ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2018
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

УДК 517.97 : 532.526 : 512.816

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ НЕРАВНОВЕСНО ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ГАЗА

Бильченко Н. Г.
Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет
(КНИТУ – КАИ) им. А. Н. Туполева
Россия, 420111, г. Казань, К. Маркса, 10
e-mail: bilchnat@gmail.com

Аннотация

Рассматриваются задачи математического моделирования оптимальной тепловой защиты проницаемых поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов в потоке неравновесно диссоциирующего газа. Применён теоретико-групповой подход к оптимизации систем с распределёнными параметрами. Построены законы сохранения на всех операторах группы, допускаемой системой нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа.

Ключевые слова: оптимальное управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, неравновесная диссоциация, группа Ли, инфинитезимальный оператор, закон сохранения, первый интеграл.

Abstract

The problems of mathematical modeling of optimal heat protection of permeable surfaces of hypersonic aircraft in non-equilibrium dissociating gas are considered. The group theory approach to the optimization of systems with distributed parameters is applied. Conservation laws on all operators of the group admissible by a system of nonlinear differential equations of parabolic type are constructed.

Keywords: optimal control, heat and mass transfer, laminar boundary layer, hypersonic flows, non-equilibrium dissociation, Lie group, infinitesimal operator, conservation law, first integral.

Введение

Задача построения оптимальной тепловой защиты проницаемых цилиндрических поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) в рамках точных уравнений пограничного слоя вязкого сжимаемого неравновесно диссоциирующего газа, также, как и в случае ионизированного газа при наличии магнитного поля [1–7], являющаяся оптимизационной задачей с распределёнными параметрами [8], принадлежащей к классу двумерных вариационных задач типа Майера, была впервые поставлена в [9].

С помощью предложенного [10] для такого рода задач теоретико-группового подхода к конструированию законов сохранения (дивергентных форм) и первых интегралов для сопряжённых систем относительно множителей Лагранжа, основанного на совместном использовании инфинитезимального аппарата Ли-Овсянникова [11, 12] и теории инвариантных вариационных задач Нётер [13], удаётся существенно упростить поиск оптимального управления. В [14] этот подход был применён к задаче оптимизации тепломассообмена в сверхзвуковом потоке совершенного газа.

В работах [1,2] в рамках данного подхода был построен закон сохранения на операторе переноса по поперечной координате, на основе которого был получен первый интеграл для сопряжённой системы, следствие из которого позволило решить задачи оптимизации эффузионной тепловой защиты проницаемых цилиндрических [2,3] и сферических [4] поверхностей ГЛА в потоке ионизированного газа при наличии магнитного поля. На всех операторах из работы [15], допускаемых системой, в [16] построены законы сохранения.

В данной работе на основе группового анализа исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа [17] построены законы сохранения на всех операторах, допускаемых системой.

1. Постановка оптимизационной задачи

Рассматривается задача оптимального управления гиперзвуковым ламинарным пограничным слоем идеально диссоциирующего газа. Система уравнений, описывающая случай неравновесной диссоциации на цилиндрической поверхности, взята в виде [18]:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0\,;$$

$$\rho u \frac{\partial C_A}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{12} \frac{\partial C_A}{\partial y}\right) + W_A\,;$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu\left(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right) u \frac{\partial u}{\partial y}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\right) \rho D_{12} \left(h_A - h_M\right) \frac{\partial C_A}{\partial y}\right);$$

$$p_e = \rho \widetilde{R} T\,, \tag{1}$$

где

$$\widetilde{R} = \frac{k}{2m_A}\left(1 + C_A\right).$$

Здесь ось x направлена вдоль контура тела, ось y – по внешней нормали; u, v – проекции вектора скорости на координатные оси; ρ – плотность; p – давление; μ – вязкость; C_A – массовая концентрация атомов (степень диссоциации); D_{12} – коэффициент бинарной диффузии; W_A – скорость массообмена атомарного компонента на единицу объема; Pr – число Прандтля; Le – число Льюиса; $H = h + \dfrac{u^2}{2}$ – полная энтальпия; $h_i = \int\limits_0^T C_{p_i} \cdot dT + h_i^0$ – энтальпия i-го компонента смеси; C_{p_i} – удельная теплоёмкость i-го компонента при постоянном давлении; h_i^0 – энтальпия образования i-го компонента ($i = A, M$ – индексы соответственно атомарного и молекулярного компонента); k – постоянная Больцмана; m_A – масса атома.

Граничные условия к системе (1) следующие:
при $(x > 0\,,\, y = 0)$:

$$u = 0\,, \qquad v = \left(\frac{m}{\rho}\right)_w\,, \qquad H = H_w\left(x\right)\,,$$

$$C_{A_w} = 0 \qquad \text{(каталитическая стенка)}\,,$$

$$\left(\frac{\partial C_A}{\partial y}\right)_w = 0 \qquad \text{(некаталитическая стенка)}\,;$$

при $(x > 0\,,\, y \to \infty)$:

$$u \to U_e\left(x\right)\,, \qquad H \to H_e\left(x\right)\,, \qquad C_A \to C_{A_e}\left(x\right)\,;$$

при $(x = 0\,,\, y > 0)$:

$$u = U_0\left(y\right)\,, \qquad H = H_0\left(y\right)\,, \qquad C_A = C_{A_0}\left(y\right)\,. \tag{2}$$

Здесь $m_w = (\rho v)_w$ – массовый расход вдуваемого газа (того же состава, что и в набегающем потоке) через единицу поверхности в единицу времени; $e, w, 0$ – индексы параметров потока на внешней границе пограничного слоя, на стенке и в точке торможения соответственно.

Мощность, затрачиваемую системой на вдув газа через пористую стенку единичной ширины, учитывая закон Дарси [19], можно на участке $[0; x_k]$ оценить функционалом

$$N = \int\limits_0^{x_k} a v_w^2\left(x\right) \cdot dx\,, \tag{3}$$

где a – параметр, зависящий от толщины стенки, коэффициента проницаемости материала и теплофизических свойств газа в порах.

Суммарный расход вдуваемого газа оценивается функционалом

$$R = \int\limits_0^{x_k} \left(\rho v\right)_w\left(x\right) \cdot dx\,. \tag{4}$$

Ставится следующая *вариационная задача.* Среди непрерывных управлений $m_w\left(x\right)$ требуется найти такое, которое реализует минимальное значение количества тепла

$$Q = \int\limits_0^{x_k} q_w \cdot dx\,, \tag{5}$$

передаваемого в единицу времени от пограничного слоя к обтекаемой поверхности единичной ширины при заданных ограничениях на мощность системы, обеспечивающей вдув

$$N \le N_{\max}\,, \tag{6}$$

расход вдуваемого газа

$$R \le R_{\max} \tag{7}$$

и связях (1), (2). Здесь q_w – удельный тепловой поток к стенке от ламинарного пограничного слоя идеально диссоциирующего газа, определяемый теплопроводностью и диффузионным переносом тепла [18]

$$-\,q_w = \left(\frac{\lambda}{C_p}\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=0} + \left(\frac{\lambda}{C_p}\left(\mathrm{Le}-1\right)\left(h_A - h_M\right)\frac{\partial C_A}{\partial y}\right)_{y=0}\,,$$

где λ – коэффициент теплопроводности, C_p – удельная теплоёмкость газа. Для того, чтобы молекула начала диссоциировать, ей необходимо сообщить некоторую энергию. Учитывая, что удельные теплоёмкости атомарного C_{p_A} и молекулярного C_{p_M} компонентов примерно равны и, что у атомарного компонента энтальпия включает энергию, необходимую для диссоциации единицы массы, а энтальпия молекулярного компонента этой величины не включает, окончательно получаем:

$$-\,q_w = \left(\frac{\lambda}{C_p}\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=0} + \left(\frac{\lambda}{C_p}\left(\mathrm{Le}-1\right)h_A^0\frac{\partial C_A}{\partial y}\right)_{y=0}\,.$$

С помощью преобразований А. А. Дородницына [20]

$$\xi = x\,, \qquad \eta = \int\limits_0^y \rho\cdot dy\,, \qquad w = u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v$$

и обозначений [9]

$$\widetilde{A}\left(H, C_A\right) = \rho^2 D_{12}\,, \qquad \widetilde{D}\left(H, C_A\right) = \rho^2 D_{12}\left(h_A - h_M\right),$$
$$f\left(H, C_A\right) = \frac{1}{\rho}\,, \qquad \varphi\left(H, C_A\right) = \mu\rho\,, \qquad \widetilde{W}_A\left(H, C_A\right) = \frac{W_A}{\rho}$$

система (1) запишется в виде:

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi} + w\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\,f\left(H, C_A\right)\frac{dp}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\varphi\left(H, C_A\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right);$$
$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0\,;$$

$$u\frac{\partial C_A}{\partial \xi} + w\frac{\partial C_A}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\widetilde{A}\left(H, C_A\right)\frac{\partial C_A}{\partial \eta}\right) + \widetilde{W}_A\left(H, C_A\right);$$

$$u\frac{\partial H}{\partial \xi} + w\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\varphi\left(H, C_A\right)\frac{\partial H}{\partial \eta}\right) + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\varphi\left(H, C_A\right)u\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) +$$
$$+\left(1 - \frac{1}{\mathrm{Le}}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\widetilde{D}\left(H, C_A\right)\frac{\partial C_A}{\partial \eta}\right). \tag{8}$$

Граничные условия (2) примут вид:
при $(\xi > 0\,, \eta = 0)$:

$$u = 0\,, \qquad w = m\left(\xi\right), \qquad H = H_w\left(\xi\right),$$
$$C_{A_w} = 0 \qquad (\text{каталитическая стенка}),$$
$$\left(\frac{\partial C_A}{\partial \eta}\right)_w = 0 \qquad (\text{некаталитическая стенка});$$

при $(\xi > 0\,, \eta \to \infty)$:

$$u \to U_e\left(\xi\right), \qquad H \to H_e\left(\xi\right), \qquad C_A \to C_{A_e}\left(\xi\right);$$

при $(\xi = 0\,, \eta > 0)$:

$$u = U_0\left(\eta\right), \qquad H = H_0\left(\eta\right), \qquad C_A = C_{A_0}\left(\eta\right). \tag{9}$$

Запишем в новых переменных мощность (3)

$$\overline{N} = \int\limits_0^{\xi_k} a\left(\frac{w}{\rho}\right)_w^2 \cdot d\xi$$

системы, обеспечивающей вдув, расход (4)

$$\overline{R} = \int\limits_0^{\xi_k} w\left(\xi, 0\right)\cdot d\xi$$

вдуваемого газа и функционал (5)

$$\overline{Q} = -\int\limits_0^{\xi_k}\left(\left(\frac{\varphi\left(H, C_A\right)}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} +\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\varphi\left(H, C_A\right)}{\mathrm{Pr}}\left(\mathrm{Le} - 1\right)h_A^0\frac{\partial C_A}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}\right)\cdot d\xi\,. \tag{10}$$

В новых переменных *вариационная задача* ставится следующим образом: среди непрерывных управлений $m(\xi)$ требуется найти такое, которое реализует минимальное значение функционала (10) при связях (8), (9) и заданных ограничениях

$$\overline{N} \le \overline{N}_{\max}\,; \tag{11}$$

$$\overline{R} \le \overline{R}_{\max}\,. \tag{12}$$

Следует отметить, что при формулировке оптимальной задачи использовано свойство инвариантности вариационной задачи относительно замены переменных.

Систему (8) можно переписать в равносильной форме:

$$
\begin{gathered}
u\frac{\partial u}{\partial \xi} + w\frac{\partial u}{\partial \eta} + f(H, C_A)\frac{dp}{d\xi} - \frac{\partial R_1}{\partial \eta} = 0\,;\\
\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0\,;\\
u\frac{\partial C_A}{\partial \xi} + w\frac{\partial C_A}{\partial \eta} - \frac{\partial R_3}{\partial \eta} - \widetilde{W}_A(H, C_A) = 0\,;\\
u\frac{\partial H}{\partial \xi} + w\frac{\partial H}{\partial \eta} - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial \eta} - \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\left(R_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + u\frac{\partial R_1}{\partial \eta}\right) +\\
+ \left(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\right)\frac{\partial R_4}{\partial \eta} = 0\,;\\
\varphi(H, C_A)\frac{\partial u}{\partial \eta} - R_1 = 0\,;\\
\varphi(H, C_A)\frac{\partial H}{\partial \eta} - R_2 = 0\,;\\
\widetilde{A}(H, C_A)\frac{\partial C_A}{\partial \eta} - R_3 = 0\,;\\
\widetilde{D}(H, C_A)\frac{\partial C_A}{\partial \eta} - R_4 = 0\,.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Используя метод множителей Лагранжа [8,21], исследуем на безусловный экстремум функционал

$$J = J_1 + J_2\,, \tag{14.1}$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^{\xi_k} \left(-\frac{R_2}{\mathrm{Pr}} - R_3 L(H, C_A) + \alpha_1 a\left(\frac{w}{\rho}\right)^2 + \alpha_2 w \right)_{\eta=0} \cdot d\xi\,, \tag{14.2}$$

$$J_2 = \iint\limits_D \left(\lambda_1 \left(u\frac{\partial u}{\partial \xi} + w\frac{\partial u}{\partial \eta} + f\left(H, C_A\right)\frac{dp}{d\xi} - \frac{\partial R_1}{\partial \eta} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \right.$$

$$+ \lambda_3 \left(u\frac{\partial C_A}{\partial \xi} + w\frac{\partial C_A}{\partial \eta} - \widetilde{W}_A\left(H, C_A\right) - \frac{\partial R_3}{\partial \eta} \right) + \lambda_4 \left(u\frac{\partial H}{\partial \xi} + w\frac{\partial H}{\partial \eta} - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial \eta} - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\left(R_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + u\frac{\partial R_1}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1 \right)\frac{\partial R_4}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \lambda_5 \left(\varphi\left(H, C_A\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} - R_1 \right) + \lambda_6 \left(\varphi\left(H, C_A\right)\frac{\partial H}{\partial \eta} - R_2 \right) +$$

$$\left. + \lambda_7 \left(\widetilde{A}\left(H, C_A\right)\frac{\partial C_A}{\partial \eta} - R_3 \right) + \lambda_8 \left(\widetilde{D}\left(H, C_A\right)\frac{\partial C_A}{\partial \eta} - R_4 \right) \right) \cdot d\xi\, d\eta\,. \quad (14.3)$$

Здесь

$$L\left(H, C_A\right) = \frac{G\left(H, C_A\right)}{\widetilde{A}\left(H, C_A\right)}, \qquad G\left(H, C_A\right) = \frac{\mu\rho}{\mathrm{Pr}}\left(\mathrm{Le} - 1\right) h_A^0\,,$$

а $\lambda_i\left(\xi, \eta\right)$ $(i = 1, \ldots, 8)$, α_1, α_2 – множители Лагранжа; D – область, ограниченная линиями $\eta = 0$, $\xi = \xi_k$, $\eta \to \infty$, $\xi = 0$.

Сопряжённая система имеет вид [9]:

$$\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_3\frac{\partial C_A}{\partial \xi} + \lambda_4\left(\frac{\partial H}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1 \right)\frac{\partial R_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_1 u + \lambda_2\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_1 w + \lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1 \right) R_1 + \lambda_5\varphi \right) = 0\,;$$

$$\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda_3\frac{\partial C_A}{\partial \eta} + \lambda_4\frac{\partial H}{\partial \eta} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} = 0\,;$$

$$\lambda_1\frac{\partial f}{\partial C_A}\frac{dp}{d\xi} - \lambda_3\frac{\partial \widetilde{W}_A}{\partial C_A} + \lambda_5\frac{\partial \varphi}{\partial C_A}\frac{\partial H}{\partial \eta} + \lambda_6\frac{\partial \varphi}{\partial C_A}\frac{\partial H}{\partial \eta} + \lambda_7\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial C_A}\frac{\partial C_A}{\partial \eta} + \lambda_8\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial C_A}\frac{\partial C_A}{\partial \eta} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_3 u\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_3 w + \lambda_7\widetilde{A} + \lambda_8\widetilde{D} \right) = 0\,;$$

$$\lambda_1\frac{\partial f}{\partial H}\frac{dp}{d\xi} - \lambda_3\frac{\partial \widetilde{W}_A}{\partial H} + \lambda_5\frac{\partial \varphi}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial \eta} + \lambda_6\frac{\partial \varphi}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial \eta} + \lambda_7\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial H}\frac{\partial C_A}{\partial \eta} + \lambda_8\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial H}\frac{\partial C_A}{\partial \eta} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_4 u\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_4 w + \lambda_6\varphi\right) = 0\,;$$

$$\lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1 \right)\frac{\partial u}{\partial \eta} - \lambda_5 - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\lambda_1 + \lambda_4 u\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1 \right) \right) = 0\,;$$

$$\lambda_6 - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta} = 0\,;$$

$$\lambda_7 - \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta} = 0\,;$$

$$\lambda_8 + \left(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\right)\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta} = 0\,. \qquad (15)$$

Из четырёх последних уравнений системы (15) следует

$$\lambda_5 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} - u\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\,; \qquad \lambda_6 = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\,;$$

$$\lambda_7 = \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta}\,; \qquad \lambda_8 = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Le}}\right)\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\,. \qquad (16)$$

Подставляя (16) в первые четыре уравнения системы (15), получим эквивалентную систему относительно множителей Лагранжа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4:

$$\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_3\frac{\partial C_A}{\partial \xi} + \lambda_4\left(\frac{\partial H}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\frac{\partial R_1}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_1 u + \lambda_2\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_1 w + \lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)R_1 + \varphi\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} - u\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\right)\right) = 0\,; \quad (17.1)$$

$$\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda_3\frac{\partial C_A}{\partial \eta} + \lambda_4\frac{\partial H}{\partial \eta} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} = 0\,; \qquad (17.2)$$

$$\lambda_1\frac{\partial f}{\partial C_A}\frac{dp}{d\xi} - \lambda_3\frac{\partial \widetilde{W}_A}{\partial C_A} + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} - u\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial C_A}\frac{\partial H}{\partial \eta} +$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial C_A}\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta}\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial C_A}\frac{\partial C_A}{\partial \eta} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Le}}\right)\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial C_A}\frac{\partial C_A}{\partial \eta} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_3 u\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_3 w + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta}\widetilde{A} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Le}}\right)\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\widetilde{D}\right) = 0\,; \qquad (17.3)$$

$$\lambda_1\frac{\partial f}{\partial H}\frac{dp}{d\xi} - \lambda_3\frac{\partial \widetilde{W}_A}{\partial H} + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} - u\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial \eta} +$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta}\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial H}\frac{\partial C_A}{\partial \eta} + \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Le}}\right)\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial H}\frac{\partial C_A}{\partial \eta} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_4 u\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_4 w + \frac{\varphi}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \lambda_4}{\partial \eta}\right) = 0\,. \qquad (17.4)$$

Граничные условия к системе (17) имеют вид:

для $(\xi > 0,\ \eta = 0)$:

$$\lambda_1 = 0\,, \qquad \lambda_4 = 1\,,$$

$$\lambda_3 = L\,(H, C_A) + \widetilde{M}\,(H, C_A)\left(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\right) \qquad \text{(каталитическая стенка)}\,,$$

$$\lambda_3 w + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta}\widetilde{A} = 0 \qquad \text{(некаталитическая стенка)}\,;$$

для $(\xi > 0,\ \eta \to \infty)$:

$$\lambda_1 \to 0\,, \quad \lambda_2 \to 0\,, \quad \lambda_3 \to 0\,, \quad \lambda_4 \to 0\,;$$

для $(\xi = \xi_k,\ \eta > 0)$:

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,, \quad \lambda_4 = 0\,. \tag{18}$$

В точке $(\xi = \xi_k\,, \eta = 0)$ граничные значения λ_4 терпят разрыв $\lim_{\xi \to \xi_k - 0} \lambda_4\,(\xi{,}0) - \lim_{\eta \to 0+0} \lambda_4\,(\xi_k{,}\eta) = 1$, а граничные значения λ_1 в этой точке непрерывны. Оптимальное управление определяется по формуле

$$m\,(\xi) = \frac{(\lambda_2\,(\xi, 0) - \alpha_2)\,\rho_w^2}{2\alpha_1 a}\,. \tag{19}$$

2. Законы сохранения и первый интеграл оптимальной задачи

В работе [17] была поставлена и решена задача отыскания группы Ли непрерывных локальных преобразований [12], допускаемой системой (8) с граничными условиями (9) при различных видах “произвольных” элементов, входящих в эту систему: $\varphi\,(H, C_A)$, $\widetilde{A}\,(H, C_A)$, $\widetilde{D}\,(H, C_A)$, $\widetilde{W}_A\,(H, C_A)$, $f\,(H, C_A)$, $p\,(\xi)$. Во избежание путаницы при составлении инфинитезимальных операторов далее переменные ξ и η заменены на s и t.

Построение общего решения определяющих уравнений даёт следующий результат для координат инфинитезимального оператора:

$$\begin{aligned} &\xi^s = a_1 s + a_2\,; && \xi^t = bt + \theta\,(s)\,; \\ &\xi^u = cu\,; && \xi^w = (c - a_1 + b)\,w + u\theta'\,(s)\,; \\ &\xi^H = d_1 H + d_2\,; && \xi^{C_A} = g_1 C_A + g_2\,, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\theta\,(s)$ – произвольная функция, a_1, a_2, b, c, d_1, d_2, g_1, g_2 – постоянные. Функции $\varphi\,(H, C_A)$, $\widetilde{A}\,(H, C_A)$, $\widetilde{D}\,(H, C_A)$, $\widetilde{W}_A\,(H, C_A)$, $f\,(H, C_A)$, $g\,(s)$, где $g\,(s) = \dfrac{dp\,(s)}{ds}$, удовлетворяют уравнениям:

$$\varphi\,(c - a_1 + 2b) - (d_1 H + d_2)\,\frac{\partial \varphi}{\partial H} - (g_1 C_A + g_2)\,\frac{\partial \varphi}{\partial C_A} = 0\,;$$

$$\widetilde{A}\,(c-a_1+2b)-(d_1H+d_2)\,\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial H}-(g_1C_A+g_2)\,\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial C_A}=0\,;$$

$$\widetilde{W}_A\,(c-a_1+2b)-(d_1H+d_2)\,\frac{\partial \widetilde{W}_A}{\partial H}-(g_1C_A+g_2)\,\frac{\partial \widetilde{W}_A}{\partial C_A}=0\,;$$

$$\widetilde{A}\,(c-a_1+2b)-(d_1H+d_2)\,\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial H}-(g_1C_A+g_2)\,\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial C_A}=0\,;$$

$$\left(1-\frac{1}{\mathrm{Le}}\right)\times$$

$$\times\left(\widetilde{D}\,(c-a_1+2b+d_1+g_1)-(d_1H+d_2)\,\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial H}-(g_1C_A+g_2)\,\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial C_A}\right)=0\,;$$

$$\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\varphi\,(d_1-2c)=0\,;$$

$$g\,(s)\left(f\,(2c-a_1)-(d_1H+d_2)\,\frac{\partial f}{\partial H}-(g_1C_A+g_2)\,\frac{\partial f}{\partial C_A}\right)-$$

$$-\,(a_1s+a_2)\,fg'\,(s)=0\,. \tag{21}$$

Уравнения (21) показывают, что ядро основных алгебр Ли образовано бесконечномерным оператором

$$X_\infty=\theta\,(s)\,\frac{\partial}{\partial t}+u\theta'\,(s)\,\frac{\partial}{\partial w}\,. \tag{22}$$

Этот оператор и соответствующие ему преобразования допускаются при любых функциях $\varphi\,(H,C_A)$, $\widetilde{A}\,(H,C_A)$, $\widetilde{D}\,(H,C_A)$, $\widetilde{W}_A\,(H,C_A)$, $f\,(H,C_A)$, $g\,(s)$ и параметрах Pr и Le. Закон сохранения, построенный на операторе (22), имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(-\theta\,(s)\,(\lambda_1u+\lambda_2)\,\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda_3u\theta\,(s)\,\frac{\partial C_A}{\partial t}-\lambda_4u\theta\,(s)\,\frac{\partial H}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(-\theta\,(s)\,\frac{\partial u}{\partial t}\left(\lambda_1w+\lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)R_1+\lambda_5\varphi\right)+\right.$$

$$+\lambda_2\left(u\theta'\,(s)-\theta\,(s)\,\frac{\partial w}{\partial t}\right)-(\lambda_4w+\lambda_6\varphi)\,\theta\,(s)\,\frac{\partial H}{\partial t}-$$

$$-\left(\lambda_3w+\lambda_7\widetilde{A}+\lambda_8\widetilde{D}\right)\theta\,(s)\,\frac{\partial C_A}{\partial t}-\left(\lambda_4u\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)-\lambda_1\right)\theta\,(s)\,\frac{\partial R_1}{\partial t}+$$

$$\left.+\frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\theta\,(s)\,\frac{\partial R_2}{\partial t}+\lambda_3\theta\,(s)\,\frac{\partial R_3}{\partial t}-\lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Le}}-1\right)\theta\,(s)\,\frac{\partial R_4}{\partial t}\right)=0\,. \tag{23}$$

При значениях $\mathrm{Pr} = 1$, $\mathrm{Le} = 1$ и специальных видах функций $\varphi\,(H, C_A)$, $\widetilde{A}\,(H, C_A)$, $\widetilde{D}\,(H, C_A)$, $\widetilde{W}_A\,(H, C_A)$, $f\,(H, C_A)$, $g\,(s)$, приведённых в таблице работы [17], допустимы следующие операторы:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = s\frac{\partial}{\partial s} - w\frac{\partial}{\partial w}\,;\\
&X_2 = \frac{\partial}{\partial s}\,;\\
&X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + w\frac{\partial}{\partial w}\,;\\
&X_4 = u\frac{\partial}{\partial u} + w\frac{\partial}{\partial w}\,;\\
&X_5 = H\frac{\partial}{\partial H}\,;\\
&X_6 = \frac{\partial}{\partial H}\,;\\
&X_7 = C_A\frac{\partial}{\partial C_A}\,;\\
&X_8 = \frac{\partial}{\partial C_A}\,.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Законы сохранения для сопряжённой системы относительно множителей Лагранжа (17), построенные на операторах (24), приведены в таблице 1.

Таблица 1

Оператор	Закон сохранения
X_1	$\frac{\partial}{\partial s}\left[s\left\{(\lambda_1 u + \lambda_2)\frac{\partial u}{\partial s} + \lambda_3 u\frac{\partial C_A}{\partial s} + \lambda_4 u\frac{\partial H}{\partial s}\right\}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[s\left\{\left(\lambda_1 w + \left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\lambda_4 R_1 + \lambda_5\varphi\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \lambda_2\frac{\partial w}{\partial s} + \left(\lambda_3 w + \lambda_7\widetilde{A} + \lambda_8\widetilde{D}\right)\frac{\partial C_A}{\partial s} + (\lambda_4 w + \lambda_6\varphi)\frac{\partial H}{\partial s} + \left(-\lambda_1 + \left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\lambda_4 u\right)\frac{\partial R_1}{\partial s} - \frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial s} - \lambda_3\frac{\partial R_3}{\partial s} + \lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\right)\frac{\partial R_4}{\partial s}\right\} + \lambda_2 w\right] = 0\,;$

Продолжение таблицы 1

Оператор	Закон сохранения
X_2	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\lambda_1 u+\lambda_2\right)\frac{\partial u}{\partial s}+\lambda_3 u\frac{\partial C_A}{\partial s}+\lambda_4 u\frac{\partial H}{\partial s}\right]+ +\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\lambda_1 w+\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_4 R_1+\lambda_5\varphi\right)\frac{\partial u}{\partial s}+\lambda_2\frac{\partial w}{\partial s}+ +\left(\lambda_3 w+\lambda_7\widetilde{A}+\lambda_8\widetilde{D}\right)\frac{\partial C_A}{\partial s}+\left(\lambda_4 w+\lambda_6\varphi\right)\frac{\partial H}{\partial s}+ +\left(-\lambda_1+\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_4 u\right)\frac{\partial R_1}{\partial s}-\frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial s}-\lambda_3\frac{\partial R_3}{\partial s}+ +\lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Le}}-1\right)\frac{\partial R_4}{\partial s}\right]=0\,;$
X_3	$\frac{\partial}{\partial s}\left[t\left\{\left(\lambda_1 u+\lambda_2\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_3 u\frac{\partial C_A}{\partial t}+\lambda_4 u\frac{\partial H}{\partial t}\right\}\right]+ +\frac{\partial}{\partial t}\left[t\left\{\left(\lambda_1 w+\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_4 R_1+\lambda_5\varphi\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_2\frac{\partial w}{\partial t}+ +\left(\lambda_3 w+\lambda_7\widetilde{A}+\lambda_8\widetilde{D}\right)\frac{\partial C_A}{\partial t}+\left(\lambda_4 w+\lambda_6\varphi\right)\frac{\partial H}{\partial t}+ +\left(-\lambda_1+\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_4 u\right)\frac{\partial R_1}{\partial t}-\frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t}-\lambda_3\frac{\partial R_3}{\partial t}+ +\lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Le}}-1\right)\frac{\partial R_4}{\partial t}\right\}-\lambda_2 w\right]=0\,;$
X_4	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\lambda_1 u+\lambda_2\right)u\right]+ +\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\lambda_1 w+\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\lambda_4 R_1+\lambda_5\varphi\right)u+\lambda_2 w\right]=0\,;$
X_5	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda_4 uH\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\lambda_4 w+\lambda_6\varphi\right)H\right]=0\,;$
X_6	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda_4 u\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_4 w+\lambda_6\varphi\right]=0\,;$
X_7	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda_3 uC_A\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\lambda_3 w+\lambda_7\widetilde{A}+\lambda_8\widetilde{D}\right)C_A\right]=0\,;$
X_8	$\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda_3 u\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_3 w+\lambda_7\widetilde{A}+\lambda_8\widetilde{D}\right]=0\,.$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Вариационная задача оптимального управления ламинарным пограничным слоем неравновесно диссоциирующего газа (8)–(12) для любых непрерывно дифференцируемых функций* $\varphi(H, C_A)$, $\widetilde{A}(H, C_A)$, $\widetilde{D}(H, C_A)$, $\widetilde{W}_A(H, C_A)$, $f(H, C_A)$, $p(s)$ *и параметров* Pr *и* Le *допускает первый интеграл.*

Доказательство данного утверждения аналогично проведённому в работе [17] для вариационной задачи (8)–(11).

Закон сохранения (23) превращается в первый интеграл для сопряжённой системы (17):

$$\frac{\partial}{\partial s}(\lambda_2 u) + \left(\lambda_1 w + \lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right) R_1 + \lambda_5 \varphi\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w}{\partial t} +$$
$$+ (\lambda_4 w + \lambda_6 \varphi)\frac{\partial H}{\partial t} + \left(\lambda_3 w + \lambda_7 \widetilde{A} + \lambda_8 \widetilde{D}\right)\frac{\partial C_A}{\partial t} +$$
$$+ \left(\lambda_4 u\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right) - \lambda_1\right)\frac{\partial R_1}{\partial t} - \frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t} -$$
$$- \lambda_3 \frac{\partial R_3}{\partial t} + \lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\right)\frac{\partial R_4}{\partial t} = g(s), \tag{25}$$

где $g(s)$ – произвольная функция интегрирования. Предполагая, что функции $\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \lambda_3}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \lambda_4}{\partial t}$ при $t \to \infty$ являются ограниченными, из этого уравнения с учётом граничных условий (9) и (18) получим $g(s) \equiv 0$ для $\forall s \in [0; s_k]$.

Выражение (25) можно упростить, используя (17.2):

$$\frac{\partial}{\partial s}(\lambda_2 u) + \frac{\partial}{\partial t}(\lambda_2 w) + \left(\lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right) R_1 + \lambda_5 \varphi\right)\frac{\partial u}{\partial t} +$$
$$+ \lambda_6 \varphi \frac{\partial H}{\partial t} + \left(\lambda_7 \widetilde{A} + \lambda_8 \widetilde{D}\right)\frac{\partial C_A}{\partial t} +$$
$$+ \left(\lambda_4 u\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right) - \lambda_1\right)\frac{\partial R_1}{\partial t} - \frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t} -$$
$$- \lambda_3 \frac{\partial R_3}{\partial t} + \lambda_4\left(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\right)\frac{\partial R_4}{\partial t} = 0. \tag{26}$$

Отметим, что уравнением (26) можно заменить (17.1), (17.3) или (17.4), что эквивалентно понижению порядка сопряжённой системы (17) на единицу и даёт возможность упрощения проблемы поиска оптимальных управлений.

Ранее в работе [9] был получен первый интеграл рассматриваемой задачи при $\theta(s) \equiv 1$, т.е. на операторе переноса $X = \dfrac{\partial}{\partial t}$. Следует отметить, что он в точности совпадает с (25), что было указано в [17]. Аналогичный факт был отмечен и в случае ионизированного газа [1, 16]. Это обусловлено тем, что преобразования, отвечающие X_∞, являются преобразованиями эквивалентности, а сам оператор X_∞ может быть преобразован в оператор переноса; при этом уравнения сохраняют форму. Таким образом, подтверждается вывод [17] о том, что вся содержательная информация с точки зрения конструирования первого интеграла содержится в операторе переноса.

Важно отметить, что функционал (14.3) допускает бесконечномерный оператор (22) при любых функциях $\varphi(H, C_A)$, $\widetilde{A}(H, C_A)$, $\widetilde{D}(H, C_A)$, $\widetilde{W}_A(H, C_A)$, $f(H, C_A)$, $g(s)$ и параметрах Pr и Le, в то время как остальные операторы оставляют этот функционал инвариантным только для специальных видов выше перечисленных функций, а это означает, что законы сохранения, построенные на этих операторах, носят ограниченный характер и могут позволить найти оптимальное управление только в исключительных случаях.

Благодарности

Работа выполнена:

а) при государственной поддержке научных исследований, проводимых под руководством ведущих учёных в российских вузах (ведущий учёный – С. А. Исаев, КНИТУ – КАИ, г. Казань) по гранту Правительства России № 14.Z50.31.0003;

б) в рамках Государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 9.3236.2017/4.6.

Литература

[1] **Бильченко Н. Г., Гараев К. Г., Дербенёв С. А.** *К задаче оптимального управления пограничным слоем электропроводящей жидкости в магнитном поле* / Н. Г. Бильченко, К. Г. Гараев, С. А. Дербенёв // Известия ВУЗов. Авиационная техника. — 1994. — № 1. — С. 23–27.

[2] **Bilchenko N. G., Garaev K. G.** *On optimum control of laminar boundary layer of electroconductive gas by supersonic flow conditions* // Proceedings of

12th NATIONAL HEAT TRANSFER CONFERENCE (UIT). — L'Aquila, Italy. — 1994. — pp. 213–224.

[3] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.

[4] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.

[5] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения "простых" законов вдува* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 95–102.

[6] **Бильченко Н. Г.** *Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.

[7] **Бильченко Н. Г.** *Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа* / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 3. — С. 5–11.

[8] **Сиразетдинов Т. К.** *Оптимизация систем с распределёнными параметрами.* — М.: Наука, 1977. — 478 с.

[9] **Бильченко Н. Г., Гараев К. Г.** *О существовании первого интеграла в одной оптимальной задаче с распределёнными параметрами* / Н. Г. Бильченко, К. Г. Гараев // Известия ВУЗов. Математика. — 1993. — № 12(379). — С. 31–34.

[10] **Гараев К. Г.** *Об одном следствии из теоремы Э. Нётер для двумерных вариационных задач типа Майера* / К. Г. Гараев // Прикладная математика и механика. — 1980. — Т. 44. — № 3. — С. 448–453.

[11] **Lie S., Scheffers G.** *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationsgruppen.* — Leipzig, Teubner, 1891. — 568 s.

[12] **Овсянников Л. В.** *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* — М.: Наука, 1978. — 399 с.

[13] **Нётер Э.** *Инвариантные вариационные задачи* // Вариационные принципы механики. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 611–630.

[14] **Гараев К. Г.** *Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях* / К. Г. Гараев // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1988. — № 3. — С. 92–100.

[15] **Бильченко Н. Г., Овчинников В. А.** *О группе Ли, допускаемой одной нелинейной системой уравнений в частных производных параболического типа* / Н. Г. Бильченко, В. А. Овчинников // Известия ВУЗов. Математика. — 1997. — № 1(416). — С. 69–74.

[16] **Бильченко Н. Г.** *О законах сохранения в задаче оптимального управления ламинарным пограничным слоем электропроводящего газа* / Н. Г. Бильченко // "Дифференциальные уравнения и процессы управления". — 2018. — № 1. — С. 77–91. [http://www.math.spbu.ru/diffjournal/]

[17] **Бильченко Н. Г., Гараев К. Г., Овчинников В. А.** *Группа симметрии и законы сохранения в задаче оптимального управления ламинарным пограничным слоем неравновесно диссоциирующего газа* / Н. Г. Бильченко, К. Г. Гараев, В. А. Овчинников // Известия ВУЗов. Математика. — 1999. — № 11(450). — С. 11–19.

[18] **Дорренс У. Х.** *Гиперзвуковые течения вязкого газа.* — М.: Мир, 1966. — 439 с.

[19] **Белов С. В.** *Пористые металлы в машиностроении.* — М.: Машиностроение, 1981. — 247 с.

[20] **Дородницын А. А.** *Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе* // Сб. теоретических работ по аэродинамике. — М.: Оборонгиз, 1957. — С. 140–173.

[21] **Миеле А.** *Обобщение вариационной задачи на несколько функций двух независимых переменных* // Теория оптимальных аэродинамических форм. — М.: Мир, 1969. — 507 с.