

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2017

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи

УДК 517.97 : 532.526

БИЕКТИВНОСТЬ ПАР УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И ЛОКАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОМАССОБМЕНА В ТОЧКЕ ТОРМОЖЕНИЯ ГИПЕРЗВУКОВОГО ПОТОКА

Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет

(КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева

Россия, 420111, г. Казань, К. Маркса, 10

e-mail: ggbil2@gmail.com , bilchnat@gmail.com

Аннотация

Установлены условия монотонной зависимости параметров пограничного слоя и локальных параметров теплообмена от управляющих воздействий. Установлены условия диффеоморфности пар управляющих воздействий и пар локальных параметров теплообмена. Приведены результаты вычислительных экспериментов. Построены области допустимых значений «тепло-трение».

Ключевые слова: теплообмен, гиперзвуковые течения, ламинарный пограничный слой, управление, обратные задачи, диффеоморфизм, точка торможения, вычислительные эксперименты.

Abstract

The conditions of heat and mass transfer local parameters and boundary layer parameters monotonous dependence on controls are given. The diffeomorphness

conditions for controls pairs and pairs of heat and mass transfer local parameters are established. The computational experiments are presented. The domains of allowed values «heat-friction» are obtained.

Keywords: heat and mass transfer, hypersonic flows, laminar boundary layer, control, inverse problems, diffeomorphism, stagnation point, computational experiments.

Введение

Данная работа, продолжающая исследования [1], является расширенным вариантом материалов докладов, представленных на Воронежскую зимнюю математическую школу «Современные методы теории функций и смежные проблемы – 2017» [2] и международную конференцию «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017» [3], и доклада [4], прочитанного 25 мая 2017 года на международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвящённой памяти профессора В. Ф. Демьянова (CNSA – 2017), на секции 3 «Проблемы негладкой механики». Кроме того, материал данной статьи был частично использован при прочтении докладов [5, 6] 14 июня 2017 года на секции 3.3 «Прикладные задачи управления» XI Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление».

В данной работе используются обозначения из [7].

1. Об однозначной зависимости локальных параметров теплообмена от управляющих воздействий в точке торможения

1.1. Одномерный случай

Уточним приведённые в работах [8–11] утверждения о характере зависимости *параметров* пограничного слоя – функций $\bar{\theta}_0(m_0, \tau_0, s_0)$, $\bar{\theta}_1(\dots)$, $\bar{\omega}_0(\dots)$, $\bar{\omega}_1(\dots)$, представляющих собой решения алгебраических систем (15) и (31) из [12], и *параметров теплообмена* – функции $q_0 = q(0; m_0, \tau_0, s_0)$, определяющей значения локального теплового потока в точке торможения, и функции $\bar{f}_0 = \bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$, представляющей коэффициент [10] при значащей степени x локального напряжения трения $f(x; m, \tau, s)$, от управляющих воздействий m_0, τ_0, s_0 в точке торможения.

Пусть фиксированы значения *неизменяемых параметров*:

$$\text{число Маха } M_\infty \in [10; 40], \quad (1)$$

$$\text{высота полёта } H \in [10; 30] \text{ [км]}, \quad (2)$$

$$\text{радиус тела } R \in [0,1; 1] \text{ [м]}, \quad (3)$$

а диапазоны изменения *управляющих параметров* в точке торможения ограничены следующим образом:

$$m_0 = m(0) \in [0; 1], \quad (4)$$

$$\tau_0 = \tau(0) \in [0,15; 0,9], \quad (5)$$

$$s_0 = \sigma B_0^2(0) \in [0; 5 \cdot 10^4] \text{ [Тл/Ом} \cdot \text{м]}. \quad (6)$$

Размерность [Тл/Ом · м] управляющего параметра s_0 для краткости далее в тексте не приводится.

Тогда для $\bar{\theta}_0(m_0, \tau_0, s_0)$, $\bar{\theta}_1(\dots)$, $\bar{\omega}_0(\dots)$, $\bar{\omega}_1(\dots)$, $q_0(\dots)$, $\bar{f}_0(\dots)$ установлены следующие свойства.

Утверждение 1. В условиях (1)–(6) для любого сочетания (фиксированных) значений τ_0, s_0 функции $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1$ строго монотонно возрастают, а функции q_0, \bar{f}_0 – строго монотонно убывают по m_0 .

Утверждение 2. В условиях (1)–(6) для любого сочетания (фиксированных) значений m_0, s_0 функции $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, q_0$ строго монотонно убывают, а функция \bar{f}_0 – строго монотонно возрастает по τ_0 .

Утверждение 3. В условиях (1)–(6) для любого сочетания (фиксированных) значений m_0, τ_0 функции $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1$ строго монотонно возрастают, а функции q_0, \bar{f}_0 – строго монотонно убывают по s_0 .

1.2. Двумерный случай

В указанных в п.1.1 условиях установлено [13], что для пары (q_0, \bar{f}_0) верны следующие свойства.

Утверждение 4. В условиях (1)–(6) для любого (фиксированного) значения параметра s_0 отображение $(m_0, \tau_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$ – диффеоморфизм.

Утверждение 5. В условиях (1)–(6) для любого (фиксированного) значения параметра τ_0 отображение $(m_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$ – диффеоморфизм.

Утверждение 6. В условиях (1)–(6) для любого (фиксированного) значения параметра m_0 отображение $(\tau_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$ – диффеоморфизм.

Содержание Утверждений 1–3 может быть выражено таблицей: в условиях (1)–(6) выполняются строгие неравенства

$$\frac{\partial \bar{\theta}_0}{\partial m_0} > 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial m_0} > 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial m_0} > 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial m_0} > 0, \quad \frac{\partial q_0}{\partial m_0} < 0, \quad \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial m_0} < 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_0}{\partial \tau_0} < 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \tau_0} < 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \tau_0} < 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \tau_0} < 0, \quad \frac{\partial q_0}{\partial \tau_0} < 0, \quad \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \tau_0} > 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_0}{\partial s_0} > 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial s_0} > 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial s_0} > 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial s_0} > 0, \quad \frac{\partial q_0}{\partial s_0} < 0, \quad \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial s_0} < 0.$$

Утверждения 4–6 можно уточнить: в условиях (1)–(6) выполняются строгие неравенства

$$\frac{D(q_0, \bar{f}_0)}{D(m_0, \tau_0)} < 0, \quad \frac{D(q_0, \bar{f}_0)}{D(m_0, s_0)} > 0, \quad \frac{D(q_0, \bar{f}_0)}{D(\tau_0, s_0)} > 0.$$

2. Вычислительные эксперименты

Расчёты проведены при $M_\infty = 10$, $H = 10$ [км], $R = 0,1$ [м] для удобства сравнения с результатами [9–11, 14–16].

2.1. Одномерная однозначность

На рис. 1–3 представлены графики зависимости теплового потока q_0 , а на рис. 4–6 – зависимости коэффициента \bar{f}_0 локального напряжения трения f в точке торможения от управляющих параметров: вдува m_0 , температурного фактора τ_0 , магнитного поля s_0 .

Левые части рисунков соответствуют обтеканию боковой поверхности кругового цилиндра [10], правые – сферического носка [11].

На рис. 1 и 4 температурному фактору $\tau_0 = 0,15$ соответствуют кривые 1 и 2; $\tau_0 = 0,45$ – кривые 3 и 4; $\tau_0 = 0,90$ – кривые 5 и 6. Применению магнитного поля с $s_0 = 5 \cdot 10^4$ соответствуют кривые 2, 4, 6, отсутствию магнитного поля – кривые 1, 3, 5.

На рис. 2 и 5 вдуву $m_0 = 0$ соответствуют кривые 1 и 2; $m_0 = 0,5$ – кривые 3 и 4; $m_0 = 1$ – кривые 5 и 6. Применению магнитного поля с $s_0 = 5 \cdot 10^4$ соответствуют кривые 2, 4, 6, отсутствию магнитного поля – кривые 1, 3, 5.

На рис. 3 и 6 вдуву $m_0 = 0$ соответствуют кривые 1, 2, 3; $m_0 = 0,5$ – кривые 4, 5, 6; $m_0 = 1$ – кривые 7, 8, 9. Значению температурного фактора $\tau_0 = 0,15$ соответствуют кривые 1, 4, 7; $\tau_0 = 0,45$ – кривые 2, 5, 8; $\tau_0 = 0,90$ – кривые 3, 6, 9.

2.2. Двумерная однозначность

На рис. 7–12 в графическом виде в терминах пар «тепло - трение» (q_0, \bar{f}_0) представлены серии решений [13] алгебраических систем (15) и (31) из [12]. Случаям обтекания боковой поверхности прямого кругового цилиндра соответствуют левые половинки рисунков, случаям обтекания поверхности сферического носка – правые.

Обозначим

$$\begin{aligned} M^c &= [0; 1], & T^c &= [0; 0,999], & S^c &= [0; 5 \cdot 10^4], \\ M_{05}^d &= \{0; 0,05; \dots; 1\}, & M_{25}^d &= \{0; 0,25; \dots; 1\}, \\ T_{05}^d &= \{0; 0,05; \dots; 0,95\}, & T_{15}^d &= \{0; 0,15; \dots; 0,9\}, \\ S_{25}^d &= \{0; 25 \cdot 10^3; 50 \cdot 10^3\}. \end{aligned}$$

На рис. 7 магнитное поле отсутствует, сетка образована семействами линий

$$\begin{aligned} &\{ \{ (m_0, \tau_0, s_0) \mid m_0 \in M^c \} \mid \tau_0 \in T_{05}^d, s_0 = 0 \} , \\ &\{ \{ (m_0, \tau_0, s_0) \mid \tau_0 \in T^c \} \mid m_0 \in M_{05}^d, s_0 = 0 \} . \end{aligned}$$

Рис. 8 иллюстрирует различие областей $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$ при учёте и без учёта эффекта диссоциации. Приведены линии семейств M и T без магнитного поля ($s_0 = 0$). Влияние эффекта диссоциации воздуха (начиная с $M_\infty = 6$, таблица 1 в [12]) проявляется в существенном увеличении значений параметров теплообмена в точке торможения по сравнению с рассчитанными по модели совершенного газа, что подтверждает выводы, сделанные ранее в [14, 15] в отношении локальных тепловых потоков.

На рис. 9 представлены три семейства линий, соответствующих сочетаниям варьируемых параметров:

$$\begin{aligned} M &= \{ \{ (m_0, \tau_0, s_0) \mid m_0 \in M^c \} \mid \tau_0 \in T_{15}^d, s_0 \in S_{25}^d \} , \\ T &= \{ \{ (m_0, \tau_0, s_0) \mid \tau_0 \in T^c \} \mid m_0 \in M_{25}^d, s_0 \in S_{25}^d \} , \\ S &= \{ \{ (m_0, \tau_0, s_0) \mid s_0 \in S^c \} \mid m_0 \in M_{25}^d, \tau_0 \in T_{15}^d \} , \end{aligned}$$

и отмечены точки A, B, C, D (сочетания значений параметров, характеризующие их, указаны в скобках):

$$\begin{aligned} A : (m_0 = 0, \tau_0 = 0, s_0 = 0), & \quad C : (m_0 = 0, \tau_0 = 0,999, s_0 = 0), \\ B : (m_0 = 1, \tau_0 = 0, s_0 = 0), & \quad D : (m_0 = 0, \tau_0 = 0, s_0 = 5 \cdot 10^4). \end{aligned}$$

Рис. 10 демонстрирует влияние магнитного поля s_0 : приведены линии семейств M и T . Таким способом визуализировано содержание утверждения 3 об одновременном уменьшении параметров (q_0, \bar{f}_0) при увеличении магнитного поля. Также визуализируется утверждение 4 о диффеоморфизме $(m_0, \tau_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$ при фиксировании параметра s_0 .

Рис. 11 демонстрирует влияние температурного фактора τ_0 : приведены линии семейств M и S . Таким способом визуализировано содержание утверждения 2 об уменьшении q_0 и увеличении \bar{f}_0 при увеличении температурного фактора. Также визуализируется утверждение 5 о диффеоморфизме $(m_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$ при фиксировании параметра τ_0 .

Рис. 12 демонстрирует влияние вдува m_0 : приведены линии семейств T и S . Таким способом визуализировано содержание утверждения 1 об одновременном уменьшении параметров (q_0, \bar{f}_0) при увеличении вдува. Также визуализируется утверждение 6 о диффеоморфизме $(\tau_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$ при фиксировании параметра m_0 .

Выводы

1) Установлен вид области Ω допустимых значений (q_0, \bar{f}_0) , позволяющий дать ответ на вопрос о реализуемости пары параметров теплообмена в точке торможения в зависимости от возможного диапазона управляющих воздействий.

2) Изменяя шаг сетки и размер изображения, рис. 7 можно использовать в инженерной практике в качестве номограмм.

3) Из биективного характера соответствия $(m_0, \tau_0) \leftrightarrow (q_0, \bar{f}_0)$ пар управлений и пар параметров теплообмена следует, что попадание пары (q_0, \bar{f}_0) в допустимую область достаточно для построения начальной части решения двумерной обратной задачи теплообмена в интерполяционной [1, 7, 10, 13] постановке.

4) Подтверждён вывод о необходимости учёта эффекта диссоциации как при расчёте локальных тепловых потоков [14, 15], так и при расчёте локальных напряжений трения.

Полученный в результате вычислительных экспериментов материал может быть использован для сравнения с данными натуральных и стендовых испытаний.

Благодарности

Работа выполнена:

а) при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (уникальный идентификатор соглашения – RFMEFI57715X0195);

б) при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, госконтракт в рамках 220-го постановления №14.Z50.31.0023.

Литература

- [1] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Об одной обратной задаче тепломассообмена* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // “Герценовские чтения – 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования” в электронном журнале “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. — 2016. — № 2. — Ч. 2. — С. 50–56. [<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf>]
- [2] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Об однозначной зависимости локальных параметров тепломассообмена от управляющих воздействий в точке торможения гиперзвукового потока* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Междунар. конф. Воронеж. зимн. мат. школа (26 января – 1 февраля 2017 г.) — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2017. — С. 44–48.
- [3] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *О диффеоморфности пар управляющих воздействий и локальных параметров тепломассообмена в точке торможения гиперзвукового потока* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017»: Материалы научной конференции, 10 – 14 апреля 2017 г. — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. — С. 33–38.
- [4] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *О биективности пар управляющих воздействий и локальных параметров тепломассообмена в точке торможения гиперзвукового потока* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Те-

- зисы докладов международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвящённой памяти профессора В. Ф. Демьянова (CNSA – 2017, г. Санкт-Петербург, 22 – 27 мая 2017 г.). — Ч. I. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. — С. 229–232.
- [5] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *О синтезе управления в обратных задачах теплообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. I. Казань, 13 – 17 июня 2017 г. — Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — С. 126–135.
- [6] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *О вычислительных экспериментах по построению эффективного управления теплообменом в прямых и обратных задачах гиперзвуковой аэродинамики* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. I. Казань, 13 – 17 июня 2017 г. — Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — С. 136–145.
- [7] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Обратные задачи теплообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов: одномерные и двумерный случаи* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. — 2017. — № 3. — С. 148–162. [<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/>]
- [8] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Об однозначной зависимости параметров пограничного слоя от управляющих воздействий в точке торможения гиперзвукового потока* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Современные методы теории краевых задач: Материалы междунар. конф.: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXVII» (3 – 9 мая 2016 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. — С. 46–48.
- [9] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 3. — С. 5–11.
- [10] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Обратные задачи теплообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та.

- Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 4. — С. 5–12.
- [11] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *О возможности восстановления управления в некоторых обратных задачах теплообмена* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Сеточные методы для краевых задач и приложения (20 – 25 октября 2016 г.). Материалы XI Междунар. конф. — Казань: Казанский ун-т, 2016. — С. 64–69.
- [12] **Бильченко Н. Г.** *Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.
- [13] **Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.** *Обратные задачи теплообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. III. О постановке двумерных задач и областях допустимых значений «тепло – трение»* / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2017. — № 1. — С. 18–25.
- [14] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.
- [15] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.
- [16] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления теплообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 95–102.

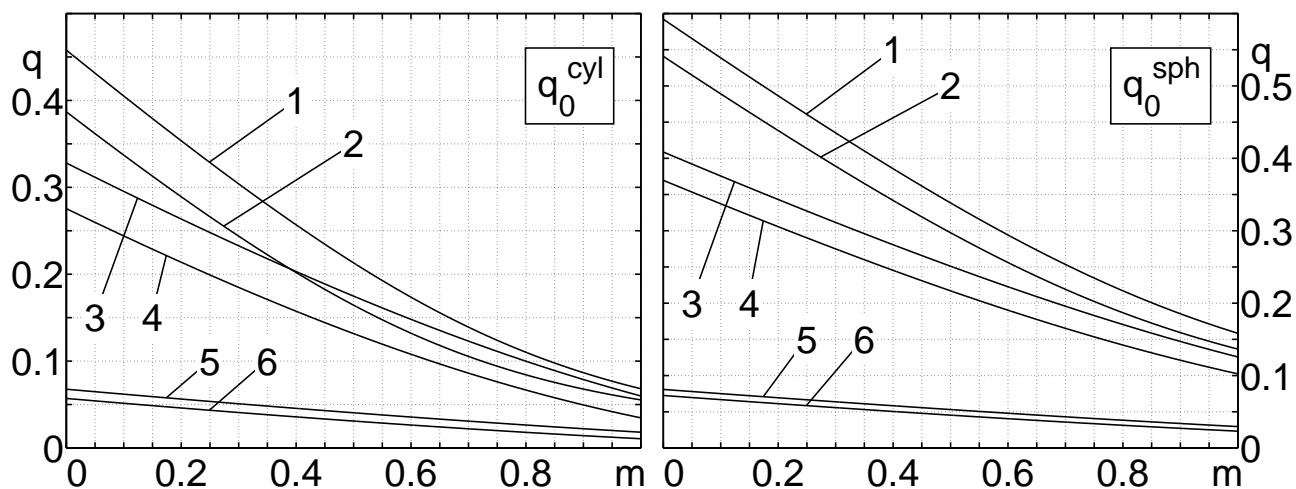


Рис. 1. Зависимости q_0 от вдува $m_0 \in [0; 1]$

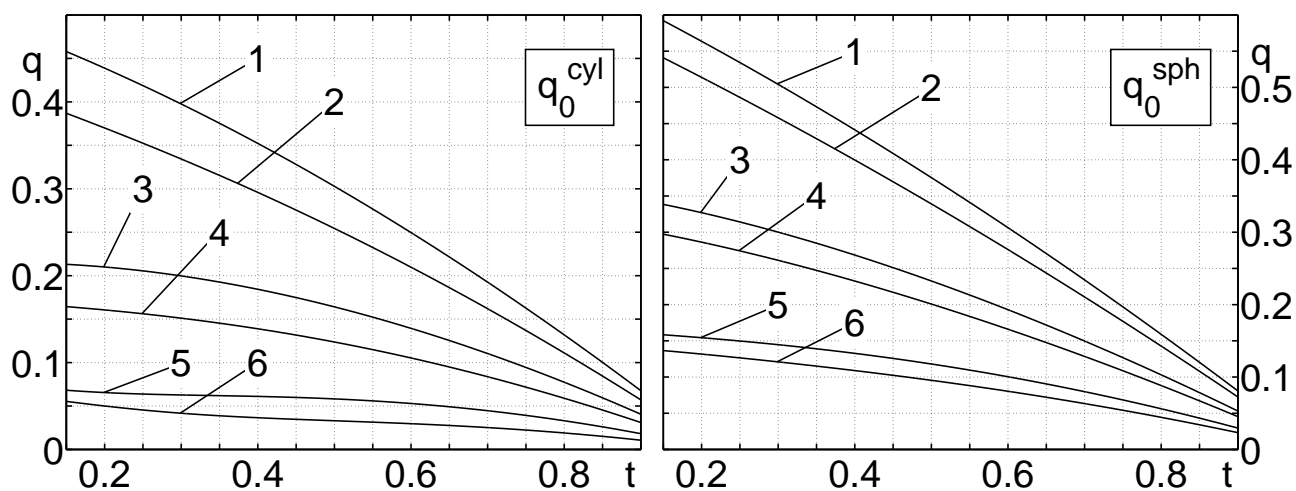


Рис. 2. Зависимости q_0 от $\tau_0 \in [0,15; 0,90]$

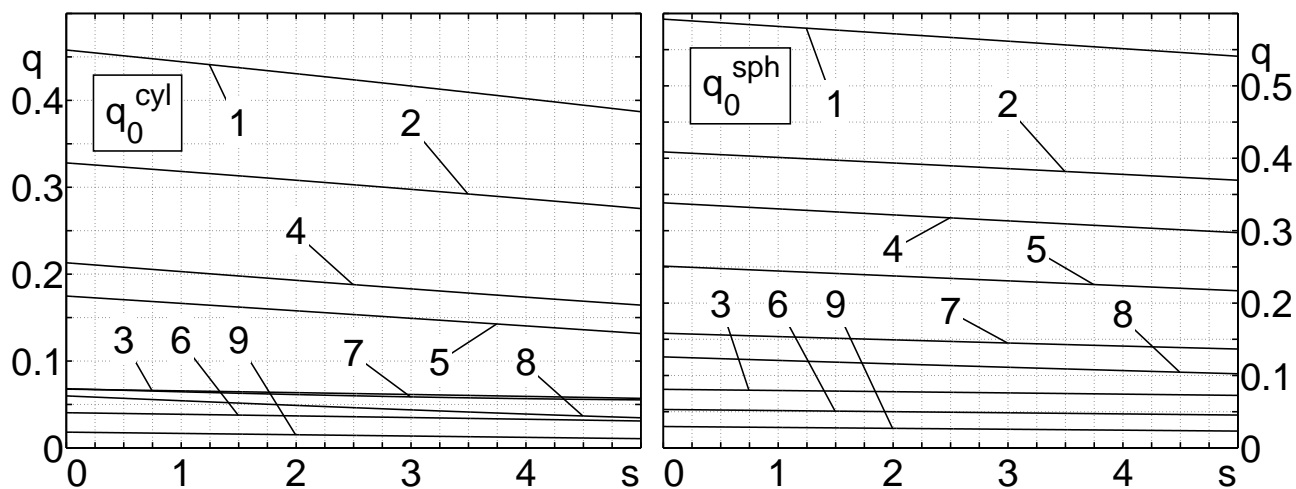


Рис. 3. Зависимости q_0 от $s_0 \cdot 10^{-4} \in [0; 5]$

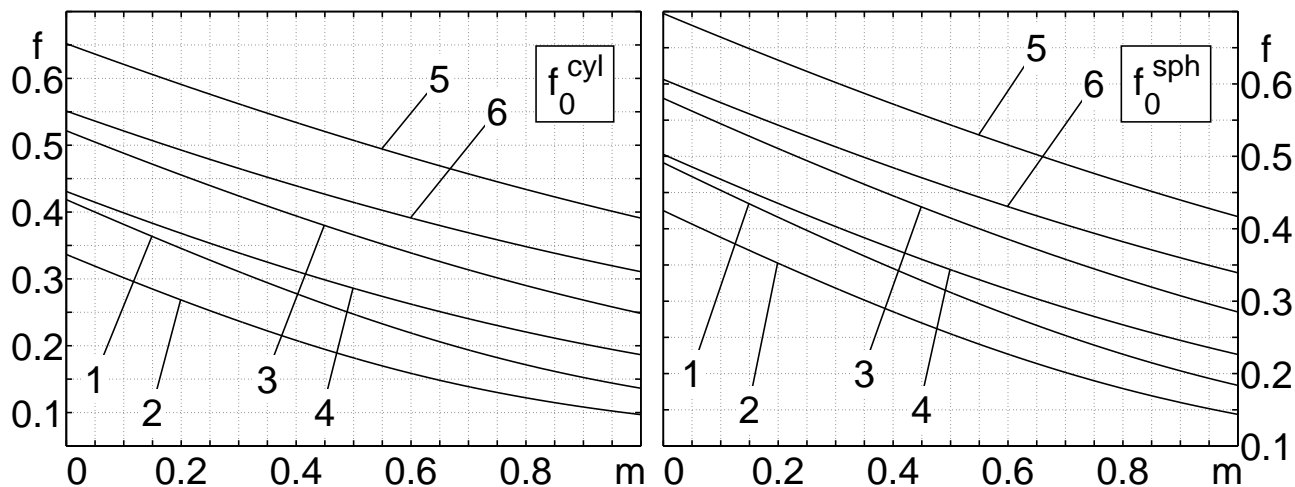


Рис. 4. Зависимости \bar{f}_0 от вдува $m_0 \in [0; 1]$

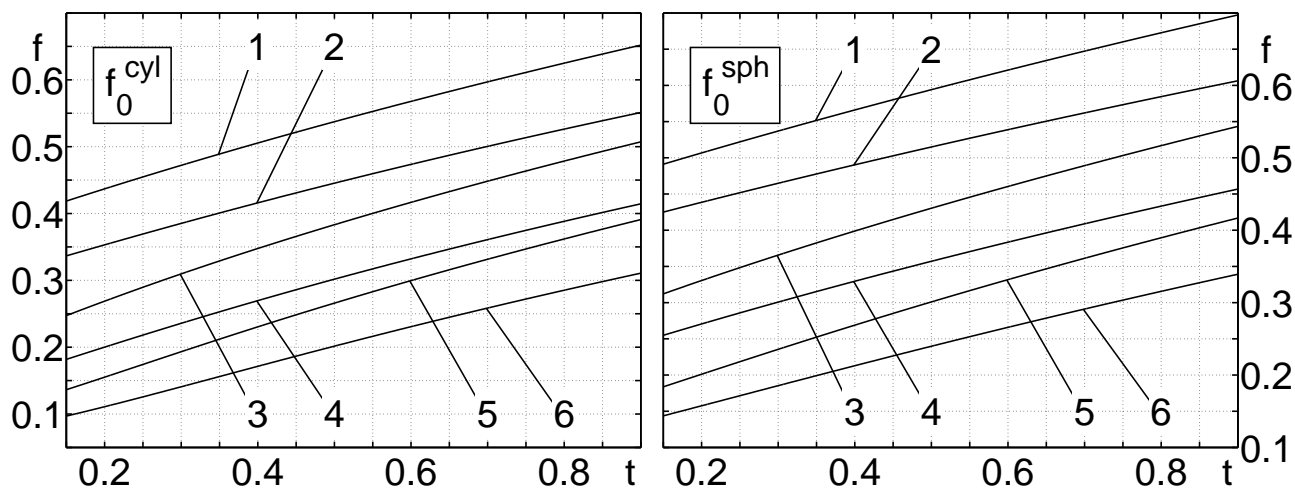


Рис. 5. Зависимости \bar{f}_0 от $\tau_0 \in [0,15; 0,90]$

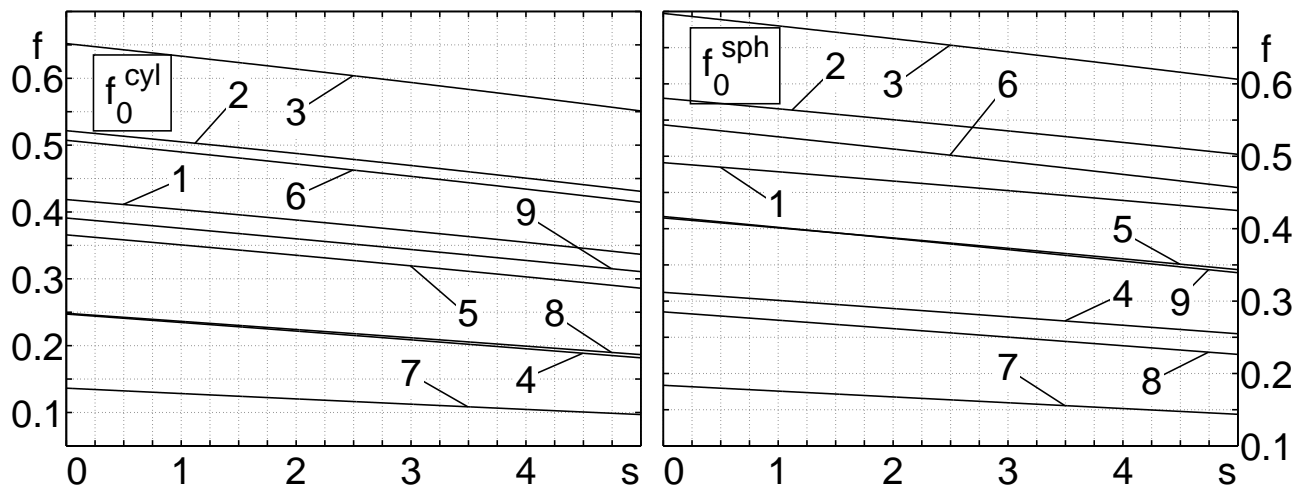


Рис. 6. Зависимости \bar{f}_0 от $s_0 \cdot 10^{-4} \in [0; 5]$

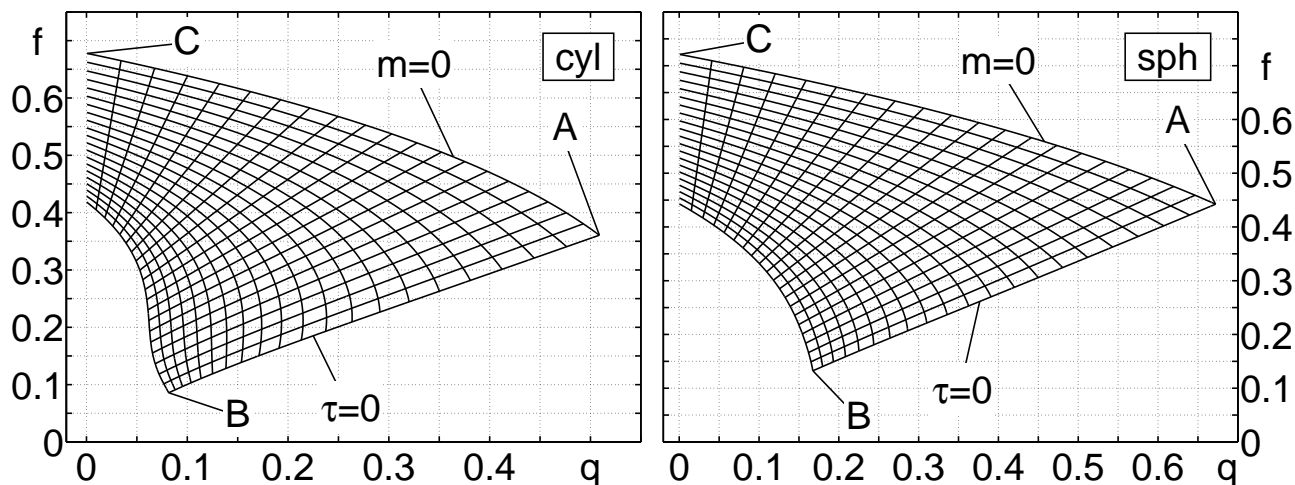


Рис. 7. Область допустимых значений $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$ для $s_0 = 0$

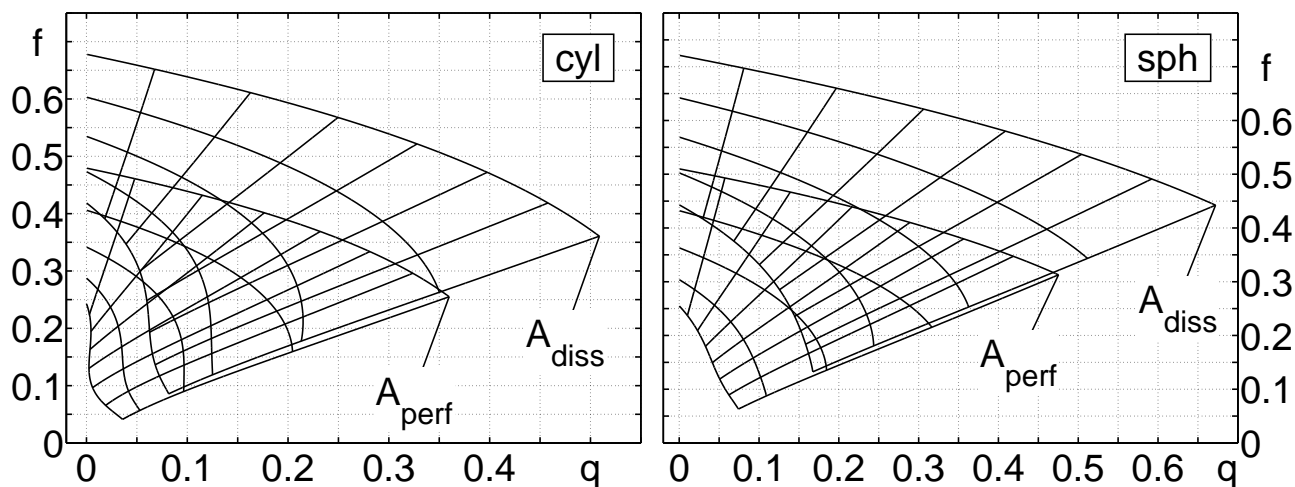


Рис. 8. Влияние эффекта диссоциации на область $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$ для $s_0 = 0$

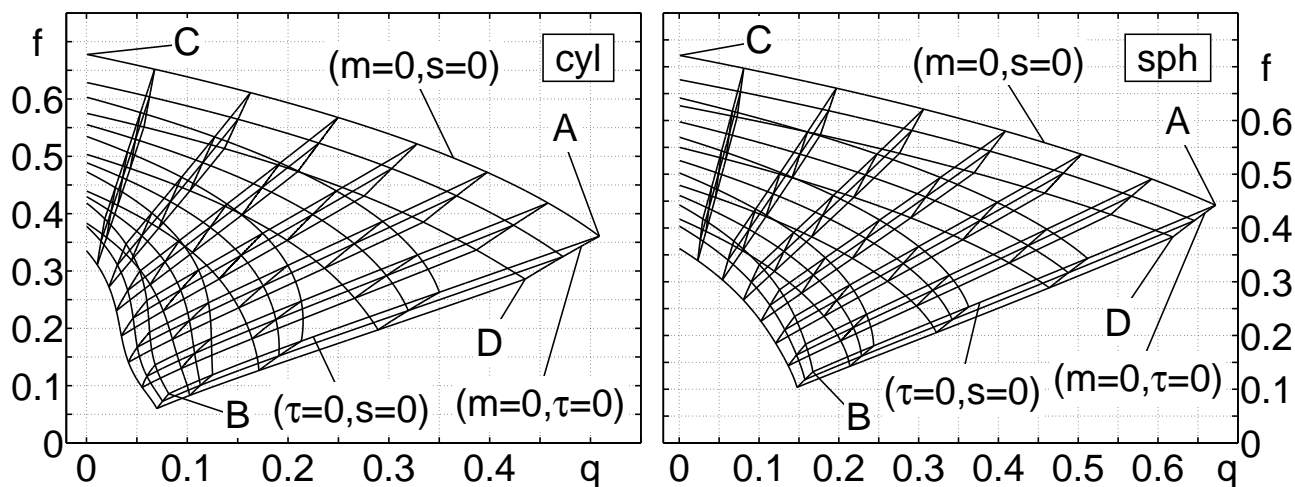


Рис. 9. Три семейства линий: M, T, S

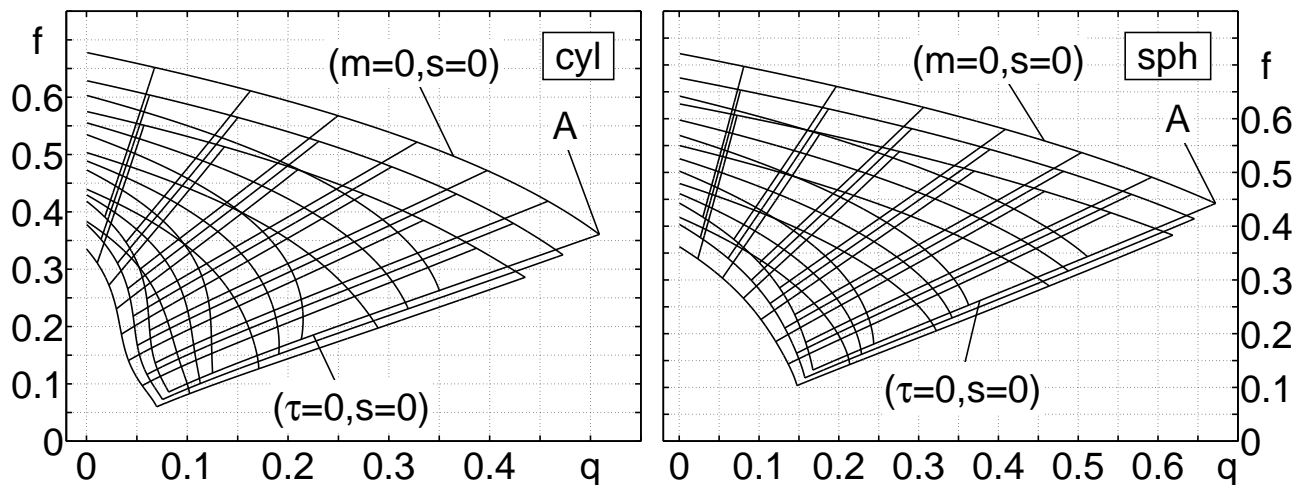


Рис. 10. Области допустимых значений $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$ для $s_0 \in S_{25}^d$

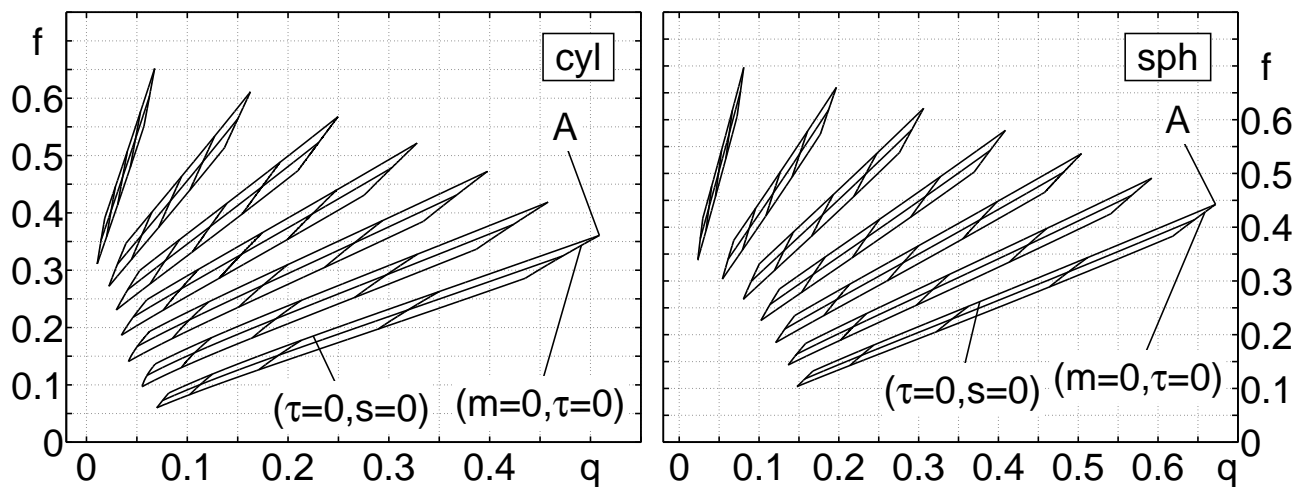


Рис. 11. Области допустимых значений $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$ для $\tau_0 \in T_{15}^d$

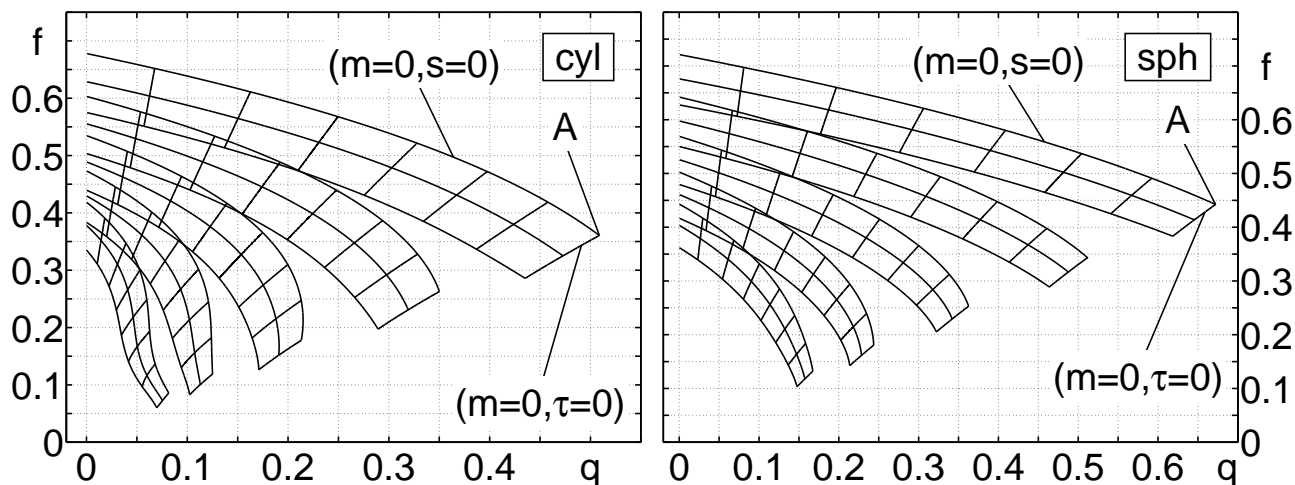


Рис. 12. Области допустимых значений $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$ для $m_0 \in M_{25}^d$