ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2013
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77–39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.938

Н.А.Бегун

О замкнутости листового инвариантного множества возмущенной системы [1]

matandmeh@gmail.com

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой было показано, что возмущенная система имеет листовое инвариантное множество, расположенное в окрестности листового инвариантного множества невозмущенной системы.

В настоящей работе доказывается, что листовое инвариантное множество возмущенной системы является замкнутым.

В первой части приведены основные определения и результаты статьи [1]. Во второй части доказывается замкнутость листового инвариантного множества возмущенной системы.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{1.1}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$, а X — это C^1-функция, действующая из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$. Предполагается, что существует число $\omega > 0$ такое, что

$$X(t + \omega, x) = X(t, x).$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(2010-1.1-111-128-033).

Обозначим через $x(t, t_0, x_0)$ максимально продолженное решение системы (1.1), удовлетворяющее условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Заметим, что, в силу периодичности, мы можем провести факторизацию

$$t \sim t + kw,\ t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z},$$

и в дальнейшем рассматривать нашу систему в пространстве $\Xi = S \times \mathbb{R}^2$ (так называемое цилиндрическое пространство), где S — это окружность длины ω.

Обозначим через $\Phi(t, t_0, x_0)$ фундаментальную матрицу линейной системы

$$\dot{x} = \frac{\partial X(t, x(t, t_0, x_0))}{\partial x}\, x, \tag{1.2}$$

удовлетворяющую условию $\Phi(t_0, t_0, x_0) = I$, где I — тождественный оператор на $\mathbb{R}^2$.

Будем говорить, что система (1.2) слабо гиперболична на интервале $J \subset \mathbb{R}$ с константами a, λ_1 и λ_2, если $\lambda_2 < \lambda_1$, $\lambda_1 > 0$, $a \geq 1$ и существуют дополняющие друг друга линейные подпространства $U^n(t, t_0, x_0)$ и $U^s(t, t_0, x_0)$, $\dim U^n(t, t_0, x_0) = 1$, такие, что

$$\Phi(t, t_0, x_0)U^s(t_0, t_0, x_0) = U^s(t, t_0, x_0), \quad \Phi(t, t_0, x_0)U^n(t_0, t_0, x_0) = U^n(t, t_0, x_0),$$

для любого $t \in J$ и если $\bar{x} \in U^s(\tau, t_0, x_0)$, то

$$|\Phi(t, t_0, x_0)\Phi^{-1}(\tau, t_0, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_1(t-\tau)},\ \text{для } t \geq \tau,\ t, \tau \in J,$$

и если $\bar{x} \in U^n(\tau, t_0, x_0)$, то

$$|\Phi(t, t_0, x_0)\Phi^{-1}(\tau, t_0, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_2(t-\tau)},\ \text{для } t \leq \tau,\ t, \tau \in J.$$

Линейное подпространство $U^s(t_0, x_0) = U^s(t_0, t_0, x_0)$ называется устойчивым линейным подпространством, линейное подпространство $U^n(t_0, x_0) = U^n(t_0, t_0, x_0)$ — нейтральным линейным подпространством.

Множество $W \subset \Xi$ называется инвариантным множеством системы (1.1), если из того, что $(t_0, x_0) \in W$, следует, что $(t, x(t, t_0, x_0)) \in W$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $K \in \Xi$ — компактное инвариантное множество системы (1.1). Положим $K_{t_0} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (t_0, x) \in K\}$. Множество K будем называть слабо гиперболическим, если выполнены следующие два условия:
(1) линейная система (1.2) слабо гиперболична на $\mathbb{R}$ с константами a, λ_1 и λ_2 для любой точки $(t_0, x_0) \in K$;

(2) существует $r > 0$ такое, что при любых $(t_0, x_0) \in K$, существует 1-мерный диск $\widehat{D}(t_0, x_0) \subset K_{t_0}$ радиуса r, такой, что
(i) x_0 - центральная точка $\widehat{D}(t_0, x_0)$;
(ii) если $x \in \widehat{D}(t_0, x_0)$, то в точке (t_0, x) линейное подпространство $U^n(t_0, x)$ касается диска $\widehat{D}(t_0, x_0)$;
(iii) множество $D(t_0, x_0) = \{(t, x) : |t - t_0| < r, x \in \widehat{D}(t, x(t, t_0, x_0))\}$ является локально инвариантным.

В этой работе мы не предполагаем липшицеву зависимость $U^n(t_0, x_0)$ от x_0, теряя, очевидно, при этом свойство единственности дисков. Вместо липшицевости мы потребуем выполнения следующего условия:
(iv) если $\widehat{D}_1(t_0, x_0)$ и $\widehat{D}_2(t_0, x_0)$ — два диска в точке (t_0, x_0) со свойствами (i),(ii),(iii), то $\widehat{D}_1(t_0, x_0) = \widehat{D}_2(t_0, x_0)$.

Известно, что если K является слабо гиперболическим, то существует $\alpha > 0$ такое, что $\angle(U^s(t_0, x_0), U^n(t_0, x_0)) > \alpha$ для любых $(t_0, x_0) \in K$.

Для $(t_0, x_0) \in K$ определим множества $\Upsilon_1(t_0, x_0), \Upsilon_2(t_0, x_0), ..., \Upsilon(t_0, x_0)$ следующим образом:

$$\Upsilon_1(t_0, x_0) = \bigcup_{(t,x) \in D(t_0,x_0)} D(t, x), \quad \Upsilon_{i+1}(t_0, x_0) = \bigcup_{(t,x) \in \Upsilon_i(t_0,x_0)} D(t, x) \text{ для } i \geq 1,$$

$$\Upsilon(t_0, x_0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Upsilon_i(t_0, x_0).$$

Множество $\Upsilon(t_0, x_0)$ будем называть листом, проходящим через (t_0, x_0). В том случае, когда нам не важна точка (t_0, x_0), мы будем обозначать лист просто Υ.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим ее возмущение

$$\dot{y} = X(t, y) + Y(t, y), \tag{1.3}$$

где Y — это C^1-функция, действующая из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$ такая, что

$$Y(t + \omega, x) = Y(t, x).$$

Обозначим через $y(t, t_0, x_0)$ максимально продолженное решение системы (1.3), удовлетворяющее условию $y(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Теорема. *Пусть K — компактное слабо гиперболическое инвариантное множество системы* (1.1), $(t', x') \in K$, Υ — *лист, проходящий через* (t', x'). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если* $\|Y\|_{C^1} \leq \delta$,

то существует непрерывное отображение $h : \Upsilon \longrightarrow \Xi$, *удовлетворяющее условиям*
(0) *если* $h(t_0, x_0) = (t_1, y_1)$, *то* $t_1 = t_0$;
(1) $|h(t,x) - (t,x)| \leq \varepsilon$;
(2) $\Upsilon^Y = h(\Upsilon)$ *— инвариантное множество системы* (1.3);
(3) *линейная система*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial(X(t, y(t, t_0, y_0)) + Y(t, y(t, t_0, y_0)))}{\partial y} y \tag{1.4}$$

слабо гиперболична при любых $(t_0, y_0) \in \Upsilon^Y$;
(4) *нейтральное подпространство* $U_Y^n(t_0, y_0)$ *системы* (1.4) *касается множества* $h(t_0, \widehat{D}(t_0, x_0))$ *в точке* (t_0, y_0) *где* $(t_0, y_0) = h(t_0, x_0)$;
(5) *множество*

$$K^Y = \bigcup_{\Upsilon \in K} \Upsilon^Y$$

является замкнутым.

В статье [1] были доказаны утверждения (0)–(4). Наша дальнейшая задача — доказать утверждение (5).

2. Докажем замкнутость множества K^Y.

Заметим, что отображение h является непрерывным на каждом листе в отдельности, но не обязательно будет непрерывным на всем множестве K, поэтому из замкнутости множества K замкнутость множества K^Y не следует.

Докажем, что множество $K_0^Y = \{x \in \mathbb{R}^2 : (0, x) \in K^Y\}$ является замкнутым.

Предположим противное. Тогда существует последовательность

$$\{q_n\},\ q_n \in K_0^Y,\ n \in \mathbb{N},$$

такая, что $\lim_{n\to\infty} q_n = q$, и при этом $q \notin K_0^Y$.

Будем считать, что $(0, q_n) \in \Upsilon_n^Y$, где $\Upsilon_n^Y = h(\Upsilon_n)$, Υ_n — лист K.

Рассмотрим последовательность

$$\{p_n\},\ p_n \in K_0,\ n \in \mathbb{N},$$

такую, что $(0, p_n) \in \Upsilon_n$, и $h(0, p_n) = (0, q_n)$.

Легко видеть, что

$$|\, p_n - q_n \,| \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

Из этого и из компактности множества K следует, что мы можем считать, что существует предел $\lim_{n\to\infty} p_n = p,\ (0,p) \in \Upsilon$, где Υ — лист K.

В противном случае мы бы перешли к подпоследовательности.

Из (2.1) и из теоремы о предельном переходе следует, что

$$| p - q | \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Докажем, что для любого $t \in \mathbb{R}$, точка $(t, y(t,0,q))$, где $y(t,0,q)$ — решение системы (1.3), лежит в $\varepsilon-$окрестности листа Υ.

Зафиксируем $t \in \mathbb{R}$. Будем считать, что $t > 0$.

Рассмотрим $0 < t_0 < 2T$, где T — это число, зафиксированное нами в статье [1]. Заметим, что из рассуждений, проведенных нами ранее, следует, что если $(0, x_0) \in K$ и $|y_0 - x_0| < \varepsilon$, то

$$y(t_0, 0, y_0) \in \Gamma(t_0, x(t_0, 0, x_0), \frac{\beta}{2}), \tag{2.3}$$

где β — число, зафиксированное в статье [1], а $\Gamma(t_0, x(t_0, 0, x_0))$ — множество, определенное там же.

Положим $\tilde{p} = x(t_0, 0, p)$. Рассмотрим последовательность $\{\tilde{p}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ такую, что $\tilde{p}_n = x(t_0, 0, p_n)$.

В силу того, что множества Υ, Υ_n являются инвариантными, получим, что $(t_0, \tilde{p}) \in \Upsilon,\ (t_0, \tilde{p}_n) \in \Upsilon_n$.

Заметим также, что $\lim_{n\to\infty} \tilde{p}_n = \tilde{p}$.

Положим $\bar{q} = y(t_0, 0, q)$. Рассмотрим последовательность $\{\bar{q}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ такую, что $\bar{q}_n = y(t_0, 0, q_n),\ n \in \mathbb{N}$.

Из инвариантности Υ_n^Y, $n \in \mathbb{N}$ следует, что $(t_0, \bar{q}_n) \in \Upsilon_n^Y$.

Заметим, что $\lim_{n\to\infty} \bar{q}_n = \bar{q}$.

Рассмотрим последовательность $\{\bar{p}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ такую, что $h(t_0, \bar{p}_n) = (t_0, \bar{q}_n)$.

Заметим, что $(t_0, \bar{p}_n) \in \Upsilon_n$. Это следует из того, что $h(\Upsilon_n) = \Upsilon_n^Y$.

Легко видеть, что

$$| \bar{p}_n - \bar{q}_n | \leq \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Не умаляя общности, мы можем считать, что $\lim_{n\to\infty} \bar{p}_n = \bar{p}$.

Из (2.4) следует, что

$$| \bar{p} - \bar{q} | \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

Докажем, что $(t_0, \bar{p}) \in \Upsilon$.

Для этого покажем, что если бы $(t_0, \bar{p}) \notin \Upsilon$, то в точке $(t_0, \tilde{p})$ существовало бы два диска $\widehat{D}^1(t_0, \tilde{p})$ и $\widehat{D}^2(t_0, \tilde{p})$, удовлетворяющих свойствам (i),(ii),(iii). Такого в силу свойства (iv) быть не может.

Из (2.3) следует, что $\bar{q}_n \in \Gamma(t_0, \tilde{p}_n, \frac{\beta}{2})$.

Из этого, в свою очередь, следует, что $\bar{p}_n \in \widehat{D}(t_0, \tilde{p}_n)$.

Рассмотрим диск $\widehat{D}(t_0, \tilde{p})$. Рассмотрим также диск $\widetilde{D}(t_0, \tilde{p})$:

$$\widetilde{D}(t_0, \tilde{p}) = \bigcup_{(t_0, x) \in \widehat{D}(t_0, \tilde{p})} \widehat{D}(t_0, x).$$

Обозначим его "крайние" точки x_1 и x_2.

Рассмотрим $M(t_0, x_1)$ и $M(t_0, x_2)$. Определение $M(t, x)$ было дано в [1]. Продолжим диски $\widehat{D}(t_0, \tilde{p}_i)$, $i \in \mathbb{N}$ до пересечений с $M(t_0, x_1)$ и $M(t_0, x_2)$. Обозначим получившиеся дуги J_i, $i \in \mathbb{N}$.

Заметим, что каждая из этих дуг задается функцией

$$\theta_i(x), \quad x \in \widetilde{D}(t_0, \tilde{p}) \cup \{x_{1,2}\},$$

при этом $\theta_i(x) \in M(t_0, x)$.

Заметим также, что в силу непрерывности $U^n(t_0, x)$ и того, что $\tilde{p}_n \to \tilde{p}$, $n \to \infty$ мы можем утверждать, что последовательность функций $\{\theta_i\}$ сходится в пространстве C^1 к некоторой функции $\theta(x)$, для которой $\theta(\tilde{p}) = 0$.

Рассмотрим дугу

$$J : x + \theta(x), \quad x \in \widetilde{D}(t_0, \tilde{p}).$$

Заметим, что $\tilde{p} \in J$. Заметим также, что в силу того, что $\bar{p}_n \to \bar{p}$, $n \to \infty$ точка $\bar{p}$ тоже принадлежит J.

По нашему предположению $\bar{p} \notin \Upsilon$. Из всего этого в итоге следует, что в точке $\tilde{p}$ существуют два диска, удовлетворяющие свойствам (i),(ii),(iii). Это, как мы уже отмечали выше, невозможно в силу свойства (iv).

В результате, мы пришли к противоречию.

Итак, $(t_0, \bar{p}) \in \Upsilon$. Из этого и из (2.5) следует, что $(t_0, \bar{q})$ лежит в $\varepsilon-$окрестности листа Υ. Итерируя, если это необходимо, мы получим это же утверждение для произвольного $t > 0$.

В случае $t < 0$ доказательство проводится аналогичным образом.

Итак, мы доказали, что для любого $t \in \mathbb{R}$ точка $(t, y(t,0,q))$, где $y(t,0,q)$ — решение системы (1.3), лежит в $\varepsilon-$окрестности листа Υ.

Рассмотрим $\Upsilon^Y = h(\Upsilon)$. Заметим, что Υ^Y — это инвариантное множество системы (1.3). Из того, что $q \notin K^Y$ следует, что
$q \notin \Upsilon^Y$.

Из того, что

$$|h(t,x) - (t,x)| < \varepsilon, \quad (t,x) \in K,$$

следует, что точка $(t, y(t,0,q))$, $t \in \mathbb{R}$ лежит в $2\varepsilon-$окрестности множества Υ^Y.

Очевидно, что с помощью $M(t,x)$, $(t,x) \in \Upsilon$ мы можем ввести координаты $M(t,y), (t,y) \in \Upsilon^Y$ в $\beta/2$-окрестности поверхности Υ^Y и определить отображение $\hat{\varphi}$ следующим образом.

Рассмотрим точку $(t_0, x_0) \in \Upsilon$. Ей соответствует точка
$(t_0, y_0) \in \Upsilon^Y$ такая, что $h(t_0, x_0) = (t_0, y_0)$.

Рассмотрим теперь множество

$$\Gamma^Y(t_0, y_0, \frac{\beta}{2}) =$$

$$= \left\{ y + z : (t_0, y) \in h(t_0, \widehat{D}(t_0, x_0)), z \in M(t_0, y), |z| \leq \frac{\beta}{2} \right\}.$$

Отображение $\hat{\varphi}$ определим следующим образом

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_{(t_0, y_0)} : \Gamma^Y(t_0, y_0, \frac{\beta}{2}) \longrightarrow h(t_0, \widehat{D}(t_0, x_0)),$$

удовлетворяющее $\hat{\varphi}(y+z) = y$, где $(t_0, y) \in h(t_0, \widehat{D}(t_0, x_0))$,
$z \in M(t_0, y)$.

Заметим, что диски Перрона $D^p_Y(t,y)$, $(t,y) \in \Upsilon^Y$ образуют расслоение в $\beta/2-$окрестности Υ^Y.

Повторим рассуждения, аналогичные рассуждениям в [1], и получим, что из того, что $|y_1 - y_0| < 2\varepsilon$, $(t, y_0) \in \Upsilon^Y$, следует, что

$$|y(t+\tau, t, y_1) - \hat{\varphi}(y(t+\tau, t, y_1))| \leq \frac{|y_1 - y_0|}{25}, \quad T \leq \tau \leq 2T. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$A = |q - \hat{\varphi}(q)|. \tag{2.7}$$

Заметим, что $A \neq 0$. Из (2.6) следует, что мы можем выбрать такое $\widehat{T} > 0$, что если $|y_1 - y_0| < 2\varepsilon$, $(t, y_0) \in \Upsilon^Y$, то

$$\left| y(t + \widehat{T}, t, y_1) - \hat{\varphi}(y(t + \widehat{T}, t, y_1)) \right| < A. \tag{2.8}$$

Положим $\breve{q} = y(-\widehat{T}, 0, q)$.

Заметим, что $(-\widehat{T}, \breve{q})$ лежит в 2ε-окрестности множества Υ^Y.

Из этого и из (2.8) следует, что

$$\left| y(0, -\widehat{T}, \breve{q}) - \hat{\varphi}(y(0, -\widehat{T}, \breve{q})) \right| < A.$$

Отсюда следует, что $|q - \hat{\varphi}(q)| < A$.

Приходим к противоречию с (2.7).

Итак, мы доказали, что множество K_0^Y замкнуто. Аналогично доказывается, что каждое из множеств

$$K_{t_0}^Y = \{x \in \mathbb{R}^2 : \, (t_0, x) \in K^Y\}$$

является замкнутым.

Докажем, что множество K^Y является замкнутым. Рассмотрим последовательность

$$\{(t_n, x_n)\}, \; (t_n, x_n) \in K^Y, \quad n \in \mathbb{N},$$

такую что $\lim_{n\to\infty}(t_n, x_n) = (\hat{t}, \hat{x})$.

Докажем, что $(\hat{t}, \hat{x}) \in K^Y$. Рассмотрим последовательность $\{(\hat{t}, \hat{x}_n)\}$, $n \in \mathbb{N}$ такую, что $\hat{x}_n = y(\hat{t}, t_n, x_n)$.

Заметим, что в силу того, что $(t_n, x_n) \in K^Y$, мы можем утверждать, что последовательность $\{\hat{x}_n\}$ лежит в $K_{\hat{t}}^Y$.

Докажем, что $\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}$. Зафиксируем число $\tilde{\varepsilon} > 0$.

Из того, что $\lim_{n\to\infty}(t_n, x_n) = (\hat{t}, \hat{x})$, следует, что существует $N_1 > 0$ такое, что $\left|(t_n, x_n) - (\hat{t}, \hat{x})\right| \le \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$, при $n > N_1$, и $N_2 > 0$ такое, что $\left|(t_n, x_n) - (\hat{t}, \hat{x}_n)\right| \le \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$, при $n > N_2$.

В итоге, $\left|(\hat{t}, \hat{x}) - (\hat{t}, \hat{x}_n)\right| \le \tilde{\varepsilon}$, при $n > \max(N_1, N_2)$. Из этого следует, что $\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}$.

Из замкнутости $K_{\hat{t}}^Y$ следует, что $\hat{x} \in K_{\hat{t}}^Y$. Из этого следует, что $(\hat{t}, \hat{x}) \in K^Y$.

Утверждение (5) доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бегун Н. А. Об устойчивости листовых инвариантных множеств двумерных периодических систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 3–12.

2. V. A. Pliss and G. R. Sell. Perturbations of attractors of differential equations // J. Differential Equations. 1991. Vol. 92. P. 100–124.

3. V. A. Pliss and G. R. Sell. Approximation Dynamics and the Stability of Invariant Sets // J. Differential Equations. 1997. Vol. 149. P. 1–51.

4. Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1976. 304 с.