ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2010
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77–39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.925;   531.36

Об устойчивости положения равновесия существенно нелинейных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы

Ю.Н.Бибиков[1]

1. Постановка задачи. Рассмотрим вещественно аналитическую гамильтонову систему с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия в начале координат.

Пусть гамильтониан имеет вид $H = H^0 + H^1$ с невозмущенной частью

$$H^0 = \frac{\lambda_1}{2m}(p_1^{2m} + mq_1^2) - \frac{\lambda_2}{2n}(p_2^{2n} + nq_2^2), \tag{1}$$

где $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, а $m > 1, n > 1$ – натуральные числа. Разложение возмущения H^1 по степеням p_1, q_1, p_2, q_2 не содержит членов порядка ниже $2N+|k-\ell|+1$, где N – наименьшее общее кратное чисел m и n, $N = m\ell = nk$, если, рассматривая p_1 как величину ℓ-го измерения, а переменную p_2 как величину k-го измерения, приписать переменным q_1, q_2 измерение, равное N.

Такая задача возникает при исследовании консервативных возмущений пары осцилляторов

$$\ddot{p}_1 + \lambda_1^2 p_1^{2m-1} = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{p}_2 + \lambda_2^2 p_2^{2n-1} = 0.$$

Отметим, что к виду (1) приводятся гамильтонианы, у которых коэффициентами при q_1^2 и q_2^2 являются произвольные положительные числа.

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 09-01-00734а.

В работе доказываются две теоремы.

Теорема 1. *Если $n \neq m$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 2. *Если $n = m$, то положение равновесия условно устойчиво по Ляпунову для начальных данных, удовлетворяющих условию $H \neq 0$.*

Исследование поверхности уровня $H = 0$ при $m = n$ будет проведено в последнем разделе работы.

2. Переменные "действие–угол". Перейдем к переменным x, y, φ, ψ по формулам

$$\begin{aligned} p_1 &= ((m+1)x)^{\frac{1}{m+1}} C_m(\varphi), \quad q_1 = ((m+1)x)^{\frac{m}{m+1}} S_m(\varphi), \\ p_2 &= ((n+1)y)^{\frac{1}{n+1}} C_n(\psi), \quad q_2 = ((n+1)y)^{\frac{n}{n+1}} S_n(\psi), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x \geqslant 0, y \geqslant 0$, а C_m, S_m, C_n, S_n – введенные А.М.Ляпуновым [1] функции, определяемые условиями

$$\begin{aligned} &C_m' = -S_m, \quad S_m' = C_m^{2m-1}, \\ &C_n' = -S_n, \quad S_n' = C_n^{2n-1}, \\ &C_m(0) = C_n(0) = 1, \quad S_m(0) = S_n(0) = 0. \end{aligned}$$

Имеют место интегральные соотношения

$$C_m^{2m}(\varphi) + mS_m^2(\varphi) = 1, \quad C_n^{2n}(\psi) + nS_n^2(\psi) = 1.$$

Функции C_m, S_m и C_n, S_n периодичны с некоторыми периодами N_m и N_n соответственно.

Так как

$$dp_1^\wedge dq_1 = dx^\wedge d\varphi \quad \text{и} \quad dp_1^\wedge dq_2 = dy^\wedge d\psi$$

то замена (2) является канонической. В результате получается гамильтониан $F = f(x, y) + f^*(x, y, \varphi, \psi)$, где

$$f = \frac{\lambda_1}{2m}((m+1)x^{\frac{2m}{m+1}} - \frac{\lambda_2}{2n}((n+1)y^{\frac{2n}{n+1}},$$

а f^* есть ряд по степеням $x^{\frac{1}{m+1}}, y^{\frac{1}{n+1}}$ с периодическими по φ, ψ коэффициентами, разложение которого не содержит членов порядка ниже $2N + |k - \ell| + 1$, если $x^{\frac{1}{m+1}}$ приписать ℓ-е измерение, а $y^{\frac{1}{n+1}}$ – k-е измерение.

3. Положения КАМ-теории. Рассмотрим гамильтонову систему общего вида в переменных $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ – "действие', $\varphi, \psi (\mod 2\pi)$ – "угол"с гамильтонианом $F = f(x, y) + f^*(x, y, \varphi, \psi)$, невозмущенная часть f которого не зависит от угловых переменных, а возмущение f^* бесконечно мало по отношению к f при стягивании окрестности положения равновеси в начало координат.

Предположим, что гамильтониан F получен из вещественно аналитического гамильтониана переходом к переменным “действие–угол".

Для невозмущенной системы точкам (x, y) соответствуют двумерные инвариантные торы. Согласно положениям КАМ-теории те торы сохраняются при возмущениях, для которых в точке (x, y) выполняется равенство

$$f_y = \Delta f_x \tag{4}$$

(здесь и в дальнейшем буквенный индекс внизу обозначает производную по соответствующему индексу), где параметр Δ удовлетворяет диофантовому неравенству

$$|k_1 + k_2\Delta| > K(|k_1| + |k_2|)^{-2}, \tag{5}$$

если $K > 0, |k_1| + |k_2+ \neq 0, k_1, k_2$ – целые.

Предположим, что выполнено условие “изоэнергетической"невырожденности

$$A = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Тогда [2], если возмущение достаточно мало, то инвариантные торы существуют на каждой поверхности уровня $F = \text{const}$ в любой окрестности положения равновесия и если при этом $K \to 0$ достаточно быстро, то мера объединения торов на данной поверхности уровня как бесконечно малая величина эквивалентная мере относительной окрестности.

Геометрический смысл условия изоэнергетической невырожденности состоит в следующем: для невозмущенного гамильтониана кривые $f(x, y) = c$ и кривые (4) пересекаются трансверсально.

Каждый двумерный тор разделяет трехмерную поверхность $F(x, y, \varphi, \psi) = c$. Следовательно, каждая траектория либо принадлежит инвариантному тору, либо “заперта"между двумя инвариантными торами. Равномерность относительно постоянной c величины окрестности, в которой выполняются указанные положения, обеспечивается независимостью величины K в (5) от c. Отсюда вытекает устойчивость по Ляпунову положения равновесия.

Пример 1. Случай В.И.Арнольда – Ю.Мозера (см. [3, добавление 8]. Он соответствует $m = n = 1$. В этом случае

$$f = \lambda_1 x - \lambda_2 y + \frac{1}{2}\beta_{11}x^2 + \rho_{12}xy + \frac{1}{2}\beta_{22}y^2, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

Условие (6) имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \lambda_1 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & -\lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Выполнение этого неравенства обеспечивает устойчивость положения равновесия по Ляпунову.

Пример 2. Случай А.Г.Сокольского [1, теорема 4.1]. Он соответствует $n = 1$ в (1). Тогда

$$f = \lambda_1 x^{\frac{2m}{m+1}} - \lambda_2 y, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, m > 1 - \text{целое.}$$

Соответственно, кривые (4) – это прямые $x = \text{const}$, а линии уровня $f = c$ – параболы с показателем $\frac{2m}{m+1} > 1$. Эти линии пересекаются трансверсально, что обеспечивает устойчивость положения равновесия.

Вернемся к рассмотрению невозмущенного гамильтониана (3). Имеем

$$f_x = \lambda_1((m+1)x)^{\frac{m-1}{m+1}}, \quad f_y = -\lambda_2((n+1)y)^{\frac{n-1}{n+1}}, f_{xy} = 0,$$
$$f_{xx} = (m-1)\lambda_1((m+1)x)^{\frac{-2}{m+1}}, \quad f_{yy} = -(n-1)\lambda_2((n+1)y)^{\frac{-2}{n+1}}.$$

Кривые $f = 0$ и $A = 0$ задаются уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_1}{m}((m+1)x)^{\frac{2m}{m+1}} = \frac{\lambda_2}{n}((n+1)y)^{\frac{2n}{n+1}}, \\ &\frac{\lambda_1}{m-1}((m+1)x)^{\frac{2m}{m+1}} = \frac{\lambda_2}{n-1}((n+1)y)^{\frac{2n}{n+1}}. \end{aligned} \tag{7}$$

соответственно. Кривые (4) задаются уравнением

$$\lambda_2((n+1)y)^{\frac{n-1}{n+1}} = -\Delta\lambda_1((m+1)y)^{\frac{m-1}{m+1}} \quad (\Delta < 0). \tag{8}$$

4. Случай $m \neq n$. Примем для определенности, что $m > n$ (тогда $k > \ell$). В этом случае кривая $A = 0$ лежит ниже кривой $f = 0$ (при стандартном расположении полуосей координат), так как

$$\frac{n}{m} > \frac{n-1}{m-1}. \tag{9}$$

Будем искать точки пересечения кривых (8) и линий $f(x,y) = c$. Введем для краткости обозначения $X = (m+1)x$, $Y = (n+1)y$. Искомые точки пересечения определяются системой уравнений

$$\begin{cases} Y^{\frac{n-1}{n+1}} = -\dfrac{\Delta\lambda_1}{\lambda_2} X^{\frac{m-1}{m+1}} \\ Y^{\frac{2n}{n+1}} = \dfrac{\lambda_1 n}{\lambda_2 m} X^{\frac{2m}{m+1}} - \dfrac{2nc}{\lambda_2} \end{cases} \tag{10}$$

Исключая Y, находим

$$c = \frac{\lambda_1}{2m} X^{\frac{2m}{m+1}} - \frac{\lambda_2}{2n} \left(-\frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{2n}{n-1}} X^{\frac{2n(m-1)}{(n-1)(m+1)}}. \tag{11}$$

Из (9) следует, что вычитаемое имеет больший показатель степени X, нежели уменьшаемое.

Обозначим правую часть (11) через $R(X)$. Решая уравнение $R(X) = 0$, находим, помимо корня $X = 0$, корень

$$X_0 = \frac{M_1}{\Delta^{\frac{n(m+1)}{m-n}}}, \text{ где } M_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{2(n-m)}} \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{(n-1)(m+1)}{2(m-n)}}.$$

Решая уравнение $R'(X) = 0$, находим точку максимума $R(X)$:

$$X_{\max} = \frac{M_2}{\Delta^{\frac{n(m+1)}{m-n}}}, \text{ где } M_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{2(n-m)}} \left(\frac{n-1}{m-1} \right)^{\frac{(n-1)(m+1)}{2(m-n)}}. \tag{12}$$

где

Отсюда

$$c_{\max} = R(X_{\max}) = \frac{M_3}{\Delta^{\frac{2mn}{m-n}}}. \tag{13}$$

Как отмечалось в п.3, кривая $A = 0$ состоит из точек касания кривых $f = c$ и (8). Поскольку кривая $A = 0$ лежит ниже кривой $f = 0$, то в точках касания $c > 0$. Из (10) и (7) получается, что

$$C_{\max} = \frac{\lambda_1}{2m} \left(\frac{n}{m} - \frac{n-1}{m-1} \right) X_{\max}^{\frac{2m}{m+1}}.$$

Отсюда и из (12) и (13)

$$M_3 = \frac{\lambda_1}{2m} \left(\frac{n}{m} - \frac{n-1}{m-1} \right) M_2^{\frac{2m}{m+1}}.$$

Из вышеизложенного следует, что при $c \leqslant 0$ кривые $f(x,y) = c$ и (8) в области $X > 0$ пересекаются трансверсально при любом $\Delta < 0$ в единственной точке с абсциссой, большей X_0.

При $c > 0$ из (13) следует, что если

$$\Delta^{\frac{2mn}{m-n}} < \frac{M_3}{c},$$

то имеется два трансверсальных пересечения в точках с абсциссами одна между 0 и $X_{\max}$, другая между $X_{\max}$ и X_0. Следовательно, для любого c существует промежуток изменения параметра Δ, в котором кривые $f(x,y) = c$ и (8) пересекаются трансверсально.

На основании сказанного в п.3 заключаем, что, если величина $|c|$ достатоточно мала, то трехмерная поверхность уровня $F(c)$ тем более полно заполнена инвариантными двумерными торами, чем меньше рассматриваемая окрестность начала координат. Требуемая малость возмущения f^* обеспечивается наличием слагаемого $|k - \ell|$ в определении порядка малости H^1.

Чтобы убедиться в справедливости последнего требуемого утверждения, перейдем к переменным z_1, z_2, φ, ψ по формулам

$$\begin{aligned} (m+1)x &= (\varepsilon\rho\cos\theta)^{N+\ell}\lambda_2^{\frac{m+1}{2m}} + \varepsilon^{N+k+1/2}\rho^{N+k}z_1, \\ (n+1)y &= (\varepsilon\rho\sin\theta)^{N+k}\lambda_1^{\frac{n+1}{2n}} + \varepsilon^{N+k+1/2}\rho^{N+k}z_2, \end{aligned} \tag{14}$$

где ε – малый положительный параметр, $\rho > 0, |z_i| < 1, i = 1,2,$

$$\varepsilon^{\frac{1}{3(N+k)}} < \theta < \frac{\pi}{2} - \varepsilon^{\frac{1}{3(N+k)}}.$$

Выполняя в системе

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -f^*_\varphi, \quad \dot{y} = -f^*_\psi, \\ &\dot{\varphi} = \lambda_1((m+1)x)^{\frac{m-1}{m+1}} + f^*_x, \quad \dot{\psi} - \lambda_2((n+1)y)^{\frac{n-1}{n+1}} + f^*_y, \end{aligned}$$

Замену (14), получим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= O(\varepsilon^{N-\ell+1/2}), \quad i = 1,2, \\ \dot{\varphi} &= \lambda_1\lambda_2^{\frac{m-1}{2m}}(\varepsilon\rho\cos\theta)^{N-\ell} + O(\varepsilon^{N+k-2\ell+1}), \\ \dot{\psi} &= \lambda_1^{\frac{n-1}{n+1}}\lambda_2(\varepsilon\rho\sin\theta)^{N-k} + O(\varepsilon^{N-\ell+1}). \end{aligned} \tag{15}$$

Так как $k > \ell$, то порядок малости функций, обозначенных символом Ландау 0, превышает порядок малости первых слагаемых в уравнениях для $\dot{\varphi}$

и $\dot\psi$. Это позволяет применить КАМ-теорию, согласно которой параметры ρ, θ можно подобрать так, чтобы система (16) имела квазипериодические решения, которым соответствуют инвариантные двумерные торы, о которых говорится в п.3. Отсюда вытекает теорема 1.

5. Случай $m = n$. Тогда $k = \ell$. В этом случае кривые $A = 0$ и $f = 0$ совпадают и задаются уравнением

$$y = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{m+1}{2m}} x. \tag{16}$$

Вне этой прямой кривые $f(x, y) = c$ и (8) пересекаются трансверсально или вообще не имеют общих точек.

Второй случай не имеет места. Действительно, уравнение (11) имеет вид

$$\frac{2cm}{\lambda_2(m+1)^{\frac{2m}{m+1}}} = x^{\frac{2m}{m+1}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \left(\frac{-\Delta\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{2m}{m+1}}\right).$$

При $c \neq 0$ и $\Delta \neq -\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{m+1}{2m}}$ это уравнение имеет единственное решение. Геометрически это очевидно, так как кривые (8) – это прямые, проходящие через начало координат, а кривые $f = c \neq 0$ – гиперболы с показателем $\frac{2m}{m+1}$, для которых прямая (16) является асимптотой.

Выполняя замену (14), получим систему (15) при $k = \ell$, к которой, как и выше, применима КАМ-теория.

Следовательно, все поверхности уровня гамильтониана F, близкие к нулевому, кроме, быть может, поверхности $F = 0$, содержат инвариантные двумерные торы. Это дает теорему 2.

Чтобы закончить рассмотрение случая $m = n$, проведем редукцию системы на поверхность $F = 0$. Разрешая уравнения $F = 0$ относительно y, получим $y = G(x, \varphi, \psi)$. В системе

$$\dot x = -F\varphi, \quad \dot y = -F\psi,$$
$$\dot\varphi = Fx, \quad \dot\psi = Fy$$

положим $y = G(x, \varphi, \psi)$. Так как $F(x, G, \varphi, \psi) = 0$, то $F_y G_\varphi + F_\varphi = 0$ и $F_x + F_y G_x = 0$. Следовательно,

$$\frac{dx}{d\psi} = -\frac{F_\varphi}{F_y} = G_\varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{F_x}{F_y} = -G_x.$$

Итак, на поверхности $F = 0$ движени описываются гамильтониановой системой с гамильтонианом $-G$ и с независимой переменной ψ. Это система с одной степенью свободы, но не автономная, а периодически зависящая от “времени"ψ. Такую систему можно исследовать отогуартными методами КАМ-теории.

Из (3) следует, что

$$G = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{m+1}{2m}} x + g(x^{\frac{1}{m+1}}, \varphi, \psi),$$

где $g = O\left(x^{\frac{m+2}{m+1}}\right)$. Гамильтониану $-G$ соответствует система

$$\frac{dx}{d\psi} = G_\varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = -\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{m+1}{2m}} - g_x. \tag{17}$$

Если $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{m+1}{2m}}$ иррационально, то канонической заменой переменной гамильтониан $-G$ можно привести к виду

$$E = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{m+1}{2m}} z + dz^{\frac{n+2}{n+1}} + O\left(z^{\frac{m+3}{m+1}}\right),$$

где d – среднее значение коэффициента g при $x^{\frac{m+2}{m+1}}$.

Если $d \neq 0$, то отображение Пуанкаре является закручивающим в смысле [5] и система (17) имеет в любой окрестности начала координат инвариантные двумерные торы [5], которые разделяют трехмерное фазовое пространство системы. Отсюда и из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Если* $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{n+1}{2n}}$ *иррационально и среднее значение коэффициента* g_1 *отлично от нуля, то положение равновесия системы с гамильтонианом* $H(p_1, q_1, p_2, q_1)$ *устойчиво по Ляпунову.*

Литература

1. Ляпунов А.М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Собр. соч., т.2. М.,-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С.272–331.

2. Broer H.W., Huitema G.B., Sevriuk M.B. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems. Lecture Notes in Math., N 1645. 195 p.

3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., Наука. 1989. 472 с.

4. Сокольский А.Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка. Прикладная математика и механика. 1977. Т.41, вып.1. С.24–33.

5. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М., Мир, 1973. 164 с.