+v]}$ $(l=\overline{0,r})$, $Y_{2,l}^v = \widehat{Y}_2^{[2l,\,2(r-l)+1+v]}$.

Для решения системы (25) методом Гаусса аннулируем элементы $b_r^v, \ldots, b_1^v$ матрицы $\begin{pmatrix} b_0^v & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^v & b_1^v & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_r^v & b_r^v \\ 0 & \ldots & 0 & a_{r+1}^v \end{pmatrix}_{(r+2)\times(r+1)}$, получая $\overline{Y}_{2,l}^v$ вместо $Y_{2,l}^v$ по рекуррентным формулам: $\overline{Y}_{2,r+1}^v = Y_{2,r+1}^v$, $\overline{Y}_{2,l}^v = Y_{2,l}^v - \dfrac{\overline{Y}_{2,l+1}^v b_l^v}{a_{l+1}^v}$ $(\, l = \overline{r,1})$.

Поскольку $a_1^v = 0$, второе уравнение $(l=1)$ системы, полученной из (25) принимает вид: $0\cdot h_{2,0}^v + 0\cdot h_{2,1}^v = \overline{Y}_{2,1}^v$, где $\overline{Y}_{2,1}^v = \sum_{m=1}^{r+1} \beta_{2,m}^v Y_{2,m}^v$ и $\beta_{2,m}^v = (-1)^{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}(b_j^v/a_{j+1}^v)$.

В результате находим вторую резонансную связь:

$$\sum_{m=1}^{r+1} \beta_{2,m}^v \widehat{Y}_2^{[2l,\,2(r-l)+1+v]} = 0, \quad \beta_{2,m}^v = (-1)^{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{2(r-j)+v-4}{j}. \tag{26}$$

4.4 Полученные результаты

Возвращаясь к обозначениям, введенным для системы (19), с учетом (21), (22), (24), (26) заключаем, что коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ связующей системы (20) удовлетворяют следующим резонансным уравнениям:

$$2Y_1^{[0,5]} + 3Y_1^{[2,3]} + 3Y_1^{[4,1]} = \tilde{c}, \ Y_2^{[2,2]} + 3Y_2^{[4,0]} = \tilde{c} \quad (k=3); \tag{27}$$

$$Y_1^{[0,6]} + 2Y_1^{[2,4]} + 4Y_1^{[4,2]} = \tilde{c}, \ Y_1^{[6,0]} = \tilde{c}, \ Y_2^{[0,5]} = \tilde{c}, \ Y_2^{[2,3]} + 2Y_2^{[4,1]} = \tilde{c} \quad (k=4); \tag{28}$$

$$\sum_{m=3}^{r+1} \alpha_{1,m}^1 Y_1^{[2m,2(r-m)+3]} = \tilde{c}, \ \sum_{m=1}^{r+1} \beta_{2,m}^1 Y_2^{[2m,2(r-m)+2]} = \tilde{c} \quad (k=2r+1, r\geq 2); \tag{29}$$

$$\sum_{m=3}^{r+1} \alpha_{1,m}^2 Y_1^{[2m,2(r-m)+4]} = \tilde{c}, \ \sum_{m=1}^{r-1} \beta_{2,m}^2 Y_2^{[2m,2(r-m)+3]} = \tilde{c} \quad (k=2r+2, r\geq 2), \tag{30}$$

где $\alpha_{1,m}^1 = (-1)^{m-1}\prod_{j=3}^{m-1}(2(r-j)+1)(j-2)^{-1} \neq 0$, $\beta_{2,m}^1 = (-1)^{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}(2(r-j)-3)/j \neq 0$; $\alpha_{1,m}^2 = (-1)^{m-1}\prod_{j=3}^{m-1}(2(r-j)+2)(j-2)^{-1} \neq 0$, $\beta_{2,m}^2 = (-1)^{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}(2(r-j)-2)/j \neq 0$ $(\alpha_{1,r+2}^2, \beta_{2,r}^2, \beta_{2,r+1}^2 = 0)$.

Теорема 3. *Для того чтобы система* (18) *была формально эквивалентна исходной системе* (16), *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты КОМ* $Y^{[k]}$ *удовлетворяли:*
1) при $k = 2r+1$ *– двум уравнениям* (27) $(r = 1)$ *или двум уравнениям* (29) $(r \geq 2)$ *;*
2) при $k = 2r+2$ *– четырем уравнениям* (28) $(r = 1)$ *или двум уравнениям* (30) $(r \geq 2)$ *.*

Следствие 1. *В КОМ* $Y^{[k]}$ *системы* (18)*:*
1) при $k = 2r+1$, *если* $r = 1$, *то коэффициенты* $Y_1^{[0,5]}$, $Y_1^{[2,3]}$, $Y_1^{[4,1]}$, $Y_2^{[2,2]}$, $Y_2^{[4,0]}$ *– резонансные,* $Y_2^{[0,4]}$ *– нерезонансный, а если* $r \geq 2$, *то коэффициенты* $Y_1^{[2m,2(r-m)+3]}$ $(m = \overline{3, r+1})$ *и* $Y_2^{[2m,2(r-m)+2]}$ $(m = \overline{1, r+1})$ *– резонансные,* $Y_1^{[0,2r+3]}$, $Y_1^{[2,2r+1]}$, $Y_1^{[4,2r-1]}$, $Y_2^{[0,2r+2]}$ *– нерезонансные;*
2) при $k = 2r+2$, *если* $r = 1$, *то все коэффициенты КОМ* $Y^{[4]}$ *– резонансные, а если* $r \geq 2$, *то* $Y_1^{[2m,2(r-m)+4]}$ $(m = \overline{3, r+1})$ *и* $Y_2^{[2m,2(r-m)+3]}$ $(m = \overline{1, r-1})$ *– резонансные, а* $Y_1^{[0,2r+4]}$, $Y_1^{[2,2r+2]}$, $Y_1^{[4,2r]}$, $Y_1^{[2r+4,0]}$, $Y_2^{[0,2r+3]}$, $Y_2^{[2r,3]}$, $Y_2^{[2r+2,1]}$ *– нерезонансные;*
3) все коэффициенты замены (17) *нерезонансные и определяются однозначно.*

Для $\forall\, k \geq 3$ положим $n_k = \{4$ при $k = 4;\ 2$ – при остальных $k\}$.

Следствие 2. *В системе* (18) n_k *различных резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[k]}$ *образуют резонансный* k*-набор* $\mathcal{Y}^k$*, если это:*
1) $\mathcal{Y}^3$ *: один из* $Y_1^{[0,5]}$, $Y_1^{[2,3]}$, $Y_1^{[4,1]}$ *и один из* $Y_2^{[2,2]}$, $Y_2^{[4,0]}$;
2) $\mathcal{Y}^4$ *:* $Y_1^{[6,0]}$, $Y_2^{[0,5]}$, *один из* $Y_1^{[0,6]}$, $Y_1^{[2,4]}$, $Y_1^{[4,2]}$ *и* $Y_2^{[2,3]}$ *или* $Y_2^{[4,1]}$;
3) $\mathcal{Y}^{2r+1}$ $(r \geq 2)$ *:* $Y_1^{[2l_3,2(r-l_3)+3]}$ $(l_3 \in \{3, \ldots, r+1\})$ *и* $Y_2^{[2l_7,2(r-l_7)+2]}$ $(l_7 \in \{1, \ldots, r+1\})$;
4) $\mathcal{Y}^{2r+2}$ $(r \geq 2)$ *:* $Y_1^{[2l_4,2(r-l_4)+4]}$ $(l_4 \in \{3, \ldots, r+1\})$ *и* $Y_2^{[2l_8,2(r-l_8)+3]}$ $(l_8 \in \{1, \ldots, r-1\})$.

Таким образом, система (18) по определению является ОНФ, если для каждого $k \geq 3$ все коэффициенты её КОМ $Y^{[k]}$ равны нулю, кроме n_k штук, принадлежащих любому резонансному k-набору, описанному в следствии 2, и имеющих произвольные значения.

Следствие 3. *Для системы* (18) *произвольный резонансный набор* $\mathcal{Y} = \bigcup_{k=3}^{\infty} \mathcal{Y}^k$ *имеет вид:* $\{Y_1^{[2l_1,5-2l_1]}, Y_1^{[6,0]}, Y_1^{[2l_2,6-2l_2]}, Y_1^{[2l_3,2(r-l_3)+3]}, Y_1^{[2l_4,2(r-l_4)+4]}, Y_2^{[2l_5,2(2-l_5)]}, Y_2^{[0,5]}, Y_2^{[2l_6,5-2l_6]}, Y_2^{[2l_7,2(r-l_7)+2]}, Y_2^{[2l_8,2(r-l_8)+3]}\}$, *где* $l_1, l_2 \in \{0, 1, 2\}$, $l_3, l_4 \in \{3, \ldots, r+1\}$, $l_5, l_6 \in \{1, 2\}$, $l_7 \in \{1, \ldots, r+1\}$, $l_8 \in \{1, \ldots, r-1\}$, $r \geq 2$.

Теорема 4. *Для любой системы* (16) *и для любого выбранного по её невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}$ *из следствия 3 существует и единственна почти тождественная замена* (17), *преобразующая систему* (16) *в ОНФ* (18)*:*

$$\begin{aligned}
\dot y_1 &= y_1^2 + Y_1^{[2l_1,5-2l_1]} y_1^{l_1} y_2^{5-2l_1} + Y_1^{[6,0]} y_1^3 + Y_1^{[2l_2,6-2l_2]} y_1^{l_2} y_2^{6-2l_2} + \\
&\quad + \sum_{r=2}^{\infty} \big(Y_1^{[2l_3,2(r-l_3)+3]} y_1^{l_3} y_2^{2(r-l_3)+3} + Y_1^{[2l_4,2(r-l_4)+4]} y_1^{l_4} y_2^{2(r-l_4)+4} \big), \\
\dot y_2 &= y_2^3 + Y_2^{[2l_5,2(2-l_5)]} y_1^{l_5} y_2^{2(2-l_5)} + Y_2^{[0,5]} y_2^5 + Y_2^{[2l_6,5-2l_6]} y_1^{l_6} y_2^{5-2l_6} + \\
&\quad + \sum_{r=2}^{\infty} \big(Y_2^{[2l_7,2(r-l_7)+2]} y_1^{l_7} y_2^{2(r-l_7)+2} + Y_2^{[2l_8,2(r-l_8)+3]} y_1^{l_8} y_2^{2(r-l_8)+3} \big).
\end{aligned}$$

5 ОНФ систем с $\mathbf{R}^{[2]}_{(1,2)}$ в невозмущенной части

5.1 Получение связующей системы

Рассмотрим систему (10) с канонической невозмущенной частью $R^{[2]}_{(1,2)} = (x_1x_2, x_1^2x_2)$:

$$\dot{x}_1 = x_1x_2 + \sum_{k=3}^{\infty} X_1^{[k]}(x), \quad \dot{x}_2 = x_1^2x_2 + \sum_{k=3}^{\infty} X_2^{[k]}(x), \tag{31}$$

где в возмущении КОМ $X_i^{[k]} = \sum_{q_1+2q_2=k+\gamma_i} X_i^{[q_1,2q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$.

***Замечание* 2.** Вообще говоря, $R^{[2]}_{(1,2)} = \sigma(x_1x_2, x_1^2x_2)$, но при $\sigma = -1$ можно сделать замену времени $t = -\tau$ и получить систему (31), возмущение в которой сменит знак.

Пусть формальная почти тождественная замена (17) переводит (31) в систему:

$$\dot{y}_1 = y_1y_2 + \sum_{k=3}^{\infty} Y_1^{[k]}(y), \quad \dot{y}_2 = y_1^2y_2 + \sum_{k=3}^{\infty} Y_2^{[k]}(y), \tag{32}$$

где возмущение $Y_i^{[k]} = \sum_{q_1+2q_2=k+\gamma_i} Y_i^{[q_1,2q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$.

Тождества (13) с $\chi = 2$, $\gamma = (1, 2)$ для систем (31), (32) и замены (17) имеют вид:

$$\frac{\partial h_1^{[k-2]}}{\partial y_1}\, y_1y_2 + \frac{\partial h_1^{[k-2]}}{\partial y_2}\, y_1^2y_2 - y_2h_1^{[k-2]} - y_1h_2^{[k-2]} = \widetilde{Y}_1^{[k]} - Y_1^{[k]},$$
$$\frac{\partial h_2^{[k-2]}}{\partial y_1}\, y_1y_2 + \frac{\partial h_2^{[k-2]}}{\partial y_2}\, y_1^2y_2 - 2y_1y_2h_1^{[k-2]} - y_1^2h_2^{[k-2]} = \widetilde{Y}_2^{[k]} - Y_2^{[k]},$$

где $\widetilde{Y}_i^{[k]}$ $(i = 1, 2)$ находится по формуле, указанной в (13).

Приравнивая коэффициенты при $y_1^{q_1}y_2^{q_2}$, получаем линейную связующую систему:

$$\begin{array}{ll} (q_1-1)h_1^{[q_1,2(q_2-1)]} + q_2h_1^{[q_1-2,2q_2]} - h_2^{[q_1-1,2q_2]} = \widehat{Y}_1^{[q_1,2q_2]} & (q_1+2q_2 = k+1), \\ q_1h_2^{[q_1,2(q_2-1)]} + (q_2-1)h_2^{[q_1-2,2q_2]} - 2h_1^{[q_1-1,2(q_2-1)]} = \widehat{Y}_2^{[q_1,2q_2]} & (q_1+2q_2 = k+2), \end{array} \tag{33}$$

в которой $\widehat{Y}_i^{[q_1,2q_2]} = \widetilde{Y}_i^{[q_1,2q_2]} - Y_i^{[q_1,2q_2]}$.

Положим $k = 2r + v$ $(r \in \mathbb{N},\ v = 1, 2)$, $q_2 = r - l + 1$ $(l \le r + 1)$, тогда в $\widehat{Y}_i^{[q_1,2q_2]}$ индекс $q_1 = 2l + v + \gamma_i - 2 \ge 0$ и связующая система (33) перепишется в виде:

$$\begin{array}{c} (2l+v-2)h_1^{[2l+v-1,\,2(r-l)]} + (r-l+1)\,h_1^{[2l+v-3,\,2(r-l+1)]} - h_2^{[2l+v-2,\,2(r-l+1)]} = \\ = \widehat{Y}_1^{[2l+v-1,\,2(r-l+1)]} \quad (l = \overline{0, r+1}), \\ (2l+v)h_2^{[2l+v,\,2(r-l)]} + (r-l)h_2^{[2l+v-2,\,2(r-l+1)]} - 2h_1^{[2l+v-1,\,2(r-l)]} = \\ = \widehat{Y}_2^{[2l+v,\,2(r-l+1)]} \quad (l = \overline{-v+1, r+1}). \end{array} \tag{34}$$

или

$$\begin{array}{c} (2l+v-2)h^v_{1,l+1} + (r-l+1)h^v_{1,l} - h^v_{2,l} = Y^v_{1,l} \quad (l = \overline{0, r+1}), \\ (2l+v)h^v_{2,l+1} + (r-l)h^v_{2,l} - 2h^v_{1,l+1} = Y^v_{2,l} \quad (l = \overline{-v+1, r+1}), \end{array} \tag{35}$$

где $h^v_{1,l} = h_1^{[2l+v-3,2(r-l+1)]}$ $(l = \overline{1, r+1})$, $Y^v_{1,l} = \widehat{Y}_1^{[2l+v-1,2(r-l+1)]}$ $(l = \overline{0, r+1})$, $h^v_{2,l} = h_2^{[2l+v-2,2(r-l+1)]}$ $(l = \overline{-v+2, r+1})$, $Y^v_{2,l} = \widehat{Y}_2^{[2l+v,2(r-l+1)]}$ $(l = \overline{-v+1, r+1})$.

5.2 Условия совместности связующей системы

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v=1}$ $(\mathbf{k=2r+1})$. Система (35) принимает вид $(l=\overline{0,r+1})$:

$$(r-l+1)\ h^1_{1,l}+(2l-1)h^1_{1,l+1}-h^1_{2,l}=Y^1_{1,l},\quad (r-l)h^1_{2,l}+(2l+1)h^1_{2,l+1}-2h^1_{1,l+1}=Y^1_{2,l}\,. \quad (35^1)$$

В обеих подсистемах число уравнений на единицу больше числа неизвестных. Поэтому выделим из (35^1) оба уравнения с $l=r+1$: $-h^1_{2,r+1}=Y^1_{1,r+1}$, $-h^1_{2,r+1}=Y^1_{2,r+1}$. Они фиксируют коэффициент $h^1_{2,r+1}$ и дают первую резонансную связь:

$$\widehat{Y}_1^{[2(r+1),0]}-\widehat{Y}_2^{[2r+3,0]}=0. \tag{36}$$

Коэффициент $h^1_{2,r+1}$ встречается еще только один раз в подсистеме (35^1_2) при $l=r$: $(2r+1)h^1_{2,r+1}-2h^1_{1,r+1}=Y^1_{2,r}$. Перенесем его вправо и обозначим $\widetilde{Y}^1_{2,r}=Y^1_{2,r}+(2r+1)Y^1_{2,r+1}$.

Подставив $h^1_{1,m}$ $(m=\overline{0,r})$ из оставшихся уравнений (35^1_2) в (35^1_1), получим систему

$$a^1_l h^1_{2,l-1}+b^1_l h^1_{2,l}+c^1_l h^1_{2,l+1}=Y^1_{0,l}\quad (l=\overline{0,r}), \tag{37}$$

в которой $a^1_l=(r-l+1)^2$ $(l=\overline{2,r})$, $b^1_l=(2l-1)(2(r-l)+1)-2$ $(l=\overline{1,r})$, $c^1_l=4l^2-1$ $(l=\overline{0,r-1})$; $Y^1_{0,l}=2Y^1_{1,l}+(r-l+1)Y^1_{2,l-1}+(2l-1)Y^1_{2,l}$ $(l=\overline{0,r-1})$, $Y^1_{0,r}=2Y^1_{1,r}+Y^1_{2,r-1}+(2r-1)\tilde{Y}^1_{2,r}$.

Для решения системы (37) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c^1_{r-1},c^1_{r-2},\ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} c^1_0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ b^1_1 & c^1_1 & 0 & \ldots & 0\\ a^1_2 & b^1_2 & c^1_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & a^1_{r-1} & b^1_{r-1} & c^1_{r-1}\\ 0 & \ldots & 0 & a^1_r & b^1_r \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая элементы d^1_l вместо b^1_l и $\overline{Y}^1_{0,l}$ вместо $Y^1_{0,l}$, пока $d^1_{l+1}\neq 0$ $(l\geq 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d^1_r=b^1_r,\ \overline{Y}^1_{0,r}=Y^1_{0,r};\quad d^1_l=b^1_l-\frac{a^1_{l+1}\,c^1_l}{d^1_{l+1}},\ \overline{Y}^1_{0,l}=Y^1_{0,l}-\frac{\overline{Y}^1_{0,l+1}\,c^1_l}{d^1_{l+1}}\quad (l=r-1,r-2,\ldots). \tag{38}$$

Лемма 2. *Для элементов* d^1_l *из* (38) *верна следующая прямая формула:*

$$d^1_l=(2l-3)(r-l+1)\neq 0\quad (l=\overline{r,0}). \tag{39}$$

Доказательство. В (38) $d^1_r=2r-3$, что совпадает с d^1_r из (39) и дает базу индукции. Пусть для $\forall\, l=\overline{r-1,1}$ верна формула (39). Тогда согласно (38) имеем $d^1_{l-1}=b^1_{l-1}-a^1_l c^1_{l-1}(d^1_l)^{-1}=(2l-3)(2r-2l+3)-2-(r-l+1)(2l-1)=(2l-5)(r-l+2)$. □

В результате первое уравнение $(l=0)$ системы, полученной из (37), принимает вид: $0\cdot h^1_{2,1}=\overline{Y}^1_{0,0}$, где $\overline{Y}^1_{0,0}=\sum_{m=0}^r\theta^1_{2,m}Y^1_{0,m}$ с $\theta^1_{2,m}=(-1)^m\prod_{j=1}^m(c^1_{j-1}/d^1_j)$. Учитывая (37) и (39), получаем:

$$\theta^1_{2,m}=(-1)^m\prod_{j=1}^m\frac{2j-1}{r-j+1}\neq 0\quad (m=\overline{0,r}).$$

В обозначениях (35) имеем: $\sum_{m=0}^{r}\theta_{2,m}^1 Y_{0,m}^1 = \sum_{m=0}^{r-1}\theta_{2,m}^1(2Y_{1,m}^1 + (r-m+1)Y_{2,m-1}^1 + (2m-1)Y_{2,m}^1) + \theta_{2,r}^1(2Y_{1,r}^1 + Y_{2,r-1}^1 + (2r-1)\widetilde{Y}_{2,r}^1) = 2\sum_{m=0}^{r}\theta_{2,m}^1 Y_{1,m}^1 + \sum_{m=0}^{r-1}((2m-1)\theta_{2,m}^1 + (r-m)\theta_{2,m+1}^1)Y_{2,m}^1 + (2r-1)\theta_{2,r}^1 Y_{2,r}^1 + (4r^2-1)\theta_{2,r}^1 Y_{2,r+1}^1$ и $(2m-1)\theta_{2,m}^1 + (r-m)\theta_{2,m+1}^1 = -2\theta_{2,m}^1$.

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,0}^1 = 0$ дает для (34) с $v=1$ вторую резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r}\alpha_{2,m}^1\widehat{Y}_1^{[2m,2(r-m+1)]} + \sum_{m=0}^{r+1}\beta_{2,m}^1\widehat{Y}_2^{[2m+1,2(r-m+1)]} = 0, \tag{40}$$

где $\alpha_{2,m}^1, -\beta_{2,m}^1 = 2\theta_{2,m}^1$ $(m=\overline{0,r-1})$, $\alpha_{2,r}^1 = 2\theta_{2,r}^1$, $\beta_{2,r}^1 = (2r-1)\theta_{2,r}^1$, $\beta_{2,r+1}^1 = (4r^2-1)\theta_{2,r}^1$.

$\mathbf{2^0}$. $\mathbf{v=2}$ $(\mathbf{k=2r+2})$. Система (35) принимает вид:

$$\begin{aligned}(r-l+1)h_{1,l}^2 + 2l\cdot h_{1,l+1}^2 - h_{2,l}^2 = Y_{1,l}^2 \quad (l=\overline{0,r+1}),\\ (r-l)h_{2,l}^2 + (2l+2)h_{2,l+1}^2 - 2h_{1,l+1}^2 = Y_{2,l}^2 \quad (l=\overline{-1,r+1}).\end{aligned} \tag{35^2}$$

Подставляя $h_{2,l}^2$ и $h_{2,l+1}^2$ из системы (35_1^2) в (35_2^2), получаем систему:

$$a_l^2 h_{1,l}^2 + b_l^2 h_{1,l+1}^2 + c_l^2 h_{1,l+2}^2 = Y_{0,l}^2 \quad (l=\overline{-1,r+1}), \tag{41}$$

в которой $a_l^2 = (r-l)(r-l+1)$ $(l=\overline{1,r+1})$, $b_l^2 = 2((r-l)(2l+1)-1)$ $(l=\overline{0,r})$, $c_l^2 = 4(l+1)^2$ $(l=\overline{-1,r-1})$, $Y_{0,l}^2 = (r-l)Y_{1,l}^2 + 2(l+1)Y_{1,l+1}^2 + Y_{2,l}^2$ $(Y_{1,-1}^2, Y_{1,r+2}^2 = 0)$.

Заметим, что $c_{-1}^2 = 0$ и $a_{r+1}^2 = 0$, а значит, при $l=-1$ имеем: $Y_{0,-1}^2 = Y_{2,-1}^2 = 0$, при $l=r+1:$ $Y_{0,r+1}^2 = -Y_{1,r+1}^2 + Y_{2,r+1}^2 = 0$. Отсюда получаем первые две резонансные связи:

$$\widehat{Y}_2^{[0,2(r+2)]} = 0, \quad \widehat{Y}_1^{[2r+3,0]} - \widehat{Y}_2^{[2(r+2),0]} = 0. \tag{42}$$

Для решения оставшихся уравнений системы (41) при $l=\overline{0,r}$ будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-1}^2, c_{r-2}^2, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b_0^2 & c_0^2 & 0 & \ldots & 0\\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & a_{r-1}^2 & b_{r-1}^2 & c_{r-1}^2\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & b_r^2\end{pmatrix}_{(r+1)\times(r+1)}$, получая d_l^2 вместо b_l^2 и $\overline{Y}_{0,l}^2$ вместо $Y_{0,l}^2$, пока $d_{l+1}^2 \neq 0$ $(l\geq 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d_r^2 = b_r^2,\ \overline{Y}_{0,r}^2 = Y_{0,r}^2; \quad d_l^2 = b_l^2 - \frac{a_{l+1}^2 c_l^2}{d_{l+1}^2},\ \overline{Y}_{0,l}^2 = Y_{0,l}^2 - \frac{\overline{Y}_{0,l+1}^2 c_l^2}{d_{l+1}^2} \quad (l=r-1,r-2,\ldots). \tag{43}$$

Лемма 3. *Для элементов* d_l^2 *из* (43) *верна следующая прямая формула:*

$$d_r^2 = -2, \quad d_l^2 = 2l(r-l+1) \quad (l=\overline{r-1,0}). \tag{44}$$

Доказательство. В (43) $d_{r-1}^2 = b_{r-1}^2 - a_r^2 c_{r-1}^2 (d_r^2)^{-1} = 4(r-1)$, что совпадает с d_{r-1}^2 из (44) и дает базу индукции.

Пусть для $\forall\, l=\overline{r-2,1}$ верна формула (44). Тогда согласно (43) имеем: $d_{l-1}^2 = b_{l-1}^2 - a_l^2 c_{l-1}^2 (d_l^2)^{-1} = 2((r-l+1)(2l-1)-1) - 2l(r-l) = 2(l-1)(r-l+2)$. $\square$

Поскольку в (44) только $d_0^2 = 0$, то первое уравнение $(l = 0)$ системы, полученной из (41), принимает вид: $0 \cdot h_{1,1}^2 = \overline{Y}_{0,0}^2$, где $\overline{Y}_{0,0}^2 = \sum_{m=0}^r \theta_{3,m}^2 Y_{0,m}^2$, а множители $\theta_{3,m}^2 = (-1)^m \prod_{j=1}^m (c_{j-1}^2/d_j^2)$. Учитывая (41) и (44), получаем:

$$\theta_{3,m}^2 = (-1)^m \prod_{j=1}^m \frac{2j}{r-j+1} \neq 0 \quad (m = \overline{1, r-1}), \quad \theta_{3,r}^2 = 2r^2 \theta_{3,r-1}^2 \neq 0.$$

В обозначениях (35^2) : $\sum_{m=0}^r \theta_{3,m}^2 Y_{0,m}^2 = \sum_{m=0}^r \theta_{3,m}^2 ((r-m) Y_{1,m}^2 + 2(m+1) Y_{1,m+1}^2 + Y_{2,m}^2) = r Y_{1,0}^2 + \sum_{m=1}^r ((r-m)\theta_{3,m} + 2m\theta_{3,m-1}^2) Y_{1,m}^2 + 2(r+1)\theta_{3,r}^2 Y_{1,r+1}^2 + \sum_{m=0}^r \theta_{3,m}^2 Y_{2,m}^2 = 0$, причем $(r-m)\theta_{3,m}^2 + 2m\theta_{3,m-1}^2 = 2m(r-m+1)^{-1}\theta_{3,m-1}^2$.

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,0}^2 = 0$ дает для (34) с $v = 2$ третью резонансную связь

$$\sum_{m=0}^{r+1} \alpha_{3,m}^2 \widehat{Y}_1^{[2m+1, 2(r-m+1)]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{3,m}^2 \widehat{Y}_2^{[2(m+1), 2(r-m+1)]} = 0 \qquad (h_1^{[1,2r]} - \forall), \tag{45}$$

где $\alpha_{3,0}^2 = r$, $\alpha_{3,m}^2 = 2m(r-m+1)^{-1}\theta_{3,m-1}^2$ $(m = \overline{1, r})$, $\alpha_{3,r+1}^2 = 2(r+1)\theta_{3,r}^2$, $\beta_{3,m}^2 = \theta_{3,m}^2$.

5.3 Полученные результаты

Возвращаясь к обозначениям для системы (33), согласно (36), (40), (42), (45) заключаем, что $\forall\, r \in \mathbb{N}$ коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ удовлетворяют резонансным уравнениям:

$$Y_1^{[2(r+1),0]} - Y_2^{[2r+3,0]} = \tilde{c}, \quad \sum_{m=0}^{r} \alpha_{2,m}^1 Y_1^{[2m, 2(r-m+1)]} + \sum_{m=0}^{r+1} \beta_{2,m}^1 Y_2^{[2m+1, 2(r-m+1)]} = \tilde{c} \quad (k = 2r+1), \tag{46}$$

$$Y_2^{[0,2(r+2)]} = \tilde{c}, \quad Y_1^{[2r+3,0]} - Y_2^{[2(r+2),0]} = \tilde{c},$$
$$\sum_{m=0}^{r+1} \alpha_{3,m}^2 Y_1^{[2m+1, 2(r-m+1)]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{3,m}^2 Y_2^{[2(m+1), 2(r-m+1)]} = \tilde{c} \;\; (k = 2r+2), \tag{47}$$

где $\alpha_{2,m}^1, -\beta_{2,m}^1 = 2\theta_{2,m}^1$ $(m = \overline{0, r-1})$, $\alpha_{2,r}^1 = 2\theta_{2,r}^1$, $\beta_{2,r}^1 = (2r-1)\theta_{2,r}^1$, $\beta_{2,r+1}^1 = (4r^2-1)\theta_{2,r}^1$, а $\theta_{2,m}^1 = (-1)^m \prod_{j=1}^m (2j-1)(r-j+1)^{-1} \neq 0$ $(m = \overline{0, r})$; $\alpha_{3,0}^2 = r$, $\alpha_{3,m}^2 = 2m(r-m+1)^{-1} \times \theta_{3,m-1}^2$ $(m = \overline{1, r})$, $\alpha_{3,r+1}^2 = 2(r+1)\theta_{3,r}^2$, $\beta_{3,m}^2 = \theta_{3,m}^2$, а $\theta_{3,m}^2 = (-1)^m \prod_{j=1}^m 2j(r-j+1)^{-1} \neq 0$ $(m = \overline{1, r-1})$, $\theta_{3,r}^2 = 2r^2\theta_{3,r-1}^2 \neq 0$.

В частности, для $r = 1$ резонансные уравнения выглядят следующим образом:

$$Y_1^{[4,0]} - Y_2^{[5,0]} = \tilde{c}, \quad -2Y_1^{[0,4]} + 2Y_1^{[2,2]} + 2Y_2^{[1,4]} + Y_2^{[3,2]} + 3Y_2^{[5,0]} = \tilde{c},$$
$$Y_2^{[0,6]} = \tilde{c}, \quad Y_1^{[5,0]} - Y_2^{[6,0]} = \tilde{c}, \quad Y_1^{[1,4]} + 2Y_1^{[3,2]} + Y_2^{[2,4]} + 2Y_2^{[4,2]} + 8Y_2^{[6,0]} = \tilde{c}.$$

Теорема 5. *Для того чтобы система* (32) *была формально эквивалентна исходной системе* (31), *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты КОМ* $Y^{[k]}$ *удовлетворяли:*
1) при $k = 2r+1$ *удовлетворяли двум уравнениям* (46)*;*
2) при $k = 2r+2$ *– трем уравнениям* (47) *(здесь везде* $r \geq 1$*).*

Следствие 4. *Для* $\forall\, k \geq 3$ *все коэффициенты КОМ* $Y^{[k]}$ *в системе* (32) *– резонансные, при этом для* $\forall\, r \geq 1$ *коэффициент* $h_1^{[1,2r]}$ *КОМ* $h_1^{[2r]}$ *также является резонансным.*

Для $\forall\, k \geq 3$ положим $n_k = \{2$ при $k = 2r+1;\ 3$ при $k = 2r+2\}$.

Следствие 5. *В системе* (32) n_k *различных резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[k]}$ *образуют резонансный* k*-набор* $\mathcal{Y}^k$*, если это:*
1) $\mathcal{Y}^{2r+1}$: *либо* $Y_1^{[2(r+1),0]}$ *и* $Y_1^{[2l_1,2(r-l_1+1)]}$ $(l_1 \in \{0,\ldots,r\})$ *или* $Y_2^{[2l_2+1,2(r-l_2+1)]}$ $(l_2 \in \{0,\ldots,r+1\}))$; *либо* $Y_2^{[2r+3,0]}$ *и* $Y_1^{[2l_3,2(r-l_3+1)]}$ $(l_3 \in \{0,\ldots,r+1\})$ *или* $Y_2^{[2l_4+1,2(r-l_4+1)]}$ $(l_4 \in \{0,\ldots,r\})$;
2) $\mathcal{Y}^{2r+2}$: *либо* $Y_2^{[0,2(r+2)]}$, $Y_1^{[2r+3,0]}$ *и* $Y_1^{[2l_5+1,2(r-l_5+1)]}$ $(l_5 \in \{0,\ldots,r\})$ *или* $Y_2^{[2(l_6+1),2(r-l_6+1)]}$ $(l_6 \in \{0,\ldots,r+1\})$; *либо* $Y_2^{[0,2(r+2)]}$, $Y_2^{[2(r+2),0]}$ *и* $Y_1^{[2l_7+1,2(r-l_7+1)]}$ $(l_7 \in \{0,\ldots,r+1\})$ *или* $Y_2^{[2(l_8+1),2(r-l_8+1)]}$ $(l_8 \in \{0,\ldots,r\})$.

Таким образом, система (32) по определению является ОНФ, если для каждого $k \geq 3$ все коэффициенты её КОМ $Y^{[k]}$ равны нулю, кроме n_k штук, принадлежащих любому резонансному k-набору, описанному в следствии 5, и имеющих произвольные значения.

Следствие 6. *Для системы* (32) *произвольный резонансный набор* $\mathcal{Y} = \bigcup_{k=3}^{\infty} \mathcal{Y}^k$ *имеет следующий вид:* $\big\{\rho_1^r Y_1^{[2(r+1),0]},\ \rho_1^r\rho_2^r Y_1^{[2l_1,2(r-l_1+1)]},\ (1-\rho_1^r)\rho_3^r Y_1^{[2l_3,2(r-l_3+1)]},\ \rho_4^r Y_1^{[2r+3,0]},$ $\rho_4^r\rho_5^r Y_1^{[2l_5+1,2(r-l_5+1)]},\ (1-\rho_4^r)\rho_6^r Y_1^{[2l_7+1,2(r-l_7+1)]},\ (1-\rho_1^r)Y_2^{[2r+3,0]},\ \rho_1^r(1-\rho_2^r)Y_2^{[2l_2+1,2(r-l_2+1)]},$ $(1-\rho_4^r)Y_2^{[2(r+2),0]},\ (1-\rho_1^r)(1-\rho_3^r)Y_2^{[2l_4+1,2(r-l_4+1)]},\ Y_2^{[0,2(r+2)]},\ \rho_4^r(1-\rho_5^r)Y_2^{[2(l_6+1),2(r-l_6+1)]},$ $(1-\rho_4^r)(1-\rho_6^r)Y_2^{[2(l_8+1),2(r-l_8+1)]}\big\}$, *где* $l_1,l_4,l_5,l_8 \in \{0,\ldots,r\}$, $l_2,l_3,l_6,l_7 \in \{0,\ldots,r+1\}$, $\rho_j^r \in \{0,1\}$ $(j=\overline{1,6})$, $r \geq 1$. *Если множитель при некотором* $Y_i^{[q_1,2q_2]}$*, входящим в* $\mathcal{Y}$*, равен нулю, то этот элемент отсутствует.*

Теорема 6. *Для любой системы* (31) *и для любого выбранного по её невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}$ *из следствия 6 существует и единственна почти тождественная замена* (17) *с заранее произвольным образом зафиксированными резонансными коэффициентами, преобразующая систему* (31) *в ОНФ* (32)*:*

$$
\begin{aligned}
\dot y_1 = y_1y_2 + \sum_{r=1}^{\infty} \big(&\rho_1^r Y_1^{[2(r+1),0]} y_1^{2(r+1)} + \rho_1^r\rho_2^r Y_1^{[2l_1,2(r-l_1+1)]} y_1^{2l_1} y_2^{r-l_1+1} + \\
&+(1-\rho_1^r)\rho_3^r Y_1^{[2l_3,2(r-l_3+1)]} y_1^{2l_3} y_2^{r-l_3+1} + \rho_4^r Y_1^{[2r+3,0]} y_1^{2r+3} + \rho_4^r\rho_5^r Y_1^{[2l_5+1,2(r-l_5+1)]} y_1^{2l_5+1} y_2^{r-l_5+1} + \\
&+(1-\rho_4^r)\rho_6^r Y_1^{[2l_7+1,2(r-l_7+1)]} y_1^{2l_7+1} y_2^{r-l_7+1}\big),\\
\dot y_2 = y_1^2y_2 + \sum_{r=1}^{\infty} \big(&(1-\rho_1^r) Y_2^{[2r+3,0]} y_1^{2r+3} + \rho_1^r(1-\rho_2^r) Y_2^{[2l_2+1,2(r-l_2+1)]} y_1^{2l_2+1} y_2^{r-l_2+1} + \\
&+(1-\rho_1^r)(1-\rho_3^r) Y_2^{[2l_4+1,2(r-l_4+1)]} y_1^{2l_4+1} y_2^{r-l_4+1} + Y_2^{[0,2(r+2)]} y_2^{r+2} + \\
&+\rho_4^r(1-\rho_5^r) Y_2^{[2(l_6+1),2(r-l_6+1)]} y_1^{2(l_6+1)} y_2^{r-l_6+1} + (1-\rho_4^r) Y_2^{[2(r+2),0]} y_1^{2(r+2)} + \\
&+(1-\rho_4^r)(1-\rho_6^r) Y_2^{[2(l_8+1),2(r-l_8+1)]} y_1^{2(l_8+1)} y_2^{r-l_8+1}\big).
\end{aligned}
$$

Пример 1. *Любая система* (31) *формально эквивалентна ОНФ, не имеющей возмущения в первом уравнении, при определенных значениях* $l_4, l_8 \in \{0,\ldots,r\}$:

$$
\dot y_1 = y_1y_2, \quad \dot y_2 = y_1^2y_2 + \sum_{r=1}^{\infty} \big(Y_2^{[r+4,0]} y_1^{r+4} + Y_2^{[2l_4+1,2(r-l_4+1)]} y_1^{2l_4+1} y_2^{r-l_4+1} + Y_2^{[2l_8+2,2(r-l_8+1)]} y_1^{2l_8+2} y_2^{r-l_8+1} + Y_2^{[0,2(r+2)]} y_2^{r+2}\big).
$$

6 ОНФ систем с $\mathbf{R}^{[3]}_{(1,2)}$ в невозмущенной части

6.1 Получение связующей системы

Рассмотрим систему (10) с канонической невозмущенной частью $R^{[3]}_{(1,2)} = (x_2^2, x_1x_2^2)$:

$$\dot{x}_1 = x_2^2 + \sum_{k=4}^{\infty} X_1^{[k]}(x), \quad \dot{x}_2 = x_1x_2^2 + \sum_{k=4}^{\infty} X_2^{[k]}(x), \tag{48}$$

где в возмущении КОМ $X_i^{[k]} = \sum_{q_1+2q_2=k+\gamma_i} X_i^{[q_1,2q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$.

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y) \quad (i = 1, 2), \tag{49}$$

где $h_i(y) = \sum_{k=4}^{\infty} h_i^{[k-3]}(y)$, $h_i^{[k-3]} = \sum_{q_1+2q_2=k+\gamma_i-3} h_i^{[q_1,2q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$ переводит (48) в систему:

$$\dot{y}_1 = y_2^2 + \sum_{k=4}^{\infty} Y_1^{[k]}(y), \quad \dot{y}_2 = y_1y_2^2 + \sum_{k=4}^{\infty} Y_2^{[k]}(y), \tag{50}$$

где возмущение $Y_i^{[k]} = \sum_{q_1+2q_2=k+\gamma_i} Y_i^{[q_1,2q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$.

Тождества (13) с $\chi = 3$, $\gamma = (1, 2)$ для систем (48), (50) и замены (49) имеют вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_1^{[k-3]}}{\partial y_1} y_2^2 + \frac{\partial h_1^{[k-3]}}{\partial y_2} y_1y_2^2 - 2y_2h_2^{[k-3]} = \widetilde{Y}_1^{[k]} - Y_1^{[k]}, \\
\frac{\partial h_2^{[k-3]}}{\partial y_1} y_2^2 + \frac{\partial h_2^{[k-3]}}{\partial y_2} y_1y_2^2 - y_2^2h_1^{[k-3]} - 2y_1y_2h_2^{[k-3]} = \widetilde{Y}_2^{[k]} - Y_2^{[k]},
\end{gathered}$$

где $\widetilde{Y}_i^{[k]}$ $(i = 1, 2)$ находится по формуле, указанной в (13).

Приравнивая коэффициенты при $y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, получаем линейную связующую систему:

$$\begin{aligned}
(q_1+1)h_1^{[q_1+1,2(q_2-2)]} + (q_2-1)h_1^{[q_1-1,2(q_2-1)]} - 2h_2^{[q_1,2(q_2-1)]} &= \widehat{Y}_1^{[q_1,2q_2]} \quad (q_1+2q_2 = k+1), \\
(q_1+1)h_2^{[q_1+1,2(q_2-2)]} + (q_2-3)h_2^{[q_1-1,2(q_2-1)]} - h_1^{[q_1,2(q_2-2)]} &= \widehat{Y}_2^{[q_1,2q_2]} \quad (q_1+2q_2 = k+2),
\end{aligned} \tag{51}$$

в которой $\widehat{Y}_i^{[q_1,2q_2]} = \widetilde{Y}_i^{[q_1,2q_2]} - Y_i^{[q_1,2q_2]}$.

Положим $k = 2r + v$ $(r = 2, 3, 4, \ldots,\ v = 0, 1)$, $q_2 = r - l + 1$ $(l \le r + 1)$.

Тогда в $\widehat{Y}_i^{[q_1,2q_2]}$ индекс $q_1 = 2l + v + \gamma_i - 2 \ge 0$ и связующая система (51) перепишется в виде:

$$\begin{gathered}
(2l+v)h_1^{[2l+v,2(r-l-1)]} + (r-l)h_1^{[2l+v-2,2(r-l)]} - 2h_2^{[2l+v-1,2(r-l)]} = \\
= \widehat{Y}_1^{[2l+v-1,2(r-l+1)]} \quad (l = \overline{-v+1, r+1}), \\
(2l+v+1)h_2^{[2l+v+1,2(r-l-1)]} + (r-l-2)h_2^{[2l+v-1,2(r-l)]} - h_1^{[2l+v,2(r-l-1)]} = \\
= \widehat{Y}_2^{[2l+v,2(r-l+1)]} \quad (l = \overline{0, r+1}).
\end{gathered} \tag{52}$$

6.2 Случай r=2 (k=4,5)

1^0. $k = 4$ $(v = 0)$. Система (52) имеет вид: $h_1^{[0,2]} + 2h_1^{[2,0]} - 2h_2^{[1,2]} = \widehat{Y}_1^{[1,4]}$, $-2h_2^{[3,0]} = \widehat{Y}_1^{[3,2]}$, $0 = \widehat{Y}_1^{[5,0]}$, $-h_1^{[0,2]} + h_2^{[1,2]} = \widehat{Y}_2^{[0,6]}$, $-h_1^{[2,0]} - h_2^{[1,2]} + 3h_2^{[3,0]} = \widehat{Y}_2^{[2,4]}$, $-2h_2^{[3,0]} = \widehat{Y}_2^{[4,2]}$, $0 = \widehat{Y}_2^{[6,0]}$ и дает три резонансные связи:

$$\widehat{Y}_1^{[3,2]} - Y_2^{[4,2]} = 0, \quad \widehat{Y}_1^{[5,0]} = 0, \quad \widehat{Y}_2^{[6,0]} = 0. \tag{53}$$

2^0. $k = 5$ $(v = 1)$. Система (52) имеет вид: $h_1^{[1,2]} - 2h_2^{[0,4]} = \widehat{Y}_1^{[0,6]}$, $h_1^{[1,2]} + 3h_1^{[3,0]} - 2h_2^{[2,2]} = \widehat{Y}_1^{[2,4]}$, $-2h_2^{[4,0]} = \widehat{Y}_1^{[4,2]}$, $0 = \widehat{Y}_1^{[6,0]}$, $-h_1^{[1,2]} + 2h_2^{[2,2]} = \widehat{Y}_2^{[1,6]}$, $-h_1^{[3,0]} - h_2^{[2,2]} + 4h_2^{[4,0]} = \widehat{Y}_2^{[3,4]}$, $-2h_2^{[4,0]} = \widehat{Y}_2^{[5,2]}$, $0 = \widehat{Y}_2^{[7,0]}$ и дает три резонансные связи:

$$\widehat{Y}_1^{[4,2]} - Y_2^{[5,2]} = 0, \quad \widehat{Y}_1^{[6,0]} = 0, \quad \widehat{Y}_2^{[7,0]} = 0. \tag{54}$$

6.3 Случай r ≥ 3 (k ≥ 6)

При $l = r + 1$ из системы (52) сразу получим две резонансные связи:

$$\widehat{Y}_1^{[2r+v+1,0]} = 0, \quad \widehat{Y}_2^{[2r+v+2,0]} = 0. \tag{55}$$

Вводя новые обозначения, запишем оставшиеся уравнения (52) в следующем виде:

$$\begin{aligned} (2l+v)h_{1,l+1}^v + (r-l)h_{1,l}^v - 2h_{2,l}^v &= Y_{1,l}^v \quad (l = \overline{-v+1,r}), \\ (2l+v+1)h_{2,l+1}^v + (r-l-2)h_{2,l}^v - h_{1,l+1}^v &= Y_{2,l}^v \quad (l = \overline{0,r}), \end{aligned} \tag{56}$$

где $h_{1,l}^v = h_1^{[2l+v-2,2(r-l)]}$ $(l = \overline{1,r})$, $h_{2,l}^v = h_2^{[2l+v-1,2(r-l)]}$, $Y_{1,l}^v = \widehat{Y}_1^{[2l+v-1,2(r-l+1)]}$ $(l = \overline{-v+1,r})$, $Y_{2,l}^v = \widehat{Y}_2^{[2l+v,2(r-l+1)]}$ $(l = \overline{0,r})$; $Y_{1,0}^0, Y_{1,r+1}^v = 0$.

Подставляя $h_{2,l}^v$ и $h_{2,l+1}^v$ из системы (56_1) в (56_2), получаем систему:

$$a_l^v h_{1,l}^v + b_l^v h_{1,l+1}^v + c_l^v h_{1,l+2}^v = Y_{0,l}^v \quad (l = \overline{0,r}), \tag{57}$$

в которой $a_l^v = (r-l)(r-l-2)$ $(l = \overline{1,r})$, $b_l^v = (r-l)(4l+2v+1) - 3(2l+v+1)$ $(l = \overline{0,r-1})$, $c_l^v = (2l+v+1)(2l+v+2)$ $(l = \overline{0,r-2})$, $Y_{0,l}^v = (r-l-2)Y_{1,l}^v + (2l+v+1)Y_{1,l+1}^v + 2Y_{2,l}^v$.

Заметим, что $a_r^v = 0$, а значит при $l = r$ имеем: $Y_{0,r}^v = 0$, откуда получаем третью резонансную связь:

$$\widehat{Y}_1^{[2r+v-1,2]} - \widehat{Y}_2^{[2r+v,2]} = 0. \tag{58}$$

Для решения оставшихся уравнений системы (57) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-2}^v, c_{r-3}^v, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b_0^v & c_0^v & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^v & b_1^v & c_1^v & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{r-2}^v & b_{r-2}^v & c_{r-2}^v \\ 0 & \ldots & 0 & a_{r-1}^v & b_{r-1}^v \end{pmatrix}_{r\times r}$, получая d_l^v вместо b_l^v и $\overline{Y}_{0,l}^v$ вместо $Y_{0,l}^v$ $(l \leq r-1)$, пока $d_{l+1}^v \neq 0$ $(l \geq 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d_{r-1}^v = b_{r-1}^v, \ \overline{Y}_{0,r-1}^v = Y_{0,r-1}^v; \quad d_l^v = b_l^v - \frac{a_{l+1}^v c_l^v}{d_{l+1}^v}, \ \overline{Y}_{0,l}^v = Y_{0,l}^v - \frac{\overline{Y}_{0,l+1}^v c_l^v}{d_{l+1}^v} \quad (l = r-2, r-3, \ldots). \tag{59}$$

Лемма 4. *Для элементов* d_l^v *из* (59) *верна следующая прямая формула:*

$$d_{r-1}^v = -2r - v,\ d_{r-2}^v = -\frac{6}{2r+v},\ d_{r-3}^v = 6r + 3v - 18,\ d_l^v = (2l+v)(r-l) \quad (l = \overline{r-4,0}). \quad (60)$$

Доказательство. В (59) $d_{r-4}^v = b_{r-4}^v - a_{r-3}^v c_{r-4}^v / d_{r-3}^v = 4(r-4) - 4(r-4)^2 - (2v+7)(r-4) + (2v+1)r - 3v - 3 - 3(2r+v-7)(2r+v-6)/(6r+3v-18) = 4(2r+v-8)$, что совпадает с d_{r-4}^v из (60) и дает базу индукции.

Пусть для произвольного $l = \overline{r-5,1}$ верна формула (60). Тогда согласно (59) имеем: $d_{l-1}^v = b_{l-1}^v - a_l^v c_{l-1}^v / d_l^v = 4(l-1)r - 4(l-1)^2 - (2v+7)(l-1) + (2v+1)r - 3v - 3 - (r-l-1) \times (r-l+1)(2l+v-1)(r-l)^{-1} = (2l+v-2)(r-l+1)$. □

$\mathbf{0^0}$. $\mathbf{v = 0}$ $(\mathbf{k = 2r})$. Поскольку в (60) только $d_0^0 = 0$, то первое уравнение $(l = 0)$ системы, полученной из (57), принимает вид: $0 \cdot h_{1,1}^0 = \overline{Y}_{0,0}^0$, где $\overline{Y}_{0,0}^0 = \sum_{m=0}^{r-1} \theta_{4,m}^0 Y_{0,m}^0$ с $\theta_{4,m}^0 = (-1)^m \prod_{j=1}^m (c_{j-1}^0 / d_j^0)$. Учитывая (57) и (60), получаем:

$$\theta_{4,m}^0 = (-1)^m \prod_{j=1}^m \frac{2j-1}{r-j} \neq 0 \quad (m = \overline{0, r-3}), \quad \begin{array}{l} \theta_{4,r-2}^0 = (1/3)(2r-5)(2r-4)r\, \theta_{4,r-3}^0, \\ \theta_{4,r-1}^0 = (2r-3)(r-1)r^{-1}\, \theta_{4,r-2}^0. \end{array}$$

В обозначениях (56): $\sum_{m=0}^{r-1} \theta_{4,m}^0 Y_{0,m}^0 = \sum_{m=0}^{r-1} \theta_{4,m}^0 ((r-m-2)Y_{1,m}^0 + (2m+1)Y_{1,m+1}^0 + 2Y_{2,m}^0) = \sum_{m=1}^{r-1} ((r-m-2)\theta_{4,m}^0 + (2m-1)\theta_{4,m-1}^0) Y_{1,m}^0 + (2r-1)\theta_{4,r-1}^0 Y_{1,r}^0 + 2\sum_{m=0}^{r-1} \theta_{4,m}^0 Y_{2,m}^0$, причем $(r-m-2)\theta_{4,m}^0 + (2m-1)\theta_{4,m-1}^0 = 2(2m-1)(r-m)^{-1}\theta_{4,m-1}^0$ для $\forall\, m = \overline{1, r-2}$, а при $m = r-1$ имеем: $-\theta_{4,r-1}^0 + (2r-3)\theta_{4,r-2}^0 = (2r-3)r^{-1}\theta_{4,r-2}^0$.

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,0}^0 = 0$ дает для (52) с $v = 0$ четвёртую резонансную связь:

$$\sum_{m=1}^{r} \alpha_{4,m}^0 \widehat{Y}_1^{[2m-1, 2(r-m+1)]} + \sum_{m=0}^{r-1} \beta_{4,m}^0 \widehat{Y}_2^{[2m, 2(r-m+1)]} = 0 \qquad (h_1^{[0, 2(r-1)]} - \forall), \quad (61)$$

в которой $\alpha_{4,m}^0 = 2(2m-1)(r-m)^{-1}\theta_{4,m-1}^0$ $(m = \overline{1, r-2})$, $\alpha_{4,r-1}^0 = (2r-3)r^{-1}\theta_{4,r-2}^0$, $\alpha_{4,r}^0 = (2r-1)\theta_{4,r-1}^0$, $\beta_{4,m}^0 = 2\theta_{4,m}^0$.

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v = 1}$ $(\mathbf{k = 2r+1})$. Согласно формуле (60) $d_l^1 \neq 0$, поэтому система, полученная из (57) после преобразования Гаусса, однозначно разрешима.

6.4 Полученные результаты

Возвращаясь к обозначениям, введенным для системы (51), согласно (53), (55), (58), (61) заключаем, что коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ удовлетворяют резонансным уравнениям:

$$Y_1^{[3,2]} - Y_2^{[4,2]} = \tilde{c}, \quad Y_1^{[5,0]} = \tilde{c}, \quad Y_2^{[6,0]} = \tilde{c} \quad (k = 4); \quad (62)$$

$$\begin{gathered} Y_1^{[2r-1,2]} - Y_2^{[2r,2]} = \tilde{c}, \quad Y_1^{[2r+1,0]} = \tilde{c}, \quad Y_2^{[2r+2,0]} = \tilde{c}, \\ \sum_{m=1}^{r} \alpha_{4,m}^0 Y_1^{[2m-1, 2(r-m+1)]} + \sum_{m=0}^{r-1} \beta_{4,m}^0 Y_2^{[2m, 2(r-m+1)]} = \tilde{c} \quad (k = 2r,\ r \geq 3); \end{gathered} \quad (63)$$

$$Y_1^{[2r+2,0]} = \tilde{c}, \quad Y_2^{[2r+3,0]} = \tilde{c}, \quad Y_1^{[2r,2]} - Y_2^{[2r+1,2]} = \tilde{c} \quad (k = 2r+1,\ r \geq 2); \quad (64)$$

где $\alpha^0_{4,m} = 2(2m-1)(r-m)^{-1}\theta^0_{4,m-1}$ $(m=\overline{1,r-2})$, $\alpha^0_{4,r-1} = (2r-3)r^{-1}\theta^0_{4,r-2}$, $\alpha^0_{4,r} = (2r-1)\theta^0_{4,r-1}$, $\beta^0_{4,m} = 2\theta^0_{4,m}$, а $\theta^0_{4,m} = (-1)^m\prod_{j=1}^m(2j-1)(r-j)^{-1} \neq 0$ $(m=\overline{0,r-3})$, $\theta^0_{4,r-2} = (1/3)(2r-5)(2r-4)r\,\theta^0_{4,r-3} \neq 0$, $\theta^0_{4,r-1} = (2r-3)(r-1)r^{-1}\,\theta^0_{4,r-2} \neq 0$.

Теорема 7. *Для того чтобы система* (50) *была формально эквивалентна исходной системе* (48)*, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты КОМ* $Y^{[k]}$ *удовлетворяли: 1) при* $k=2r$ *– трем уравнениям* (62) $(r=2)$ *или четырем уравнениям* (63) $(r\geq 3)$*; 2) при* $k=2r+1$ $(r\geq 2)$ *– трем уравнениям* (64)*.*

Следствие 7. *В КОМ* $Y^{[k]}$ *системы* (50)*:*
1) при $k=2r$*, если* $r=1$*, то коэффициенты* $Y_1^{[3,2]}$, $Y_1^{[5,0]}$, $Y_2^{[4,2]}$, $Y_2^{[6,0]}$ *– резонансные,* $Y_1^{[1,4]}$, $Y_2^{[0,6]}$, $Y_2^{[2,4]}$ *– нерезонансные, а если* $r\geq 3$*, то все коэффициенты КОМ* $Y^{[2r]}$ *– резонансные, при этом коэффициент* $h_1^{[0,2(r-1)]}$ *КОМ* $h_1^{[k-3]}$ *также является резонансным;*
2) при $k=2r+1$ $(r\geq 2)$ *коэффициенты* $Y_1^{[2r,2]}$, $Y_1^{[2r+2,0]}$, $Y_2^{[2r+1,2]}$, $Y_2^{[2r+3,0]}$ *– резонансные, а* $Y_1^{[2m,2(r-l+1)]}$ $(m=\overline{0,r-1})$, $Y_2^{[2m+1,2(r-m+1)]}$ $(m=\overline{0,r-1})$ *– нерезонансные.*

Для $\forall\, k\geq 4$ положим $n_k = \{3$ при $k=4, 2r+1\,(r\geq 2)$; 4 при $k=2r\,(r\geq 3)\}$.

Следствие 8. *В системе* (50) n_k *различных резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[k]}$ *образуют резонансный* k*-набор* $\mathcal{Y}^k$*, если это:*
1) a) $\mathcal{Y}^4$: $Y_1^{[5,0]}$, $Y_2^{[6,0]}$ *и* $Y_1^{[3,2]}$ *или* $Y_2^{[4,2]}$; *b)* $\mathcal{Y}^{2r}$ $(r\geq 3)$: *либо* $Y_1^{[2r+1,0]}$, $Y_2^{[2r+2,0]}$, $Y_1^{[2r-1,2]}$ *и* $Y_1^{[2l_1-1,2(r-l_1+1)]}$ $(l_1\in\{1,\dots,r-1\})$ *или* $Y_2^{[2l_2,2(r-l_2+1)]}$ $(l_2\in\{0,\dots,r-1\})$; *либо* $Y_1^{[2r+1,0]}$, $Y_2^{[2r+2,0]}$, $Y_2^{[2r,2]}$ *и* $Y_1^{[2l_3-1,2(r-l_3+1)]}$ $(l_3\in\{1,\dots,r\})$ *или* $Y_2^{[2l_4,2(r-l_4+1)]}$ $(l_4\in\{0,\dots,r-1\})$;
2) $\mathcal{Y}^{2r+1}$ $(r\geq 2)$: $Y_1^{[2r+2,0]}$, $Y_2^{[2r+3,0]}$ *и* $Y_1^{[2r,2]}$ *или* $Y_2^{[2r+1,2]}$.

Таким образом, система (50) по определению является ОНФ, если для каждого $k\geq 4$ все коэффициенты её КОМ $Y^{[k]}$ равны нулю, кроме n_k штук, принадлежащих любому резонансному k-набору, описанному в следствии 8, и имеющих произвольные значения.

Следствие 9. *Для системы* (50) *произвольный резонансный набор* $\mathcal{Y} = \bigcup_{k=4}^{\infty}\mathcal{Y}^k$ *имеет вид:* $\big\{\rho_1^rY_1^{[3,2]}$, $\rho_2^rY_1^{[2r-1,2]}$, $\rho_2^r\rho_3^rY_1^{[2l_1-1,2(r-l_1+1)]}$, $(1-\rho_2^r)\rho_4^rY_1^{[2l_3-1,2(r-l_3+1)]}$ $(r\geq 3)$, $Y_1^{[2r+1,0]}$, $Y_1^{[2(r+1),0]}$, $\rho_5^rY_1^{[2r,2]}\,(r\geq 2)$, $(1-\rho_1^r)Y_2^{[4,2]}$, $\rho_2^r(1-\rho_3^r)Y_2^{[2l_2,2(r-l_2+1)]}$, $(1-\rho_2^r)Y_2^{[2r,2]}$, $(1-\rho_2^r)(1-\rho_4^r)Y_2^{[2l_4,2(r-l_4+1)]}$ $(r\geq 3)$, $Y_2^{[2r+2,0]}$, $Y_2^{[2r+3,0]}$, $(1-\rho_5^r)Y_2^{[2r+1,2]}$ $(r\geq 2)\big\}$*, где* $l_1\in\{1,\dots,r-1\}$, $l_2,l_4\in\{0,\dots,r-1\}$, $l_3\in\{1,\dots,r\}$, $\rho_j^r\in\{0,1\}$ $(j=\overline{1,5})$*. Если множитель при некотором* $Y_i^{[q_1,2q_2]}$*, входящим в* $\mathcal{Y}$*, равен нулю, то этот элемент отсутствует.*

Теорема 8. *Для любой системы* (48) *и для любого выбранного по её невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}$ *из следствия 9 существует и единственна почти тождественная замена* (49) *с заранее произвольным образом зафиксированными резонансными коэффициентами, преобразующая систему* (48) *в ОНФ* (50)*:*

$$\dot y_1 = y_2^2 + \rho_1^rY_1^{[3,2]}y_1^3y_2 + \sum_{r=2}^{\infty}\big(Y_1^{[2r+1,0]}y_1^{2r+1} + Y_1^{[2(r+1),0]}y_1^{2(r+1)} + \rho_5^rY_1^{[2r,2]}y_1^{2r}y_2\big) +$$
$$+\sum_{r=3}^{\infty}\big(\rho_2^rY_1^{[2r-1,2]}y_1^{2r-1}y_2 + \rho_2^r\rho_3^rY_1^{[2l_1-1,2(r-l_1+1)]}y_1^{2l_1-1}y_2^{r-l_1+1} +$$
$$+(1-\rho_2^r)\rho_4^rY_1^{[2l_3-1,2(r-l_3+1)]}y_1^{2l_3-1}y_2^{r-l_3+1}\big),$$

$$\dot y_2 = y_1y_2^2 + (1-\rho_1^r)Y_2^{[4,2]}y_1^4y_2 + \sum_{r=2}^{\infty}\bigl(Y_2^{[2r+2,0]}y_1^{2r+2} + Y_2^{[2r+3,0]}y_1^{2r+3} + (1-\rho_5^r)Y_2^{[2r+1,2]}y_1^{2r+1}y_2\bigr) +$$
$$+ \sum_{r=3}^{\infty}\bigl(\rho_2^r(1-\rho_3^r)Y_2^{[2l_2,2(r-l_2+1)]}y_1^{2l_2}y_2^{r-l_2+1} + (1-\rho_2^r)Y_2^{[2r,2]}y_1^{2r}y_2 +$$
$$+(1-\rho_2^r)(1-\rho_4^r)Y_2^{[2l_4,2(r-l_4+1)]}y_1^{2l_4}y_2^{r-l_4+1}\bigr).$$

Пример 2. *Любая система* (48) *формально эквивалентна ОНФ, у которой в возмущении все члены не более чем линейны по* y_2 :

$$\dot y_1 = y_2^2 + \sum_{r=5}^{\infty}Y_1^{[r,0]}y_1^r + \sum_{r=3}^{\infty}Y_1^{[r,2]}y_1^ry_2, \quad \dot y_2 = y_1y_2^2 + \sum_{r=6}^{\infty}Y_2^{[r,0]}y_1^r + \sum_{r=3}^{\infty}Y_2^{[2r,2]}y_1^{2r}y_2.$$

7 ОНФ систем с $\mathbf{R}_{(\mathbf{2},\mathbf{3})}^{[\mathbf{3}]}$ в невозмущенной части

7.1 Получение связующей системы

Рассмотрим систему (10) с канонической невозмущенной частью $R_{(2,3)}^{[3]} = (x_1x_2, x_1^3)$:

$$\dot x_1 = x_1x_2 + \sum_{k=4}^{\infty}X_1^{[k]}(x), \quad \dot x_2 = x_1^3 + \sum_{k=4}^{\infty}X_2^{[k]}(x), \tag{65}$$

где в возмущении КОМ $X_i^{[k]} = \sum_{2q_1+3q_2=k+\gamma_i}X_i^{[2q_1,3q_2]}x_1^{q_1}x_2^{q_2}$ $(i=1,2)$.

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y) \quad (i=1,2), \tag{66}$$

где $h_i(y) = \sum_{k=4}^{\infty}h_i^{[k-3]}(y)$, $h_i^{[k-3]} = \sum_{2q_1+3q_2=k+\gamma_i-3}h_i^{[2q_1,3q_2]}y_1^{q_1}y_2^{q_2}$ переводит (65) в систему:

$$\dot y_1 = y_1y_2 + \sum_{k=4}^{\infty}Y_1^{[k]}(y), \quad \dot y_2 = y_1^3 + \sum_{k=4}^{\infty}Y_2^{[k]}(y), \tag{67}$$

где возмущение $Y_i^{[k]} = \sum_{2q_1+3q_2=k+\gamma_i}Y_i^{[2q_1,3q_2]}y_1^{q_1}y_2^{q_2}$.

Тождества (13) с $\chi=3$, $\gamma=(2,3)$ для систем (65), (67) и замены (66) имеют вид:

$$\frac{\partial h_1^{[k-3]}}{\partial y_1}y_1y_2 + \frac{\partial h_1^{[k-3]}}{\partial y_2}y_1^3 - y_2h_1^{[k-3]} - y_1h_2^{[k-3]} = \widetilde Y_1^{[k]} - Y_1^{[k]},$$
$$\frac{\partial h_2^{[k-3]}}{\partial y_1}y_1y_2 + \frac{\partial h_2^{[k-3]}}{\partial y_2}y_1^3 - 3y_1^2h_1^{[k-3]} = \widetilde Y_2^{[k]} - Y_2^{[k]},$$

где $\widetilde Y_i^{[k]}$ $(i=1,2)$ находится по формуле, указанной в (13).

Приравнивая коэффициенты при $y_1^{q_1}y_2^{q_2}$, получаем линейную связующую систему:

$$\begin{array}{ll} (q_1-1)h_1^{[2q_1,3(q_2-1)]} + (q_2+1)h_1^{[2(q_1-3),3(q_2+1)]} - h_2^{[2(q_1-1),3q_2]} = \widehat Y_1^{[2q_1,3q_2]} & (2q_1+3q_2=k+2), \\ q_1h_2^{[2q_1,3(q_2-1)]} + (q_2+1)h_2^{[2(q_1-3),3(q_2+1)]} - 3h_1^{[2(q_1-2),3q_2]} = \widehat Y_2^{[2q_1,3q_2]} & (2q_1+3q_2=k+3), \end{array} \tag{68}$$

в которой $\widehat Y_i^{[2q_1,3q_2]} = \widetilde Y_i^{[2q_1,3q_2]} - Y_i^{[2q_1,3q_2]}$.

Поскольку $k \geq 4$, а $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, введем следующее разложение:

$$k = 6r + u + 3v - 2 \quad (r \in \mathbb{N},\ u = 0,1,2,\ v = 0,1), \qquad q_1 = 3l + s \quad (l \in \mathbb{Z}_+,\ s = 0,1,2).$$

Тогда $q_2 = (k + \gamma_i - 2q_1)/3 = 2(r-l) + v + (u - 2s + \gamma_i - 2)/3 \in \mathbb{Z}_+$ в следующих случаях:

0) $u = 0:$ $s = 0$ и $l = \overline{0,r}$ $(i = 1)$, $s = 2$ и $l = \overline{0, r+v-1}$ $(i = 2)$;

1) $u = 1:$ $s = 2$ и $l = \overline{0, r+v-1}$ $(i = 1)$, $s = 1$ и $l = \overline{0,r}$ $(i = 2)$;

2) $u = 2:$ $s = 1$ и $l = \overline{0,r}$ $(i = 1)$, $s = 0$ и $l = \overline{0, r+v}$ $(i = 2)$.

7.2 Условия совместности связующей системы

7.2.1 u=0 $(\mathbf{k = 6r + 3v - 2})$

Перепишем (68), используя введенные в разделе 7.1 разложения для q_1 и q_2 при $u = 0$:

$$\begin{aligned}
&(3l-1)h_1^{[6l,6(r-l)+3v-3]} + (2(r-l)+v+1)h_1^{[6(l-1),6(r-l)+3v+3]} - h_2^{[6l-2,6(r-l)+3v]} = \\
&\qquad\qquad = \widehat{Y}_1^{[6l,6(r-l)+3v)]} \quad (l = \overline{0,r}), \\
&(3l+2)h_2^{[6l+4,6(r-l-1)+3v]} + (2(r-l)+v)h_2^{[6l-2,6(r-l)+3v]} - 3h_1^{[6l,6(r-l)+3v-3]} = \\
&\qquad\qquad = \widehat{Y}_2^{[6l+4,6(r-l)+3v-3]} \quad (l = \overline{0, r+v-1})
\end{aligned} \tag{68^0}$$

или

$$\begin{aligned}
(3l-1)h_{1,l}^v + (2(r-l)+v+1)h_{1,l-1}^v - h_{2,l-1}^v &= Y_{1,l}^v \quad (l = \overline{0,r}), \\
(3l+2)h_{2,l}^v + (2(r-l)+v)h_{2,l-1}^v - 3h_{1,l}^v &= Y_{2,l}^v \quad (l = \overline{0, r+v-1}),
\end{aligned} \tag{69}$$

где $h_{1,l}^v = h_1^{[6l,6(r-l)+3v-3]}$, $Y_{2,l}^v = \widehat{Y}_2^{[6l+4,6(r-l)+3v-3)]}$ $(l = \overline{0, r+v-1})$,
$h_{2,l}^v = h_2^{[6l+4,6(r-l-1)+3v]}$ $(l = \overline{0, r-1})$, $Y_{1,l}^v = \widehat{Y}_1^{[6l,6(r-l)+3v)]}$ $(l = \overline{0,r})$; $Y_{2,-1}^v, Y_{2,r}^0 = 0$.

Подставляя теперь $h_{1,l}^v$ и $h_{1,l-1}^v$ из (69_2) в (69_1), получаем систему:

$$a_l^v h_{2,l-2}^v + b_l^v h_{2,l-1}^v + c_l^v h_{2,l}^v = Y_{0,l}^v \quad (l = \overline{0,r}), \tag{70}$$

в которой $a_l^v = (2(r-l)+v+1)(2(r-l)+v+2)$ $(l = \overline{2,r})$, $b_l^v = (3l-1)(4(r-l)+2v+1) - 3$ $(l = \overline{1,r})$, $c_l^v = (3l-1)(3l+2)$ $(l = \overline{0, r-1})$, $Y_{0,l}^v = 3Y_{1,l}^v + (2(r-l)+v+1)Y_{2,l-1}^v + (3l-1)Y_{2,l}^v$.

Для решения системы (70) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-1}^v, c_{r-2}^v, \ldots$ матрицы
$$\begin{pmatrix}
c_0^v & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
b_1^v & c_1^v & 0 & \ldots & 0 \\
a_2^v & b_2^v & c_2^v & \ldots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \ldots & a_{r-1}^v & b_{r-1}^v & c_{r-1}^v \\
0 & \ldots & 0 & a_r^v & b_r^v
\end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$$
, получая d_l^v вместо b_l^v и $\overline{Y}_{0,l}^v$ вместо $Y_{0,l}^v$ $(l \leq r)$, пока $d_{l+1}^v \neq 0$ $(l \geq 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d_r^v = b_r^v,\ \overline{Y}_{0,r}^v = Y_{0,r}^v; \quad d_l^v = b_l^v - \frac{a_{l+1}^v c_l^v}{d_{l+1}^v},\ \overline{Y}_{0,l}^v = Y_{0,l}^v - \frac{\overline{Y}_{0,l+1}^v c_l^v}{d_{l+1}^v} \quad (l = r-1, r-2, \ldots). \tag{71}$$

0^0. $\mathbf{v=0}$ $(\mathbf{k=6r-2})$.

Лемма 5. *Для элементов* d_l^0 *из* (71) *верна следующая прямая формула:*

$$d_l^0=(3l-4)(2(r-l)+1)\neq 0 \quad (l=\overline{r,1}). \tag{72}$$

Доказательство. В (71) $d_r^0=3r-4,$ что совпадает с d_r^0 из (72) и дает базу индукции.

Пусть для $\forall\, l=\overline{r-1,1}$ верна формула (72). Тогда согласно (71) имеем $d_{l-1}^0=b_{l-1}^0-a_l^0c_{l-1}^0(d_l^0)^{-1}=(3l-4)(4(r-l)+5)-3-(2(r-l)+2)(3l-2)=(2(r-l)+3)(3l-7).$ □

В результате первое уравнение $(l=0)$ системы, полученной из (70), принимает вид: $0\cdot h_{2,0}^0=\overline{Y}_{0,0}^0,$ где $\overline{Y}_{0,0}^0=\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{0,0}Y_{0,m}^0$ с $\theta_{1,m}^{0,0}=(-1)^m\prod_{j=1}^m(c_{j-1}^0/d_j^0).$ Учитывая (70) и (72), получаем:

$$\theta_{1,m}^{0,0}=(-1)^m\prod_{j=1}^m\frac{3j-1}{2(r-j)+1}\neq 0 \quad (m=\overline{0,r}).$$

В обозначениях (69) имеем: $\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{0,0}Y_{0,m}^0=\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{0,0}(3Y_{1,m}^0+(2(r-m)+1)Y_{2,m-1}^0+(3m-1)Y_{2,m}^0)=3\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{0,0}Y_{1,m}^0+\sum_{m=0}^{r-1}((3m-1)\theta_{1,m}^{0,0}+(2(r-m)-1)\theta_{1,m+1}^{0,0})Y_{2,m}^0=0,$ причем $(3m-1)\theta_{1,m}^{0,0}+(2(r-m)-1)\theta_{1,m+1}^{0,0}=-3\theta_{1,m}^{0,0}.$

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,0}^0=0$ дает для системы (68^0) с $v=0$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^r\alpha_{1,m}^{0,0}\widehat{Y}_1^{[6m,6(r-m)]}+\sum_{m=0}^{r-1}\beta_{1,m}^{0,0}\widehat{Y}_2^{[6m+4,6(r-m)-3]}=0 \qquad (\alpha_{1,m}^{0,0},-\beta_{1,m}^{0,0}=\theta_{1,m}^{0,0}). \tag{73}$$

1^0. $\mathbf{v=1}$ $(\mathbf{k=6r+1})$.

Лемма 6. *В матрице системы* (70) *диагональные элементы* $d_r^1,\ldots,d_1^1,$ *определяемые по формулам* (71)*, положительны.*

Доказательство. Пусть $f_l=3(l-1)(2(r-l)+3),$ тогда $f_1=0,$ $f_l>0$ при $l=\overline{2,r}.$

Покажем методом математической индукции, что $d_l^1>f_l$ при $l=\overline{r,1}.$

Согласно (71) $d_r^1=9r-6>9r-9=f_r,$ что является базой индукции.

Пусть $d_{l+1}^1>f_{l+1}=3(2(r-l)+1)l.$ Тогда $d_l^1=b_l^1-c_l^1a_{l+1}^1/d_{l+1}^1>b_l^1-c_l^1a_{l+1}^1/f_{l+1},$ так как $c_l^1a_{l+1}^1=2(3l-1)(3l+2)(r-l)(2(r-l)+1)>0$ при $l=\overline{r,1}.$ Но $b_l^1-c_l^1a_{l+1}^1/f_{l+1}>f_l$ $\Leftrightarrow$ $(3l-1)(4(r-l)+3)-3-(2/3)(3l-1)(3l+2)(r-l)/l-3(2(r-l)+3)(l-1)>0$ $\Leftrightarrow$ $(4r+5l)/3>0,$ что верно. Поэтому $d_l^1>f_l,$ т. е. $d_l^1>0$ для $\forall\, l=\overline{1,r}.$ □

Первое уравнение $(l=0)$ системы, полученной из (70), принимает вид: $0\cdot h_{2,0}^1=\overline{Y}_{0,0}^1,$ где $\overline{Y}_{0,0}^1=\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{0,1}Y_{0,m}^1$ с $\theta_{1,m}^{0,1}=(-1)^m\prod_{j=1}^m(c_{j-1}^1/d_j^1)\neq 0,$ так как $c_l^1\neq 0$ для $\forall\, l=\overline{0,r-1}.$ В обозначениях (69): $\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{0,1}Y_{0,m}^1=\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{0,1}(3Y_{1,m}^1+(2(r-m)+2)Y_{2,m-1}^1+(3m-1)Y_{2,m}^1)=3\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{0,1}Y_{1,m}^1+\sum_{m=0}^{r-1}((3m-1)\theta_{1,m}^{0,1}+2(r-m)\theta_{1,m+1}^{0,1})Y_{2,m}^1+(3r-1)\theta_{1,r}^{0,1}Y_{2,r}^1,$ причем $(3m-1)\theta_{1,m}^{0,1}+2(r-m)\theta_{1,m+1}^{0,1}=(3m-1)(1-2(r-m)(3m+2)/d_{m+1}^1)\theta_{1,m}^{0,1}.$

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,0}^1=0$ дает для (68^0) $v=1$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^r\alpha_{1,m}^{0,1}\widehat{Y}_1^{[6m,6(r-m)+3]}+\sum_{m=0}^r\beta_{1,m}^{0,1}\widehat{Y}_2^{[6m+4,6(r-m)]}=0, \tag{74}$$

в которой $\alpha_{1,m}^{0,1} = 3\theta_{1,m}^{0,1}$, $\beta_{1,m}^{0,1} = (3m-1)(1-2(r-m)(3m+2)/d_{m+1}^1)\theta_{1,m}^{0,1}$ $(m = \overline{0, r-1})$, $\beta_{1,r}^{0,1} = (3r-1)\theta_{1,r}^{0,1}$, а множители $\theta_{1,m}^{0,1} = (-1)^m \prod_{j=1}^m((3j-4)(3j-1)/d_j^1) \neq 0$ по лемме 6.

7.2.2 u=1 $(\mathbf{k = 6r + 3v - 1})$

Перепишем (68), используя введенные в разделе 7.1 разложения для q_1 и q_2 при $u = 1$:

$$\begin{aligned}(3l+1)h_1^{[6l+4,6(r-l-1)+3v]} + (2(r-l)+v)h_1^{[6l-2,6(r-l)+3v]} - h_2^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]} &= \\ = \widehat{Y}_1^{[6l+4,6(r-l)+3v-3]} \quad (l = \overline{0, r+v-1}),& \\ (3l+1)h_2^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]} + (2(r-l)+v+1)h_2^{[6l-4,6(r-l)+3v+3]} - 3h_1^{[6l-2,6(r-l)+3v]} &= \\ = \widehat{Y}_2^{[6l+2,6(r-l)+3v]} \quad (l = \overline{0, r})&\end{aligned} \qquad (68^1)$$

или

$$\begin{aligned}(3l+1)h_{1,l}^v + (2(r-l)+v)h_{1,l-1}^v - h_{2,l}^v = Y_{1,l}^v \quad (l = \overline{0, r+v-1}),\\ (3l+1)h_{2,l}^v + (2(r-l)+v+1)h_{2,l-1}^v - 3h_{1,l-1}^v = Y_{2,l}^v \quad (l = \overline{0, r}),\end{aligned} \qquad (75)$$

где $h_{1,l}^v = h_1^{[6l+4,6(r-l-1)+3v]}$ $(l = \overline{0, r-1})$, $Y_{1,l}^v = \widehat{Y}_1^{[6l+4,6(r-l)+3v-3]}$, $h_{2,l}^v = h_2^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]}$ $(l = \overline{0, r+v-1})$, $Y_{2,l}^v = \widehat{Y}_2^{[6l+2,6(r-l)+3v]}$ $(l = \overline{0, r})$; $Y_{1,-1}^v, Y_{1,r}^0 = 0$.

Подставляя теперь $h_{2,l}^v$ и $h_{2,l-1}^v$ из подсистемы (75_1) в (75_2), получаем систему:

$$a_l^v h_{1,l-2}^v + b_l^v h_{1,l-1}^v + c_l^v h_{1,l}^v = Y_{0,l}^v \quad (l = \overline{0, r}), \qquad (76)$$

в которой $a_l^v = (2(r-l)+v+1)(2(r-l)+v+2)$ $(l = \overline{2, r})$, $b_l^v = (6l-1)(2(r-l)+v) + 3l - 5$ $(l = \overline{1, r})$, $c_l^v = (3l+1)^2$ $(l = \overline{0, r-1})$, $Y_{0,l}^v = (2(r-l)+v+1)Y_{1,l-1}^v + (3l+1)Y_{1,l}^v + Y_{2,l}^v$.

$\mathbf{0^0}$. $\mathbf{v = 0}$ $(\mathbf{k = 6r - 1})$. Для решения системы (76) будем методом Гаусса аннулировать элементы $a_2^0, a_3^0, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} c_0^0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1^0 & c_1^0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2^0 & b_2^0 & c_2^0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{r-1}^0 & b_{r-1}^0 & c_{r-1}^0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_r^0 & b_r^0 \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая e_l^0 вместо b_l^0 и $\overline{Y}_{0,l}^0$ вместо $Y_{0,l}^0$ $(l \leq r)$, пока $e_{l-1}^0 \neq 0$ $(l \geq 2)$, по рекуррентным формулам:

$$e_1^0 = b_1^0,\ \overline{Y}_{0,0}^0 = Y_{0,0}^0,\ \overline{Y}_{0,1}^0 = Y_{0,1}^0; \quad e_l^0 = b_l^0 - \frac{a_l^0 c_{l-1}^0}{e_{l-1}^0},\ \overline{Y}_{0,l}^0 = Y_{0,l}^0 - \frac{\overline{Y}_{0,l-1}^0 a_l^0}{e_{l-1}^0} \quad (l = 2, 3, \ldots). \qquad (77)$$

Лемма 7. *В матрице системы* (76) *определяемые по формулам* (77) *диагональные элементы* $e_1^0, \ldots, e_{r-1}^0$ *положительны, а* e_r^0 *отрицателен.*

Доказательство. Для оценки снизу элементов e_l^0 при $l = \overline{1, r-1}$ введем положительную функцию $f_l = (3l+1)(2(r-l)-1)$.

Покажем методом математической индукции, что $e_l^0 > f_l$ при $l = \overline{1, r-1}$.

В (77) $e_1^0 = 10r - 12 > 8r - 12 = f_1$, что является базой индукции.

Пусть теперь $e_{l-1}^0 > f_{l-1} = (3l-2)(2(r-l)+1)$. Тогда $e_l^0 = b_l^0 - a_l^0 c_{l-1}^0 / e_{l-1}^0 > b_l^0 - a_l^0 c_{l-1}^0 / f_{l-1}$, так как $a_l^0 c_{l-1}^0 = (2(r-l)+1)(2(r-l)+2)(3l-2)^2 > 0$. Но $b_l^0 - a_l^0 c_{l-1}^0 / f_{l-1} =$

$2(6l-1)(r-l)+3l-5-(2(r-l)+2)(3l-2)=(2(r-l)-1)(3l+1)=f_l$. Значит, $e_l^0>f_l$, т. е. $e_l^0>0\ \ \forall\, l=\overline{1,r-1}$.

Оценим теперь элементы e_l^0 $(l=\overline{1,r})$ сверху так, чтобы e_r^0 в итоге оказались бы отрицательным. Введем $g_l=2(r-l)(3l+3)$. При $l=\overline{1,r-1}$ функция $g_l>0$ и $g_r=0$.

Покажем методом математической индукции, что $e_l^0<g_l$ при $l=\overline{1,r}$.

В (77) $e_1^0=10r-12<12r-12=g_1$, что является базой индукции.

Пусть $e_{l-1}^0<g_{l-1}=6l(r-l+1)$. Тогда $e_l^0=b_l^0-a_l^0c_{l-1}^0/e_{l-1}^0<b_l^0-a_l^0c_{l-1}^0/g_{l-1}$, так как $a_l^0c_{l-1}^0>0$. Но $b_l^0-a_l^0c_{l-1}^0/g_{l-1}<g_l\ \Leftrightarrow\ 2(6l-1)(r-l)+3l-5-(1/6)(2(r-l)+2)\times(3l-2)^2/l-2(r-l)(3l+3)<0\ \Leftrightarrow\ (1/3)(5l-8r-4)/l<0$, что верно при $l=\overline{1,r}$. Поэтому $e_l^0<g_l$, а значит $e_r^0<0$. □

Следовательно можно полностью аннулировать нижнюю диагональ $a_2^0,\dots,a_r^0$ матрицы системы (76). Теперь аннулируем элементы $c_{r-1}^0,\dots,c_0^0$, диагональные элементы $e_r^0,\dots,e_1^0$ при этом не изменятся, а вместо $\overline{Y}_{0,l}^0$ получим $\breve{Y}_{0,l}^0$ по рекуррентным формулам:

$$\breve{Y}_{0,r}^0=\overline{Y}_{0,r}^0,\quad \breve{Y}_{0,l}^0=\overline{Y}_{0,l}^0-c_l^0\breve{Y}_{0,l+1}^0/e_{l+1}^0\quad (l=\overline{r-1,0}).$$

Тогда первое уравнение системы $(l=0)$, полученной из (76), принимает вид: $0\cdot h_{1,0}^0=\breve{Y}_{0,0}^0$, где $\breve{Y}_{0,0}^0=\sum_{m=0}^r\theta_m^{1,0}\overline{Y}_{0,m}^0$ с $\theta_m^{1,0}=(-1)^m\prod_{j=1}^m c_{j-1}^0/e_j^0\neq 0$, так как $c_l^0\neq 0$ для $\forall\, l=\overline{0,r-1}$.

Согласно формуле (77) имеем: $\sum_{m=0}^r\theta_m^{1,0}\overline{Y}_{0,m}^0=\theta_0^{1,0}Y_{0,0}^0+\theta_1^{1,0}Y_{0,1}^0+\theta_2^{1,0}(Y_{0,2}^0-a_2^0Y_{0,1}^0/e_1^0)+\ldots+\theta_r^{1,0}(Y_{0,r}^0-a_r^0Y_{0,r-1}^0/e_{r-1}^0+\ldots+(-1)^{r-1}Y_{0,1}^0\prod_{j=2}^r a_j^0/e_{j-1}^0)=\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{1,0}Y_{0,m}^0$, где $\theta_{1,0}^{1,0}=\theta_0^{1,0}=1$, $\theta_{1,m}^{1,0}=\sum_{s=m}^r(-1)^{s-m}\theta_s^{1,0}\cdot\prod_{j=m+1}^s a_j^0/e_{j-1}^0$ $(m=\overline{1,r})$.

В обозначениях (75): $\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{1,0}Y_{0,m}^0=\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{1,0}((2(r-m)+1)Y_{1,m-1}^0+(3m+1)Y_{1,m}^0+Y_{2,m}^0)=\sum_{m=0}^{r-1}((3m+1)\theta_{1,m}^{1,0}+(2(r-m)-1)\theta_{1,m+1}^{1,0})Y_{1,m}^0+\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{1,0}Y_{2,m}^0$.

В результате уравнение $\breve{Y}_{0,0}^0=0$ дает для (68^1) с $v=0$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r-1}\alpha_{1,m}^{1,0}\widehat{Y}_1^{[6m+4,6(r-m)-3]}+\sum_{m=0}^{r}\beta_{1,m}^{1,0}\widehat{Y}_2^{[6m+2,6(r-m)]}=0,\tag{78}$$

где $\alpha_{1,m}^{1,0}=(3m+1)\theta_{1,m}^{1,0}+(2(r-m)-1)\theta_{1,m+1}^{1,0}$, $\beta_{1,m}^{1,0}=\theta_{1,m}^{1,0}$, а $\theta_{1,0}^{1,0}=1$, $\theta_{1,m}^{1,0}=(-1)^m\sum_{s=m}^r\prod_{j=1}^s(3j-2)^2/e_j^0\cdot\prod_{j=m+1}^s(2(r-j)+1)(2(r-j)+2)/e_{j-1}^0$ $(m=\overline{1,r})$.

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v=1}$ $(\mathbf{k=6r+2})$. Для решения системы (76) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-1}^1,c_{r-2}^1,\ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} c_0^1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ b_1^1 & c_1^1 & 0 & \dots & 0\\ a_2^1 & b_2^1 & c_2^1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & a_{r-1}^1 & b_{r-1}^1 & c_{r-1}^1\\ 0 & \dots & 0 & a_r^1 & b_r^1\end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая d_l^1 вместо b_l^1 и $\overline{Y}_{0,l}^1$ вместо $Y_{0,l}^1$ $(l\le r)$, пока $d_{l+1}^1\neq 0$ $(l\ge 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d_r^1=b_r^1,\ \overline{Y}_{0,r}^1=Y_{0,r}^1;\quad d_l^1=b_l^1-\frac{a_{l+1}^1c_l^1}{d_{l+1}^1},\ \overline{Y}_{0,l}^1=Y_{0,l}^1-\frac{\overline{Y}_{0,l+1}^1c_l^1}{d_{l+1}^1}\quad (l=r-1,r-2,\ldots).\tag{79}$$

Лемма 8. *Для элементов* d_l^1 *из* (79) *верна следующая прямая формула:*

$$d_l^1 = (3l-2)(2(r-l)+3) \neq 0 \quad (l=\overline{r,1}). \tag{80}$$

Доказательство. В (79) $d_r^1 = 3(3r-2)$, что совпадает с d_r^1 из (80) и дает базу индукции.

Пусть для $\forall\, l = \overline{r-1,1}$ верна формула (80). Тогда согласно (79) имеем $d_{l-1}^1 = b_{l-1}^1 - a_l^1 c_{l-1}^1 (d_l^1)^{-1} = 6lr - 6l^2 + 25l - 10r - 25 = (3l-5)(2(r-l)+5)$. $\square$

Первое уравнение $(l=0)$ системы, полученной из (76), принимает вид: $0 \cdot h_{1,0}^1 = \overline{Y}^1_{0,0}$, где $\overline{Y}^1_{0,0} = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{1,1} Y_{0,m}^1$ с $\theta_{1,m}^{1,1} = (-1)^m \prod_{j=1}^m (c_{j-1}^1/d_j^1)$. Учитывая (76) и (80), получаем:

$$\theta_{1,m}^{1,1} = (-1)^m \prod_{j=1}^m \frac{3j-2}{2(r-j)+3} \neq 0 \quad (m=\overline{0,r}).$$

В обозначениях (75): $\sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{1,1} Y_{0,m}^1 = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{1,1}((2(r-m)+2)Y_{1,m-1}^1 + (3m+1)Y_{1,m}^1 + Y_{2,m}^1) = \sum_{m=0}^{r-1}((3m+1)\theta_{1,m}^{1,1} + 2(r-m)\theta_{1,m+1}^{1,1})Y_{1,m}^1 + (3r+1)\theta_{1,r}^{1,1}Y_{1,r}^1 + \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{1,1} Y_{2,m}^1 = 0$, причем $(3m+1)\theta_{1,m}^{1,1} + 2(r-m)\theta_{1,m+1}^{1,1} = (3m+1)(2(r-m)+1)^{-1}\theta_{1,m}^{1,1}$.

В результате уравнение $\overline{Y}^1_{0,0} = 0$ дает для (68^1) с $v=1$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^r \alpha_{1,m}^{1,1} \widehat{Y}_1^{[6m+4,6(r-m)]} + \sum_{m=0}^r \beta_{1,m}^{1,1} \widehat{Y}_2^{[6m+2,6(r-m)+3)]} = 0, \tag{81}$$

где $\alpha_{1,m}^{1,1} = (3m+1)(2(r-m)+1)^{-1}\theta_{1,m}^{1,1}$, $\beta_{1,m}^{1,1} = \theta_{1,m}^{1,1}$.

7.2.3 u=2 $(\mathbf{k = 6r + 3v})$

Перепишем (68), используя введенные в разделе 7.1 разложения для q_1 и q_2 при $u=1$:

$$\begin{aligned} 3l\, h_1^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]} + (2(r-l)+v+1)h_1^{[6l-4,6(r-l)+3v+3]} - h_2^{[6l,6(r-l)+3v]} &= \\ = \widehat{Y}_1^{[6l+2,6(r-l)+3v]} \quad (l=\overline{0,r}),& \\ 3l\, h_2^{[6l,6(r-l)+3v]} + (2(r-l)+v+2)h_2^{[6(l-1),6(r-l+1)+3v]} - 3h_1^{[6l-4,6(r-l)+3v+3]} &= \\ = \widehat{Y}_2^{[6l,6(r-l)+3v+3]} \quad (l=\overline{0,r+v}).& \end{aligned} \tag{68^2}$$

Заметим, что при $l=0$ из второй подсистемы можно сразу получить следующую резонансную связь:

$$\widehat{Y}_2^{[0,3(2r+v+1)]} = 0. \tag{82}$$

Вводя новые обозначения, запишем (68^2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} 3l\, h_{1,l}^v + (2(r-l)+v+1)h_{1,l-1}^v - h_{2,l}^v = Y_{1,l}^v \quad (l=\overline{0,r}), \\ 3l\, h_{2,l}^v + (2(r-l)+v+2)h_{2,l-1}^v - 3h_{1,l-1}^v = Y_{2,l}^v \quad (l=\overline{1,r+v}), \end{aligned} \tag{83}$$

где $h_{1,l}^v = h_1^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]}$ $(l=\overline{0,r+v-1})$, $Y_{1,l}^v = \widehat{Y}_1^{[6l+2,6(r-l)+3v]}$, $h_{2,l}^v = h_2^{[6l,6(r-l)+3v]}$ $(l=\overline{0,r})$, $Y_{2,l}^v = \widehat{Y}_2^{[6l,6(r-l)+3v+3)]}$ $(l=\overline{1,r+v})$; $Y_{1,r+1}^1 = 0$.

Подставляя теперь $h^v_{2,l}$ и $h^v_{2,l-1}$ из подсистемы (83_1) в (83_2), получаем систему:

$$a^v_l h^v_{1,l-2} + b^v_l h^v_{1,l-1} + c^v_l h^v_{1,l} = Y^v_{0,l} \quad (l = \overline{1, r+v}), \tag{84}$$

в которой $a^v_l = (2(r-l)+v+2)(2(r-l)+v+3)$ $(l = \overline{2, r+v})$, $b^v_l = 3(2l-1)(2(r-l)+v+1)+3l-6$ $(l = \overline{1, r+v})$, $c^v_l = 9l^2$ $(l = \overline{1, r+v-1})$, $Y^v_{0,l} = (2(r-l)+v+2)Y^v_{1,l-1} + 3l\, Y^v_{1,l} + Y^v_{2,l}$.

$\mathbf{0^0}$. $\mathbf{v = 0}$ $(\mathbf{k = 6r})$. Для решения системы (84) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c^0_{r-1}, c^0_{r-2}, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b^0_1 & c^0_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a^0_2 & b^0_2 & c^0_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a^0_{r-1} & b^0_{r-1} & c^0_{r-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a^0_r & b^0_r \end{pmatrix}_{r\times r}$, получая d^0_l вместо b^0_l и $\overline{Y}^0_{0,l}$ вместо $Y^0_{0,l}$ $(l \le r)$, пока $d^0_{l+1} \ne 0$ $(l \ge 1)$, по рекуррентным формулам:

$$d^0_r = b^0_r,\ \overline{Y}^0_{0,r} = Y^0_{0,r}; \quad d^0_l = b^0_l - \frac{a^0_{l+1}\, c^0_l}{d^0_{l+1}},\ \overline{Y}^0_{0,l} = Y^0_{0,l} - \frac{\overline{Y}^0_{0,l+1} c^0_l}{d^0_{l+1}} \quad (l = r-1, r-2, \ldots). \tag{85}$$

Лемма 9. *Для элементов* d^0_l *из* (85) *верна следующая прямая формула:*

$$d^0_l = 3(l-1)(2(r-l)+3) \quad (l = \overline{r, 1}). \tag{86}$$

Доказательство. В (85) $d^0_r = 9(r-1)$, что совпадает с d^0_r из (86) и дает базу индукции.

Пусть для $\forall\, l = \overline{r-1, 1}$ верна формула (86). Тогда согласно (85) имеем $d^0_{l-1} = b^0_{l-1} - a^0_l c^0_{l-1}(d^0_l)^{-1} = 3(2l-3)(2(r-l)+3) + 3l - 9 - 3(2(r-l)+2)(l-1) = 3(l-2)(2(r-l)+5)$. □

Поскольку в (86) только $d^0_1 = 0$, то первое уравнение $(l = 1)$ системы, полученной из (84), принимает вид: $0 \cdot h^0_{1,0} + 0 \cdot h^0_{1,1} = \overline{Y}^0_{0,1}$, где $\overline{Y}^0_{0,1} = \sum_{m=1}^r \theta^{2,0}_{2,m} Y^0_{0,m}$ с $\theta^{2,0}_{2,m} = (-1)^{m-1} \prod_{j=2}^m (c^0_{j-1}/d^0_j)$. Учитывая (84) и (86), получаем:

$$\theta^{2,0}_{2,m} = (-1)^{m-1} \prod_{j=2}^{m} \frac{3(j-1)}{2(r-j)+3} \ne 0 \quad (m = \overline{1, r}).$$

В обозначениях (83) : $\sum_{m=1}^r \theta^{2,0}_{2,m} Y^0_{0,m} = \sum_{m=1}^r \theta^{2,0}_{2,m}((2(r-m)+2)Y^0_{1,m-1} + 3m\, Y^0_{1,m} + Y^0_{2,m}) = 2r\theta^{2,0}_{2,1} Y^0_{1,0} + \sum_{m=1}^{r-1}(3m\theta^{2,0}_{2,m} + 2(r-m)\theta^{2,0}_{2,m+1})Y^0_{1,m} + 3r\theta^{2,0}_{2,r} Y^0_{1,r} + \sum_{m=1}^r \theta^{2,0}_{2,m} Y^0_{2,m}$, причем $3m\theta^{2,0}_{2,m} + 2(r-m)\theta^{2,0}_{2,m+1} = 3m(2(r-m)+1)^{-1}\theta^{2,0}_{2,m}$.

В результате уравнение $\overline{Y}^0_{0,1} = 0$ дает для (68^2) с $v = 0$ вторую резонансную связь при наличии свободной компоненты $h_1^{[2,3(2r-1)]}$:

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha^{2,0}_{2,m} \widehat{Y}_1^{[6m+2, 6(r-m)]} + \sum_{m=1}^{r} \beta^{2,0}_{2,m} \widehat{Y}_2^{[6m, 6(r-m)+3]} = 0, \tag{87}$$

где $\alpha^{2,0}_{2,0} = 2r\theta^{2,0}_{2,1}$, $\alpha^{2,0}_{2,m} = 3m(2(r-m)+1)^{-1}\theta^{2,0}_{2,m}$ $(m = \overline{1, r})$, $\beta^{2,0}_{2,m} = \theta^{2,0}_{2,m}$.

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v=1}$ $(\mathbf{k=6r+3})$. Для решения системы (84) будем методом Гаусса аннулировать элементы $a^1_2, a^1_3, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b^1_1 & c^1_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a^1_2 & b^1_2 & c^1_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a^1_r & b^1_r & c^1_r \\ 0 & \ldots & 0 & a^1_{r+1} & b^1_{r+1} \end{pmatrix}_{(r+1)\times(r+1)}$, получая e^1_l вместо b^1_l и $\overline{Y}^1_{0,l}$ вместо $Y^1_{0,l}$ $(l \le r+1)$, пока $e^1_{l-1} \ne 0$ $(l \ge 2)$, по рекуррентным формулам:

$$e^1_1 = b^1_1,\ \overline{Y}^1_{0,1} = Y^1_{0,1}; \quad e^1_l = b^1_l - \frac{a^1_l\, c^1_{l-1}}{e^1_{l-1}},\ \overline{Y}^1_{0,l} = Y^1_{0,l} - \frac{\overline{Y}^1_{0,l-1} a^1_l}{e^1_{l-1}} \quad (l = 2, 3, \ldots). \tag{88}$$

Лемма 10. *Для элементов* e^1_l *из* (88) *верна следующая прямая формула:*

$$e^1_l = 3l(2(r-l)+1) \ne 0 \quad (l = \overline{1, r+1}). \tag{89}$$

Доказательство. В (88) $e^1_1 = 3(2r-1)$, что совпадает с e^1_1 из (89) и дает базу индукции.

Пусть для $\forall\, l = \overline{2, r+1}$ верна формула (89). Тогда согласно (88) имеем $e^1_{l+1} = b^1_{l+1} - a^1_{l+1} c^1_l (e^1_l)^{-1} = 6(2l+1)(r-l) + 3l - 3 - 3(2(r-l)+2)l = 3(l+1)(2(r-l)-1)$. □

Значит, в этом случае система (84) однозначно разрешима.

7.3 Полученные результаты

Возвращаясь к обозначениям для системы (68) согласно (73),(74),(78),(81),(82),(87) заключаем, что $\forall\, r \in \mathbb{N}$ коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ удовлетворяют резонансным уравнениям:

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha^{0,0}_{1,m} Y_1^{[6m,6(r-m)]} + \sum_{m=0}^{r-1} \beta^{0,0}_{1,m} Y_2^{[6m+4,6(r-m)-3]} = \tilde{c} \quad (k = 6r-2), \tag{90}$$

где $\alpha^{0,0}_{1,m}, -\beta^{0,0}_{1,m} = \theta^{0,0}_{1,m}$, а $\theta^{0,0}_{1,m} = (-1)^m \prod_{j=1}^m (3j-1)(2(r-j)+1)^{-1} \ne 0$;

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha^{1,0}_{1,m} Y_1^{[6m+4,6(r-m)-3]} + \sum_{m=0}^{r} \beta^{1,0}_{1,m} Y_2^{[6m+2,6(r-m)]} = \tilde{c} \quad (k = 6r-1), \tag{91}$$

где $\alpha^{1,0}_{1,m} = (3m+1)\theta^{1,0}_{1,m} + (2(r-m)-1)\theta^{1,0}_{1,m+1}$, $\beta^{1,0}_{1,m} = \theta^{1,0}_{1,m}$, а $\theta^{1,0}_{1,0} = 1$, $\theta^{1,0}_{1,m} = (-1)^m \times \sum_{s=m}^r \prod_{j=1}^s (3j-2)^2/e^0_j \cdot \prod_{j=m+1}^s (2(r-j)+1)(2(r-j)+2)/e^0_{j-1}$ $(m = \overline{1, r})$, элементы e^1_m находятся рекуррентно из формул (77), причем $\beta^{1,0}_{1,0} = 1$, $\beta^{1,0}_{1,r} = (-1)^r \prod_{j=1}^r (3j-2)^2/e^0_j \ne 0$;

$$Y_2^{[0,3(2r+1)]} = \tilde{c},\ \sum_{m=0}^{r} \alpha^{2,0}_{2,m} Y_1^{[6m+2,6(r-m)]} + \sum_{m=1}^{r} \beta^{2,0}_{2,m} Y_2^{[6m,6(r-m)+3]} = \tilde{c} \quad (k = 6r), \tag{92}$$

где $\alpha^{2,0}_{2,0} = 2r\theta^{2,0}_{2,1} \ne 0$, $\alpha^{2,0}_{2,m} = 3m(2(r-m)+1)^{-1}\theta^{2,0}_{2,m} \ne 0$ $(m = \overline{1, r})$, $\beta^{2,0}_{2,m} = \theta^{2,0}_{2,m} \ne 0$, так как $\theta^{2,0}_{2,m} = (-1)^{m-1} \prod_{j=2}^m 3(j-1)(2(r-j)+3)^{-1} \ne 0$;

$$\sum_{m=0}^{r}\alpha_{1,m}^{0,1}Y_1^{[6m,6(r-m)+3]}+\sum_{m=0}^{r}\beta_{1,m}^{0,1}Y_2^{[6m+4,6(r-m)]}=\tilde{c}\quad(k=6r+1),\tag{93}$$

где $\alpha_{1,m}^{0,1}=3\theta_{1,m}^{0,1}\neq 0$, $\beta_{1,m}^{0,1}=(3m-1)(1-2(r-m)(3m+2)/d_{m+1}^1)\theta_{1,m}^{0,1}$ $(m=\overline{0,r-1})$, $\beta_{1,r}^{0,1}=(3r-1)\theta_{1,r}^{0,1}\neq 0$, а $\theta_{1,m}^{0,1}=(-1)^m\prod_{j=1}^m((3j-4)(3j-1)/d_j^1)\neq 0$, элементы d_m^0 находятся рекуррентно из формул (71), причем $\beta_{1,r-1}^{0,1}=(3r-4)(1-2(3r-1)(9r-6)^{-1})\theta_{1,r-1}^{0,1}\neq 0$;

$$\sum_{m=0}^{r}\alpha_{1,m}^{1,1}Y_1^{[6m+4,6(r-m)]}+\sum_{m=0}^{r}\beta_{1,m}^{1,1}Y_2^{[6m+2,6(r-m)+3)]}=\tilde{c}\quad(k=6r+2),\tag{94}$$

где $\alpha_{1,m}^{1,1}=(3m+1)(2(r-m)+1)^{-1}\theta_{1,m}^{1,1}\neq 0$, $\beta_{1,m}^{1,1}=\theta_{1,m}^{1,1}\neq 0$, так как $\theta_{1,m}^{1,1}=(-1)^m\times\prod_{j=1}^m(3j-2)(2(r-j)+3)\neq 0$;

$$Y_2^{[0,6(r+1)]}=\tilde{c}\quad(k=6r+3).\tag{95}$$

В частности, для $r=1$ резонансные уравнения выглядят следующим образом:

$$Y_1^{[0,6]}-2Y_1^{[6,0]}-Y_2^{[4,3]}=\widetilde{c},\quad 3Y_1^{[4,3]}+2Y_2^{[2,6]}+Y_2^{[8,0]}=\widetilde{c},$$
$$Y_2^{[0,9]}=\widetilde{c},\quad 2Y_1^{[2,6]}+3Y_1^{[8,0]}+Y_2^{[6,3]}=\widetilde{c},\quad 9Y_1^{[0,9]}+6Y_1^{[6,3]}+Y_2^{[4,6]}+4Y_2^{[10,0]}=\widetilde{c},$$
$$Y_1^{[4,6]}-4Y_1^{[10,0]}+3Y_2^{[2,9]}-Y_2^{[8,3]}=\widetilde{c},\quad Y_2^{[0,12]}=\widetilde{c}.$$

Теорема 9. *Для того чтобы система* (67) *была формально эквивалентна исходной системе* (65), *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты КОМ* $Y^{[k]}$ *удовлетворяли:*
1) при $k=6r-2$ *– уравнению* (90)*;*
2) при $k=6r-1$ *– уравнению* (91)*;*
3) при $k=6r$ *– двум уравнениям* (92)*;*
4) при $k=6r+1$ *– уравнению* (93)*;*
5) при $k=6r+2$ *– уравнению* (94)*;*
6) при $k=6r+3$ *– уравнению* (95) *(здесь везде* $r\geq 1$).

Следствие 10. *В КОМ* $Y^{[k]}$ *системы* (67) *для* $\forall r\in\mathbb{N}$:
1) при $k=6r-2$ *все коэффициенты являются резонансными;*
2) при $k=6r-1$ *не удается полностью описать множество резонансных коэффициентов, так как множители* $\alpha_{1,m}^{1,0}$ $(m=\overline{0,r-1})$ *и* $\beta_{1,m}^{1,0}$ $(m=\overline{1,r-1})$ *могут обращаться в ноль, но коэффициенты* $Y_2^{[2,6r]}$ *и* $Y_2^{[6r+2,0]}$ *– резонансные;*
3) при $k=6r$ *все коэффициенты – резонансные, при этом коэффициент* $h_1^{[2,3(2r-1)]}$ *КОМ* $h_1^{[k-3]}$ *также является резонансным;*
4) при $k=6r+1$ *не удается полностью описать множество резонансных коэффициентов, так как множители* $\beta_{1,m}^{0,1}$ $(m=\overline{0,r-2})$ *могут обращаться в ноль, но все коэффициенты* $Y_1^{[6m,6(r-m)+3]}$ $(m=\overline{0,r})$, *а также* $Y_2^{[6r+4,0]}$ *и* $Y_2^{[6r-2,6]}$ *– резонансные;*
5) при $k=6r+2$ *все коэффициенты являются резонансными;*
6) при $k=6r+3$ *коэффициент* $Y_2^{[0,6(r+1)]}$ *– резонансный, а* $Y_1^{[6m+2,6(r-m)]}$ $(m=\overline{0,r})$, $Y_2^{[6m,6(r-m)+3]}$ $(m=\overline{1,r})$ *– нерезонансные.*

Для $\forall\, k\geq 4$ положим $n_k=\{2$ при $k=6r;\ 1-$ при остальных $k\}$.

Следствие 11. *В системе* (67) n_k *различных резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[k]}$ *образуют резонансный* k *-набор* $\mathcal{Y}^k$ *, если это:*
1) $\mathcal{Y}^{6r-2}$: $Y_1^{[6l_1,6(r-l_1)]}$ $(l_1 \in \{0,\dots,r\})$ *или* $Y_2^{[6l_2+4,6(r-l_2)-3]}$ $(l_2 \in \{0,\dots,r-1\})$;
2) $\mathcal{Y}^{6r-1}$: $Y_2^{[2,6r]}$, *или* $Y_2^{[6r+2,0]}$, *или* $Y_1^{[6m+4,6(r-m)-3]}$ $(m \in \{0,\dots,r-1\})$, *если* $\alpha_{1,m}^{1,0} \neq 0$, *или* $Y_2^{[6m+2,6(r-m)]}$ $(m \in \{1,\dots,r-1\})$, *если* $\beta_{1,m}^{1,0} \neq 0$;
3) $\mathcal{Y}^{6r}$: $Y_2^{[0,3(2r+1)]}$ *и* $Y_1^{[6l_4+2,6(r-l_4)]}$ $(l_4 \in \{0,\dots,r\})$ *или* $Y_2^{[6l_5,6(r-l_5)+3]}$ $(l_5 \in \{1,\dots,r\})$;
4) $\mathcal{Y}^{6r+1}$: $Y_1^{[6l_6,6(r-l_6)+3]}$ $(l_6 \in \{0,\dots,r\})$, *или* $Y_2^{[6r-2,6]}$, *или* $Y_2^{[6r+4,0]}$, *или* $Y_2^{[6m+4,6(r-m)]}$ $(m \in \{0,\dots,r-2\})$, *если* $\beta_{1,m}^{0,1} \neq 0$;
5) $\mathcal{Y}^{6r+2}$: $Y_1^{[6l_8+4,6(r-l_8)]}$ $(l_8 \in \{0,\dots,r\})$ *или* $Y_2^{[6l_9+2,6(r-l_9)+3]}$ $(l_9 \in \{0,\dots,r\})$;
6) $\mathcal{Y}^{6r+3}$: $Y_2^{[0,6(r+1)]}$.

Таким образом, система (67) по определению является ОНФ, если для каждого $k \geq 4$ все коэффициенты её КОМ $Y^{[k]}$ равны нулю, кроме n_k штук, принадлежащих любому резонансному k-набору, описанному в следствии 11, и имеющих произвольные значения.

Следствие 12. *Для системы* (67) *неполное семейство резонансных наборов* $\mathcal{Y}^*$ *имеет вид:* $\{\rho_1^r Y_1^{[6l_1,6(r-l_1)]}, \rho_2^r Y_1^{[6l_4+2,6(r-l_4)]}, \ \rho_3^r Y_1^{[6l_6,6(r-l_6)+3]}, \ \rho_4^r Y_1^{[6l_8+4,6(r-l_8)]}, \ Y_2^{[0,3(2r+1)]}, Y_2^{[0,6(r+1)]}, \ Y_2^{[6l_3+2,6(r-l_3)]}, \ (1-\rho_1^r) Y_2^{[6l_2+4,6(r-l_2)-3]}, \ (1-\rho_2^r) Y_2^{[6l_5,6(r-l_5)+3]}, \ (1-\rho_3^r) Y_2^{[6l_7+4,6(r-l_7)]}, (1-\rho_4^r) Y_2^{[6l_9+2,6(r-l_9)+3]}\}$, *где* $l_1, l_4, l_6, l_8, l_9 \in \{0,\dots,r\}$, $l_2 \in \{0,\dots,r-1\}$, $l_3 \in \{0,r\}$, $l_5 \in \{1,\dots,r\}$, $l_7 \in \{r-1,r\}$, $\rho_j^r \in \{0,1\}$ $(j = \overline{1,4})$, $r \geq 1$. *Если множитель при некотором* $Y_i^{[2q_1,3q_2]}$, *входящим в* $\mathcal{Y}^*$, *равен нулю, то этот элемент отсутствует.*

Теорема 10. *Для любой системы* (65), *и для любого выбранного по её невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}^*$ *из следствия 12 существует и единственна почти тождественная замена* (66) *с заранее произвольным образом зафиксированными резонансными коэффициентами, преобразующая систему* (65) *в ОНФ* (67):

$$\begin{aligned}
\dot y_1 = y_1 y_2 + \sum_{r=1}^{\infty} \big(&\rho_1^r Y_1^{[6l_1,6(r-l_1)]} y_1^{3l_1} y_2^{2(r-l_1)} + \rho_2^r Y_1^{[6l_4+2,6(r-l_4)]} y_1^{3l_4+1} y_2^{2(r-l_4)} + \\
&+\rho_3^r Y_1^{[6l_6,6(r-l_6)+3]} y_1^{3l_6} y_2^{2(r-l_6)+1} + \rho_4^r Y_1^{[6l_8+4,6(r-l_8)]} y_1^{3l_8+2} y_2^{2(r-l_8)}\big), \\
\dot y_2 = y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty} \big(&Y_2^{[0,3(2r+1)]} y_2^{2r+1} + Y_2^{[0,6(r+1)]} y_2^{2(r+1)} + Y_2^{[6l_3+2,6(r-l_3)]} y_1^{3l_3+1} y_2^{2(r-l_3)} + \\
&+(1-\rho_1^r) Y_2^{[6l_2+4,6(r-l_2)-3]} y_1^{3l_2+2} y_2^{2(r-l_2)-1} + (1-\rho_2^r) Y_2^{[6l_5,6(r-l_5)+3]} y_1^{3l_5} y_2^{2(r-l_5)+1} + \\
&+(1-\rho_3^r) Y_2^{[6l_7+4,6(r-l_7)]} y_1^{3l_7+2} y_2^{2(r-l_7)} + (1-\rho_4^r) Y_2^{[6l_9+2,6(r-l_9)+3]} y_1^{3l_9+1} y_2^{2(r-l_9)+1}\big).
\end{aligned}$$

Пример 3. *Любая система* (65) *формально эквивалентна ОНФ, не имеющей возмущения в первом уравнении:*

$$\begin{aligned}
\dot y_1 = y_1 y_2, \qquad \dot y_2 = y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty} \big(&Y_2^{[0,3(2r+1)]} y_2^{2r+1} + Y_2^{[0,6(r+1)]} y_2^{2(r+1)} + Y_2^{[6r+2,0]} y_1^{3r+1} + \\
&+Y_2^{[4,6r-3]} y_1^2 y_2^{2r-1} + Y_2^{[6r,3]} y_1^{3r} y_2 + Y_2^{[6r+4,0]} y_1^{3r+2} + Y_2^{[2,6r+3]} y_1 y_2^{2r+1}\big).
\end{aligned}$$

8 ОНФ систем с $\mathbf{R}^{[4]}_{(2,3)}$ в невозмущенной части

8.1 Получение связующей системы

Рассмотрим систему (10) с канонической невозмущенной частью $R^{[4]}_{(2,3)} = (x_2^2, x_1^2 x_2)$:

$$\dot{x}_1 = x_2^2 + \sum_{k=5}^{\infty} X_1^{[k]}(x), \quad \dot{x}_2 = x_1^2 x_2 + \sum_{k=5}^{\infty} X_2^{[k]}(x), \tag{96}$$

где в возмущении КОМ $X_i^{[k]} = \sum_{2q_1+3q_2=k+\gamma_i} X_i^{[2q_1,3q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ $(i = 1, 2)$.

Замечание 3. Вообще говоря, $R^{[4]}_{(2,3)} = \sigma(x_2^2, x_1^2 x_2)$, но при $\sigma = -1$ можно сделать замену времени $t = -\tau$ и получить систему (96), возмущение в которой сменит знак.

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y) \quad (i = 1, 2), \tag{97}$$

где $h_i(y) = \sum_{k=5}^{\infty} h_i^{[k-4]}(y)$, $h_i^{[k-4]} = \sum_{2q_1+3q_2=k+\gamma_i-4} h_i^{[2q_1,3q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$ переводит (96) в систему:

$$\dot{y}_1 = y_2^2 + \sum_{k=5}^{\infty} Y_1^{[k]}(y), \quad \dot{y}_2 = y_1^2 y_2 + \sum_{k=5}^{\infty} Y_2^{[k]}(y), \tag{98}$$

где возмущение $Y_i^{[k]} = \sum_{2q_1+3q_2=k+\gamma_i} Y_i^{[2q_1,3q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$.

Тождества (13) с $\chi = 4$, $\gamma = (2, 3)$ для систем (96), (98) и замены (97) имеют вид:

$$\frac{\partial h_1^{[k-4]}}{\partial y_1} y_2^2 + \frac{\partial h_1^{[k-4]}}{\partial y_2} y_1^2 y_2 - 2y_2 h_2^{[k-4]} = \widetilde{Y}_1^{[k]} - Y_1^{[k]},$$
$$\frac{\partial h_2^{[k-4]}}{\partial y_1} y_2^2 + \frac{\partial h_2^{[k-4]}}{\partial y_2} y_1^2 y_2 - 2y_1 y_2 h_1^{[k-4]} - y_1^2 h_2^{[k-4]} = \widetilde{Y}_2^{[k]} - Y_2^{[k]},$$

где $\widetilde{Y}_i^{[k]}$ $(i = 1, 2)$ находится по формуле, указанной в (13).

Приравнивая коэффициенты при $y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, получаем линейную связующую систему:

$$\begin{aligned}
&(q_1+1)h_1^{[2(q_1+1),3(q_2-2)]} + q_2 h_1^{[2(q_1-2),3q_2]} - 2h_2^{[2q_1,3(q_2-1)]} = \widehat{Y}_1^{[2q_1,3q_2]} && (2q_1 + 3q_2 = k+2),\\
&(q_1+1)h_2^{[2(q_1+1),3(q_2-2)]} + (q_2-1)h_2^{[2(q_1-2),3q_2]} - 2h_1^{[2(q_1-1),3(q_2-1)]} = \widehat{Y}_2^{[2q_1,3q_2]} && (2q_1 + 3q_2 = k+3),
\end{aligned} \tag{99}$$

в которой $\widehat{Y}_i^{[2q_1,3q_2]} = \widetilde{Y}_i^{[2q_1,3q_2]} - Y_i^{[2q_1,3q_2]}$.

Поскольку $k \geq 5$, а $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, введем следующее разложение:

$$k = 6r + u + 3v - 1 \quad (r \in \mathbb{N},\ u = 0, 1, 2,\ v = 0, 1), \qquad q_1 = 3l + s \quad (l \in \mathbb{Z}_+,\ s = 0, 1, 2).$$

Тогда $q_2 = (k + \gamma_i - 2q_1)/3 = 2(r - l) + v + (u - 2s + \gamma_i - 1)/3 \in \mathbb{Z}_+$ в следующих случаях:

0) $u = 0$: $s = 2$ и $l = \overline{0, r+v-1}$ $(i = 1)$, $s = 1$ и $l = \overline{0, r}$ $(i = 2)$;

1) $u = 1$: $s = 1$ и $l = \overline{0, r}$ $(i = 1)$, $s = 0$ и $l = \overline{0, r+v}$ $(i = 2)$;

2) $u = 2$: $s = 0$ и $l = \overline{0, r+v}$ $(i = 1)$, $s = 2$ и $l = \overline{0, r}$ $(i = 2)$.

8.2 Случай $\mathbf{r=1}$ $(\mathbf{k}=\overline{\mathbf{5,10}})$

$\mathbf{1^0}$. $k=5$ $(u=0,\ v=0)$. Система (99) имеет вид: $h_1^{[0,3]}-2h_2^{[4,0]}=\widehat{Y}_1^{[4,3]}$, $-2h_1^{[0,3]}+2h_2^{[4,0]}=\widehat{Y}_2^{[2,6]}$, $-h_2^{[4,0]}=\widehat{Y}_2^{[8,0]}$ и дает резонансную связь:

$$2\widehat{Y}_1^{[4,3]}+\widehat{Y}_2^{[2,6]}-2\widehat{Y}_2^{[8,0]}=0. \tag{100}$$

$\mathbf{2^0}$. $k=6$ $(u=1,v=0)$. Система (99) имеет вид: $2h_1^{[4,0]}-2h_2^{[2,3]}=\widehat{Y}_1^{[2,6]}$, $0=\widehat{Y}_1^{[8,0]}$, $h_2^{[2,3]}=\widehat{Y}_2^{[0,9]}$, $-2h_1^{[4,0]}=\widehat{Y}_2^{[6,3]}$ и дает две резонансных связи:

$$\widehat{Y}_1^{[2,6]}+2\widehat{Y}_2^{[0,9]}+\widehat{Y}_2^{[6,3]}=0, \quad \widehat{Y}_1^{[8,0]}=0. \tag{101}$$

$\mathbf{3^0}$. $k=7$ $(u=2,\ v=0)$. Система (99) имеет вид: $h_1^{[2,3]}-2h_2^{[0,6]}=\widehat{Y}_1^{[0,9]}$, $h_1^{[2,3]}-2h_2^{[6,0]}=\widehat{Y}_1^{[6,3]}$, $-2h_1^{[2,3]}+h_2^{[0,6]}+3h_2^{[6,0]}=\widehat{Y}_2^{[4,6]}$, $-h_2^{[6,0]}=\widehat{Y}_2^{[10,0]}$ и дает резонансную связь:

$$\widehat{Y}_1^{[0,9]}+3\widehat{Y}_1^{[6,3]}+2\widehat{Y}_2^{[4,6]}=0. \tag{102}$$

$\mathbf{4^0}$. $k=8$ $(u=0,\ v=1)$. Система (99) имеет вид: $2h_1^{[0,6]}+3h_1^{[6,0]}-2h_2^{[4,3]}=\widehat{Y}_1^{[4,6]}$, $0=\widehat{Y}_1^{[10,0]}$, $-2h_1^{[0,6]}+2h_2^{[4,3]}=\widehat{Y}_2^{[2,9]}$, $-2h_1^{[6,0]}=\widehat{Y}_2^{[8,3]}$ и дает две резонансных связи:

$$2\widehat{Y}_1^{[4,6]}+2\widehat{Y}_2^{[2,9]}+3\widehat{Y}_2^{[8,3]}=0, \quad \widehat{Y}_1^{[10,0]}=0 \quad (h_1^{[4,3]}\ -\ \forall). \tag{103}$$

$\mathbf{5^0}$. $k=9$ $(u=1,\ v=1)$. Система (99) имеет вид: $2h_1^{[4,3]}-2h_2^{[2,6]}=\widehat{Y}_1^{[2,9]}$, $h_1^{[4,3]}-2h_2^{[8,0]}=\widehat{Y}_1^{[8,3]}$, $h_2^{[2,6]}=\widehat{Y}_2^{[0,12]}$, $-2h_1^{[4,3]}+h_2^{[2,6]}+4h_2^{[8,0]}=\widehat{Y}_2^{[6,6]}$, $-h_2^{[8,0]}=\widehat{Y}_2^{[12,0]}$ и дает две резонансные связи:

$$2\widehat{Y}_1^{[8,3]}-\widehat{Y}_2^{[0,12]}+\widehat{Y}_2^{[6,6]}=0, \quad \widehat{Y}_1^{[2,9]}+2\widehat{Y}_1^{[8,3]}+2\widehat{Y}_2^{[6,6]}+4\widehat{Y}_2^{[12,0]}=0. \tag{104}$$

$\mathbf{6^0}$. $k=10$ $(u=2,\ v=1)$. Система (99) имеет вид: $h_1^{[2,6]}-2h_2^{[0,9]}=\widehat{Y}_1^{[0,12]}$, $2h_1^{[2,6]}-2h_2^{[6,3]}+4h_1^{[8,0]}=\widehat{Y}_1^{[6,6]}$, $0=\widehat{Y}_1^{[12,0]}$, $-2h_1^{[2,6]}+2h_2^{[0,9]}+3h_2^{[6,3]}=\widehat{Y}_2^{[4,9]}$, $-2h_1^{[8,0]}=\widehat{Y}_2^{[10,3]}$. Из третьего уравнения системы получаем единственную резонансную связь:

$$\widehat{Y}_1^{[12,0]}=0. \tag{105}$$

8.3 Случай $\mathbf{r\geq 2}$ $(\mathbf{k\geq 11})$

8.3.1 u=0 $(\mathbf{k=6r+3v-1})$

Перепишем (99), используя введенные в разделе 8.1 разложения для q_1 и q_2 при $u=0$:

$$\begin{gathered}
(3l+3)h_1^{[6(l+1),6(r-l-1)+3v-3]}+(2(r-l)+v-1)h_1^{[6l,6(r-l)+3v-3]}-2h_2^{[6l+4,6(r-l-1)+3v]}= \\
=\widehat{Y}_1^{[6l+4,6(r-l)+3v-3]} \quad (l=\overline{0,r+v-1}), \\
(3l+2)h_2^{[6l+4,6(r-l-1)+3v]}+(2(r-l)+v-1)h_2^{[6l-2,6(r-l)+3v]}-2h_1^{[6l,6(r-l)+3v-3]}= \\
=\widehat{Y}_2^{[6l+2,6(r-l)+3v]} \quad (l=\overline{0,r})
\end{gathered} \tag{99^0}$$

или

$$\begin{gathered}
(3l+3)h_{1,l+1}^v+(2(r-l)+v-1)h_{1,l}^v-2h_{2,l+1}^v=Y_{1,l}^v \quad (l=\overline{0,r+v-1}), \\
(3l+2)h_{2,l+1}^v+(2(r-l)+v-1)h_{2,l}^v-2h_{1,l}^v=Y_{2,l}^v \quad (l=\overline{0,r}),
\end{gathered} \tag{106}$$

где $h_{1,l}^v = h_1^{[6l,6(r-l)+3v-3]}$, $Y_{1,l}^v = \widehat{Y}_1^{[6l+4,6(r-l)+3v-3]}$ $(l = \overline{0, r+v-1})$, $h_{2,l}^v = h_2^{[6l-2,6(r-l)+3v]}$ $(l = \overline{1,r})$, $Y_{2,l}^v = \widehat{Y}_2^{[6l+2,6(r-l)+3v]}$ $(l = \overline{0,r})$; $Y_{1,-1}^0, Y_{1,r}^0 = 0$.

$\mathbf{0^0}$. $\mathbf{v = 0}$ $(\mathbf{k = 6r - 1})$. Подставляя $h_{2,l}^0$ и $h_{2,l+1}^0$ из (106_1) в (106_2), получаем систему:

$$a_l^0 h_{1,l-1}^0 + b_l^0 h_{1,l}^0 + c_l^0 h_{1,l+1}^0 = Y_{0,l}^0 \quad (l = \overline{0,r}), \tag{107}$$

в которой $a_l^0 = (2(r-l)-1)(2(r-l)+1)$ $(l = \overline{1,r})$, $b_l^0 = (6l+2)(2(r-l)-1)-4$ $(l = \overline{0, r-1})$, $c_l^0 = (3l+2)(3l+3)$ $(l = \overline{0, r-2})$, $Y_{0,l}^0 = (2(r-l)-1)Y_{1,l-1}^0 + (3l+2)Y_{1,l}^0 + 2Y_{2,l}^0$.

Для решения системы (107) будем методом Гаусса аннулировать элементы $a_1^0, a_2^0, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b_0^0 & c_0^0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^0 & b_1^0 & c_1^0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{r-2}^0 & b_{r-2}^0 & c_{r-2}^0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{r-1}^0 & b_{r-1}^0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a_r^0 \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая e_l^0 вместо b_l^0 и $\overline{Y}_{0,l}^0$ вместо $Y_{0,l}^0$ $(l \le r)$, пока $e_{l-1}^0 \ne 0$ $(l \ge 1)$, по рекуррентным формулам:

$$e_0^0 = b_0^0,\ \overline{Y}_{0,0}^0 = Y_{0,0}^0; \quad e_l^0 = b_l^0 - \frac{a_l^0\, c_{l-1}^0}{e_{l-1}^0},\ \overline{Y}_{0,l}^0 = Y_{0,l}^0 - \frac{\overline{Y}_{0,l-1}^0 a_l^0}{e_{l-1}^0} \quad (l = 1, 2, \ldots). \tag{108}$$

Лемма 11. *Для элементов* e_l^0 *из* (108) *верна следующая прямая формула:*

$$e_l^0 = (3l+2)(2(r-l)-3) \ne 0 \quad (l = \overline{0, r-1}). \tag{109}$$

Доказательство. В (108) $e_0^0 = 2(2r-3)$, что совпадает с e_0^0 из (109) и дает базу индукции.

Пусть для $\forall\, l = \overline{1, r-1}$ верна формула (109). Тогда согласно (108) имеем $e_{l+1}^0 = b_{l+1}^0 - a_{l+1}^0 c_l^0 (e_l^0)^{-1} = (6l+8)(2(r-l)-3) - 4 - 3(2(r-l)-1)(l+1) = (3l+5)(2(r-l)-5)$. $\square$

В результате последнее уравнение $(l = r)$ системы, полученной из (107), принимает вид: $0 \cdot h_{1,r-1}^0 = \overline{Y}_{0,r}^0$, где $\overline{Y}_{0,r}^0 = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{0,0} Y_{0,m}^0$ с $\theta_{1,m}^{0,0} = (-1)^{r-m} \prod_{j=m+1}^r (a_j^0 / e_{j-1}^0)$. Учитывая (107) и (109), получаем:

$$\theta_{1,m}^{0,0} = (-1)^{r-m} \prod_{j=m+1}^{r} \frac{2(r-j)+1}{3j-1} \ne 0 \quad (m = \overline{0,r}).$$

В обозначениях (106) имеем: $\sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{0,0} Y_{0,m}^0 = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{0,0}((2(r-m)-1)Y_{1,m-1}^0 + (3m+2)Y_{1,m}^0 + 2Y_{2,m}^0) = \sum_{m=0}^{r-1}((3m+2)\theta_{1,m}^{0,0} + (2(r-m)-3)\theta_{1,m+1}^{0,0})Y_{1,m}^0 + 2\sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{0,0} Y_{2,m}^0$, причем $(3m+2)\theta_{1,m}^{0,0} + (2(r-m)-3)\theta_{1,m+1}^{0,0} = -2\theta_{1,m+1}^{0,0}$.

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,r}^0 = 0$ дает для (99^0) с $v = 0$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha_{1,m}^{0,0} \widehat{Y}_1^{[6m+4,6(r-m)-3]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{1,m}^{0,0} \widehat{Y}_2^{[6m+2,6(r-m)]} = 0 \quad (\alpha_{1,m}^{0,0} = -2\theta_{1,m+1}^{0,0},\ \beta_{1,m}^{0,0} = 2\theta_{1,m}^{0,0}). \tag{110}$$

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v = 1}$ $(\mathbf{k = 6r + 2})$. При $l = r$ из (106_1) сразу получаем резонансную связь:

$$\widehat{Y}_1^{[6r+4,0]} = 0. \tag{111}$$

Подставляя теперь $h_{1,l}^1$ и $h_{1,l+1}^1$ из подсистемы (106_2) в (106_1), получаем систему:

$$a_l^1 h_{2,l}^1 + b_l^1 h_{2,l+1}^1 + c_l^1 h_{2,l+2}^1 = Y_{0,l}^1 \quad (l = \overline{0, r-1}), \tag{112}$$

в которой $a_l^1 = 4(r-l)^2$ $(l = \overline{1, r-1})$, $b_l^1 = (6l+5)(2(r-l)-1) - 5$ $(l = \overline{0, r-1})$, $c_l^1 = (3l+3)(3l+5)$ $(l = \overline{0, r-2})$, $Y_{0,l}^1 = 2Y_{1,l}^1 + 2(r-l)Y_{2,l}^1 + 3(l+1)Y_{2,l+1}^1$.

Для решения системы (112) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-2}^1, c_{r-3}^1, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b_0^1 & c_0^1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^1 & b_1^1 & c_1^1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{r-2}^1 & b_{r-2}^1 & c_{r-2}^1 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{r-1}^1 & b_{r-1}^1 \end{pmatrix}_{r\times r}$, получая d_l^1 вместо b_l^1 и $\overline{Y}_{0,l}^1$ вместо $Y_{0,l}^1$ $(l \le r)$, пока $d_{l+1}^1 \ne 0$ $(l \ge 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d_{r-1}^1 = b_{r-1}^1,\ \overline{Y}_{0,r-1}^1 = Y_{0,r-1}^1;\ d_l^1 = b_l^1 - \frac{a_{l+1}^1\, c_l^1}{d_{l+1}^1},\ \overline{Y}_{0,l}^1 = Y_{0,l}^1 - \frac{\overline{Y}_{0,l+1}^1 c_l^1}{d_{l+1}^1}\,(l = r-2, r-3, \ldots). \tag{113}$$

Лемма 12. *Для элементов* d_l^1 *из* (113) *верна следующая прямая формула:*

$$d_l^1 = 6l(r-l) \quad (l = \overline{r-1, 0}). \tag{114}$$

Доказательство. В (113) $d_{r-1}^1 = 6(r-1)$, что совпадает с d_{r-1}^1 из (114) и дает базу. Пусть для $\forall\, l = \overline{r-2, 0}$ верна формула (114). Тогда согласно (113) имеем $d_{l-1}^1 = b_{l-1}^1 - a_l^1 c_{l-1}^1 (d_l^1)^{-1} = (6l-1)(2(r-l)+1) - 5 - 2(r-l)(3l+2) = 6(l-1)(r-l+1)$. $\square$

Поскольку в (114) только $d_0^1 = 0$, то первое уравнение $(l = 0)$ системы, полученной из (112), принимает вид: $0 \cdot h_{2,1}^1 + 0 \cdot h_{2,2}^1 = \overline{Y}_{0,0}^1$, где $\overline{Y}_{0,0}^1 = \sum_{m=0}^{r-1} \theta_{2,m}^{0,1} Y_{0,m}^1$ с $\theta_{2,m}^{0,1} = (-1)^m \prod_{j=1}^m (c_{j-1}^1 / d_j^1)$. Учитывая (112) и (114), получаем:

$$\theta_{2,m}^{0,1} = (-1)^m \prod_{j=1}^m \frac{3j+2}{2(r-j)} \ne 0 \quad (m = \overline{0, r-1}).$$

В обозначениях (106) имеем: $\sum_{m=0}^{r-1} \theta_{2,m}^{0,1} Y_{0,m}^1 = \sum_{m=0}^{r-1} \theta_{2,m}^{0,1} (2Y_{1,m}^1 + 2(r-m)Y_{2,m}^1 + 3(m+1)Y_{2,m+1}^1) = 2\sum_{m=0}^{r-1} \theta_{2,m}^{0,1} Y_{1,m}^1 + 2rY_{2,0}^1 + \sum_{m=1}^{r-1}(2(r-m)\theta_{2,m}^{0,1} + 3m\theta_{2,m-1}^{0,1})Y_{2,m}^1 + 3r\theta_{2,r-1}^{0,1} Y_{2,r}^1$, причем $2(r-m)\theta_{2,m}^{0,1} + 3m\theta_{2,m-1}^{0,1} = -2\theta_{2,m-1}^{0,1}$.

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,0}^1 = 0$ дает для (99^0) с $v = 1$ вторую резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha_{2,m}^{0,1} \widehat{Y}_1^{[6m+4,6(r-m)]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{2,m}^{0,1} \widehat{Y}_2^{[6m+2,6(r-m)+3]} = 0 \qquad (h_2^{[4,6r-3]} - \forall), \tag{115}$$

где $\alpha_{2,m}^{0,1} = 2\theta_{2,m}^{0,1}$, $\beta_{2,0}^{0,1} = 2r$, $\beta_{2,m}^{0,1} = -2\theta_{2,m-1}^{0,1}$ $(m = \overline{1, r-1},)$ $\beta_{2,r}^{0,1} = 3r\theta_{2,r-1}^{0,1}$.

8.3.2 u=1 $(\mathbf{k = 6r + 3v})$

Перепишем (99), используя введенные в разделе 8.1 разложения для q_1 и q_2 при $u = 1$:

$$\begin{aligned}
&(3l+2)h_1^{[6l+4,6(r-l-1)+3v]} + (2(r-l)+v)h_1^{[6l-2,6(r-l)+3v]} - 2h_2^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]} = \\
&\qquad\qquad = \widehat{Y}_1^{[6l+2,6(r-l)+3v]} \quad (l = \overline{0,r}), \\
&(3l+1)h_2^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]} + (2(r-l)+v)h_2^{[6l-4,6(r-l)+3v+3]} - 2h_1^{[6l-2,6(r-l)+3v]} = \\
&\qquad\qquad = \widehat{Y}_2^{[6l,6(r-l)+3v+3]} \quad (l = \overline{0,r+v})
\end{aligned} \tag{99^1}$$

или

$$\begin{aligned}
(3l+2)h_{1,l}^v + (2(r-l)+v)h_{1,l-1}^v - 2h_{2,l}^v = Y_{1,l}^v \quad (l = \overline{0,r}), \\
(3l+1)h_{2,l}^v + (2(r-l)+v)h_{2,l-1}^v - 2h_{1,l-1}^v = Y_{2,l}^v \quad (l = \overline{0,r+v}),
\end{aligned} \tag{116}$$

где $h_{1,l}^v = h_1^{[6l+4,6(r-l)+3v-6]}$ $(l = \overline{0,r-1})$, $Y_{1,l}^v = \widehat{Y}_1^{[6l+2,6(r-l)+3v]}$ $(l = \overline{0,r})$, $h_{2,l}^v = h_2^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]}$ $(l = \overline{0,r+v-1})$, $Y_{2,l}^v = \widehat{Y}_2^{[6l,6(r-l)+3v+3]}$ $(l = \overline{0,r+v})$; $Y_{1,-1}^v, Y_{1,r+1}^1 = 0$.

$\mathbf{0^0}$. $\mathbf{v = 0}$ $(\mathbf{k = 6r})$. При $l = r$ из (116_1) сразу получаем резонансную связь:

$$\widehat{Y}_1^{[6r+2,0]} = 0. \tag{117}$$

Подставляя теперь $h_{2,l}^0$ и $h_{2,l-1}^0$ из подсистемы (116_1) в (116_2), получаем систему:

$$a_l^0 h_{1,l-2}^0 + b_l^0 h_{1,l-1}^0 + c_l^0 h_{1,l}^0 = Y_{0,l}^0 \quad (l = \overline{0,r}), \tag{118}$$

в которой $a_l^0 = 4(r-l)(r-l+1)$ $(l = \overline{2,r})$, $b_l^0 = 12l(r-l) - 4$ $(l = \overline{1,r})$, $c_l^0 = (3l+1)(3l+2)$ $(l = \overline{0,r-1})$, $Y_{0,l}^0 = 2(r-l)Y_{1,l-1}^0 + (3l+1)Y_{1,l}^0 + 2Y_{2,l}^0$ $(Y_{1,r}^0 = 0)$.

Для решения (118) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-1}^0, c_{r-2}^0, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} c_0^0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1^0 & c_1^0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2^0 & b_2^0 & c_2^0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{r-1}^0 & b_{r-1}^0 & c_{r-1}^0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_r^0 & b_r^0 \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая d_l^0 вместо b_l^0 и $\overline{Y}_{0,l}^0$ вместо $Y_{0,l}^0$ $(l \le r)$, пока $d_{l+1}^0 \ne 0$ $(l \ge 1)$, по рекуррентным формулам:

$$d_r^0 = b_r^0,\ \overline{Y}_{0,r}^0 = Y_{0,r}^0; \quad d_l^0 = b_l^0 - \frac{a_{l+1}^0 c_l^0}{d_{l+1}^0},\ \overline{Y}_{0,l}^0 = Y_{0,l}^0 - \frac{\overline{Y}_{0,l+1}^0 c_l^0}{d_{l+1}^0} \quad (l = r-1, r-2, \ldots). \tag{119}$$

Лемма 13. *Для элементов* d_l^0 *из* (119) *верна следующая прямая формула:*

$$d_r^0 = -4, \quad d_l^0 = 2(3l-1)(r-l+1) \ne 0 \quad (l = \overline{r-1,1}). \tag{120}$$

Доказательство. В (119) $d_r^0 = -4$, что совпадает с d_r^0 из (120) и дает базу индукции. Пусть для $\forall\, l = \overline{r-1,1}$ верна формула (120). Тогда согласно (119) имеем $d_{l-1}^0 = b_{l-1}^0 - a_l^0 c_{l-1}^0 (d_l^0)^{-1} = 12(r-l+1) - 4 - 2(r-l)(3l-2) = 2(3l-4)(r-l+2)$. □

Первое уравнение $(l=0)$ системы, полученной из (118), принимает вид: $0\cdot h_{1,0}^0=\overline{Y}_{0,0}^0$, где $\overline{Y}_{0,0}^0=\sum_{m=0}^r\theta_{2,m}^{1,0}Y_{0,m}^0$ с $\theta_{2,m}^{1,0}=(-1)^m\prod_{j=1}^m(c_{j-1}^0/d_j^0)$. С учетом (118) и (120) получаем:

$$\theta_{2,m}^{1,0}=(-1)^m\prod_{j=1}^m\frac{3j-2}{2(r-j+1)}\neq 0\quad (m=\overline{0,r-1}),\quad \theta_{2,r}^{1,0}=(1/4)(3r-2)(3r-1)\theta_{2,r-1}^{1,0}\neq 0.$$

В обозначениях (116) имеем: $\sum_{m=0}^r\theta_{2,m}^{1,0}Y_{0,m}^0=\sum_{m=0}^r\theta_{2,m}^{1,0}(2(r-m)Y_{1,m-1}^0+(3m+1)Y_{1,m}^0+2Y_{2,m}^0)=\sum_{m=0}^{r-1}((3m+1)\theta_{2,m}^{1,0}+2(r-m-1)\theta_{2,m+1}^{1,0})Y_{1,m}^0+2\sum_{m=0}^r\theta_{2,m}^{1,0}Y_{2,m}^0$, причем $(3m+1)\theta_{2,m}^{1,0}+2(r-m-1)\theta_{2,m+1}^{1,0}=(3m+1)(r-m)^{-1}\theta_{2,m}^{1,0}$.

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,0}^0=0$ дает для (99^1) с $v=0$ вторую резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r-1}\alpha_{2,m}^{1,0}\widehat{Y}_1^{[6m+2,6(r-m)]}+\sum_{m=0}^{r}\beta_{2,m}^{1,0}\widehat{Y}_2^{[6m,6(r-m)+3]}=0, \tag{121}$$

где $\alpha_{2,m}^{1,0}=(3m+1)(r-m)^{-1}\theta_{2,m}^{1,0}$, $\beta_{2,m}^{1,0}=2\theta_{2,m}^{1,0}$.

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v=1}$ $(\mathbf{k=6r+3})$. Подставляя $h_{2,l}^1$, $h_{2,l-1}^1$ из (116_1) в (116_2), получаем систему:

$$a_l^1h_{1,l-2}^1+b_l^1h_{1,l-1}^1+c_l^1h_{1,l}^1=Y_{0,l}^1\quad (l=\overline{0,r+1}), \tag{122}$$

в которой $a_l^1=(2(r-l)+1)(2(r-l)+3)$ $(l=\overline{2,r+1})$, $b_l^1=6l(2(r-l)+1)-4$ $(l=\overline{1,r})$, $c_l^1=(3l+1)(3l+2)$ $(l=\overline{0,r-1})$, $Y_{0,l}^1=(2(r-l)+1)Y_{1,l-1}^1+(3l+1)Y_{1,l}^1+2Y_{2,l}^1$.

Для решения системы (122) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-1}^1,c_{r-2}^1,\ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} c_0^1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ b_1^1 & c_1^1 & 0 & \ldots & 0\\ a_2^1 & b_2^1 & c_2^1 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & a_{r-1}^1 & b_{r-1}^1 & c_{r-1}^1\\ 0 & \ldots & 0 & a_r^1 & b_r^1\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{r+1}^1\end{pmatrix}_{(r+2)\times r}$, получая d_l^1 вместо b_l^1 и $\overline{Y}_{0,l}^1$ вместо $Y_{0,l}^1$ $(l\le r+1)$, пока $d_{l+1}^1\neq 0$ $(l\ge 1)$, по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} &d_r^1=b_r^1=6r-4>0,\ \ \overline{Y}_{0,r+1}^1=Y_{0,r+1}^1,\ \ \overline{Y}_{0,r}^1=Y_{0,r}^1;\\ &d_l^1=b_l^1-a_{l+1}^1c_l^1/d_{l+1}^1,\ \ \overline{Y}_{0,l}^1=Y_{0,l}^1-\overline{Y}_{0,l+1}^1c_l^1/d_{l+1}^1\quad (l=r-1,r-2,\ldots).\end{aligned} \tag{123}$$

Лемма 14. *В матрице системы* (122) *диагональные элементы* $d_r^1,\ldots,d_1^1$, *определяемые по формулам* (123), *положительны.*

Доказательство. Пусть $f_l=(3l-1)(2(r-l)+3)$, тогда $f_l>0$ для $\forall\, l=\overline{1,r-1}$.

Покажем методом математической индукции, что $d_l^1>f_l$ при $l=\overline{r-1,1}$.

Согласно (123) $d_{r-1}^1=18r-22>15r-20=f_{r-1}$, что является базой индукции.

Пусть $d_{l+1}^1>f_{l+1}=(3l+2)(2(r-l)+1)$. Тогда $d_l^1=b_l^1-c_l^1a_{l+1}^1/d_{l+1}^1>b_l^1-c_l^1a_{l+1}^1/f_{l+1}$, так как $c_l^1a_{l+1}^1=(3l+1)(3l+2)(2(r-l)-1)(2(r-l)+1)>0$ при $l=\overline{r-1,1}$. Но $b_l^1-c_l^1a_{l+1}^1/f_{l+1}=6(2(r-l)+1)l-4-(3l+1)(2(r-l)-1)=(3l-1)(2(r-l)+3)=f_l$. Поэтому $d_l^1>f_l$, т.е. $d_l^1>0$ для $\forall\, l=\overline{1,r}$. □

Следовательно можно полностью аннулировать верхнюю диагональ $c^1_{r-1}, \ldots, c^1_0$ матрицы системы (122), после чего первое уравнение $(l=0)$ системы, полученной из (122), принимает вид: $0 \cdot h^1_{1,0} = \overline{Y}^1_{0,0}$, где $\overline{Y}^1_{0,0} = \sum_{m=0}^r \theta^{1,1}_{1,m} Y^1_{0,m}$ с $\theta^{1,1}_{1,m} = (-1)^m \prod_{j=1}^m (c^1_{j-1}/d^1_j) \neq 0$, так как $c^1_l \neq 0$ для $\forall\, l = \overline{0, r-1}$.

В обозначениях (116): $\sum_{m=0}^r \theta^{1,1}_{1,m} Y^1_{0,m} = \sum_{m=0}^r \theta^{1,1}_{1,m}((2(r-m)+1)Y^1_{1,m-1} + (3m+1)Y^1_{1,m} + 2Y^1_{2,m}) = \sum_{m=0}^{r-1}((3m+1)\theta^{1,1}_{1,m} + (2(r-m)-1)\theta^{1,1}_{1,m+1})Y^1_{1,m} + (3r+1)\theta^{1,1}_{1,r}Y^1_{1,r} + 2\sum_{m=0}^r \theta^{1,1}_{1,m}Y^1_{2,m}$, причем $(3m+1)\theta^{1,1}_{1,m} + (2(r-m)-1)\theta^{1,1}_{1,m+1} = (3m+1)(1-(3m+2)(2(r-m)-1)/d^1_{m+1})\theta^{1,1}_{1,m}$.

В результате уравнение $\overline{Y}^1_{0,0} = 0$ дает для (99^1) с $v=1$ первую резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^r \alpha^{1,1}_{1,m} \widehat{Y}_1^{[6m+2,6(r-m)+3]} + \sum_{m=0}^r \beta^{1,1}_{1,m} \widehat{Y}_2^{[6m,6(r-m+1)]} = 0, \tag{124}$$

где $\alpha^{1,1}_{1,m} = (3m+1)(1-(3m+2)(2(r-m)-1)/d^1_{m+1})\theta^{1,1}_{1,m}$ $(m = \overline{0, r-1})$, $\alpha^{1,1}_{1,r} = (3r+1)\theta^{1,1}_{1,r} \neq 0$, $\beta^{1,1}_{1,m} = 2\theta^{1,1}_{1,m} \neq 0$, а $\theta^{1,1}_{1,m} = (-1)^m \prod_{j=1}^m ((3j-2)(3j-1)/d^1_j) \neq 0$ по лемме 14.

Коэффициент $\alpha^{1,1}_{1,m} \neq 0$, поскольку $(3m+1)(1-(3m+2)(2(r-m)-1)/d^1_{m+1})\theta^{1,1}_{1,m} \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $1-(3m+2)(2(r-m)-1)/d^1_{m+1} \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $d^1_{m+1} \neq (3m+2)(2(r-m)-1)$, что верно при $l = \overline{0, r-2}$, поскольку в лемме 14: $d^1_{m+1} > (3m+2)(2(r-m)+1) > (3m+2)(2(r-m)-1)$. А так как $d^1_r = 6r-4$, то $\alpha^{1,1}_{1,r-1} = (3/2)(r-1)\theta^{1,1}_{1,r-1} \neq 0$ при $r \geq 2$.

Теперь аннулируем элементы $a^1_2, \ldots, a^1_{r+1}$, диагональные элементы $d^1_1, \ldots, d^1_r$ при этом не изменятся, а вместо $\overline{Y}^1_{0,l}$ получим $\breve{Y}^1_{0,l}$ по рекуррентным формулам:

$$\breve{Y}^1_{0,1} = \overline{Y}^1_{0,1}, \quad \breve{Y}^1_{0,l} = \overline{Y}^1_{0,l} - \frac{a^1_l \breve{Y}^1_{0,l-1}}{d^1_{l-1}} \quad (l = \overline{2, r+1}).$$

Тогда последнее уравнение $(l = r+1)$ системы, полученной из (122), принимает вид: $0 \cdot h^1_{1,r-1} = \breve{Y}^1_{0,r+1}$, где $\breve{Y}^1_{0,r+1} = \sum_{m=1}^{r+1} \theta^{1,1}_m \overline{Y}^1_{0,m}$ с $\theta^{1,1}_m = (-1)^{r+1-m} \prod_{j=m+1}^{r+1} a^1_j/d^1_{j-1} \neq 0$, так как $a^1_l \neq 0$ для $\forall\, l = \overline{2, r+1}$.

Согласно формуле (123) имеем: $\sum_{m=1}^{r+1} \theta^{1,1}_m \overline{Y}^1_{0,m} = \theta^{1,1}_1 (Y^1_{0,1} - c^1_1 Y^1_{0,2}/d^1_2 + c^1_1 c^1_2 Y^1_{0,3}/(d^1_2 d^1_3) - \ldots + (-1)^{r-1} Y^1_{0,r} \prod_{j=1}^{r-1} c^1_j/d^1_{j+1}) + \ldots + \theta^{1,1}_{r-1}(Y^1_{0,r-1} - c^1_{r-1}Y^1_{0,r}/d^1_r) + \theta^{1,1}_r Y^1_{0,r} + \theta^{1,1}_{r+1} Y^1_{0,r+1} = \sum_{m=1}^{r+1} \theta^{1,1}_{2,m} Y^1_{0,m}$, где $\theta^{1,1}_{2,m} = \sum_{s=1}^m (-1)^{m-s} \theta^{1,1}_s \cdot \prod_{j=s}^{m-1} c^1_j/d^1_{j+1}$ $(m = \overline{1, r})$, $\theta^{1,1}_{2,r+1} = \theta^{1,1}_{r+1} = 1$.

В обозначениях (116): $\sum_{m=1}^{r+1} \theta^{1,1}_{2,m} Y^1_{0,m} = \sum_{m=1}^{r+1} \theta^{1,1}_{2,m}((2(r-m)+1)Y^1_{1,m-1} + (3m+1)Y^1_{1,m} + 2Y^1_{2,m}) = (2r-1)\theta^{1,1}_{2,1}Y^1_{1,0} + \sum_{m=1}^r((3m+1)\theta^{1,1}_{2,m} + (2(r-m)-1)\theta^{1,1}_{2,m+1})Y^1_{1,m} + 2\sum_{m=1}^{r+1}\theta^{1,1}_{2,m}Y^1_{2,m}$.

В результате уравнение $\breve{Y}^1_{0,r+1} = 0$ дает для (99^1) с $v=1$ вторую резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^r \alpha^{1,1}_{2,m} \widehat{Y}_1^{[6m+2,6(r-m)+3]} + \sum_{m=1}^{r+1} \beta^{1,1}_{2,m} \widehat{Y}_2^{[6m,6(r-m+1)]} = 0, \tag{125}$$

в которой $\alpha^{1,1}_{2,0} = (2r-1)\theta^{1,1}_{2,1}$, $\alpha^{1,1}_{2,m} = (3m+1)\theta^{1,1}_{2,m} + (2(r-m)-1)\theta^{1,1}_{2,m+1}$ $(m = \overline{1, r})$, $\beta^{1,1}_{2,m} = 2\theta^{1,1}_{2,m}$, а множители $\theta^{1,1}_{2,m} = (-1)^{m+r+1} \sum_{s=1}^m \prod_{j=s+1}^{r+1} (2(r-j)+1)(2(r-j)+3)/d^1_{j-1} \times \prod_{j=s}^{m-1}(3j+1)(3j+2)/d^1_{j+1} \neq 0$ $(m = \overline{1, r})$ по лемме 14, $\theta^{1,1}_{2,r+1} = 1$.

8.3.3 u=2 $(\mathbf{k = 6r + 3v + 1})$

Перепишем (99), используя введенные в разделе 8.1 разложения для q_1 и q_2 при $u = 2$:

$$\begin{aligned}
&(3l+1)h_1^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]} + (2(r-l)+v+1)h_1^{[6l-4,6(r-l)+3v+3]} - 2h_2^{[6l,6(r-l)+3v]} = \\
&\qquad = \widehat{Y}_1^{[6l,6(r-l)+3v+3]} \quad (l = \overline{0, r+v}), \\
&(3l+3)h_2^{[6(l+1),6(r-l-1)+3v]} + (2(r-l)+v-1)h_2^{[6l,6(r-l)+3v]} - 2h_1^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]} = \\
&\qquad = \widehat{Y}_2^{[6l+4,6(r-l)+3v]} \quad (l = \overline{0, r})
\end{aligned} \tag{99^2}$$

или

$$\begin{aligned}
(3l+1)h_{1,l}^v + (2(r-l)+v+1)h_{1,l-1}^v - 2h_{2,l}^v = Y_{1,l}^v \quad (l = \overline{0, r+v}), \\
(3l+3)h_{2,l+1}^v + (2(r-l)+v-1)h_{2,l}^v - 2h_{1,l}^v = Y_{2,l}^v \quad (l = \overline{0, r}),
\end{aligned} \tag{126}$$

где $h_{1,l}^v = h_1^{[6l+2,6(r-l)+3v-3]}$ $(l = \overline{0, r+v-1})$, $Y_{1,l}^v = \widehat{Y}_1^{[6l,6(r-l)+3v+3]}$ $(l = \overline{0, r+v})$, $h_{2,l}^v = h_2^{[6l,6(r-l)+3v]}$, $Y_{2,l}^v = \widehat{Y}_2^{[6l+4,6(r-l)+3v]}$ $(l = \overline{0, r})$; $Y_{1,r+1}^0, Y_{2,-1}^1 = 0$.

$\mathbf{0^0}$. $\mathbf{v = 0}$ $(\mathbf{k = 6r + 1})$. Подставляя $h_{2,l}^0$ и $h_{2,l+1}^0$ из (126_1) в (126_2), получаем систему:

$$a_l^0 h_{1,l-1}^0 + b_l^0 h_{1,l}^0 + c_l^0 h_{1,l+1}^0 = Y_{0,l}^0 \quad (l = \overline{0, r}), \tag{127}$$

в которой $a_l^0 = (2(r-l)-1)(2(r-l)+1)$ $(l = \overline{1, r})$, $b_l^0 = 2(3l+2)(2(r-l)-1)-4$ $(l = \overline{0, r-1})$, $c_l^0 = (3l+3)(3l+4)$ $(l = \overline{0, r-2})$, $Y_{0,l}^0 = (2(r-l)-1)Y_{1,l}^0 + (3l+3)Y_{1,l+1}^0 + 2Y_{2,l}^0$.

Для решения системы (127) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-2}^0, c_{r-3}^0, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b_0^0 & c_0^0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^0 & b_1^0 & c_1^0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{r-2}^0 & b_{r-2}^0 & c_{r-2}^0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{r-1}^0 & b_{r-1}^0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a_r^0 \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая d_l^0 вместо b_l^0 и $\overline{Y}_{0,l}^0$ вместо $Y_{0,l}^0$ $(l \le r)$, пока $d_{l+1}^0 \ne 0$ $(l \ge 0)$, по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned}
&d_{r-1}^0 = b_{r-1}^0 = 6r - 6 > 0, \;\; \overline{Y}_{0,r}^0 = Y_{0,r}^0, \;\; \overline{Y}_{0,r-1}^0 = Y_{0,r-1}^0; \\
&d_l^0 = b_l^0 - a_{l+1}^0 c_l^0 / d_{l+1}^0, \;\; \overline{Y}_{0,l}^0 = Y_{0,l}^0 - \overline{Y}_{0,l+1}^0 c_l^0 / d_{l+1}^0 \quad (l = r-2, r-3, \ldots).
\end{aligned} \tag{128}$$

Лемма 15. *В матрице системы* (127) *диагональные элементы* $d_{r-1}^0, \ldots, d_0^0$, *определяемые по формулам* (128), *положительны.*

Доказательство. Пусть $f_l = 6l(r-l)$, тогда $f_0 = 0$ и $f_l > 0$ для $\forall\, l = \overline{1, r-2}$.

Покажем методом математической индукции, что $d_l^1 > f_l$ при $l = \overline{r-2, 0}$.

Согласно (128) $d_{r-2}^0 = 13,5r - 25 > 12r - 24 = f_{r-2}$, что является базой индукции.

Пусть $d_{l+1}^1 > f_{l+1} = 6(l+1)(r-l-1)$. Тогда $d_l^0 = b_l^0 - c_l^0 a_{l+1}^0 / d_{l+1}^0 > b_l^0 - c_l^0 a_{l+1}^0 / f_{l+1}$, так как $c_l^0 a_{l+1}^0 = (3l+3)(3l+4)(2(r-l)-3)(2(r-l)-1) > 0$. Но $b_l^0 - c_l^0 a_{l+1}^0 / f_{l+1} > f_l \;\Leftrightarrow\; 2(3l+2)(2(r-l)-1) - 4 - (1/2)(3l+4)(2(r-l)-3)(2(r-l)-1)(r-l-1)^{-1} - 6l(r-l) > 0 \;\Leftrightarrow\; (1/2)(3l+4)(r-l-1)^{-1} > 0$, что верно. Поэтому $d_l^0 > f_l$ при $l = \overline{r-2, 0}$, т. е. $d_l^0 > 0$. □

Следовательно можно полностью аннулировать диагональ $c_0^0,\dots,c_{r-2}^0$ матрицы системы (127). Теперь аннулируем элементы $a_1^0,\dots,a_r^0$, диагональные элементы $d_{r-1}^0,\dots,d_0^0$ при этом не изменятся, а вместо $\overline{Y}_{0,l}^0$ получим $\breve{Y}_{0,l}^0$ по рекуррентным формулам:

$$\breve{Y}_{0,0}^0=\overline{Y}_{0,0}^0,\qquad \breve{Y}_{0,l}^0=\overline{Y}_{0,l}^0-a_l^0\breve{Y}_{0,l-1}^0/d_{l-1}^0\quad(l=\overline{1,r}).$$

Тогда последнее уравнение $(l=r)$ системы, полученной из (127), принимает вид: $0\cdot h_{1,r-1}^0=\breve{Y}_{0,r}^0$, где $\breve{Y}_{0,r}^0=\sum_{m=0}^r\theta_m^{2,0}\overline{Y}_{0,m}^0$ с $\theta_m^{2,0}=(-1)^{r-m}\prod_{j=m+1}^r a_j^0/d_{j-1}^0\neq 0$, так как $a_l^0\neq 0$ для $\forall\, l=\overline{1,r}$.

Согласно формуле (128) имеем: $\sum_{m=0}^r\theta_m^{2,0}\overline{Y}_{0,m}^0=\theta_0^{2,0}(Y_{0,0}^0-c_0^0Y_{0,1}^0/d_{r-1}^0+\ldots+(-1)^{r-1}Y_{0,r-1}^0\prod_{j=0}^{r-2}c_j^0/d_{j+1}^0)+\ldots+\theta_{r-2}^{2,0}(Y_{0,r-2}^0-\;c_{r-2}^0Y_{0,r-1}^0/d_{r-1}^0)+\theta_{r-1}^{2,0}Y_{0,r-1}^0+\theta_r^{2,0}Y_{0,r}^0=\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{2,0}Y_{0,m}^0$, где $\theta_{1,m}^{2,0}=\sum_{s=0}^m(-1)^{m-s}\theta_s^{2,0}\cdot\prod_{j=s}^{m-1}c_j^0/d_{j+1}^0$ $(m=\overline{0,r-1})$, $\theta_{1,r}^{2,0}=\theta_r^{2,0}=1$.

В обозначениях (126): $\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{2,0}Y_{0,m}^0=\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{2,0}((2(r-m)-1)Y_{1,m}^0+(3m+3)Y_{1,m+1}^0+2Y_{2,m}^0)=(2r-1)\theta_{1,0}^{2,0}Y_{1,0}^0+\sum_{m=1}^r((2(r-m)-1)\theta_{1,m}^{2,0}+3m\theta_{1,m-1}^{2,0})Y_{1,m}^0+2\sum_{m=0}^r\theta_{1,m}^{2,0}Y_{2,m}^0=0.$

В результате уравнение $\breve{Y}_{0,r}^0=0$ дает для (99^2) с $v=0$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^r\alpha_{1,m}^{2,0}\widehat{Y}_1^{[6m,6(r-m)+3]}+\sum_{m=0}^r\beta_{1,m}^{2,0}\widehat{Y}_2^{[6m+4,6(r-m)]}=0,\tag{129}$$

где $\alpha_{1,0}^{2,0}=(2r-1)\theta_{1,0}^{2,0}$, $\alpha_{1,m}^{2,0}=(2(r-m)-1)\theta_{1,m}^{2,0}+3m\theta_{1,m-1}^{2,0}$ $(m=\overline{1,r})$, $\beta_{1,m}^{2,0}=2\theta_{1,m}^{2,0}$, а $\theta_{1,m}^{2,0}=(-1)^{m+r}\sum_{s=0}^m\prod_{j=s+1}^r(2(r-j)-1)(2(r-j)+1)/d_{j-1}^0\cdot\prod_{j=s}^{m-1}(3j+3)(3j+4)/d_{j+1}^0\neq 0$ $(m=\overline{0,r-1})$ по лемме 15, $\theta_{1,r}^{2,0}=1$.

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v=1}$ $(\mathbf{k=6r+4})$. При $l=r+1$ из (126_1) получаем первую резонансную связь:

$$\widehat{Y}_1^{[6(r+1),0]}=0.\tag{130}$$

Подставляя теперь $h_{1,l}^1$ и $h_{2,l-1}^1$ из подсистемы (126_2) в (116_1), получаем систему:

$$a_l^1h_{2,l-1}^1+b_l^1h_{2,l}^1+c_l^1h_{1,l+1}^1=Y_{0,l}^1\quad(l=\overline{0,r}),\tag{131}$$

в которой $a_l^1=4(r-l+1)^2$ $(l=\overline{1,r})$, $b_l^1=(6l+1)(2(r-l)+1)-5$ $(l=\overline{0,r})$, $c_l^1=(3l+1)(3l+3)$ $(l=\overline{0,r-1})$, $Y_{0,l}^1=2Y_{1,l}^1+2(r-l+1)Y_{2,l-1}^1+(3l+1)Y_{2,l}^1$.

Для решения системы (131) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-1}^1,c_{r-2}^1,\dots$ матрицы $\begin{pmatrix} b_0^1 & c_0^1 & 0 & \dots & 0\\ a_1^1 & b_1^1 & c_1^1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & a_{r-1}^1 & b_{r-1}^1 & c_{r-1}^1\\ 0 & \dots & 0 & a_r^1 & b_r^1\end{pmatrix}_{(r+1)\times(r+1)}$, получая d_l^1 вместо b_l^1 и $\overline{Y}_{0,l}^1$ вместо $Y_{0,l}^1$ $(l\le r)$, пока $d_{l+1}^1\neq 0$ $(l\ge 1)$, по рекуррентным формулам:

$$d_r^1=b_r^1,\ \overline{Y}_{0,r}^1=Y_{0,r}^1;\quad d_l^1=b_l^1-\frac{a_{l+1}^1c_l^1}{d_{l+1}^1},\ \overline{Y}_{0,l}^1=Y_{0,l}^1-\frac{\overline{Y}_{0,l+1}^1c_l^1}{d_{l+1}^1}\quad(l=r-1,r-2,\dots).\tag{132}$$

Лемма 16. *Для элементов* d_l^1 *из* (132) *верна следующая прямая формула:*

$$d_l^1 = 2(3l-2)(r-l+1) \neq 0 \quad (l = \overline{r,0}). \tag{133}$$

Доказательство. В (132) $d_r^1 = 2(3r-2)$, что совпадает с d_r^1 из (133) и дает базу индукции. Пусть для $\forall\, l = \overline{r-1,0}$ верна формула (133). Тогда согласно (132) имеем $d_{l-1}^1 = b_{l-1}^1 - a_l^1 c_{l-1}^1 (d_l^1)^{-1} = (6l-5)(2(r-l)+3) - 5 - 6l(r-l+1) = 2(3l-5)(r-l+2)$. □

Значит, в этом случае система (131) однозначно разрешима.

8.4 Полученные результаты

Возвращаясь к обозначениям, введенным для системы (99), согласно (100)–(105), (110), (111), (115), (117), (121), (124), (125), (129), (130) заключаем, что коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ удовлетворяют следующим резонансным уравнениям:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha_{1,m}^{0,0} Y_1^{[6m+4,6(r-m)-3]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{1,m}^{0,0} Y_2^{[6m+2,6(r-m)]} = \tilde{c} \quad (k = 6r-1,\ r \geq 1), \tag{134}$$

где $\alpha_{1,m}^{0,0} = -2\theta_{1,m+1}^{0,0}$, $\beta_{1,m}^{0,0} = 2\theta_{1,m}^{0,0}$, а $\theta_{1,m}^{0,0} = (-1)^{r-m}\prod_{j=m+1}^{r}(2(r-j)+1)(3j-1)^{-1} \neq 0$;

$$Y_1^{[6r+2,0]} = \tilde{c}, \quad \sum_{m=0}^{r-1} \alpha_{2,m}^{1,0} Y_1^{[6m+2,6(r-m)]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{2,m}^{1,0} Y_2^{[6m,6(r-m)+3]} = \tilde{c} \quad (k = 6r,\ r \geq 1), \tag{135}$$

где $\alpha_{2,m}^{1,0} = (3m+1)(r-m)^{-1}\theta_{2,m}^{1,0}$, $\beta_{2,m}^{1,0} = 2\theta_{2,m}^{1,0}$, а $\theta_{2,m}^{1,0} = (-1)^m \prod_{j=1}^{m}(3j-2)(2(r-j+1))^{-1} \neq 0$ $(m = \overline{0,r-1})$, $\theta_{2,r}^{1,0} = (1/4)(3r-2)(3r-1)\theta_{2,r-1}^{1,0} \neq 0$;

$$Y_1^{[0,9]} + 3Y_1^{[6,3]} + 2Y_2^{[4,6]} = \tilde{c} \quad (k = 7); \tag{136}$$

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_{1,m}^{2,0} Y_1^{[6m,6(r-m)+3]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{1,m}^{2,0} Y_2^{[6m+4,6(r-m)]} = \tilde{c} \quad (k = 6r+1,\ r \geq 2), \tag{137}$$

где $\alpha_{1,0}^{2,0} = (2r-1)\theta_{1,0}^{2,0} \neq 0$, $\alpha_{1,m}^{2,0} = (2(r-m)-1)\theta_{1,m}^{2,0} + 3m\theta_{1,m-1}^{2,0}$ $(m = \overline{1,r})$, $\beta_{1,m}^{2,0} = 2\theta_{1,m}^{2,0} \neq 0$, а $\theta_{1,m}^{2,0} = (-1)^{m+r}\sum_{s=0}^{m}\prod_{j=s+1}^{r}(2(r-j)-1)(2(r-j)+1)/d_{j-1}^0 \cdot \prod_{j=s}^{m-1}(3j+3)(3j+4)/d_{j+1}^0 \neq 0$ $(m = \overline{0,r-1})$, $\theta_{1,r}^{2,0} = 1$, элементы d_m^0 находятся рекуррентно из формул (128);

$$Y_1^{[6r+4,0]} = \tilde{c}, \sum_{m=0}^{r-1} \alpha_{2,m}^{0,1} Y_1^{[6m+4,6(r-m)]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{2,m}^{0,1} Y_2^{[6m+2,6(r-m)+3)]} = \tilde{c} \quad (k = 6r+2,\ r \geq 1), \tag{138}$$

где $\alpha_{2,m}^{0,1} = 2\theta_{2,m}^{0,1}$, $\beta_{2,0}^{0,1} = 2r$, $\beta_{2,m}^{0,1} = -2\theta_{2,m-1}^{0,1}$ $(m = \overline{1,r-1},)$ $\beta_{2,r}^{0,1} = 3r\theta_{2,r-1}^{0,1}$, а $\theta_{2,m}^{0,1} = (-1)^m \prod_{j=1}^{m}(3j+2)(2(r-j))^{-1} \neq 0$;

$$\begin{gathered}
\sum_{m=0}^{r} \alpha_{1,m}^{1,1} Y_1^{[6m+2,6(r-m)+3]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{1,m}^{1,1} Y_2^{[6m,6(r-m+1)]} = \tilde{c}, \\
\sum_{m=0}^{r} \alpha_{2,m}^{1,1} Y_1^{[6m+2,6(r-m)+3]} + \sum_{m=1}^{r+1} \beta_{2,m}^{1,1} Y_2^{[6m,6(r-m+1)]} = \tilde{c} \quad (k = 6r+3,\ r \geq 1),
\end{gathered} \tag{139}$$

где $\alpha_{1,m}^{1,1} = (3m+1)(1-(3m+2)(2(r-m)-1)/d_{m+1}^1)\theta_{1,m}^{1,1}$ $(m = \overline{0,r-1})$, $\alpha_{1,r}^{1,1} = (3r+1)\theta_{1,r}^{1,1}$,

$\beta_{1,m}^{1,1}=2\theta_{1,m}^{1,1}$, а $\theta_{1,m}^{1,1}=(-1)^m\prod_{j=1}^m((3j-2)(3j-1)/d_j^1)\neq 0$, причем $\alpha_{1,m}^{1,1}=0$ только при $r=1$; $\alpha_{2,0}^{1,1}=(2r-1)\theta_{2,1}^{1,1}$, $\alpha_{2,m}^{1,1}=(3m+1)\theta_{2,m}^{1,1}+(2(r-m)-1)\theta_{2,m+1}^{1,1}$ $(m=\overline{1,r})$, $\beta_{2,m}^{1,1}=2\theta_{2,m}^{1,1}$, а $\theta_{2,m}^{1,1}=(-1)^{m+r+1}\sum_{s=1}^m\prod_{j=s+1}^{r+1}(2(r-j)+1)(2(r-j)+3)/d_{j-1}^1\cdot\prod_{j=s}^{m-1}(3j+1)(3j+2)/d_{j+1}^1\neq 0$ $(m=\overline{1,r})$, $\theta_{2,r+1}^{1,1}=1$, элементы d_m^1 находятся рекуррентно из формул (123);

$$Y_1^{[6(r+1),0]}=\tilde{c}\quad(k=6r+4,\ r\geq 1). \tag{140}$$

Теорема 11. *Для того чтобы система* (98) *была формально эквивалентна исходной системе* (96)*, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты КОМ* $Y^{[k]}$ *удовлетворяли:*
1) при $k=6r-1$ *– уравнению* (134) $(r\geq 1)$*;*
2) при $k=6r$ *– двум уравнениям* (135) $(r\geq 1)$*;*
3) при $k=6r+1$ *– уравнению* (136) $(r=1)$ *или уравнению* (137) $(r\geq 2)$*;*
4) при $k=6r+2$ *– двум уравнениям* (138) $(r\geq 1)$*;*
5) при $k=6r+3$ *– двум уравнениям* (139) $(r\geq 1)$*;*
6) при $k=6r+4$ *– уравнению* (140) $(r\geq 1)$*.*

Следствие 13. *В КОМ* $Y^{[k]}$ *системы* (98)*:*
1,2,5) при $k=6r-1,6r,6r+3$ $(r\geq 1)$ *все коэффициенты являются резонансными;*
3) при $k=6r+1$*, если* $r=1$*, то коэффициенты* $Y_1^{[0,9]}$, $Y_1^{[6,3]}$, $Y_2^{[4,6]}$ *– резонансные,* $Y_2^{[10,0]}$ *– нерезонансный, а если* $r\geq 2$*, то не удается полностью описать множество резонансных коэффициентов, так как множители* $\alpha_{1,m}^{2,0}$ $(m=\overline{1,r})$ *в* (137) *могут обращаться в нуль, но коэффициенты* $Y_1^{[0,6r+3]}$, $Y_2^{[6m+4,6(r-m)]}$ $(m=\overline{0,r})$ *– резонансные;*
4) при $k=6r+2$ $(r\geq 1)$ *все коэффициенты являются резонансными, при этом коэффициент* $h_2^{[4,6r-3]}$ *КОМ* $h_2^{[k-4]}$ *является резонансным;*
6) при $k=6r+4$ $(r\geq 1)$ *коэффициент* $Y_1^{[6r+6,0]}$ *является резонансным, а коэффициенты* $Y_1^{[6m,6(r-m+1)]}$, $Y_2^{[6m+4,6(r-m)+3]}$ $(m=\overline{0,r})$ *– нерезонансные.*

Для $\forall\, k\geq 5$ положим $n_k=\{1$ при $k=6r-1,6r+1,6r+4\,(r\geq 1),\ 2$ – при остальных $k\}$.

Следствие 14. *В системе* (98) n_k *различных резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[k]}$ *образуют резонансный* k*-набор* $\mathcal{Y}^k$*, если это:*
1) $\mathcal{Y}^{6r-1}$ $(r\geq 1)$: $Y_1^{[6l_1+4,6(r-l_1)-3]}$ $(l_1\in\{0,\ldots,r-1\})$ *или* $Y_2^{[6l_2+2,6(r-l_2)]}$ $(l_2\in\{0,\ldots,r\})$;
2) $\mathcal{Y}^{6r}$ $(r\geq 1)$: $Y_1^{[6r+2,0]}$ *и* $Y_1^{[6l_3+2,6(r-l_3)]}$ $(l_3\in\{0,\ldots,r-1\})$ *или* $Y_2^{[6l_4,6(r-l_4)+3]}$ $(l_4\in\{0,\ldots,r\})$;
3) a) $\mathcal{Y}^7$: $Y_1^{[0,9]}$, *или* $Y_1^{[6,3]}$, *или* $Y_2^{[4,6]}$; *b)* $\mathcal{Y}^{6r+1}$ $(r\geq 2)$: $Y_1^{[0,6r+3]}$, *или* $Y_2^{[6l_6+4,6(r-l_6)]}$ $(l_6\in\{0,\ldots,r\})$, *или* $Y_1^{[6m,6(r-m)+3]}$ $(m=\{1,\ldots,r\})$, *если* $\alpha_{1,m}^{2,0}\neq 0$;
4) $\mathcal{Y}^{6r+2}$ $(r\geq 1)$: $Y_1^{[6r+4,0]}$ *и* $Y_1^{[6l_7+4,6(r-l_7)]}$ $(l_7\in\{0,\ldots,r-1\})$ *или* $Y_2^{[6l_8+2,6(r-l_8)+3)]}$ $(l_8\in\{0,\ldots,r\})$;
5) a) $\mathcal{Y}^9$: *либо* $Y_1^{[8,3]}$ *и один из* $Y_1^{[2,9]}$, $Y_2^{[6,6]}$, $Y_2^{[12,0]}$; *либо* $Y_2^{[0,12]}$ *и один из* $Y_1^{[2,9]}$, $Y_1^{[8,3]}$, $Y_2^{[6,6]}$, $Y_2^{[12,0]}$; *либо* $Y_2^{[6,6]}$ *и один из* $Y_1^{[2,9]}$, $Y_2^{[12,0]}$; *b)* $\mathcal{Y}^{6r+3}$ $(r\geq 2)$: *либо* $Y_2^{[0,6(r+1)]}$ *и* $Y_1^{[2,6r+3]}$ *или* $Y_2^{[6l_{13},6(r-l_{13}+1)]}$ $(l_{13}\in\{1,\ldots,r+1\})$; *либо* $Y_2^{[6(r+1),0]}$ *и* $Y_1^{[6l_{14}+2,6(r-l_{14})+3]}$ $(l_{14}\in\{0,\ldots,r\})$ *или* $Y_2^{[6l_{15},6(r-l_{15}+1)]}$ $(l_{15}\in\{0,\ldots,r\})$; *либо любые два из* $Y_1^{[6m+2,6(r-m)+3]}$ $(m\in\{0,\ldots,r\})$, $Y_2^{[6m,6(r-m+1)]}$ $(m\in\{1,\ldots,r\})$ *при условии, что* $\alpha(\beta)_{1,m_1}^{1,1}\alpha(\beta)_{2,m_2}^{1,1}-\alpha(\beta)_{1,m_2}^{1,1}\alpha(\beta)_{2,m_1}^{1,1}\neq 0$ *(*m_1 *– номер первого выбранного коэффициента,* m_2 *– второго); либо* $Y_2^{[0,6(r+1)]}$ *и* $Y_1^{[6m+2,6(r-m)+3]}$ $(m\in\{1,\ldots,r-1\})$ *при условии, что* $\beta_{1,0}^{1,1}\alpha_{2,m}^{1,1}\neq 0$;
6) $\mathcal{Y}^{6r+4}$ $(r\geq 1)$: $Y_1^{[6(r+1),0]}$.

Таким образом, система (98) по определению является ОНФ, если для каждого $k \geq 5$ все коэффициенты её КОМ $Y^{[k]}$ равны нулю, кроме n_k штук, принадлежащих любому резонансному k-набору, описанному в следствии 14, и имеющих произвольные значения.

Следствие 15. *Для системы* (98) *неполное семейство резонансных наборов* $\mathcal{Y}^*$ *имеет вид:* $\{\rho_1^r Y_1^{[6l_1+4,6(r-l_1)-3]}$, $Y_1^{[6r+2,0]}$, $\rho_2^r Y_1^{[6l_3+2,6(r-l_3)]}$ $(r \geq 1)$, $\rho_3^r Y_1^{[6l_5,9-6l_5]}$, $\rho_4^r Y_1^{[0,6r+3]}$ $(r \geq 2)$, $Y_1^{[6r+4,0]}$, $\rho_5^r Y_1^{[6l_7+4,6(r-l_7)]}$ $(r \geq 1)$, $\rho_6^r Y_1^{[8,3]}$, $\rho_6^r \rho_7^r Y_1^{[2,9]}$, $(1-\rho_6^r)\rho_8^r(1-l_9)Y_1^{[6l_{11}+2,9-6l_{11}]}$, $l_9(1-\rho_6^r)\rho_9^r Y_1^{[2,9]}$, $\rho_{10}^r \rho_{11}^r Y_1^{[2,6r+3]}$, $(1-\rho_{10}^r)\rho_{12}^r Y_1^{[6l_{14}+2,6(r-l_{14})+3]}$ $(r \geq 2)$, $Y_1^{[6(r+1),0]}$, $(1-\rho_1^r)Y_2^{[6l_2+2,6(r-l_2)]}$, $(1-\rho_2^r)Y_2^{[6l_4,6(r-l_4)+3]}$ $(r \geq 1)$, $(1-\rho_3^r)Y_2^{[4,6]}$, $(1-\rho_4^r)Y_2^{[6l_6+4,6(r-l_6)]}$ $(r \geq 2)$, $(1-\rho_5^r)Y_2^{[6l_8+2,6(r-l_8)+3]}$ $(r \geq 1)$, $(1-\rho_6^r)Y_2^{[6l_9,12-6l_9]}$, $\rho_6^r(1-\rho_7^r)Y_2^{[6l_{10},12-6l_{10}]}$, $(1-l_9)(1-\rho_6^r)(1-\rho_8^r)Y_2^{[6l_{12},12-6l_{12}]}$, $l_9(1-\rho_6^r)(1-\rho_9^r)Y_2^{[12,0]}$, $\rho_{10}^r Y_2^{[0,6(r+1)]}$, $(1-\rho_{10}^r)Y_2^{[6(r+1),0]}$, $\rho_{10}^r(1-\rho_{11}^r)Y_2^{[6l_{13},6(r-l_{13}+1)]}$, $(1-\rho_{10}^r)(1-\rho_{12}^r)Y_2^{[6l_{15},6(r-l_{15}+1)]}$ $(r \geq 2)\}$, *где* $l_1, l_3, l_7 \in \{0,\ldots,r-1\}$, $l_2,l_4,l_6,l_8,l_{14},l_{15} \in \{0,\ldots,r\}$, $l_{13} \in \{1,\ldots,r+1\}$, $l_5,l_9,l_{11} \in \{0,1\}$, $l_{10},l_{12} \in \{1,2\}$, $\rho_j^r \in \{0,1\}$ $(j=\overline{1,12})$. *Если множитель при некотором* $Y_i^{[2q_1,3q_2]}$, *входящим в* $\mathcal{Y}^*$, *равен нулю, то этот элемент отсутствует.*

Теорема 12. *Для любой системы* (96), *и для любого выбранного по её невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}^*$ *из следствия 15 существует и единственна почти тождественная замена* (97) *с заранее произвольным образом зафиксированными резонансными коэффициентами, преобразующая систему* (96) *в ОНФ* (98)*:*

$$\dot{y}_1 = y_2^2 + \rho_3^r Y_1^{[6l_5,9-6l_5]} y_1^{3l_5} y_2^{3-2l_5} + \rho_6^r Y_1^{[8,3]} y_1^4 y_2 + \rho_6^r \rho_7^r Y_1^{[2,9]} y_1 y_2^3 + l_9(1-\rho_6^r)\rho_9^r Y_1^{[2,9]} y_1 y_2^3 +$$
$$+(1-\rho_6^r)\rho_8^r(1-l_9)Y_1^{[6l_{11}+2,9-6l_{11}]} y_1^{3l_{11}+1} y_2^{3-2l_{11}} + \sum_{r=1}^{\infty} \bigl(\rho_1^r Y_1^{[6l_1+4,6(r-l_1)-3]} y_1^{3l_1+2} y_2^{2(r-l_1)-1} +$$
$$+Y_1^{[6r+2,0]} y_1^{3r+1} + \rho_2^r Y_1^{[6l_3+2,6(r-l_3)]} y_1^{3l_3+1} y_2^{2(r-l_3)} + Y_1^{[6r+4,0]} y_1^{3r+2} + \rho_5^r Y_1^{[6l_7+4,6(r-l_7)]} y_1^{3l_7+2} y_2^{2(r-l_7)} +$$
$$+Y_1^{[6(r+1),0]} y_1^{3(r+1)}\bigr) + \sum_{r=2}^{\infty} \bigl(\rho_4^r Y_1^{[0,6r+3]} y_2^{2r+1} + \rho_{10}^r \rho_{11}^r Y_1^{[2,6r+3]} y_1^1 y_2^{2r+1} +$$
$$+(1-\rho_{10}^r)\rho_{12}^r Y_1^{[6l_{14}+2,6(r-l_{14})+3]} y_1^{3l_{14}+1} y_2^{2(r-l_{14})+1}\bigr),$$

$$\dot{y}_2 = y_1^2 y_2 + (1-\rho_3^r)Y_2^{[4,6]} y_1^2 y_2^2 + (1-\rho_6^r)Y_2^{[6l_9,12-6l_9]} y_1^{3l_9} y_2^{4-2l_9} + l_9(1-\rho_6^r)(1-\rho_9^r)Y_2^{[12,0]} y_1^6 +$$
$$+\rho_6^r(1-\rho_7^r)Y_2^{[6l_{10},12-6l_{10}]} y_1^{3l_{10}} y_2^{4-2l_{10}} + (1-l_9)(1-\rho_6^r)(1-\rho_8^r)Y_2^{[6l_{12},12-6l_{12}]} y_1^{3l_{12}} y_2^{4-2l_{12}} +$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty} \bigl((1-\rho_1^r)Y_2^{[6l_2+2,6(r-l_2)]} y_1^{3l_2+1} y_2^{2(r-l_2)} + (1-\rho_2^r)Y_2^{[6l_4,6(r-l_4)+3]} y_1^{3l_4} y_2^{2(r-l_4)+1} +$$
$$+(1-\rho_5^r)Y_2^{[6l_8+2,6(r-l_8)+3]} y_1^{3l_8+1} y_2^{2(r-l_8)+1}\bigr) + \sum_{r=2}^{\infty} \bigl((1-\rho_4^r)Y_2^{[6l_6+4,6(r-l_6)]} y_1^{3l_6+2} y_2^{2(r-l_6)} +$$
$$+\rho_{10}^r Y_2^{[0,6(r+1)]} y_2^{2(r+1)} + (1-\rho_{10}^r)Y_2^{[6(r+1),0]} y_1^{3(r+1)} + \rho_{10}^r(1-\rho_{11}^r)Y_2^{[6l_{13},6(r-l_{13}+1)]} y_1^{3l_{13}} y_2^{2(r-l_{13}+1)} +$$
$$+(1-\rho_{10}^r)(1-\rho_{12}^r)Y_2^{[6l_{15},6(r-l_{15}+1)]} y_1^{3l_{15}} y_2^{2(r-l_{15}+1)}\bigr).$$

Пример 4. *Любая система* (96) *формально эквивалентна ОНФ, у которой в возмущении все члены не более чем линейны по* y_2 :

$$\dot{y}_1 = y_2^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \bigl(Y_1^{[6r-2,3]} y_1^{3r-1} y_2 + Y_1^{[6r,3]} y_1^{3r} y_2 + Y_1^{[6r+2,0]} y_1^{3r+1} + Y_1^{[6r+2,3]} y_1^{3r+1} y_2 +$$
$$+Y_1^{[6r+4,0]} y_1^{3r+2} + Y_1^{[6(r+1),0]} y_1^{3(r+1)}\bigr),$$
$$\dot{y}_2 = y_1^2 y_2 + \sum_{r=1}^{\infty} \bigl(Y_2^{[6r,3]} y_1^{3r} y_2 + Y_2^{[6r+2,3]} y_1^{3r+1} y_2 + Y_2^{[6(r+1),0]} y_1^{3(r+1)}\bigr).$$

9 ОНФ систем с $\mathbf{R}^{[5]}_{(3,4)}$ в невозмущенной части

9.1 Получение связующей системы

Рассмотрим систему (10) с канонической невозмущенной частью $R^{[5]}_{(3,4)} = (x_2^2, x_1^3)$:

$$\dot{x}_1 = x_2^2 + \sum_{k=6}^{\infty} X_1^{[k]}(x), \quad \dot{x}_2 = x_1^3 + \sum_{k=6}^{\infty} X_2^{[k]}(x), \tag{141}$$

где в возмущении КОМ $X_i^{[k]} = \sum_{3q_1+4q_2=k+\gamma_i} X_i^{[3q_1,4q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ $(i=1,2)$.

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y) \quad (i=1,2), \tag{142}$$

где $h_i = \sum_{k=6}^{\infty} h_i^{[k-5]}(y)$, $h_i^{[k-5]} = \sum_{3q_1+4q_2=k+\gamma_i-5} h_i^{[3q_1,4q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$ переводит (141) в систему:

$$\dot{y}_1 = y_2^2 + \sum_{k=6}^{\infty} Y_1^{[k]}(y), \quad \dot{y}_2 = y_1^3 + \sum_{k=6}^{\infty} Y_2^{[k]}(y), \tag{143}$$

в которой возмущение $Y_i^{[k]} = \sum_{3q_1+4q_2=k+\gamma_i} Y_i^{[3q_1,4q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$.

Тождества (13) с $\chi = 5$, $\gamma = (3,4)$ для систем (141), (143) и замены (142) имеют вид:

$$\frac{\partial h_1^{[k-5]}}{\partial y_1} y_2^2 + \frac{\partial h_1^{[k-5]}}{\partial y_2} y_1^3 - 2y_2 h_2^{[k-5]} = \widetilde{Y}_1^{[k]} - Y_1^{[k]}, \ \frac{\partial h_2^{[k-5]}}{\partial y_1} y_2^2 + \frac{\partial h_2^{[k-5]}}{\partial y_2} y_1^3 - 3y_1^2 h_1^{[k-5]} = \widetilde{Y}_2^{[k]} - Y_2^{[k]},$$

где $\widetilde{Y}_i^{[k]}$ $(i=1,2)$ находится по формуле, указанной в (13).

Приравнивая коэффициенты при $y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, получим линейную связующую систему:

$$\begin{array}{l} (q_1+1) h_1^{[3(q_1+1),4(q_2-2)]} + (q_2+1) h_1^{[3(q_1-3),4(q_2+1)]} - 2h_2^{[3q_1,4(q_2-1)]} = \widehat{Y}_1^{[3q_1,4q_2]} \ (3q_1+4q_2=k+3), \\ (q_1+1) h_2^{[3(q_1+1),4(q_2-2)]} + (q_2+1) h_2^{[3(q_1-3),4(q_2+1)]} - 3h_1^{[3(q_1-2),4q_2]} = \widehat{Y}_2^{[3q_1,4q_2]} \ (3q_1+4q_2=k+4), \end{array} \tag{144}$$

в которой $\widehat{Y}_i^{[3q_1,4q_2]} = \widetilde{Y}_i^{[3q_1,4q_2]} - Y_i^{[3q_1,4q_2]}$.

Так как $k \geq 6$, а $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, введем следующее разложение:

$$k = 12r+u+4v-6 \quad (r \in \mathbb{N},\ u=0,1,2,3,\ v=0,1,2), \qquad q_1 = 4l+s \quad (l \in \mathbb{Z}_+,\ s=0,1,2,3).$$

Тогда $q_2 = (k+\gamma_i-3q_1)/4 = 3(r-l) + v - (3s-u-\gamma_i+6)/4 \in \mathbb{Z}_+$ в следующих случаях:
0) $u=0:$ $s=3$ и $l=\overline{0,r-1}$ $(i=1)$, $s=2$ и $l=\overline{0,r+\lfloor (v-2)/3 \rfloor}$ $(i=2)$;
1) $u=1:$ $s=2$ и $l=\overline{0,r+\lfloor (v-2)/3 \rfloor}$ $(i=1)$, $s=1$ и $l=\overline{0,r+\lfloor (v-1)/3 \rfloor}$ $(i=2)$;
2) $u=2:$ $s=1$ и $l=\overline{0,r+\lfloor (v-1)/3 \rfloor}$ $(i=1)$, $s=0$ и $l=\overline{0,r}$ $(i=2)$;
3) $u=3:$ $s=0$ и $l=\overline{0,r}$ $(i=1)$, $s=3$ и $l=\overline{0,r+\lfloor (v-2)/3 \rfloor}$ $(i=2)$.

Здесь для $\forall\, x \in \mathbb{R}$ введена функция *пол*: $\lfloor x \rfloor = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$.

9.2 Условия совместности связующей системы

9.2.1 u=0 $(\mathbf{k=12r+4v-6})$

Перепишем (144), используя введенные в разделе 9.1 разложения для q_1 и q_2 при $u=0$:

$$\begin{array}{r}(4l+4)h_1^{[12(l+1),12(r-l-1)+4v-8]}+(3(r-l)+v-2)h_1^{[12l,12(r-l)+4v-8]}-\\ -2h_2^{[12l+9,12(r-l)+4v-16]}=\widehat{Y}_1^{[12l+9,12(r-l)+4v-12]}\quad(l=\overline{0,r-1}),\\ (4l+3)h_2^{[12l+9,12(r-l)+4v-16]}+(3(r-l)+v-1)h_2^{[12l-3,12(r-l)+4v-4]}-\\ -3h_1^{[12l,12(r-l)+4v-8]}=\widehat{Y}_2^{[12l+6,12(r-l)+4v-8]}\quad(l=\overline{0,r+\lfloor(v-2)/3\rfloor})\end{array}\tag{144^0}$$

или

$$\begin{array}{r}(4l+4)h_{1,l+1}^v+(3(r-l)+v-2)h_{1,l}^v-2h_{2,l}^v=Y_{1,l}^v\quad(l=\overline{0,r-1}),\\ (4l+3)h_{2,l}^v+(3(r-l)+v-1)h_{2,l-1}^v-3h_{1,l}^v=Y_{2,l}^v\quad(l=\overline{0,r+\lfloor(v-2)/3\rfloor}),\end{array}\tag{145}$$

где $h_{1,l}^v=h_1^{[12l,12(r-l)+4v-8]}$, $Y_{2,l}^v=\widehat{Y}_2^{[12l+6,12(r-l)+4v-8]}$ $(l=\overline{0,r+\lfloor(v-2)/3\rfloor})$, $Y_{1,l}^v=\widehat{Y}_1^{[12l+9,12(r-l)+4v-12]}$ $(l=\overline{0,r-1})$, $h_{2,l}^v=h_2^{[12l+9,12(r-l)+4v-16]}$ $(l=\overline{0,r+\lfloor(v-1)/3\rfloor-1})$; $Y_{2,r}^0,Y_{2,r}^1=0$.

Подставляя $h_{1,l}^v$ и $h_{1,l+1}^v$ из (145_2) в (145_1), получаем систему:

$$a_l^vh_{2,l-1}^v+b_l^vh_{2,l}^v+c_l^vh_{2,l+1}^v=Y_{0,l}^v\quad(l=\overline{0,r-1}),\tag{146}$$

в которой $a_l^v=(3(r-l)+v-2)(3(r-l)+v-1)$ $(l=\overline{1,r-1})$, $b_l^v=(8l+7)(3(r-l)+v-3)-7$ $(l=\overline{0,r+\lfloor(v-1)/3\rfloor-1})$, $c_l^v=(4l+4)(4l+7)$ $(l=\overline{0,r+\lfloor(v-1)/3\rfloor-2})$, $Y_{0,l}^v=3Y_{1,l}^v+(3(r-l)+v-2)Y_{2,l}^v+(4l+4)Y_{2,l+1}^v$.

$\mathbf{0^0}$. $\mathbf{v=0}$ $(\mathbf{k=12r-6})$. Для решения системы (146) будем методом Гаусса аннулировать элементы $a_1^0,a_2^0,\dots$ матрицы $\begin{pmatrix}b_0^0&c_0^0&0&\dots&0\\ a_1^0&b_1^0&c_1^0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&a_{r-3}^0&b_{r-3}^0&c_{r-3}^0\\ 0&\dots&0&a_{r-2}^0&b_{r-2}^0\\ 0&\dots&0&0&a_{r-1}^0\end{pmatrix}_{r\times(r-1)}$, получая e_l^0 вместо b_l^0 и $\overline{Y}_{0,l}^0$ вместо $Y_{0,l}^0$ $(l\le r-1)$, пока $e_{l-1}^0\ne0$ $(l\ge1)$, по рекуррентным формулам:

$$e_0^0=b_0^0,\ \overline{Y}_{0,0}^0=Y_{0,0}^0;\quad e_l^0=b_l^0-\frac{a_l^0c_{l-1}^0}{e_{l-1}^0},\ \overline{Y}_{0,l}^0=Y_{0,l}^0-\frac{\overline{Y}_{0,l-1}^0a_l^0}{e_{l-1}^0}\quad(l=1,2,\dots).\tag{147}$$

Лемма 17. *Для элементов e_l^0 из (147) верна следующая прямая формула:*

$$e_l^0=(4l+7)(3(r-l)-4)\ne0\quad(l=\overline{0,r-2}).\tag{148}$$

Доказательство. В (147) $e_0^0=7(3r-4)$, что совпадает с e_0^0 из (148) и дает базу индукции.

Пусть для $\forall\,l=\overline{1,r-2}$ верна формула (148). Тогда согласно (147) имеем $e_{l+1}^0=b_{l+1}^0-a_{l+1}^0c_l^0(e_l^0)^{-1}=(8l+15)(3(r-l)-6)-7-(3(r-l)-5)(4l+4)=(4l+11)(3(r-l)-7)$. □

В результате последнее уравнение $(l=r-1)$ системы, полученной из (146), принимает вид: $0\cdot h^0_{2,r-2}=\overline{Y}^0_{0,r-1}$, где $\overline{Y}^0_{0,r-1}=\sum_{m=0}^{r-1}\theta^{0,0}_{1,m}Y^0_{0,m}$ с $\theta^{0,0}_{1,m}=(-1)^{r-1-m}\prod_{j=m+1}^{r-1}(a^0_j/e^0_{j-1})$. Учитывая (146) и (148), получаем:

$$\theta^{0,0}_{1,m}=(-1)^{r-1-m}\prod_{j=m+1}^{r-1}\frac{3(r-j)-2}{4j+3}\neq 0\quad (m=\overline{0,r-1}).$$

В обозначениях (145): $\sum_{m=0}^{r-1}\theta^{0,0}_{1,m}Y^0_{0,m}=\sum_{m=0}^{r-1}\theta^{0,0}_{1,m}(3Y^0_{1,m}+(3(r-m)-2)Y^0_{2,m}+(4m+4)Y^0_{2,m+1})=3\sum_{m=0}^{r-1}\theta^{0,0}_{1,m}Y^0_{1,m}+(3r-2)\theta^{0,0}_{1,0}Y^0_{2,0}+\sum_{m=1}^{r-1}((3(r-m)-2)\theta^{0,0}_{1,m}+4m\theta^{0,0}_{1,m-1})Y^0_{2,m}$, причем $(3(r-m)-2)\theta^{0,0}_{1,m}+4m\theta^{0,0}_{1,m-1}=3(3(r-m)-2)(4m+3)^{-1}\theta^{0,0}_{1,m}$.

В результате уравнение $\overline{Y}^0_{0,r-1}=0$ дает для (144^0) с $v=0$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r-1}\alpha^{0,0}_{1,m}\widehat{Y}_1^{[12m+9,12(r-m-1)]}+\sum_{m=0}^{r-1}\beta^{0,0}_{1,m}\widehat{Y}_2^{[12m+6,12(r-m)-8]}=0,\tag{149}$$

где $\alpha^{0,0}_{1,m}=3\theta^{0,0}_{1,m}$, $\beta^{0,0}_{1,m}=3(3(r-m)-2)(4m+3)^{-1}\theta^{0,0}_{1,m}$.

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v=1}$ $(\mathbf{k=12r-2})$. Для решения системы (146) будем методом Гаусса аннулировать элементы $a^1_1,a^1_2,\ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b^1_0 & c^1_0 & 0 & \ldots & 0\\ a^1_1 & b^1_1 & c^1_1 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & a^1_{r-2} & b^1_{r-2} & c^1_{r-2}\\ 0 & \ldots & 0 & a^1_{r-1} & b^1_{r-1}\end{pmatrix}_{r\times r}$, получая e^1_l вместо b^1_l и $\overline{Y}^1_{0,l}$ вместо $Y^1_{0,l}$ $(l\le r-1)$, пока $e^1_{l-1}\neq 0$ $(l\ge 1)$, по рекуррентным формулам:

$$e^1_0=b^1_0,\ \overline{Y}^1_{0,0}=Y^1_{0,0};\quad e^1_l=b^1_l-\frac{a^1_l\,c^1_{l-1}}{e^1_{l-1}},\ \overline{Y}^1_{0,l}=Y^1_{0,l}-\frac{\overline{Y}^1_{0,l-1}a^1_l}{e^1_{l-1}}\quad (l=1,2,\ldots).\tag{150}$$

Лемма 18. *Для элементов* e^1_l *из* (150) *верна следующая прямая формула:*

$$e^1_l=3(4l+7)(r-l-1)\quad (l=\overline{0,r-1}).\tag{151}$$

Доказательство. В (150) $e^1_0=21(r-1)$, что совпадает с e^1_0 из (151) и дает базу индукции.

Пусть для $\forall\, l=\overline{1,r-1}$ верна формула (151). Тогда согласно (150) имеем $e^1_{l+1}=b^1_{l+1}-a^1_{l+1}c^1_l(e^1_l)^{-1}=(8l+15)(3(r-l)-5)-7-(3(r-l)-4)(4l+4)=3(4l+11)(r-l-2)$. □

Поскольку в (151) только $e^1_{r-1}=0$, то последнее уравнение $(l=r-1)$ системы, полученной из (146), принимает вид: $0\cdot h^1_{2,r-2}+0\cdot h^1_{2,r-1}=\overline{Y}^1_{0,r-1}$, где $\overline{Y}^1_{0,r-1}=\sum_{m=0}^{r-1}\theta^{0,1}_{1,m}Y^1_{0,m}$ с $\theta^{0,1}_{1,m}=(-1)^{r-1-m}\prod_{j=m+1}^{r-1}(a^1_j/e^1_{j-1})$. Учитывая (146) и (151), получаем:

$$\theta^{0,1}_{1,m}=(-1)^{r-1-m}\prod_{j=m+1}^{r-1}\frac{3(r-j)-1}{4j+3}\neq 0\quad (m=\overline{0,r-1}).$$

В обозначениях (145): $\sum_{m=0}^{r-1}\theta^{0,1}_{1,m}Y^1_{0,m}=\sum_{m=0}^{r-1}\theta^{0,1}_{1,m}(3Y^1_{1,m}+(3(r-m)-1)Y^1_{2,m}+(4m+4)Y^1_{2,m+1})=3\sum_{m=0}^{r-1}\theta^{0,1}_{1,m}Y^1_{1,m}+(3r-1)\theta^{0,1}_{1,0}Y^1_{2,0}+\sum_{m=1}^{r-1}((3(r-m)-1)\theta^{0,1}_{1,m}+4m\theta^{0,1}_{1,m-1})Y^1_{2,m}$, причем $(3(r-m)-1)\theta^{0,1}_{1,m}+4m\theta^{0,1}_{1,m-1}=3(3(r-m)-1)(4m+3)^{-1}\theta^{0,1}_{1,m}$.

В результате уравнение $\overline{Y}^1_{0,r-1} = 0$ дает для (144^0) с $v = 1$ резонансную связь при наличии свободной компоненты $h_2^{[12r-3,0]}$:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha^{0,1}_{1,m} \widehat{Y}_1^{[12m+9,12(r-m)-8]} + \sum_{m=0}^{r-1} \beta^{0,1}_{1,m} \widehat{Y}_2^{[12m+6,12(r-m)-4]} = 0, \tag{152}$$

где $\alpha^0_{1,m} = 3\theta^{0,1}_{1,m}$, $\beta^{0,1}_{1,m} = 3(3(r-m)-1)(4m+3)^{-1}\theta^{0,1}_{1,m}$.

2^0. $\mathbf{v = 2}$ $(\mathbf{k = 12r + 2})$. Для решения системы (146) будем методом Гаусса аннулировать элементы $a_1^2, a_2^2, \dots$ матрицы $\begin{pmatrix} b_0^2 & c_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a^2_{r-2} & b^2_{r-2} & c^2_{r-2} \\ 0 & \dots & 0 & a^2_{r-1} & b^2_{r-1} \end{pmatrix}_{r\times r}$, получая e_l^2 вместо b_l^2 и $\overline{Y}^2_{0,l}$ вместо $Y^2_{0,l}$ $(l \le r-1)$, пока $e^2_{l-1} \ne 0$ $(l \ge 1)$, по рекуррентным формулам:

$$e_0^2 = b_0^2,\ \overline{Y}^2_{0,0} = Y^2_{0,0}; \quad e_l^2 = b_l^2 - \frac{a_l^2 c^2_{l-1}}{e^2_{l-1}},\ \overline{Y}^2_{0,l} = Y^2_{0,l} - \frac{\overline{Y}^2_{0,l-1} a_l^2}{e^2_{l-1}} \quad (l = 1, 2, \dots). \tag{153}$$

Лемма 19. *Для элементов* e_l^2 *из* (153) *верна следующая прямая формула:*

$$e_l^2 = (4l+7)(3(r-l)-2) \ne 0 \quad (l = \overline{0, r-1}). \tag{154}$$

Доказательство. В (153) $e_0^2 = 7(3r-2)$, что совпадает с e_0^2 из (154) и дает базу индукции.

Пусть для $\forall\, l = \overline{1, r-1}$ верна формула (154). Тогда согласно (153) имеем $e^2_{l+1} = b^2_{l+1} - a^2_{l+1} c_l^2 (e_l^2)^{-1} = (8l+15)(3(r-l)-4) - 7 - (3(r-l)-3)(4l+4) = (4l+11)(3(r-l)-5)$. □

Значит, система (146) однозначно разрешима.

9.2.2 u=1 $(\mathbf{k = 12r + 4v - 5})$

Перепишем (144), используя введенные в разделе 9.1 разложения для q_1 и q_2 при $u = 1$:

$$\begin{gathered} (4l+3)h_1^{[12l+9,12(r-l)+4v-16]} + (3(r-l)+v-1)h_1^{[12l-3,12(r-l)+4v-4]} - \\ -2h_2^{[12l+6,12(r-l)+4v-12]} = \widehat{Y}_1^{[12l+6,12(r-l)+4v-8]} \quad (l = \overline{0, r + \lfloor (v-2)/3 \rfloor}), \\ (4l+2)h_2^{[12l+6,12(r-l)+4v-12]} + (3(r-l)+v)h_2^{[12l-6,12(r-l)+4v]} - \\ -3h_1^{[12l-3,12(r-l)+4v-4]} = \widehat{Y}_2^{[12l+3,12(r-l)+4v-4]} \quad (l = \overline{0, r + \lfloor (v-1)/3 \rfloor}). \end{gathered} \tag{144^1}$$

Вводя новые обозначения, запишем эту систему в следующем виде:

$$\begin{gathered} (4l+3)h^v_{1,l} + (3(r-l)+v-1)h^v_{1,l-1} - 2h^v_{2,l} = Y^v_{1,l} \quad (l = \overline{0, r + \lfloor (v-2)/3 \rfloor}), \\ (4l+2)h^v_{2,l} + (3(r-l)+v)h^v_{2,l-1} - 3h^v_{1,l-1} = Y^v_{2,l} \quad (l = \overline{0, r + \lfloor (v-1)/3 \rfloor}), \end{gathered} \tag{155}$$

где $h^v_{1,l} = h_1^{[12l+9,12(r-l)+4v-16]}$ $(l = \overline{0, r + \lfloor (v-1)/3 \rfloor - 1})$, $h^v_{2,l} = h_2^{[12l+6,12(r-l)+4v-12]}$ $(l = \overline{0, r-1})$, $Y^v_{1,l} = \widehat{Y}_1^{[12l+6,12(r-l)+4v-8]}$ $(l = \overline{0, r + \lfloor (v-2)/3 \rfloor})$, $Y^v_{2,l} = \widehat{Y}_2^{[12l+3,12(r-l)+4v-4]}$ $(l = \overline{0, r + \lfloor (v-1)/3 \rfloor})$; $Y^0_{1,-1}, Y^1_{1,-1}, Y^1_{1,r} = 0$.

$\mathbf{0^0}$. $\mathbf{v=0}$ $(\mathbf{k=12r-5})$. Подставляя $h^0_{2,l}$ и $h^0_{2,l-1}$ из (155_1) в (155_2), получаем систему:

$$a^0_l h^0_{1,l-2} + b^0_l h^0_{1,l-1} + c^0_l h^0_{1,l} = Y^0_{0,l} \quad (l = \overline{0, r-1}), \tag{156}$$

в которой $a^0_l = 3(r-l)(3(r-l)+2)$ $(l = \overline{2, r-1})$, $b^0_l = 3(8l+1)(r-l) - 4l - 8$ $(l = \overline{1, r-1})$, $c^0_l = (4l+2)(4l+3)$ $(l = \overline{0, r-2})$, $Y^0_{0,l} = 3(r-l)Y^0_{1,l-1} + (4l+2)Y^0_{1,l} + 2Y^0_{2,l}$.

Для

решения системы (156) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c^0_{r-2}, c^0_{r-3}, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} c^0_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b^0_1 & c^0_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a^0_2 & b^0_2 & c^0_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a^0_{r-2} & b^0_{r-2} & c^0_{r-2} \\ 0 & \ldots & 0 & a^0_{r-1} & b^0_{r-1} \end{pmatrix}_{r\times(r-1)}$, получая d^0_l вместо b^0_l и $\overline{Y}^0_{0,l}$ вместо $Y^0_{0,l}$ $(l \le r-1)$, пока $d^0_{l+1} \ne 0$ $(l \ge 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d^0_{r-1} = b^0_{r-1},\ \overline{Y}^0_{0,r-1} = Y^0_{0,r-1}; \quad d^0_l = b^0_l - \frac{a^0_{l+1}\, c^0_l}{d^0_{l+1}},\ \overline{Y}^0_{0,l} = Y^0_{0,l} - \frac{\overline{Y}^0_{0,l+1} c^0_l}{d^0_{l+1}} \quad (l = r-2, r-3, \ldots). \tag{157}$$

Лемма 20. *Для элементов* d^0_l *из* (157) *верна следующая прямая формула:*

$$d^0_l = (4l-1)(3(r-l)+2) \ne 0 \quad (l = \overline{r-1, 1}). \tag{158}$$

Доказательство. В (157) $d^0_{r-1} = 5(4r-5)$, что совпадает с d^0_{r-1} из (158) и дает базу. Пусть для $\forall\, l = \overline{r-2, 1}$ верна формула (158). Тогда согласно (157) имеем $d^0_{l-1} = b^0_{l-1} - a^0_l c^0_{l-1} (d^0_l)^{-1} = 3(8l-7)(r-l+1) - 4l - 4 - 3(r-l)(4l-4) = (4l-5)(3(r-l)+5)$. $\square$

В результате первое уравнение $(l=0)$ системы, полученной из (156), принимает вид: $0 \cdot h^0_{1,0} = \overline{Y}^0_{0,0}$, где $\overline{Y}^0_{0,0} = \sum_{m=0}^{r-1} \theta^{1,0}_{1,m} Y^0_{0,m}$ с $\theta^{1,0}_{1,m} = (-1)^m \prod_{j=0}^{m-1} (c^0_j / d^0_{j+1})$. Учитывая (156) и (158), получаем:

$$\theta^{1,0}_{1,m} = (-1)^m \prod_{j=0}^{m-1} \frac{4j+2}{3(r-j)-1} \ne 0 \quad (m = \overline{0, r-1}).$$

В обозначениях (145): $\sum_{m=0}^{r-1} \theta^{1,0}_{1,m} Y^0_{0,m} = \sum_{m=0}^{r-1} \theta^{1,0}_{1,m} (3(r-m)Y^0_{1,m-1} + (4m+2)Y^0_{1,m} + 2Y^0_{2,m}) = \sum_{m=0}^{r-2} ((4m+2)\theta^{1,0}_{1,m} + 3(r-m-1)\theta^{1,0}_{1,m+1}) Y^0_{1,m} + (4r-2)\theta^{1,0}_{1,r-1} Y^0_{1,r-1} + 2\sum_{m=0}^{r-1} \theta^{1,0}_{1,m} Y^0_{2,m}$, причем $(4m+2)\theta^{1,0}_{1,m} + 3(r-m-1)\theta^{1,0}_{1,m+1} = 2(4m+2)(3(r-m)-1)^{-1}\theta^{1,0}_{1,m}$.

В результате уравнение $\overline{Y}^0_{0,0} = 0$ дает для (144^1) с $v=0$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha^{1,0}_{1,m} \widehat{Y}_1^{[12m+6, 12(r-m)-8]} + \sum_{m=0}^{r-1} \beta^{1,0}_{1,m} \widehat{Y}_2^{[12m+3, 12(r-m)-4]} = 0, \tag{159}$$

где $\alpha^{1,0}_{1,m} = 2(4m+2)(3(r-m)-1)^{-1}\theta^{1,0}_{1,m}$, $\beta^{1,0}_{1,m} = 2\theta^{1,0}_{1,m}$.

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v=1}$ $(\mathbf{k=12r-1})$. Подставляя $h^1_{2,l}$ и $h^1_{2,l-1}$ из (155_1) в (155_2), получаем систему:

$$a^1_l h^1_{1,l-2} + b^1_l h^1_{1,l-1} + c^1_l h^1_{1,l} = Y^1_{0,l} \quad (l=\overline{0,r}), \tag{160}$$

в которой $a^1_l = (3(r-l)+1)(3(r-l)+3)$ $(l=\overline{2,r})$, $b^1_l = 3(8l+1)(r-l)+4l-7$ $(l=\overline{1,r})$, $c^1_l = (4l+2)(4l+3)$ $(l=\overline{0,r-1})$, $Y^1_{0,l} = (3(r-l)+1)Y^1_{1,l-1} + (4l+2)Y^1_{1,l} + 2Y^1_{2,l}$.

Для решения системы (160) будем методом Гаусса аннулировать элементы $a^1_2, a^1_3, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} c^1_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b^1_1 & c^1_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a^1_2 & b^1_2 & c^1_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a^1_{r-1} & b^1_{r-1} & c^1_{r-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a^1_r & b^1_r \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая e^1_l вместо b^1_l и $\overline{Y}^1_{0,l}$ вместо $Y^1_{0,l}$ $(l \le r)$, пока $e^1_{l-1} \ne 0$ $(l \ge 2)$, по рекуррентным формулам:

$$e^1_1 = b^1_1,\ \overline{Y}^1_{0,0} = Y^1_{0,0},\ \overline{Y}^1_{0,1} = Y^1_{0,1}; \quad e^1_l = b^1_l - \frac{a^1_l\, c^1_{l-1}}{e^1_{l-1}},\ \overline{Y}^1_{0,l} = Y^1_{0,l} - \frac{\overline{Y}^1_{0,l-1} a^1_l}{e^1_{l-1}} \quad (l=2,3,\ldots). \tag{161}$$

Лемма 21. *В матрице системы* (160) *определяемые по формулам* (161) *диагональные элементы* $e^1_1, \ldots, e^1_{r-1}$ *положительны, а* e^1_r *отрицателен.*

Доказательство. Для оценки снизу элементов e^1_l при $l=\overline{1,r-1}$ введем положительную функцию $f_l = (4l+2)(3(r-l)-2)$.

Покажем методом математической индукции, что $e^1_l > f_l$ при $l = \overline{1,r-1}$.

В (161) $e^1_1 = 27r-30 > 18r-30 = f_1$, что является базой индукции.

Пусть теперь $e^1_{l-1} > f_{l-1} = (4l-2)(3(r-l)+1)$. Тогда $e^1_l = b^1_l - a^1_l c^1_{l-1}/e^1_{l-1} > b^1_l - a^1_l c^1_{l-1}/f_{l-1}$, так как $a^1_l c^1_{l-1} = (3(r-l)+1)(3(r-l)+3)(4l-2)(4l-1) > 0$. Но $b^1_l - a^1_l c^1_{l-1}/f_{l-1} = 3(8l+1)(r-l)+4l-7-(4l-1)(3(r-l)+3) = (4l+2)(3(r-l)-2) = f_l$. Значит $e^1_l > f_l$, т. е. $e^1_l > 0$ для $\forall\, l = \overline{1,r-1}$.

Оценим теперь элементы e^1_l $(l=\overline{1,r})$ сверху так, чтобы доказать, что $e^1_r < 0$. Введем $g_l = 3(r-l)(4l+5)$. При $l=\overline{1,r-1}$ функция $g_l > 0$ и $g_r = 0$.

Покажем методом математической индукции, что $e^1_l < g_l$ при $l=\overline{1,r}$.

В (161) $e^1_1 = 27r-30 < 27r-27 = g_1$, что является базой индукции.

Пусть $e^1_{l-1} < g_{l-1} = 3(r-l+1)(4l+1)$. Тогда $e^1_l = b^1_l - a^1_l c^1_{l-1}/e^1_{l-1} < b^1_l - a^1_l c^1_{l-1}/g_{l-1}$, так как $a^1_l c^1_{l-1} > 0$. Но $b^1_l - a^1_l c^1_{l-1}/g_{l-1} < g_l \Leftrightarrow 3(8l+1)(r-l)+4l-7-(3(r-l)+1)(4l-2)\times(4l-1)(4l+1)^{-1} - 3(r-l)(4l+5) < 0 \Leftrightarrow -3(6r-2l+3)(4l+1)^{-1} < 0$, что верно при $l=\overline{1,r}$. Поэтому $e^1_l < g_l$, а значит $e^1_r < 0$. □

В результате можно полностью аннулировать нижнюю диагональ $a^1_2, \ldots, a^1_r$ матрицы системы (160), а затем аннулировать элементы $c^1_{r-1}, \ldots, c^1_0$. Диагональные элементы $e^1_r, \ldots, e^1_1$ при этом не изменятся, а вместо $\overline{Y}^1_{0,l}$ получим $\breve{Y}^1_{0,l}$ по рекуррентным формулам:

$$\breve{Y}^1_{0,r} = \overline{Y}^1_{0,r},\ \breve{Y}^1_{0,l} = \overline{Y}^1_{0,l} - \frac{c^1_l \breve{Y}^1_{0,l+1}}{e^1_{l+1}} \quad (l=\overline{r-1,0}).$$

Тогда первое уравнение $(l = 0)$ системы, полученной из (160), принимает вид: $0 \cdot h^1_{1,0} = \breve{Y}^1_{0,0}$, где $\breve{Y}^1_{0,0} = \sum_{m=0}^r \theta^{1,1}_m \overline{Y}^1_{0,m}$ с $\theta^{1,1}_m = (-1)^m \prod_{j=1}^m c^1_{j-1}/e^1_j \neq 0$, так как $c^1_l \neq 0$ для $\forall\, l = \overline{0, r-1}$. Согласно формуле (161) имеем: $\sum_{m=0}^r \theta^{1,1}_m \overline{Y}^1_{0,m} = \theta^{1,1}_0 Y^1_{0,0} + \theta^{1,1}_1 Y^1_{0,1} + \theta^{1,1}_2 (Y^1_{0,2} - a^1_2 Y^1_{0,1}/e^1_1) + \ldots + \theta^{1,1}_r (Y^1_{0,r} - a^1_r Y^1_{0,r-1}/e^1_{r-1} + \ldots + (-1)^{r-1} Y^1_{0,1} \prod_{j=2}^r a^1_j/e^1_{j-1}) = \sum_{m=0}^r \theta^{1,1}_{1,m} Y^1_{0,m}$, где $\theta^{1,1}_{1,0} = \theta^{1,1}_0 = 1$, $\theta^{1,1}_{1,m} = \sum_{s=m}^r (-1)^{s-m} \theta^{1,1}_s \cdot \prod_{j=m+1}^s a^1_j/e^1_{j-1}$ $(m = \overline{1,r})$.

В обозначениях (155): $\sum_{m=0}^r \theta^{1,1}_{1,m} Y^1_{0,m} = \sum_{m=0}^r \theta^{1,1}_{1,m}((3(r-m)+1)Y^1_{1,m-1} + (4m+2)Y^1_{1,m} + 2Y^1_{2,m}) = \sum_{m=0}^{r-1}((4m+2)\theta^{1,1}_{1,m} + (3(r-m)-2)\theta^{1,1}_{1,m+1})Y^1_{1,m} + 2\sum_{m=0}^r \theta^{1,1}_{1,m} Y^1_{2,m}$.

В результате уравнение $\breve{Y}^1_{0,0} = 0$ дает для (144^1) с $v = 1$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha^{1,1}_{1,m} \widehat{Y}_1^{[12m+6, 12(r-m)-4]} + \sum_{m=0}^{r} \beta^{1,1}_{1,m} \widehat{Y}_2^{[12m+3, 12(r-m)]} = 0, \tag{162}$$

где $\alpha^{1,1}_{1,m} = (4m+2)\theta^{1,1}_{1,m} + (3(r-m)-2)\theta^{1,1}_{1,m+1}$, $\beta^{1,1}_{1,m} = 2\theta^{1,1}_{1,m}$, а $\theta^{1,1}_{1,0} = 1$, $\theta^{1,1}_{1,m} = (-1)^m \times \sum_{s=m}^r \prod_{j=1}^s (4j-2)(4j-1)/e^1_j \cdot \prod_{j=m+1}^s (3(r-j)+1)(3(r-j)+3)/e^1_{j-1}$ $(m = \overline{1,r})$.

$\mathbf{2^0}$. $\mathbf{v = 2}$ $(\mathbf{k = 12r + 3})$. В системе (155_2) при $l = 0$ имеем:

$$2h^2_{2,0} = Y^2_{2,0}. \tag{163}$$

Подставляя $h^2_{1,l-1}$ и $h^2_{1,l}$ из остальных уравнений (155_2) в (155_1), получаем систему:

$$a^2_l h^2_{2,l-1} + b^2_l h^2_{2,l} + c^2_l h^2_{2,l+1} = Y^2_{0,l} \quad (l = \overline{0,r}), \tag{164}$$

в которой $a^2_l = (3(r-l)+1)(3(r-l)+2)$ $(l = \overline{1,r})$, $b^2_l = 3(8l+5)(r-l) - 7$ $(l = \overline{0, r-1})$, $c^2_l = (4l+3)(4l+6)$ $(l = \overline{0, r-2})$, $Y^2_{0,l} = 3Y^2_{1,l} + (3(r-l)+1)Y^2_{2,l} + (4l+3)Y^2_{2,l+1}$.

Для решения системы (164) будем методом Гаусса аннулировать элементы $a^2_1, a^2_2, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b^2_0 & c^2_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a^2_1 & b^2_1 & c^2_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a^2_{r-2} & b^2_{r-2} & c^2_{r-2} \\ 0 & \ldots & 0 & a^2_{r-1} & b^2_{r-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & a^2_r \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая e^2_l вместо b^2_l и $\overline{Y}^2_{0,l}$ вместо $Y^2_{0,l}$ $(l \le r)$, пока $e^2_{l-1} \neq 0$ $(l \ge 1)$, по рекуррентным формулам:

$$e^2_0 = b^2_0,\ \overline{Y}^2_{0,0} = Y^2_{0,0}; \quad e^2_l = b^2_l - \frac{a^2_l\, c^2_{l-1}}{e^2_{l-1}},\ \overline{Y}^2_{0,l} = Y^2_{0,l} - \frac{\overline{Y}^2_{0,l-1} a^2_l}{e^2_{l-1}} \quad (l = 1, 2, \ldots). \tag{165}$$

Лемма 22. *В матрице системы* (164) *определяемые по формулам* (165) *диагональные элементы* $e^2_0, \ldots, e^2_{r-1}$ *положительны.*

Доказательство. Пусть $f_l = (4l+5)(3(r-l)-2)$, тогда $f_l > 0$ при $l = \overline{0, r-1}$.

Покажем методом математической индукции, что $e^2_l > f_l$ при $l = \overline{0, r-1}$.

Согласно (165) $e^2_0 = 15r - 7 > 15r - 10 = f_0$, что является базой индукции.

Пусть $e_{l-1}^2 > f_{l-1} = (4l+1)(3(r-l)+1)$. Тогда $e_l^2 = b_l^2 - a_l^2 c_{l-1}^2/e_{l-1}^2 > b_l^2 - a_l^2 c_{l-1}^2/f_{l-1}$, так как $a_l^2 c_{l-1}^2 = (3(r-l)+1)(3(r-l)+2)(4l-1)(4l+2) > 0$. Но $b_l^2 - a_l^2 c_{l-1}^2/f_{l-1} > f_l \Leftrightarrow 3(8l+5)(r-l) - 7 - (4l-1)(4l+2)(3(r-l)+2)(4l+1)^{-1} - (4l+5)(3(r-l)-2) > 0 \Leftrightarrow (6(r+l)+7)(4l+1)^{-1} > 0$, что верно. Поэтому $e_l^2 > f_l$, т.е. $e_l^2 > 0$ для $\forall\, l = \overline{0, r-1}$. $\square$

Следовательно можно полностью аннулировать нижнюю диагональ $a_1^2, \ldots, a_r^2$ матрицы системы (164), после чего последнее уравнение $(l = r)$ системы, полученной из (164), примет вид: $0 \cdot h_{2,r-1}^2 = \overline{Y}_{0,r}^2$, где $\overline{Y}_{0,r}^2 = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{1,2} Y_{0,m}^2$ с $\theta_{1,m}^{1,2} = (-1)^{r-m} \prod_{j=m}^{r-1} (a_{j+1}^2/e_j^2) \neq 0$, так как $a_j^2 \neq 0$ для $\forall\, l = \overline{1, r}$.

В обозначениях (155): $\sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{1,2} Y_{0,m}^2 = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{1,2} (3Y_{1,m}^2 + (3(r-m)+1)Y_{2,m}^2 + (4m+3)Y_{2,m+1}^2) = 3\sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{1,2} Y_{1,m}^2 + (3r+1)\theta_{1,0}^{1,2} Y_{2,0}^2 + \sum_{m=1}^r ((3(r-m)+1)\theta_{1,m}^{1,2} + (4m-1)\theta_{1,m-1}^{1,2}) Y_{2,m}^2$, причем $(3(r-m)+1)\theta_{1,m}^{1,2} + (4m-1)\theta_{1,m-1}^{1,2} = (3(r-m)+1)(1-(4m-1)(3(r-m)+2)/e_{m-1}^2)\theta_{1,m}^{1,2}$.

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,r}^2 = 0$ дает для (144^1) с $v = 2$ первую резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_{1,m}^{1,2} \widehat{Y}_1^{[12m+6,12(r-m)]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{1,m}^{1,2} \widehat{Y}_2^{[12m+3,12(r-m)+4]} = 0, \tag{166}$$

где $\alpha_{1,m}^{1,2} = 3\theta_{1,m}^{1,2}$, $\beta_{1,0}^{1,2} = (3r+1)\theta_{1,0}^{1,2}$, $\beta_{1,m}^{1,2} = (3(r-m)+1)(1-(4m-1)(3(r-m)+2)/e_{m-1}^2)\theta_{1,m}^{1,2}$ $(m = \overline{1, r})$, а $\theta_{1,m}^{1,2} = (-1)^{r-m} \prod_{j=m}^{r-1} ((3(r-j)-2)(3(r-j)-1)/e_j^2) \neq 0$ по лемме 22.

Теперь аннулируем элементы $c_{r-2}^2, \ldots, c_0^2$ в исходной матрице системы (164), получая d_l^2 вместо b_l^2 и $\breve{Y}_{0,l}^2$ вместо $Y_{0,l}^2$ $(l \leq r)$, пока $d_{l+1}^2 \neq 0$ $(l \geq 0)$, по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} &d_{r-1}^2 = b_{r-1}^2,\ \breve{Y}_{0,r}^2 = Y_{0,r}^2,\ \breve{Y}_{0,r-1}^2 = Y_{0,r-1}^2; \\ &d_l^2 = b_l^2 - \frac{a_{l+1}^2\, c_l^2}{d_{l+1}^2},\ \breve{Y}_{0,l}^2 = Y_{0,l}^2 - \frac{\breve{Y}_{0,l+1}^2 c_l^2}{d_{l+1}^2} \quad (l = r-2, r-3, \ldots). \end{aligned} \tag{167}$$

Лемма 23. *В матрице системы* (164) *диагональные элементы* $d_{r-1}^2, \ldots, d_0^2$, *определяемые по формулам* (167), *положительны.*

Доказательство. Пусть $f_l = (4l-1)(3(r-l)+1)$, тогда $f_l > 0$ для $\forall\, l = \overline{0, r-1}$.

Покажем методом математической индукции, что $d_l^2 > f_l$ при $l = \overline{r-1, 0}$.

Согласно (167) $d_{r-1}^2 = 24r - 16 > 16r - 20 = f_{r-1}$, что является базой индукции.

Пусть $d_{l+1}^2 > f_{l+1} = (4l+3)(3(r-l)-2)$. Тогда $d_l^2 = b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2/d_{l+1}^2 > b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2/f_{l+1}$, так как $c_l^2 a_{l+1}^2 = (4l+3)(4l+6)(3(r-l)-2)(3(r-l)-1) > 0$ при $l = \overline{r-2, 0}$. Но $b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2/f_{l+1} = 3(8l+5)(r-l) - 7 - (4l+6)(3(r-l)-1) = (4l-1)(3(r-l)+1) = f_l$, поэтому $d_l^2 > f_l$, т.е. $d_l^2 > 0$ для $\forall\, l = \overline{0, r-1}$. $\square$

Следовательно можно полностью аннулировать верхнюю диагональ $c_{r-2}^2, \ldots, c_0^2$ матрицы системы (164), после чего первое уравнение $(l = 0)$ системы, полученной из (164), принимает вид: $b_0^2 \cdot h_{2,0}^2 = \breve{Y}_{0,0}^2$, а учитывая (163) получим: $\breve{Y}_{0,0}^2 - (1/2)(15r-7)Y_{2,0}^2 = 0$, где $\breve{Y}_{0,0}^2 = \sum_{m=0}^{r-1} \theta_{2,m}^{1,2} Y_{0,m}^2$ с $\theta_{2,m}^{1,2} = (-1)^m \prod_{j=0}^{m-1} (c_j^2/d_{j+1}^2) \neq 0$, так как $c_l^2 \neq 0$ для $\forall\, l = \overline{0, r-2}$.

В обозначениях (155): $\sum_{m=0}^{r-1} \theta_{2,m}^{1,2} Y_{0,m}^2 = \sum_{m=0}^{r-1} \theta_{2,m}^{1,2} (3Y_{1,m}^2 + (3(r-m)+1)Y_{2,m}^2 + (4m+3) \times Y_{2,m+1}^2) = 3\sum_{m=0}^{r-1} \theta_{2,m}^{1,2} Y_{1,m}^2 + (3r+1)Y_{2,0}^2 + \sum_{m=1}^{r-1} ((3(r-m)+1)\theta_{2,m}^{1,2} + (4m-1)\theta_{2,m-1}^{1,2}) Y_{2,m}^2 + (4r-1)\theta_{2,r-1}^{1,2} Y_{2,r}^2$, причем $(3(r-m)+1)\theta_{2,m}^{1,2} + (4m-1)\theta_{2,m-1}^{1,2} = (4m-1)(1-(4m+2) \times (3(r-m)+1)/d_m^2)\theta_{2,m-1}^{1,2}$.

В результате уравнение $\breve{Y}^2_{0,0} - (1/2)(15r-7)Y^2_{2,0} = 0$ дает для системы (144^1) с $v=2$ вторую резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha^{1,2}_{2,m} \widehat{Y}_1^{[12m+6,12(r-m)]} + \sum_{m=0}^{r} \beta^{1,2}_{2,m} \widehat{Y}_2^{[12m+3,12(r-m)+4]} = 0, \tag{168}$$

где $\alpha^{1,2}_{2,m} = 3\theta^{1,2}_{2,m}$, $\beta^{1,2}_{2,0} = -9(r-1)/2$, $\beta^{1,2}_{2,m} = (4m-1)(1-(4m+2)(3(r-m)+1)/d_m^2)\theta^{1,2}_{2,m-1}$ $(m=\overline{1,r-1})$, $\beta^{1,2}_{2,r} = (4r-1)\theta^{1,2}_{2,r-1}$, а $\theta^{1,2}_{2,m} = (-1)^m \prod_{j=0}^{m-1}((4j+3)(4j+6)/d^2_{j+1}) \neq 0$ по лемме 23.

9.2.3 u=2 $(\mathbf{k = 12r + 4v - 4})$

Перепишем (144), используя введенные в разделе 9.1 разложения для q_1 и q_2 при $u=2$:

$$\begin{array}{r} (4l+2)h_1^{[12l+6,12(r-l)+4v-12]} + (3(r-l)+v)h_1^{[12l-6,12(r-l)+4v]} - 2h_2^{[12l+3,12(r-l)+4v-8]} = \\ = \widehat{Y}_1^{[12l+3,12(r-l)+4v-4]} \quad (l = \overline{0, r + \lfloor (v-1)/3 \rfloor}), \\ (4l+1)h_2^{[12l+3,12(r-l)+4v-8]} + (3(r-l)+v+1)h_2^{[12l-9,12(r-l)+4v+4]} - 3h_1^{[12l-6,12(r-l)+4v]} = \\ = \widehat{Y}_2^{[12l,12(r-l)+4v]} \quad (l=\overline{0,r}) \end{array} \tag{144^2}$$

или

$$\begin{array}{c} (4l+2)h^v_{1,l} + (3(r-l)+v)h^v_{1,l-1} - 2h^v_{2,l} = Y^v_{1,l} \quad (l = \overline{0, r+\lfloor (v-1)/3 \rfloor}), \\ (4l+1)h^v_{2,l} + (3(r-l)+v+1)h^v_{2,l-1} - 3h^v_{1,l-1} = Y^v_{2,l} \quad (l=\overline{0,r}), \end{array} \tag{169}$$

где $h^v_{1,l} = h_1^{[12l+6,12(r-l)+4v-12]}$ $(l=\overline{0,r-1})$, $h^v_{2,l} = h_2^{[12l+3,12(r-l)+4v-8]}$ $(l = \overline{0, r+\lfloor (v-2)/3 \rfloor})$, $Y^v_{1,l} = \widehat{Y}_1^{[12l+3,12(r-l)+4v-4]}$ $(l = \overline{0, r+\lfloor (v-1)/3 \rfloor})$, $Y^v_{2,l} = \widehat{Y}_2^{[12l,12(r-l)+4v]}$ $(l=\overline{0,r})$; $Y^0_{1,-1}, Y^0_{1,r}, Y^2_{1,-1} = 0$.

$\mathbf{0^0}$. $\mathbf{v=0}$ $(\mathbf{k = 12r - 4})$. Подставляя $h^0_{2,l}$ и $h^0_{2,l-1}$ из (169_1) в (169_2), получаем систему:

$$a^0_l h^0_{1,l-2} + b^0_l h^0_{1,l-1} + c^0_l h^0_{1,l} = Y^0_{0,l} \quad (l=\overline{0,r}), \tag{170}$$

в которой $a^0_l = (3(r-l)+1)(3(r-l)+3)$ $(l=\overline{2,r})$, $b^0_l = 3(8l-1)(r-l)+4l-8$ $(l=\overline{1,r})$, $c^0_l = (4l+1)(4l+2)$ $(l=\overline{0,r-1})$, $Y^0_{0,l} = (3(r-l)+1)Y^0_{1,l-1} + (4l+1)Y^0_{1,l} + 2Y^0_{2,l}$.

Для решения системы (170) будем методом Гаусса аннулировать элементы $a^0_2, a^0_3, \dots$ матрицы $\begin{pmatrix} c^0_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b^0_1 & c^0_1 & 0 & \dots & 0 \\ a^0_2 & b^0_2 & c^0_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a^0_{r-1} & b^0_{r-1} & c^0_{r-1} \\ 0 & \dots & 0 & a^0_r & b^0_r \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая e^0_l вместо b^0_l и $\overline{Y}^0_{0,l}$ вместо $Y^0_{0,l}$ $(l \le r)$, пока $e^1_{l-1} \neq 0$ $(l \ge 2)$, по рекуррентным формулам:

$$e^0_1 = b^0_1,\ \overline{Y}^0_{0,0} = Y^0_{0,0},\ \overline{Y}^0_{0,1} = Y^0_{0,1}; \quad e^0_l = b^0_l - \frac{a^0_l\, c^0_{l-1}}{e^0_{l-1}},\ \overline{Y}^0_{0,l} = Y^0_{0,l} - \frac{\overline{Y}^0_{0,l-1} a^0_l}{e^0_{l-1}} \quad (l = 2,3,\dots). \tag{171}$$

Лемма 24. *В матрице системы* (170) *определяемые по формулам* (171) *диагональные элементы* $e^0_1, \dots, e^0_{r-1}$ *положительны, а* e^0_r *отрицателен.*

Доказательство. Для оценки снизу элементов e_l^0 при $l = \overline{1, r-1}$ введем положительную функцию $f_l = (4l+1)(3(r-l)-2)$.

Покажем методом математической индукции, что $e_l^0 > f_l$ при $l = \overline{1, r-1}$.

В (171) $e_1^0 = 21r - 25 > 15r - 25 = f_1$, что является базой индукции.

Пусть теперь $e_{l-1}^0 > f_{l-1} = (4l-3)(3(r-l)+1)$. Тогда $e_l^0 = b_l^0 - a_l^0 c_{l-1}^0 / e_{l-1}^0 > b_l^0 - a_l^0 c_{l-1}^0 / f_{l-1}$, так как $a_l^0 c_{l-1}^0 = (3(r-l)+1)(3(r-l)+3)(4l-3)(4l-2) > 0$. Но $b_l^0 - a_l^0 c_{l-1}^0 / f_{l-1} = 3(8l-1)(r-l) + 4l - 8 - (4l-2)(3(r-l)+3) = (4l+1)(3(r-l)-2) = f_l$. Значит $e_l^0 > f_l$, т. е. $e_l^0 > 0 \ \ \forall\, l = \overline{1, r-1}$.

Оценим теперь элементы e_l^0 $(l = \overline{1, r})$ сверху так, чтобы доказать, что $e_r^0 < 0$. Введем $g_l = 3(r-l)(4l+3)$. При $l = \overline{1, r-1}$ функция $g_l > 0$ и $g_r = 0$.

Покажем методом математической индукции, что $e_l^0 < g_l$ при $l = \overline{1, r}$.

В (171) $e_1^0 = 21r - 25 < 21r - 21 = g_1$, что является базой индукции.

Пусть $e_{l-1}^0 < g_{l-1} = 3(r-l+1)(4l-1)$. Тогда $e_l^0 = b_l^0 - a_l^0 c_{l-1}^0 / e_{l-1}^0 < b_l^0 - a_l^0 c_{l-1}^0 / g_{l-1}$, так как $a_l^0 c_{l-1}^0 > 0$. Но $b_l^0 - a_l^0 c_{l-1}^0 / g_{l-1} < g_l \ \Leftrightarrow \ 3(8l-1)(r-l) + 4l - 8 - (3(r-l)+1) \times (4l-3)(4l-2)(4l-1)^{-1} - 3(r-l)(4l+3) < 0 \ \Leftrightarrow \ -2(3r+5l-1)(4l-1)^{-1} < 0$, что верно при $l = \overline{1, r}$. Поэтому $e_l^0 < g_l$, а значит $e_r^0 < 0$. $\square$

Поэтому можно полностью аннулировать нижнюю диагональ $a_2^0, \ldots, a_r^0$ матрицы системы (170), затем аннулировать элементы $c_{r-1}^0, \ldots, c_0^0$. Диагональные элементы $e_r^0, \ldots, e_1^0$ при этом не изменятся, а вместо $\overline{Y}_{0,l}^0$ получим $\breve{Y}_{0,l}^0$ по рекуррентным формулам:

$$\breve{Y}_{0,r}^0 = \overline{Y}_{0,r}^0, \quad \breve{Y}_{0,l}^0 = \overline{Y}_{0,l}^0 - \frac{c_l^0 \breve{Y}_{0,l+1}^0}{e_{l+1}^0} \quad (l = \overline{r-1, 0}).$$

Тогда первое уравнение $(l = 0)$ системы, полученной из (170), принимает вид: $0 \cdot h_{1,0}^0 = \breve{Y}_{0,0}^0$, где $\breve{Y}_{0,0}^0 = \sum_{m=0}^r \theta_m^{2,0} \overline{Y}_{0,m}^0$ с $\theta_m^{2,0} = (-1)^m \prod_{j=1}^m c_{j-1}^0 / e_j^0 \neq 0$, так как $c_l^0 \neq 0$ для $\forall\, l = \overline{0, r-1}$. Согласно формуле (171) имеем: $\sum_{m=0}^r \theta_m^{2,0} \overline{Y}_{0,m}^0 = \theta_0^{2,0} Y_{0,0}^0 + \theta_1^{2,0} Y_{0,1}^0 + \theta_2^{2,0} (Y_{0,2}^0 - a_2^0 Y_{0,1}^0 / e_1^0) + \ldots + \theta_r^{2,0} (Y_{0,r}^0 - a_r^0 Y_{0,r-1}^0 / e_{r-1}^0 + \ldots + (-1)^{r-1} Y_{0,1}^0 \prod_{j=2}^r a_j^0 / e_{j-1}^0) = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,0} Y_{0,m}^0$, где $\theta_{1,0}^{2,0} = \theta_0^{2,0} = 1$, $\theta_{1,m}^{2,0} = \sum_{s=m}^r (-1)^{s-m} \theta_s^{2,0} \cdot \prod_{j=m+1}^s a_j^0 / e_{j-1}^0 \ \ (m = \overline{1, r})$.

В обозначениях (169): $\sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,0} Y_{0,m}^1 = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,0} ((3(r-m)+1) Y_{1,m-1}^0 + (4m+1) Y_{1,m}^0 + 2Y_{2,m}^0) = \sum_{m=0}^{r-1} ((4m+1)\theta_{1,m}^{2,0} + (3(r-m)-2)\theta_{1,m+1}^{2,0}) Y_{1,m}^0 + 2 \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,0} Y_{2,m}^0$.

В результате уравнение $\breve{Y}_{0,0}^0 = 0$ дает для (144^2) с $v = 0$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha_{1,m}^{2,0} \widehat{Y}_1^{[12m+3, 12(r-m)-4]} + \sum_{m=0}^r \beta_{1,m}^{2,0} \widehat{Y}_2^{[12m, 12(r-m)]} = 0, \tag{172}$$

где $\alpha_{1,m}^{2,0} = (4m+1)\theta_{1,m}^{2,0} + (3(r-m)-2)\theta_{1,m+1}^{2,0}$, $\beta_{1,m}^{2,0} = 2\theta_{1,m}^{2,0}$, а $\theta_{1,0}^{2,0} = 1$, $\theta_{1,m}^{2,0} = (-1)^m \times \sum_{s=m}^r \prod_{j=1}^s (4j-3)(4j-2)/e_j^0 \cdot \prod_{j=m+1}^s (3(r-j)+1)(3(r-j)+3)/e_{j-1}^0 \ \ (m = \overline{1, r})$.

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v = 1}$ $(\mathbf{k = 12r})$. В системе (169_1) при $l = r$ имеем:

$$h_{1,r-1}^1 = Y_{1,r}^1. \tag{173}$$

Теперь подставляя $h_{2,l-1}^1$ и $h_{2,l}^1$ из (169_1) в (169_2), получаем систему:

$$a_l^1 h_{1,l-2}^1 + b_l^1 h_{1,l-1}^1 + c_l^1 h_{1,l}^1 = Y_{0,l}^1 \quad (l = \overline{0, r}), \tag{174}$$

в которой $a_l^1 = (3(r-l)+2)(3(r-l)+4)$ $(l = \overline{2,r})$, $b_l^1 = (8l-1)(3(r-l)+1)+4l-8$ $(l = \overline{1,r})$, $c_l^1 = (4l+1)(4l+2)$ $(l = \overline{0,r-1})$, $Y_{0,l}^1 = (3(r-l)+2)Y_{1,l-1}^1 + (4l+1)Y_{1,l}^1 + 2Y_{2,l}^1$. Для решения системы (174) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c_{r-1}^1, c_{r-2}^1, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} c_0^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1^1 & c_1^1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2^1 & b_2^1 & c_2^1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{r-1}^1 & b_{r-1}^1 & c_{r-1}^1 \\ 0 & \ldots & 0 & a_r^1 & b_r^1 \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая d_l^1 вместо b_l^1 и $\overline{Y}_{0,l}^1$ вместо $Y_{0,l}^1$ $(l \le r)$, пока $d_{l+1}^1 \ne 0$ $(l \ge 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d_r^1 = b_r^1 = 12r-9 > 0,\ \overline{Y}_{0,r}^1 = Y_{0,r}^1; \quad d_l^1 = b_l^1 - \frac{a_{l+1}^1\, c_l^2}{d_{l+1}^1},\ \overline{Y}_{0,l}^1 = Y_{0,l}^1 - \frac{\overline{Y}_{0,l+1}^1 c_l^1}{d_{l+1}^1}\,(l = r-1, r-2, \ldots). \tag{175}$$

Лемма 25. *В матрице системы* (174) *диагональные элементы* $d_r^1, \ldots, d_1^1$, *определяемые по формулам* (175), *положительны.*

Доказательство. Пусть $f_l = (4l-3)(3(r-l)+3)$, тогда $f_l > 0$ для $\forall\, l = \overline{1,r}$.

Покажем методом математической индукции, что $d_l^1 > f_l$ при $l = \overline{r-1,1}$.

Согласно (167) $d_{r-1}^1 = (76/3)r - 128/3 > 24r - 42 = f_{r-1}$, что является базой индукции.

Пусть $d_{l+1}^1 > f_{l+1} = 3(4l+1)(r-l)$. Тогда $d_l^1 = b_l^1 - c_l^1 a_{l+1}^1/d_{l+1}^1 > b_l^1 - c_l^1 a_{l+1}^1/f_{l+1}$, так как $c_l^1 a_{l+1}^1 = (4l+1)(4l+2)(3(r-l)-1)(3(r-l)+1) > 0$ при $l = \overline{r-2,1}$. Но $b_l^1 - c_l^1 a_{l+1}^1/f_{l+1} > f_l \Leftrightarrow$ $(8l-1)(3(r-l)+1)+4l-8-(1/3)(4l+2)(3(r-l)-1)(3(r-l)+1)(r-l)^{-1}-(4l-3)(3(r-l)+3) > 0$ $\Leftrightarrow$ $(2/3)(2l+1)(r-l)^{-1} > 0$, что верно. Поэтому $d_l^1 > f_l$, т. е. $d_l^1 > 0$ для $\forall\, l = \overline{1,r}$. $\square$

Следовательно можно полностью аннулировать верхнюю диагональ $c_{r-1}^1, \ldots, c_0^1$ матрицы системы (174), после чего первое уравнение $(l = 0)$ системы, полученной из (174), принимает вид: $0 \cdot h_{1,0}^1 = \overline{Y}_{0,0}^1$, где $\overline{Y}_{0,0}^1 = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,1} Y_{0,m}^1$ с $\theta_{1,m}^{2,1} = (-1)^m \prod_{j=0}^{m-1} (c_j^1/d_{j+1}^1) \ne 0$, так как $c_l^1 \ne 0$ для $\forall\, l = \overline{0,r-1}$.

В обозначениях (169): $\sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,1} Y_{0,m}^1 = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,1}((3(r-m)+2)Y_{1,m-1}^1 + (4m+1)Y_{1,m}^1 + 2Y_{2,m}^1) = \sum_{m=0}^{r-1}((4m+1)\theta_{1,m}^{2,1} + (3(r-m)-1)\theta_{1,m+1}^{2,1})Y_{1,m}^1 + (4r+1)\theta_{1,r}^{2,1} Y_{1,r}^1 + 2\sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,1} Y_{2,m}^1$, причем $(4m+1)\theta_{1,m}^{2,1} + (3(r-m)-1)\theta_{1,m+1}^{2,1} = (4m+1)(1-(4m+2)(3(r-m)-1)/d_{m+1}^1)\theta_{1,m}^{2,1}$.

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,0}^1 = 0$ дает для (144^2) с $v = 1$ первую резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^r \alpha_{1,m}^{2,1} \widehat{Y}_1^{[12m+3,12(r-m)]} + \sum_{m=0}^r \beta_{1,m}^{2,1} \widehat{Y}_2^{[12m,12(r-m)+4]} = 0, \tag{176}$$

где $\alpha_{1,m}^{2,1} = (4m+1)(1-(4m+2)(3(r-m)-1)/d_{m+1}^1)\theta_{1,m}^{2,1}$ $(m = \overline{0,r-1})$, $\alpha_{1,r}^{2,1} = (4r+1)\theta_{1,r}^{2,1} \ne 0$, $\beta_{1,m}^{2,1} = 2\theta_{1,m}^{2,1} \ne 0$, а $\theta_{1,m}^{2,1} = (-1)^m \prod_{j=0}^{m-1}(4j+1)(4j+2)/d_{j+1}^1 \ne 0$ по лемме 25.

Теперь аннулируем элементы $a_2^1, \ldots, a_r^1$ в исходной матрице уравнения (174), получая e_l^1 вместо b_l^1 и $\breve{Y}_{0,l}^1$ вместо $Y_{0,l}^1$ $(l \le r)$, пока $e_{l-1}^1 \ne 0$ $(l \ge 2)$, по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} &e_1^1 = b_1^1,\ \breve{Y}_{0,0}^1 = Y_{0,0}^1,\ \breve{Y}_{0,1}^1 = Y_{0,1}^1; \\ &e_l^1 = b_l^1 - a_l^1\, c_{l-1}^1/e_{l-1}^1,\ \breve{Y}_{0,l}^1 = Y_{0,l}^1 - \breve{Y}_{0,l-1}^1 a_l^1/e_{l-1}^1 \quad (l = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{177}$$

Лемма 26. *В матрице системы* (174) *определяемые по формулам* (177) *диагональные элементы* $e_1^1, \ldots, e_r^1$ *положительны.*

Доказательство. Пусть $f_l = 3(4l+2)(r-l)$, тогда $f_l > 0$ при $l = \overline{1, r-1}$ и $f_r = 0$.

Покажем методом математической индукции, что $e_l^2 > f_l$ при $l = \overline{1, r}$.

Согласно (165) $e_1^2 = 21r - 18 > 18r - 18 = f_1$, что является базой индукции.

Пусть $e_{l-1}^1 > f_{l-1} = 3(4l-2)(r-l+1)$. Тогда $e_l^1 = b_l^1 - a_l^1 c_{l-1}^1 / e_{l-1}^1 > b_l^1 - a_l^1 c_{l-1}^1 / f_{l-1}$, так как $a_l^1 c_{l-1}^1 = (3(r-l)+2)(3(r-l)+4)(4l-3)(4l-2) > 0$ при $l = \overline{1, r}$. Но $b_l^1 - a_l^1 c_{l-1}^1 / f_{l-1} > f_l$ $\Leftrightarrow$ $(8l-1)(3(r-l)+1)+4l-8-(1/3)(3(r-l)+2)(3(r-l)+4)(4l-3)(r-l+1)^{-1}-3(4l+2)(r-l) > 0$ $\Leftrightarrow$ $(1/3)(4l-3)(r-l+1)^{-1} > 0$, что верно. Поэтому $e_l^1 > f_l$, т.е. $e_l^1 \neq 0$ для $\forall\, l = \overline{1, r}$. $\square$

Следовательно можно полностью аннулировать нижнюю диагональ $a_2^1, \ldots, a_r^1$ матрицы системы (174), после чего последнее уравнение $(l = r)$ системы, полученной из (174), принимает вид: $b_r^1 \cdot h_{1,r-1}^1 = \breve{Y}_{0,r}^1$, а учитывая (173) получим: $\breve{Y}_{0,r}^1 - (12r-9)Y_{1,r}^1 = 0$, где $\breve{Y}_{0,r}^1 = \sum_{m=1}^r \theta_{2,m}^{2,1} Y_{0,m}^1$ с $\theta_{2,m}^{2,1} = (-1)^{r-m} \prod_{j=m}^{r-1} (a_{j+1}^1 / e_j^1) \neq 0$, так как $a_j^1 \neq 0$ для $\forall\, l = \overline{2, r}$.

В обозначениях (169): $\sum_{m=1}^r \theta_{2,m}^{2,1} Y_{0,m}^1 = \sum_{m=1}^r \theta_{2,m}^{2,1}((3(r-m)+2)Y_{1,m-1}^1 + (4m+1)Y_{1,m}^1 + 2Y_{2,m}^1) = (3r-1)\theta_1^2 Y_{1,0}^1 + \sum_{m=1}^{r-1}((4m+1)\theta_{2,m}^{2,1} + (3(r-m)-1)\theta_{2,m+1}^{2,1})Y_{1,m}^1 + (4r+1)Y_{1,r}^1 + 2\sum_{m=1}^r \theta_{2,m}^{2,1} Y_{2,m}^1$, причем $(4m+1)\theta_{2,m}^{2,1} + (3(r-m)-1)\theta_{2,m+1}^{2,1} = (3(r-m)-1)(1-(4m+1) \times (3(r-m)+1)/e_m^1)\theta_{2,m+1}^{2,1}$.

В результате уравнение $\breve{Y}_{0,r}^1 - (12r-9)Y_{1,r}^1 = 0$ дает для (144^2) с $v = 1$ вторую резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_{2,m}^{2,1} \widehat{Y}_1^{[12m+3,12(r-m)]} + \sum_{m=1}^{r} \beta_{2,m}^{2,1} \widehat{Y}_2^{[12m,12(r-m)+4]} = 0, \tag{178}$$

где $\alpha_{2,0}^{2,1} = (3r-1)\theta_{2,1}^2 \neq 0$, $\alpha_{2,m}^{2,1} = (3(r-m)-1)(1-(4m+1)(3(r-m)+1)/e_m^1)\theta_{2,m+1}^{2,1}$ $(m = \overline{1, r-1})$, $\alpha_{2,r}^{2,1} = -2(4r-5) \neq 0$, $\beta_{2,m}^{2,1} = 2\theta_{2,m}^{2,1} \neq 0$, а $\theta_{2,m}^{2,1} = (-1)^{r-m} \prod_{j=m}^{r-1} (3(r-j)-1) \times (3(r-j)+1)/e_j^1) \neq 0$ по лемме 26.

$\mathbf{2^0}$. $\mathbf{v = 2}$ $(\mathbf{k = 12r + 4})$. Подставляя $h_{2,l}^2$ и $h_{2,l-1}^2$ из (169_1) в (169_2), получаем систему:

$$a_l^2 h_{1,l-2}^2 + b_l^2 h_{1,l-1}^2 + c_l^2 h_{1,l}^2 = Y_{0,l}^2 \quad (l = \overline{0, r}), \tag{179}$$

в которой $a_l^2 = (3(r-l)+3)(3(r-l)+5)$ $(l = \overline{2, r})$, $b_l^2 = (8l-1)(3(r-l)+2)+4l-8$ $(l = \overline{1, r})$, $c_l^2 = (4l+1)(4l+2)$ $(l = \overline{0, r-1})$, $Y_{0,l}^2 = (3(r-l)+3)Y_{1,l-1}^2 + (4l+1)Y_{1,l}^2 + 2Y_{2,l}^2$.

Для решения системы (179) будем методом Гаусса аннулировать элементы $a_2^0, a_3^0, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} c_0^0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1^0 & c_1^0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2^0 & b_2^0 & c_2^0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{r-1}^0 & b_{r-1}^0 & c_{r-1}^0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_r^0 & b_r^0 \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая d_l^2 вместо b_l^2 и $\overline{Y}_{0,l}^2$ вместо $Y_{0,l}^2$ $(l \leq r)$, пока $d_{l+1}^2 \neq 0$ $(l \geq 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d_r^2 = b_r^2,\ \overline{Y}_{0,r}^2 = Y_{0,r}^2; \quad d_l^2 = b_l^2 - \frac{a_{l+1}^2 c_l^2}{d_{l+1}^2},\ \overline{Y}_{0,l}^2 = Y_{0,l}^2 - \frac{\overline{Y}_{0,l+1}^2 c_l^2}{d_{l+1}^2} \quad (l = r-1, r-2, \ldots). \tag{180}$$

Лемма 27. *В матрице системы* (179) *диагональные элементы* $d_r^2, \dots, d_1^2$, *определяемые по формулам* (180), *положительны.*

Доказательство. Пусть $f_l = (4l-3)(3(r-l)+5)$, тогда $f_l > 0$ для $\forall\, l = \overline{1,r}$.

Покажем методом математической индукции, что $d_l^2 > f_l$ при $l = \overline{r,1}$.

Согласно (180) $d_r^2 = 20r - 10 > 20r - 15 = f_r$, что является базой индукции.

Пусть $d_{l+1}^2 > f_{l+1} = (4l+1)(3(r-l)+2)$. Тогда $d_l^2 = b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2/d_{l+1}^2 > b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2/f_{l+1}$, так как $c_l^2 a_{l+1}^2 = 3(4l+1)(4l+2)(r-l)(3(r-l)+2) > 0$ при $l = \overline{r,1}$. Но $b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2/f_{l+1} > f_l$ $\Leftrightarrow$ $(8l-1)(3(r-l)+2) + 4l - 8 - 3(4l+2)(r-l) - (4l-3)(3(r-l)+5) > 0$ $\Leftrightarrow$ $5 > 0$, что верно. Поэтому $d_l^2 > f_l$, т.е. $d_l^2 > 0$ для $\forall\, l = \overline{1,r}$. $\square$

Следовательно можно полностью аннулировать верхнюю диагональ $c_{r-1}^2, \dots, c_0^2$ матрицы системы (179), после чего первое уравнение $(l=0)$ системы, полученной из (179), принимает вид: $0 \cdot h_{1,0}^2 = \overline{Y}_{0,0}^2$, где $\overline{Y}_{0,0}^2 = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,2} Y_{0,m}^2$ с $\theta_{1,m}^{2,2} = (-1)^m \prod_{j=1}^m (c_{j-1}^2/d_j^2) \neq 0$, так как $c_l^2 \neq 0$ для $\forall\, l = \overline{0, r-1}$.

В обозначениях (169): $\sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,2} Y_{0,m}^2 = \sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,2}((3(r-m)+3)Y_{1,m-1}^2 + (4m+1)Y_{1,m}^2 + 2Y_{2,m}^2) = \sum_{m=0}^{r-1}((4m+1)\theta_{1,m}^{2,2} + 3(r-m)\theta_{1,m+1}^{2,2})Y_{1,m}^2 + (4r+1)\theta_{1,r}^{2,2}Y_{1,r}^2 + 2\sum_{m=0}^r \theta_{1,m}^{2,2} Y_{2,m}^2$, причем $(4m+1)\theta_{1,m}^{2,2} + 3(r-m)\theta_{1,m+1}^{2,2} = (4m+1)(1 - 3(4m+2)(r-m)/d_{m+1}^2)\theta_{1,m}^{2,2}$.

В результате уравнение $\overline{Y}_{0,0}^2 = 0$ дает для (144^2) с $v=2$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_{1,m}^{2,2} \widehat{Y}_1^{[12m+3,12(r-m)+4]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{1,m}^{2,2} \widehat{Y}_2^{[12m,12(r-m)+8]} = 0, \tag{181}$$

где $\alpha_{1,m}^{2,2} = (4m+1)(1 - 3(4m+2)(r-m)/d_{m+1}^2)\theta_{1,m}^{2,2}$ $(m = \overline{0, r-1})$, $\alpha_{1,r}^{2,2} = (4r+1)\theta_{1,r}^{2,2} \neq 0$, $\beta_{1,m}^{2,2} = 2\theta_{1,m}^{2,2} \neq 0$, а $\theta_{1,m}^{2,2} = (-1)^m \prod_{j=1}^m ((4j-3)(4j-2)/d_j^2) \neq 0$ по лемме 27.

9.2.4 u=3 (k = 12r + 4v − 3)

Перепишем (144), используя введенные в разделе 9.1 разложения для q_1 и q_2 при $u=3$:

$$\begin{aligned} &(4l+1)h_1^{[12l+3,12(r-l)+4v-8]} + (3(r-l)+v+1)h_1^{[12l-9,12(r-l)+4v+4]} - 2h_2^{[12l,12(r-l)+4v-4]} = \\ &\qquad = \widehat{Y}_1^{[12l,12(r-l)+4v]} \quad (l = \overline{0,r}), \\ &(4l+4)h_2^{[12(l+1),12(r-l-1)+4v-4]} + (3(r-l)+v-1)h_2^{[12l,12(r-l)+4v-4]} - \\ &\qquad -3h_1^{[12l+3,12(r-l)+4v-8]} = \widehat{Y}_2^{[12l+9,12(r-l)+4v-8]} \quad (l = \overline{0, r + \lfloor (v-2)/3 \rfloor}). \end{aligned} \tag{144^3}$$

Вводя новые обозначения, запишем эту систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} &(4l+1)h_{1,l}^v + (3(r-l)+v+1)h_{1,l-1}^v - 2h_{2,l}^v = Y_{1,l}^v \quad (l = \overline{0,r}), \\ &(4l+4)h_{2,l+1}^v + (3(r-l)+v-1)h_{2,l}^v - 3h_{1,l}^v = Y_{2,l}^v \quad (l = \overline{0, r + \lfloor (v-2)/3 \rfloor}), \end{aligned} \tag{182}$$

где $h_{1,l}^v = h_1^{[12l+3,12(r-l)+4v-8]}$ $(l = \overline{0, r + \lfloor (v-2)/3 \rfloor})$, $Y_{1,l}^v = \widehat{Y}_1^{[12l,12(r-l)+4v]}$ $(l = \overline{0,r})$, $h_{2,l}^v = h_2^{[12l,12(r-l)+4v-4]}$ $(l = \overline{0, r + \lfloor (v-1)/3 \rfloor})$, $Y_{2,l}^v = \widehat{Y}_2^{[12l+9,12(r-l)+4v-8]}$ $(l = \overline{0, r + \lfloor (v-2)/3 \rfloor})$; $Y_{1,-1}^0, Y_{1,r}^0, Y_{1,-1}^2 = 0$.

Подставляя $h^v_{1,l}$ и $h^v_{1,l-1}$ из (182_2) в (182_1), получаем систему:

$$a^v_l h^v_{2,l-1} + b^v_l h^v_{2,l} + c^v_l h^v_{2,l+1} = Y^v_{0,l} \quad (l=\overline{0,r}), \tag{183}$$

в которой $a^v_l = (3(r-l)+v+1)(3(r-l)+v+2)$ $(l=\overline{1,r})$, $b^v_l = (8l+1)(3(r-l)+v)-7$ $(l=\overline{0,r+\lfloor (v-1)/3\rfloor})$, $c^v_l = (4l+1)(4l+4)$ $(l=\overline{0,r+\lfloor (v-1)/3\rfloor -1})$, $Y^v_{0,l} = 3Y^v_{1,l} + (3(r-l)+v+1)Y^v_{2,l-1} + (4l+1)Y^v_{2,l}$.

0^0. $\mathbf{v=0}$ $(\mathbf{k=12r-3})$. Для решения системы (183) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c^0_{r-2}, c^0_{r-3},\dots$ матрицы $\begin{pmatrix} b^0_0 & c^0_0 & 0 & \dots & 0 \\ a^0_1 & b^0_1 & c^0_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a^0_{r-2} & b^0_{r-2} & c^0_{r-2} \\ 0 & \dots & 0 & a^0_{r-1} & b^0_{r-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a^0_r \end{pmatrix}_{(r+1)\times r}$, получая d^0_l вместо b^0_l и $\overline{Y}^0_{0,l}$ вместо $Y^0_{0,l}$ $(l\le r)$, пока $d^0_{l+1}\ne 0$ $(l\ge 0)$, по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} &d^0_{r-1} = b^0_{r-1},\ \overline{Y}^0_{0,r} = Y^0_{0,r},\ \overline{Y}^0_{0,r-1} = Y^0_{0,r-1}; \\ &d^0_l = b^0_l - \frac{a^0_{l+1}\,c^0_l}{d^0_{l+1}},\ \overline{Y}^0_{0,l} = Y^0_{0,l} - \frac{\overline{Y}^0_{0,l+1}c^0_l}{d^0_{l+1}} \quad (l=r-2,r-3,\dots). \end{aligned} \tag{184}$$

Лемма 28. *В матрице системы* (183) *диагональные элементы* $d^0_{r-1},\dots,d^0_1$, *определяемые по формулам* (184), *положительны, а* d^0_0 *отрицателен.*

Доказательство. Для оценки снизу элементов d^0_l при $l=\overline{r-1,1}$ введем положительную функцию $f_l=(4l-3)(3(r-l)+1)$.

Покажем методом математической индукции, что $d^0_l > f_l$ при $l=\overline{r-1,1}$.

Согласно (184) $d^0_{r-1} = 24r-28 > 16r-28 = f_{r-1}$, что является базой индукции.

Пусть $d^0_{l+1} > f_{l+1} = (4l+1)(3(r-l)-2)$. Тогда $d^0_l = b^0_l - c^0_l a^0_{l+1}/d^0_{l+1} > b^0_l - c^0_l a^0_{l+1}/f_{l+1}$, так как $c^0_l a^0_{l+1} = (4l+1)(4l+4)(3(r-l)-2)(3(r-l)-1) > 0$ при $l=\overline{r-1,1}$. Но $b^0_l - c^0_l a^0_{l+1}/f_{l+1} = 3(8l+1)(r-l)-7-(4l+4)(3(r-l)-1) = (4l-3)(3(r-l)+1) = f_l$. Поэтому $d^0_l > f_l$, т.е. $d^0_l>0$ для $\forall\, l=\overline{1,r-1}$.

Оценим теперь элементы d^0_l $(l=\overline{0,r-1})$ сверху так, чтобы доказать, что $d^0_0<0$. Введем $g_l = 4l(3(r-l)+3)$. При $l=\overline{1,r-1}$ функция $g_l>0$ и $g_0=0$.

Согласно (184) $d^0_{r-1} = 24r-28 < 24r-24 = g_{r-1}$, что является базой индукции.

Пусть $d^0_{l+1} < g_{l+1} = 12(l+1)(r-l)$. Тогда $d^0_l = b^0_l - c^0_l a^0_{l+1}/d^0_{l+1} < b^0_l - c^0_l a^0_{l+1}/g_{l+1}$, так как $c^0_l a^0_{l+1} > 0$ при $l=\overline{r-1,0}$. Но $b^0_l - c^0_l a^0_{l+1}/g_{l+1} < g_l \Leftrightarrow 3(8l+1)(r-l)-7-(1/3)(4l+1)\times (3(r-l)-2)(3(r-l)-1)(r-l)^{-1} - 4l(3(r-l)+3) < 0 \Leftrightarrow (2/3)(-6r+2l-1)(r-l)^{-1}<0$, что верно при $l=\overline{0,r-1}$. Поэтому $d^0_l<g_l$, т.е. $d^0_0<0$. $\square$

Поэтому можно полностью аннулировать верхнюю диагональ $c^0_{r-2},\dots,c^0_0$ матрицы системы (183), затем аннулировать элементы $a^0_1,\dots,a^0_r$. Диагональные элементы $d^0_0,\dots,d^0_{r-1}$ при этом не изменятся, а вместо $\overline{Y}^0_{0,l}$ получим $\breve{Y}^0_{0,l}$ по рекуррентным формулам:

$$\breve{Y}^0_{0,0} = \overline{Y}^0_{0,0}, \quad \breve{Y}^0_{0,l} = \overline{Y}^0_{0,l} - \frac{a^0_l \breve{Y}^0_{0,l-1}}{d^0_{l-1}} \quad (l=\overline{1,r}).$$

Тогда последнее уравнение $(l = r)$ системы, полученной из (183), принимает вид: $0 \cdot h^0_{2,r-1} = \check{Y}^0_{0,r}$, где $\check{Y}^0_{0,r} = \sum_{m=0}^r \theta^{3,0}_m \overline{Y}^0_{0,m}$ с $\theta^{3,0}_m = (-1)^{r-m} \prod_{j=m+1}^r a^0_j/d^0_{j-1} \neq 0$, так как $a^0_l \neq 0$ для $\forall\, l = \overline{1,r}$. Согласно формуле (184) имеем: $\sum_{m=0}^r \theta^{3,0}_m \overline{Y}^0_{0,m} = \theta^{3,0}_0 (Y^0_{0,0} - c^0_0 Y^0_{0,1}/d^0_1 + \ldots + (-1)^{r-1} Y^0_{0,r-1} \prod_{j=0}^{r-2} c^0_j/d^0_{j+1}) + \ldots + \theta^{3,0}_{r-2}(Y^0_{0,r-2} - c^0_{r-2} Y^0_{0,r-1}/d^0_{r-1}) + \theta^{3,0}_{r-1} Y^0_{0,r-1} + \theta^{3,0}_r Y^0_{0,r} = \sum_{m=0}^r \theta^{3,0}_{1,m} Y^0_{0,m}$, где $\theta^{3,0}_{1,m} = \sum_{s=0}^m (-1)^{m-s} \theta^{3,0}_s \cdot \prod_{j=s}^{m-1} c^1_j/d^1_{j+1}$ $(m = \overline{0, r-1})$, $\theta^{3,0}_{1,r} = \theta^{3,0}_r = 1$.

В обозначениях (182): $\sum_{m=0}^r \theta^{3,0}_{1,m} Y^0_{0,m} = \sum_{m=0}^r \theta^{3,0}_{1,m}(3Y^0_{1,m} + (3(r-m)+1) Y^0_{2,m-1} + (4m+1) Y^0_{2,m}) = 3 \sum_{m=0}^r \theta^{3,0}_{1,m} Y^0_{1,m} + \sum_{m=0}^{r-1} ((4m+1)\theta^{3,0}_{1,m} + (3(r-m)-2)\theta^{3,0}_{1,m+1}) Y^0_{2,m}$.

В результате уравнение $\check{Y}^0_{0,r} = 0$ дает для (144^3) с $v = 0$ резонансную связь:

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha^{3,0}_{1,m} \widehat{Y}_1^{[12m,12(r-m)]} + \sum_{m=0}^{r-1} \beta^{3,0}_{1,m} \widehat{Y}_2^{[12m+9,12(r-m)-8)]} = 0, \tag{185}$$

где $\alpha^{3,0}_{1,m} = 3\theta^{3,0}_{1,m}$, $\beta^{3,0}_{1,m} = (4m+1)\theta^{3,0}_{1,m} + (3(r-m)-2)\theta^{3,0}_{1,m+1}$, а $\theta^{3,0}_{1,r} = 1$, $\theta^{3,0}_{1,m} = (-1)^{m+r} \times \sum_{s=0}^m \prod_{j=s+1}^r (3(r-j)+1)(3(r-j)+2)/d^0_{j-1} \cdot \prod_{j=s}^{m-1} (4j+1)(4j+4)/d^1_{j+1}$ $(m = \overline{0, r-1})$.

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v = 1}$ $(\mathbf{k = 12r + 1})$. Для решения системы (183) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c^1_{r-1}, c^1_{r-2}, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b^1_0 & c^1_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a^1_1 & b^1_1 & c^1_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a^1_{r-1} & b^1_{r-1} & c^1_{r-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a^1_r & b^1_r \end{pmatrix}_{(r+1)\times(r+1)}$, получая d^1_l вместо b^1_l и $\overline{Y}^1_{0,l}$ вместо $Y^1_{0,l}$ $(l \leq r)$, пока $d^1_{l+1} \neq 0$ $(l \geq 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d^1_r = b^1_r,\ \overline{Y}^1_{0,r} = Y^1_{0,r}; \quad d^1_l = b^1_l - \frac{a^1_{l+1} c^1_l}{d^1_{l+1}},\ \overline{Y}^1_{0,l} = Y^1_{0,l} - \frac{\overline{Y}^1_{0,l+1} c^1_l}{d^1_{l+1}} \quad (l = r-1, r-2, \ldots). \tag{186}$$

Лемма 29. *Для элементов* d^1_l *из* (186) *верна следующая прямая формула:*

$$d^1_l = (4l-3)(3(r-l)+2) \neq 0 \quad (l = \overline{r,0}). \tag{187}$$

Доказательство. В (186) $d^1_r = 2(4r-3)$, что совпадает с d^1_r из (187) и дает базу индукции.

Пусть для $\forall\, l = \overline{r-1, 0}$ верна формула (187). Тогда согласно (186) имеем $d^1_{l-1} = b^1_{l-1} - a^1_l c^1_{l-1} (d^1_l)^{-1} = (8l-7)(3(r-l)+4) - 7 - 4l(3(r-l)+3) = (4l-7)(3(r-l)+5)$. $\square$

Значит, система (183) однозначно разрешима.

$\mathbf{2^0}$. $\mathbf{v = 2}$ $(\mathbf{k = 12r + 5})$. Для решения системы (183) будем методом Гаусса аннулировать элементы $c^2_{r-1}, c^2_{r-2}, \ldots$ матрицы $\begin{pmatrix} b^2_0 & c^2_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a^2_1 & b^2_1 & c^2_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a^2_{r-1} & b^2_{r-1} & c^2_{r-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a^2_r & b^2_r \end{pmatrix}_{(r+1)\times(r+1)}$, получая d^2_l вместо b^2_l и $\overline{Y}^2_{0,l}$ вместо $Y^2_{0,l}$ $(l \leq r)$, пока $d^2_{l+1} \neq 0$ $(l \geq 0)$, по рекуррентным формулам:

$$d^2_r = b^2_r,\ \overline{Y}^2_{0,r} = Y^2_{0,r}; \quad d^2_l = b^2_l - \frac{a^2_{l+1} c^2_l}{d^2_{l+1}},\ \overline{Y}^2_{0,l} = Y^2_{0,l} - \frac{\overline{Y}^2_{0,l+1} c^2_l}{d^2_{l+1}} \quad (l = r-1, r-2, \ldots). \tag{188}$$

Лемма 30. *В матрице системы* (183) *диагональные элементы* $d_r^2, \ldots, d_1^2$, *определяемые по формулам* (188), *положительны, а* d_0^2 *отрицателен.*

Доказательство. Для оценки снизу элементов d_l^2 при $l = \overline{r,1}$ введем положительную функцию $f_l = (4l-3)(3(r-l)+3)$.

Покажем методом математической индукции, что $d_l^2 > f_l$ при $l = \overline{r,1}$.

Согласно (188) $d_r^2 = 16r - 5 > 12r - 9 = f_r$, что является базой индукции.

Пусть $d_{l+1}^2 > f_{l+1} = 3(4l+1)(r-l)$. Тогда $d_l^2 = b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2 / d_{l+1}^2 > b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2 / f_{l+1}$, так как $c_l^2 a_{l+1}^2 = 3(4l+1)(4l+4)(r-l)(3(r-l)+1) > 0$ при $l = \overline{r,1}$. Но $b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2 / f_{l+1} = (8l+1)(3(r-l)+2) - 7 - (4l+4)(3(r-l)+1) = (4l-3)(3(r-l)+3) = f_l$. Поэтому $d_l^2 > f_l$, т. е. $d_l^2 > 0$ для $\forall\, l = \overline{1,r}$.

Оценим теперь элементы d_l^2 $(l = \overline{0,r})$ сверху так, чтобы доказать, что $d_0^2 < 0$. Введем $g_l = 4l(3(r-l)+4)$. При $l = \overline{1,r}$ функция $g_l > 0$ и $g_0 = 0$.

Согласно (188) $d_r^2 = 16r - 5 < 16r = g_r$, что является базой индукции.

Пусть $d_{l+1}^2 < g_{l+1} = 4(l+1)(3(r-l)+1)$. Тогда $d_l^2 = b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2 / d_{l+1}^2 < b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2 / g_{l+1}$, так как $c_l^2 a_{l+1}^2 > 0$ при $l = \overline{r,0}$. Но $b_l^2 - c_l^2 a_{l+1}^2 / g_{l+1} < g_l \;\Leftrightarrow\; (8l+1)(3(r-l)+2) - 7 - 3(4l+1) \times (r-l) - 4l(3(r-l)+4) < 0 \;\Leftrightarrow\; -5 < 0!$ Поэтому $d_l^2 < g_l$ при $l = \overline{r,0}$, т. е. $d_0^2 < 0$. □

Значит, система (183) однозначно разрешима.

9.3 Полученные результаты

Возвращаясь к обозначениям, введенным для системы (144), согласно (149), (152), (159), (162), (166), (168), (172), (176), (178), (181), (185) заключаем, что $\forall r \in \mathbb{N}$ коэффициенты КОМ $Y^{[k]}$ удовлетворяют резонансным уравнениям:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha_{1,m}^{0,0} Y_1^{[12m+9,12(r-m-1)]} + \sum_{m=0}^{r-1} \beta_{1,m}^{0,0} Y_2^{[12m+6,12(r-m)-8]} = \tilde{c} \quad (k = 12r-6), \tag{189}$$

где $\alpha_{1,m}^{0,0} = 3\theta_{1,m}^{0,0}$, $\beta_{1,m}^{0,0} = 3(3(r-m)-2)(4m+3)^{-1}\theta_{1,m}^{0,0}$, а $\theta_{1,m}^{0,0} = (-1)^{r-1-m} \times \prod_{j=m+1}^{r-1}(3(r-j)-2)(4j+3)^{-1} \neq 0$;

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha_{1,m}^{1,0} Y_1^{[12m+6,12(r-m)-8]} + \sum_{m=0}^{r-1} \beta_{1,m}^{1,0} Y_2^{[12m+3,12(r-m)-4]} = \tilde{c} \quad (k = 12r-5), \tag{190}$$

где $\alpha_{1,m}^{1,0} = 2(4m+2)(3(r-m)-1)^{-1}\theta_{1,m}^{1,0}$, $\beta_{1,m}^{1,0} = 2\theta_{1,m}^{1,0}$, а $\theta_{1,m}^{1,0} = (-1)^m \times \prod_{j=0}^{m-1}(4j+2)(3(r-j)-1)^{-1} \neq 0$;

$$\sum_{m=0}^{r-1} \alpha_{1,m}^{2,0} Y_1^{[12m+3,12(r-m)-4]} + \sum_{m=0}^{r} \beta_{1,m}^{2,0} Y_2^{[12m,12(r-m)]} = \tilde{c} \quad (k = 12r-4), \tag{191}$$

где $\alpha_{1,m}^{2,0} = (4m+1)\theta_{1,m}^{2,0} + (3(r-m)-2)\theta_{1,m+1}^{2,0}$, $\beta_{1,m}^{2,0} = 2\theta_{1,m}^{2,0}$, а $\theta_{1,0}^{2,0} = 1$, $\theta_{1,m}^{2,0} = (-1)^m \times \sum_{s=m}^{r}\prod_{j=1}^{s}(4j-3)(4j-2)/e_j^0 \cdot \prod_{j=m+1}^{s}(3(r-j)+1)(3(r-j)+3)/e_{j-1}^0$ $(m = \overline{1,r})$, элементы e_m^0 находятся рекуррентно из формул (171), причем $\beta_{1,0}^{2,0} = 2$, $\beta_{1,r}^{2,0} = 2(-1)^r \prod_{j=1}^{r}(4j-3) \times (4j-2)/e_j^0 \neq 0$, а если $r = 1$, то и $\alpha_{1,0}^{2,0} \neq 0$;

$$\sum_{m=0}^{r}\alpha_{1,m}^{3,0}Y_1^{[12m,12(r-m)]}+\sum_{m=0}^{r-1}\beta_{1,m}^{3,0}Y_2^{[12m+9,12(r-m)-8)]}=\tilde c\quad(k=12r-3),\tag{192}$$

где $\alpha_{1,m}^{3,0}=3\theta_{1,m}^{3,0}$, $\beta_{1,m}^{3,0}=(4m+1)\theta_{1,m}^{3,0}+(3(r-m)-2)\theta_{1,m+1}^{3,0}$, а $\theta_{1,r}^{3,0}=1$, $\theta_{1,m}^{3,0}=(-1)^{m+r}\times\sum_{s=0}^{m}\prod_{j=s+1}^{r}(3(r-j)+1)(3(r-j)+2)/d_{j-1}^0\cdot\prod_{j=s}^{m-1}(4j+1)(4j+4)/d_{j+1}^1$ $(m=\overline{0,r-1})$, элементы d_m^0 находятся рекуррентно из формул (184), причем $\alpha_{1,r}^{3,0}=3$, $\alpha_{1,0}^{3,0}=3(-1)^r\times\prod_{j=1}^{r}(3(r-j)+1)(3(r-j)+2)/d_{j-1}^0\neq0$, а если $r=1$, то и $\beta_{1,0}^{3,0}\neq0$;

$$\sum_{m=0}^{r-1}\alpha_{1,m}^{0,1}Y_1^{[12m+9,12(r-m)-8]}+\sum_{m=0}^{r-1}\beta_{1,m}^{0,1}Y_2^{[12m+6,12(r-m)-4]}=\tilde c\quad(k=12r-2),\tag{193}$$

где $\alpha_{1,m}^{0}=3\theta_{1,m}^{0,1}$, $\beta_{1,m}^{0,1}=3(3(r-m)-1)(4m+3)^{-1}\theta_{1,m}^{0,1}$, а $\theta_{1,m}^{0,1}=(-1)^{r-1-m}\times\prod_{j=m+1}^{r-1}(3(r-j)-1)(4j+3)^{-1}\neq0$;

$$\sum_{m=0}^{r-1}\alpha_{1,m}^{1,1}Y_1^{[12m+6,12(r-m)-4]}+\sum_{m=0}^{r}\beta_{1,m}^{1,1}Y_2^{[12m+3,12(r-m)]}=\tilde c\quad(k=12r-1),\tag{194}$$

где $\alpha_{1,m}^{1,1}=(4m+2)\theta_{1,m}^{1,1}+(3(r-m)-2)\theta_{1,m+1}^{1,1}$, $\beta_{1,m}^{1,1}=2\theta_{1,m}^{1,1}$, а $\theta_{1,0}^{1,1}=1$, $\theta_{1,m}^{1,1}=(-1)^m\times\sum_{s=m}^{r}\prod_{j=1}^{s}(4j-2)(4j-1)/e_j^1\cdot\prod_{j=m+1}^{s}(3(r-j)+1)(3(r-j)+3)/e_{j-1}^1$ $(m=\overline{1,r})$, элементы e_m^1 находятся рекуррентно из формул (161), причем $\beta_{1,0}^{1,1}=2$, $\beta_{1,r}^{1,1}=2(-1)^r\prod_{j=1}^{r}(4j-2)\times(4j-1)/e_j^1\neq0$, а если $r=1$, то и $\alpha_{1,0}^{1,1}\neq0$;

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{m=0}^{r}\alpha_{1,m}^{2,1}Y_1^{[12m+3,12(r-m)]}+\sum_{m=0}^{r}\beta_{1,m}^{2,1}Y_2^{[12m,12(r-m)+4]}=\tilde c,\\ \textstyle\sum_{m=0}^{r}\alpha_{2,m}^{2,1}Y_1^{[12m+3,12(r-m)]}+\sum_{m=1}^{r}\beta_{2,m}^{2,1}Y_2^{[12m,12(r-m)+4]}=\tilde c\quad(k=12r),\end{gathered}\tag{195}$$

где $\alpha_{1,m}^{2,1}=(4m+1)(1-(4m+2)(3(r-m)-1)/d_{m+1}^1)\theta_{1,m}^{2,1}$ $(m=\overline{0,r-1})$, $\alpha_{1,r}^{2,1}=(4r+1)\theta_{1,r}^{2,1}\neq0$, $\beta_{1,m}^{2,1}=2\theta_{1,m}^{2,1}\neq0$, а $\theta_{1,m}^{2,1}=(-1)^m\prod_{j=0}^{m-1}(4j+1)(4j+2)/d_{j+1}^1)\neq0$, элементы d_m^1 находятся рекуррентно из формул (175), причем если $r=1$, то $\alpha_{1,0}^{2,1}\neq0$; $\alpha_{2,0}^{2,1}=(3r-1)\theta_{2,1}^{2}\neq0$, $\alpha_{2,m}^{2,1}=(3(r-m)-1)(1-(4m+1)(3(r-m)+1)/e_m^1)\theta_{2,m+1}^{2,1}$ $(m=\overline{1,r-1})$, $\alpha_{2,r}^{2,1}=-2(4r-5)\neq0$, $\beta_{2,m}^{2,1}=2\theta_{2,m}^{2,1}\neq0$, а $\theta_{2,m}^{2,1}=(-1)^{r-m}\prod_{j=m}^{r-1}(3(r-j)-1)(3(r-j)+1)/e_j^1)\neq0$, элементы e_m^1 находятся рекуррентно из формул (177);

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{m=0}^{r}\alpha_{1,m}^{1,2}Y_1^{[12m+6,12(r-m)]}+\sum_{m=0}^{r}\beta_{1,m}^{1,2}Y_2^{[12m+3,12(r-m)+4]}=\tilde c,\\ \textstyle\sum_{m=0}^{r-1}\alpha_{2,m}^{1,2}Y_1^{[12m+6,12(r-m)]}+\sum_{m=0}^{r}\beta_{2,m}^{1,2}Y_2^{[12m+3,12(r-m)+4]}=\tilde c\quad(k=12r+3),\end{gathered}\tag{196}$$

где $\alpha_{1,m}^{1,2}=3\theta_{1,m}^{1,2}\neq0$, $\beta_{1,0}^{1,2}=(3r+1)\theta_{1,0}^{1,2}\neq0$, $\beta_{1,m}^{1,2}=(3(r-m)+1)(1-(4m-1)\times(3(r-m)+2)/e_{m-1}^2)\theta_{1,m}^{1,2}$ $(m=\overline{1,r})$, а $\theta_{1,m}^{1,2}=(-1)^{r-m}\prod_{j=m}^{r-1}((3(r-j)-2)(3(r-j)-1)/e_j^2)\neq0$, элементы e_m^2 находятся рекуррентно из формул (165), причем если $r=1$, то $\beta_{1,r}^{1,2}\neq0$; $\alpha_{2,m}^{1,2}=3\theta_{2,m}^{1,2}\neq0$, $\beta_{2,0}^{1,2}=-(9/2)(r-1)$, $\beta_{2,m}^{1,2}=(4m-1)(1-(4m+2)(3(r-m)+1)/d_m^2)\theta_{2,m-1}^{1,2}$ $(m=\overline{1,r-1})$, $\beta_{2,r}^{1,2}=(4r-1)\theta_{2,r-1}^{1,2}\neq0$, а $\theta_{2,m}^{1,2}=(-1)^m\prod_{j=0}^{m-1}((4j+3)(4j+6)/d_{j+1}^2)\neq0$, элементы d_m^2 находятся рекуррентно из формул (167), причем $\beta_{2,0}^{1,2}=0$ только при $r=1$;

$$\sum_{m=0}^{r}\alpha_{1,m}^{2,2}Y_1^{[12m+3,12(r-m)+4]}+\sum_{m=0}^{r}\beta_{1,m}^{2,2}Y_2^{[12m,12(r-m)+8]}=\tilde c\quad(k=12r+4),\tag{197}$$

где $\alpha_{1,m}^{2,2} = (4m+1)(1-3(4m+2)(r-m)/d_{m+1}^2)\theta_{1,m}^{2,2}$ $(m=\overline{0,r-1})$, $\alpha_{1,r}^{2,2} = (4r+1)\theta_{1,r}^{2,2} \neq 0$, $\beta_{1,m}^{2,2} = 2\theta_{1,m}^{2,2} \neq 0$, а $\theta_{1,m}^{2,2} = (-1)^m \prod_{j=1}^m ((4j-3)(4j-2)/d_j^2) \neq 0$, элементы d_m^2 находятся рекуррентно из формул (180), а если $r=1$, то $\alpha_{1,0}^{2,2} \neq 0$.

В частности, для $r=1$ резонансные уравнения выглядят следующим образом:

$$3\widehat{Y}_1^{[9,0]} + \widehat{Y}_2^{[6,4]} = \tilde{c}; \quad \widehat{Y}_1^{[6,4]} + \widehat{Y}_2^{[3,8]} = \tilde{c}; \quad 3\widehat{Y}_1^{[3,8]} + 4\widehat{Y}_2^{[0,12]} + 2\widehat{Y}_2^{[12,0]} = \tilde{c};$$
$$\widehat{Y}_1^{[0,12]} + 2\widehat{Y}_1^{[12,0]} + \widehat{Y}_2^{[9,4]} = \tilde{c}; \quad 3\widehat{Y}_1^{[9,4]} + 2\widehat{Y}_2^{[6,8]} = \tilde{c}; \quad 2\widehat{Y}_1^{[6,8]} + \widehat{Y}_2^{[3,12]} + 2\widehat{Y}_2^{[15,0]} = \tilde{c};$$
$$\widehat{Y}_1^{[3,12]} + 10\widehat{Y}_1^{[15,0]} - 6\widehat{Y}_2^{[0,16]} + 4\widehat{Y}_2^{[12,4]} = \tilde{c}, \quad \widehat{Y}_1^{[3,12]} + \widehat{Y}_1^{[15,0]} + \widehat{Y}_2^{[12,4]} = \tilde{c};$$
$$3\widehat{Y}_1^{[6,12]} - 12\widehat{Y}_1^{[18,0]} + 4\widehat{Y}_2^{[3,16]} - \widehat{Y}_2^{[15,4]} = \tilde{c}, \quad \widehat{Y}_1^{[6,12]} + \widehat{Y}_2^{[15,4]} = \tilde{c};$$
$$2\widehat{Y}_1^{[3,16]} - 5\widehat{Y}_1^{[15,4]} + 10\widehat{Y}_2^{[0,20]} - 2\widehat{Y}_2^{[12,8]} = \tilde{c}.$$

Теорема 13. *Для того чтобы система* (143) *была формально эквивалентна исходной системе* (141), *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты КОМ* $Y^{[k]}$ *удовлетворяли:*
1) при $k = 12r-6$ *– уравнению* (189)*;*
2) при $k = 12r-5$ *– уравнению* (190)*;*
3) при $k = 12r-4$ *– уравнению* (191)*;*
4) при $k = 12r-3$ *– уравнению* (192)*;*
5) при $k = 12r-2$ *– уравнению* (193)*;*
6) при $k = 12r-1$ *– уравнению* (194)*;*
7) при $k = 12r$ *– двум уравнениям* (195)*;*
8) при $k = 12r+1$ *– равнялись нулю;*
9) при $k = 12r+2$ *– равнялись нулю;*
10) при $k = 12r+3$ *– двум уравнениям* (196)*;*
11) при $k = 12r+4$ *– уравнению* (197)*;*
12) при $k = 12r+5$ *– равнялись нулю* *(здесь везде* $r \geq 1$*).*

Следствие 16. *В КОМ* $Y^{[k]}$ *системы* (143)*:*
1,2) при $k = 12r-6, 12r-5$ $(r \geq 1)$ *все коэффициенты являются резонансными;*
3) при $k = 12r-4$, *если* $r=1$, *то все коэффициенты – резонансные, а если* $r \geq 2$, *то не удается полностью описать множество резонансных коэффициентов, так как множители* $\alpha_{1,m}^{2,0}$ $(m = \overline{0,r-1})$ *и* $\beta_{1,m}^{2,0}$ $(m = \overline{1,r-1})$ *могут обращаться в ноль, но коэффициенты* $Y_2^{[0,12r]}$ *и* $Y_2^{[12r,0]}$ *– резонансные;*
4) при $k = 12r-3$, *если* $r=1$, *то все коэффициенты – резонансные, а если* $r \geq 2$, *то не удается полностью описать множество резонансных коэффициентов, так как множители* $\alpha_{1,m}^{3,0}$ $(m = \overline{1,r-1})$ *и* $\beta_{1,m}^{3,0}$ $(m = \overline{0,r-1})$ *могут обращаться в ноль, но коэффициенты* $Y_1^{[0,12r]}$ *и* $Y_1^{[12r,0]}$ *– резонансные;*
5) при $k = 12r-2$ $(r \geq 1)$ *все коэффициенты – резонансные, при этом коэффициенты* $h_2^{[12r-3,0]}$ *КОМ* $h_2^{[k-5]}$ *также являются резонансными;*
6) при $k = 12r-1$, *если* $r=1$, *то все коэффициенты – резонансные, а если* $r \geq 2$, *то не удается полностью описать множество резонансных коэффициентов, так как множители* $\alpha_{1,m}^{1,1}$ $(m = \overline{0,r-1})$ *и* $\beta_{1,m}^{1,1}$ $(m = \overline{1,r-1})$ *могут обращаться в ноль, но коэффициенты* $Y_2^{[3,12r]}$ *и* $Y_2^{[12r+3,0]}$ *– резонансные;*
7) при $k = 12r$, *если* $r=1$, *то все коэффициенты – резонансные, а если* $r \geq 2$, *то не удается полностью описать множество резонансных коэффициентов, так как множители* $\alpha_{1,m}^{2,1}$ $(m = \overline{0,r-1})$ *и* $\alpha_{2,m}^{2,1}$ $(m = \overline{1,r-1})$ *могут обращаться в ноль, но все коэффициенты* $Y_2^{[12m,12(r-m)+4]}$ $(m = \overline{0,r})$, *а также* $Y_1^{[3,12r]}$ *и* $Y_1^{[12r+3,0]}$, *– резонансные;*

8,9,12) При $k = 12r+1, 12r+2, 12r+5 \ (r \geq 1)$ *все коэффициенты – нерезонансные;*
10) при $k = 12r+3$, *если* $r = 1$, *то все коэффициенты – резонансные, а если* $r \geq 2$, *то не удается полностью описать множество резонансных коэффициентов, так как множители* $\beta^{1,2}_{1,m}$ $(m = \overline{1,r})$ *и* $\beta^{1,2}_{2,m}$ $(m = \overline{1,r-1})$ *могут обращаться в ноль, но все коэффициенты* $Y_1^{[12m+6,12(r-m)]}$ $(m = \overline{0,r})$, *а также* $Y_2^{[3,12r+4]}$ *и* $Y_2^{[12r+3,4]}$ *– резонансные;*
11) при $k = 12r+4$, *если* $r = 1$, *то все коэффициенты – резонансные, а если* $r \geq 2$, *то не удается полностью описать множество резонансных коэффициентов, так как множители* $\alpha^{2,2}_{1,m}$ $(m = \overline{0,r-1})$ *могут обращаться в ноль, но все коэффициенты* $Y_2^{[12m,12(r-m)+8]}$ $(m = \overline{0,r})$, *а также* $Y_1^{[12r+3,4]}$ *– резонансные;*

Для $\forall\, k \geq 6$ положим $n_k = \{2$ при $k = 12r, 12r+3 \ (r \geq 1)$; 0 при $k = 12r+1, 12r+2, 12r+5 \ (r \geq 1)$; 1 – при остальных $k\}$.

Следствие 17. *В системе* (143) n_k *различных резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[k]}$ *образуют резонансный* k*-набор* $\mathcal{Y}^k$, *если это:*
1) $\mathcal{Y}^{12r-6}$ $(r \geq 1)$: $Y_1^{[12l_1+9,12(r-l_1-1)]}$ *или* $Y_2^{[12l_2+6,12(r-l_2)-8]}$ $(l_1, l_2 \in \{0, \ldots, r-1\})$;
2) $\mathcal{Y}^{12r-5}$ $(r \geq 1)$: $Y_1^{[12l_3+6,12(r-l_3)-8)]}$ *или* $Y_2^{[12l_4+3,12(r-l_4)-4)]}$ $(l_3, l_4 \in \{0, \ldots, r-1\})$;
3) a) $\mathcal{Y}^8$: $Y_1^{[3,8]}$, *или* $Y_2^{[0,12]}$, *или* $Y_2^{[12,0]}$*; b)* $\mathcal{Y}^{12r-4}$ $(r \geq 2)$: $Y_2^{[0,12r]}$, *или* $Y_2^{[12r,0]}$, *или* $Y_1^{[12m+3,12(r-m)-4]}$ $(m \in \{0, \ldots, r-1\})$, *если* $\alpha^{2,0}_{1,m} \neq 0$, *или* $Y_2^{[12m,12(r-m)]}$ $(m \in \{1, \ldots, r-1\})$, *если* $\beta^{2,0}_{1,m} \neq 0$;
4) a) $\mathcal{Y}^9$: $Y_1^{[0,12]}$, *или* $Y_1^{[12,0]}$, *или* $Y_2^{[9,4]}$*; b)* $\mathcal{Y}^{12r-3}$ $(r \geq 2)$: $Y_1^{[0,12r]}$, *или* $Y_1^{[12r,0]}$, *или* $Y_1^{[12m,12(r-m)]}$ $(m \in \{1, \ldots, r-1\})$, *если* $\alpha^{3,0}_{1,m} \neq 0$, *или* $Y_2^{[12m+9,12(r-m)-8]}$ $(m \in \{0, \ldots, r-1\})$, *если* $\beta^{3,0}_{1,m} \neq 0$;
5) $\mathcal{Y}^{12r-2}$ $(r \geq 1)$: $Y_1^{[12l_9+9,12(r-l_9)-8]}$ *или* $Y_2^{[12l_{10}+6,12(r-l_{10})-4]}$ $(l_9, l_{10} \in \{0, \ldots, r-1\})$;
6) a) $\mathcal{Y}^{11}$: $Y_1^{[6,8]}$, *или* $Y_2^{[3,12]}$, *или* $Y_2^{[15,0]}$*; b)* $\mathcal{Y}^{12r-1}$ $(r \geq 2)$: $Y_2^{[3,12r]}$, *или* $Y_2^{[12r+3,0]}$, *или* $Y_1^{[12m+6,12(r-m)-4]}$ $(m \in \{0, \ldots, r-1\})$, *если* $\alpha^{1,1}_{1,m} \neq 0$, *или* $Y_2^{[12m+3,12(r-m)]}$ $(m \in \{1, \ldots, r-1\})$, *если* $\beta^{1,1}_{1,m} \neq 0$;
7) a) $\mathcal{Y}^{12}$: *любые два из* $Y_1^{[3,12]}$, $Y_1^{[15,0]}$, $Y_2^{[0,16]}$, $Y_2^{[12,4]}$*; b)* $\mathcal{Y}^{12r}$ $(r \geq 2)$: $Y_2^{[0,12r+4]}$ *и* $Y_1^{[3,12r]}$, *или* $Y_1^{[12r+3,0]}$, *или* $Y_2^{[12l_{16},12(r-l_{16})+4]}$ $(l_{16} \in \{1, \ldots, r\})$; *либо любые два из* $Y_1^{[12m+3,12(r-m)]}$ $(m \in \{0, \ldots, r\})$, $Y_2^{[12m,12(r-m)+4]}$ $(m \in \{1, \ldots, r\})$ *при условии, что* $\alpha(\beta)^{2,1}_{1,m_1}\alpha(\beta)^{2,1}_{2,m_2} - \alpha(\beta)^{2,1}_{1,m_2}\alpha(\beta)^{2,1}_{2,m_1} \neq 0$ *(*m_1 *– номер первого выбранного коэффициента,* m_2 *– второго); либо* $Y_2^{[0,12r+4]}$ *и* $Y_1^{[12m+3,12(r-m)]}$ $(m \in \{1, \ldots, r-1\})$ *при условии, что* $\beta^{2,1}_{1,0}\alpha^{2,1}_{2,m} \neq 0$;
10) a) $\mathcal{Y}^{15}$: *либо* $Y_1^{[6,12]}$ *и* $Y_1^{[18,0]}$, *или* $Y_2^{[3,16]}$, *или* $Y_2^{[15,4]}$*; либо* $Y_2^{[15,4]}$ *и* $Y_1^{[18,0]}$ *или* $Y_2^{[3,16]}$*; b)* $\mathcal{Y}^{12r+3}$ $(r \geq 2)$: $Y_1^{[12r+6,0]}$ *и* $Y_2^{[3,12r+4]}$, *или* $Y_2^{[12r+3,4]}$, *или* $Y_1^{[12l_{18}+6,12(r-l_{18})]}$ $(l_{18} \in \{0, \ldots, r-1\})$; *либо любые два из* $Y_1^{[12m+6,12(r-m)]}$ $(m \in \{0, \ldots, r-1\})$, $Y_2^{[12m+3,12(r-m)+4]}$ $(m \in \{0, \ldots, r\})$ *при условии* $\alpha(\beta)^{1,2}_{1,m_1}\alpha(\beta)^{1,2}_{2,m_2} - \alpha(\beta)^{1,2}_{1,m_2}\alpha(\beta)^{1,2}_{2,m_1} \neq 0$ *(*m_1 *– номер первого выбранного коэффициента,* m_2 *– второго); либо* $Y_1^{[12r+6,0]}$ *и* $Y_2^{[12m+3,12(r-m)+4]}$ $(m \in \{1, \ldots, r-1\})$ *при условии, что* $\alpha^{1,2}_{1,r}\beta^{1,2}_{2,m} \neq 0$;
11) a) $\mathcal{Y}^{16}$: $Y_1^{[3,16]}$, *или* $Y_1^{[15,4]}$, *или* $Y_2^{[0,20]}$, *или* $Y_2^{[12,8]}$*; b)* $\mathcal{Y}^{12r+4}$ $(r \geq 2)$: $Y_1^{[12r+3,4]}$, *или* $Y_2^{[12l_{22},12(r-l_{22})+8]}$ $(l_{22} \in \{0, \ldots, r\})$, *или* $Y_1^{[12m+3,12(r-m)+4]}$ $(m \in \{0, \ldots, r-1\})$, *если* $\alpha^{2,2}_{1,m} \neq 0$;

Таким образом, система (143) по определению является ОНФ, если для каждого $k \geq 6$ все коэффициенты её КОМ $Y^{[k]}$ равны нулю, кроме n_k штук, принадлежащих любому резонансному набору, описанному в следствии 17, и имеющих произвольные значения.

Следствие 18. *Для системы* (143) *неполное семейство резонансных наборов* $\mathcal{Y}^*$ *имеет вид:* $\{\rho_1^r Y_1^{[12l_1+9,12(r-l_1-1)]}$, $\rho_2^r Y_1^{[12l_3+6,12(r-l_3)-8]}$ $(r \geq 1)$, $\rho_4^r Y_1^{[12l_7,12(1-l_7)]}$, $Y_1^{[12l_8,12(r-l_8)]}$ $(r \geq 2)$, $\rho_3^r Y_1^{[3,8]}$, $\rho_5^r Y_1^{[12l_9+9,12(r-l_9)-8]}$ $(r \geq 1)$, $\rho_7^r Y_1^{[12l_{13}+3,12(1-l_{13})]}$, $(1-l_{13})\rho_7^r\rho_8^r Y_1^{[15,0]}$, $\rho_6^r Y_1^{[6,8]}$, $(1-\rho_7^r)\rho_9^r Y_1^{[15,0]}$, $\rho_{10}^r Y_1^{[12l_{15}+3,12(r-l_{15})]}$ $(r \geq 2)$, $\rho_{11}^r\rho_{12}^r Y_1^{[18,0]}$, $(1-\rho_{11}^r)\rho_{13}^r Y_1^{[18,0]}$, $\rho_{11}^r Y_1^{[6,12]}$, $Y_1^{[12r+6,0]}$, $\rho_{14}^r Y_1^{[12l_{18}+6,12(r-l_{18})]}$ $(r \geq 2)$, $\rho_{15}^r Y_1^{[12l_{20}+3,16-12l_{20}]}$, $\rho_{16}^r Y_1^{[12r+3,4]}$ $(r \geq 2)$, $(1-\rho_1^r)Y_2^{[12l_2+6,12(r-l_2)-8]}$, $(1-\rho_2^r)Y_2^{[12l_4+3,12(r-l_4)-4]}$ $(r \geq 1)$, $(1-\rho_3^r)Y_2^{[12l_5,12(1-l_5)]}$, $Y_2^{[12l_6,12(r-l_6)]}$ $(r \geq 2)$, $(1-\rho_4^r)Y_2^{[9,4]}$, $(1-\rho_5^r)Y_2^{[12l_{10}+6,12(r-l_{10})-4]}$ $(r \geq 1)$, $(1-\rho_6^r)Y_2^{[12l_{11}+3,12(1-l_{11})]}$, $Y_2^{[12l_{12}+3,12(r-l_{12})]}$ $(r \geq 2)$, $(1-l_{13})\rho_7^r(1-\rho_8^r)Y_2^{[12l_{14},16-12l_{14}]}$, $(1-\rho_7^r)Y_2^{[12,4]}$, $(1-\rho_7^r)(1-\rho_9^r)Y_2^{[0,16]}$, $Y_2^{[0,12r+4]}$, $(1-\rho_{10}^r)Y_2^{[12l_{16},12(r-l_{16})+4]}$ $(r \geq 2)$, $\rho_{11}^r(1-\rho_{12}^r)Y_2^{[12l_{17}+3,16-12l_{17}]}$, $(1-\rho_{11}^r)Y_2^{[15,4]}$, $(1-\rho_{11}^r)(1-\rho_{13}^r)Y_2^{[3,16]}$, $(1-\rho_{14}^r)Y_2^{[12l_{19}+3,12(r-l_{19})+4]}$ $(r \geq 2)$, $(1-\rho_{15}^r)Y_2^{[12l_{21},20-12l_{21}]}$, $(1-\rho_{16}^r)Y_2^{[12l_{22},12(r-l_{22})+8]}$ $(r \geq 2)\}$, *где* $l_1, l_2, l_3, l_4, l_9, l_{10}, l_{18} \in \{0,\dots,r-1\}$, $l_5, l_7, l_{11}, l_{13}, l_{14}, l_{17}, l_{20}, l_{21} \in \{0,1\}$, $l_6, l_8, l_{12}, l_{15}, l_{19} \in \{0,r\}$, $l_{16} \in \{1,\dots,r\}$, $l_{22} \in \{0,\dots,r\}$, $\rho_j^r \in \{0,1\}$ $(j=\overline{1,7})$. *Если множитель при некотором* $Y_i^{[3q_1,4q_2]}$, *входящим в* $\mathcal{Y}^*$, *равен нулю, то этот элемент отсутствует.*

Теорема 14. *Для любой системы* (141), *и для любого выбранного по её невозмущенной части резонансного набора* $\mathcal{Y}^*$ *из следствия 18 существует и единственна почти тождественная замена* (142) *с заранее произвольным образом зафиксированными резонансными коэффициентами, преобразующая систему* (141) *в ОНФ* (143)*:*

$$
\begin{aligned}
\dot y_1 = {} & y_2^2 + \rho_3^r Y_1^{[3,8]} y_1 y_2^2 + \rho_4^r Y_1^{[12l_7,12(1-l_7)]} y_1^{4l_7} y_2^{3(1-l_7)} + \rho_6^r Y_1^{[6,8]} y_1^2 y_2^2 + \\
& + \rho_7^r Y_1^{[12l_{13}+3,12(1-l_{13})]} y_1^{4l_{13}+1} y_2^{3(1-l_{13})} + (1-l_{13})\rho_7^r\rho_8^r Y_1^{[15,0]} y_1^5 + (1-\rho_7^r)\rho_9^r Y_1^{[15,0]} y_1^5 + \\
& + \rho_{11}^r Y_1^{[6,12]} y_1^2 y_2^3 + \rho_{11}^r\rho_{12}^r Y_1^{[18,0]} y_1^6 + (1-\rho_{11}^r)\rho_{13}^r Y_1^{[18,0]} y_1^6 + \rho_{15}^r Y_1^{[12l_{20}+3,16-12l_{20}]} y_1^{4l_{20}+1} y_2^{4-3l_{20}} + \\
& + \sum_{r=1}^{\infty} \big(\rho_1^r Y_1^{[12l_1+9,12(r-l_1-1)]} y_1^{4l_1+3} y_2^{3(r-l_1-1)} + \rho_2^r Y_1^{[12l_3+6,12(r-l_3)-8]} y_1^{4l_3+2} y_2^{3(r-l_3)-2} + \\
& \qquad + \rho_5^r Y_1^{[12l_9+9,12(r-l_9)-8]} y_1^{4l_9+3} y_2^{3(r-l_9)-2}\big) + \\
& + \sum_{r=2}^{\infty} \big(Y_1^{[12l_8,12(r-l_8)]} y_1^{4l_8} y_2^{3(r-l_8)} + \rho_{10}^r Y_1^{[12l_{15}+3,12(r-l_{15})]} y_1^{4l_{15}+1} y_2^{3(r-l_{15})} + Y_1^{[12r+6,0]} y_1^{4r+2} + \\
& \qquad + \rho_{14}^r Y_1^{[12l_{18}+6,12(r-l_{18})]} y_1^{4l_{18}+2} y_2^{3(r-l_{18})} + \rho_{16}^r Y_1^{[12r+3,4]} y_1^{4r+1} y_2\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot y_2 = {} & y_1^3 + (1-\rho_3^r) Y_2^{[12l_5,12(1-l_5)]} y_1^{4l_5} y_2^{3(1-l_5)} + (1-\rho_4^r) Y_2^{[9,4]} y_1^3 y_2 + (1-\rho_7^r) Y_2^{[12,4]} y_1^4 y_2 + \\
& + (1-\rho_6^r) Y_2^{[12l_{11}+3,12(1-l_{11})]} y_1^{4l_{11}+1} y_2^{3(r-l_{11})} + (1-l_{13})\rho_7^r(1-\rho_8^r) Y_2^{[12l_{14},16-12l_{14}]} y_1^{4l_{14}} y_2^{4-3l_{14}} + \\
& + (1-\rho_7^r)(1-\rho_9^r) Y_2^{[0,16]} y_2^4 + \rho_{11}^r(1-\rho_{12}^r) Y_2^{[12l_{17}+3,16-12l_{17}]} y_1^{4l_{17}+1} y_2^{4-3l_{17}} + (1-\rho_{11}^r) Y_2^{[15,4]} y_1^5 y_2 + \\
& + (1-\rho_{11}^r)(1-\rho_{13}^r) Y_2^{[3,16]} y_1 y_2^4 + (1-\rho_{15}^r) Y_2^{[12l_{21},20-12l_{21}]} y_1^{4l_{21}} y_2^{5-3l_{21}} + \\
& \sum_{r=1}^{\infty} \big((1-\rho_1^r) Y_2^{[12l_2+6,12(r-l_2)-8]} y_1^{4l_2+2} y_2^{3(r-l_2)-2} + (1-\rho_2^r) Y_2^{[12l_4+3,12(r-l_4)-4]} y_1^{4l_4+1} y_2^{3(r-l_4)-1} + \\
& \qquad + (1-\rho_5^r) Y_2^{[12l_{10}+6,12(r-l_{10})-4]} y_1^{4l_{10}+2} y_2^{3(r-l_{10})-1}\big) + \sum_{r=2}^{\infty} \big(Y_2^{[12l_6,12(r-l_6)]} y_1^{4l_6} y_2^{3(r-l_6)} + \\
& + Y_2^{[12l_{12}+3,12(r-l_{12})]} y_1^{4l_{12}+1} y_2^{3(r-l_{12})} + Y_2^{[0,12r+4]} y_2^{3r+1} + (1-\rho_{10}^r) Y_2^{[12l_{16},12(r-l_{16})+4]} y_1^{4l_{16}} y_2^{3(r-l_{16})+1} + \\
& + (1-\rho_{14}^r) Y_2^{[12l_{19}+3,12(r-l_{19})+4]} y_1^{4l_{19}+1} y_2^{3(r-l_{19})+1} + (1-\rho_{16}^r) Y_2^{[12l_{22},12(r-l_{22})+8]} y_1^{4l_{22}} y_2^{3(r-l_{22})+2}\big).
\end{aligned}
$$

Пример 5. *Любая система* (141) *формально эквивалентна, например, следующей ОНФ:*

$$\dot{y}_1 = y_2^2 + \sum_{r=2}^{\infty} \bigl(Y_1^{[12r,0]} y_1^{4r} + Y_1^{[12r+6,0]} y_1^{4r+2}\bigr), \qquad \dot{y}_2 = y_1^3 + Y_2^{[9,4]} y_1^3 y_2 + Y_2^{[3,16]} y_1 y_2^4 +$$
$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \bigl((Y_2^{[12r-6,4]} y_1^{4r-2} y_2 + Y_2^{[12r-9,8]} y_1^{4r-3} y_2^2) + (Y_2^{[12r,0]} y_1^{4r} + Y_2^{[12r-6,8]} y_1^{4r-2} y_2^2) +$$
$$+ (Y_2^{[12r+3,0]} y_1^{4r+1} + Y_2^{[12r,4]} y_1^{4r} y_2) + (Y_2^{[12r+3,4]} y_1^{4r+1} y_2 + Y_2^{[12r,8]} y_1^{4r} y_2^2) + Y_2^{[0,12r+4]} y_2^{3r+1}\bigr).$$

Список литературы

[1] *Басов В.В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами // Дифференц. уравнения. — 2003.— Т. 39, № 2.— С. 154–170.

[2] Басов В.В., Федотов А.А. Обобщенная нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // Вестник СПбГУ. Сер. 1.— 2007.— вып. 1.— С. 25–30.

[3] *Басов В.В., Скитович А.В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, I // Дифференц. уравнения.— 2003.— Т. 39, № 8.— С. 1016–1029.

[4] Басов В.В., Федорова Е.В. Двумерные вещественные системы ОДУ с квадратичной невозмущенной частью: классификация и вырожденные обобщенные нормальные формы // Дифференциальные уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal).—2010.— № 4.— С. 49–85.

[5] *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, II // Дифференц. уравнения.— 2005.— Т. 41. № 8.— С. 1011–1023.

[6] *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, III // Дифференц. уравнения.— 2006.— Т. 42. № 3.— С. 308–319.

[7] *Басов В. В., Федорова Е. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, IV // Дифференц. уравнения.— 2009.— Т. 45. № 3.— С. 297–313.

[8] *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевым приближением $(x_2^3, -x_1^3)$ // Дифференц. уравнения.— 2004.— Т. 40. № 8.— С. 1011–1022.

[9] *Басов В. В., Слуцкая А. Г.* Обобщенные нормальные формы двумерных вещественных систем ОДУ с квазиоднородным многочленом в невозмущенной части // Дифференциальные уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal).— 2010.— № 4.— С. 108–133.