ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Н. А. Бодунов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЛОКАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Научное издание

2012

Бодунов Н.А. Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости. 2-е издание.

ISSN 1817-2172

Книга знакомит читателя с некоторыми новыми задачами параметрической идентификации математических моделей. Основное содержание посвящено теоретическому обоснованию корректности таких задач – условиям локальной параметрической идентифицируемости детерминированных динамических систем при дискретном характере наблюдений.

Для научных работников, инженеров и аспирантов, занимающихся изучением различных аспектов проблемы идентификации динамических систем и объектов.

Предисловие

Изучение и оптимизация реальных объектов и процессов с помощью математических методов начинаются с построения их моделей. Когда структура исследуемого объекта выявлена и определен класс моделей, пригодных для его описания, часто возникает необходимость определить (идентифицировать) некоторые неизвестные параметры модели выбранного класса, что составляет сущность задачи параметрической идентификации. Проблема параметрической идентифицируемости заключается в установлении условий, указывающих на принципиальную возможность определения неизвестных параметров по результатам эксперимента. Такие условия параметрической идентифицируемости можно назвать теоретическими, так как они относятся к фундаментальным свойствам самой изучаемой модели. Если теоретические условия параметрической идентифицируемости не выполняются, то это может привести к существенному снижению информативности натурного эксперимента, а в некоторых случаях и к его полному провалу.

Свойство локальной идентифицируемости – возможность оценивания неизвестных параметров в окрестности некоторых заранее заданных точек параметрического пространства. Как правило, такими точками служат номинальные значения параметров, найденные расчетным путем или известные из других источников. В технических приложениях обычно интересуются именно локальной идентифицируемостью параметров.

Существуют различные постановки задачи локальной параметрической идентифицируемости динамических систем. Прежде всего это различие связано с разнообразием типов изучаемых систем (линейных и нелинейных, автономных и нестационарных, дискретных и непрерывных, систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, с помехами либо детерминированных и т. д.). Кроме того, это различие определяется тем, что наблюдается (измеряется) и тем, на каком временном множестве проводится наблюдение. Наблюдать можно какое-то одно решение, некоторую функцию этого решения, какие-либо специфические характеристики решений и т. д., а временем наблюдения могут быть промежутки – конечные или бесконечные, дискретные наборы моментов времени (также конечные или бесконечные), а также и множества иной структуры. Ввиду большого разнообразия типов исследуемых динамических систем и различия проводимых наблюдений сложность задачи локальной параметрической идентифицируемости может колебаться в очень широких пределах, превращаясь иногда в самостоятельную трудную проблему.

К настоящему времени наиболее изученной является проблема идентифицируемости непрерывных и дискретных моделей в стохастической постановке, когда наблюдения предполагаются искаженными случайным шумом. Работ по проблеме идентифицируемости в детерминистской постановке значительно меньше. Характерной особенностью большинства работ по идентифицируемости непрерывных детерминированных моделей является основное предположение о наблюдении выхода системы на некотором отрезке времени. Задача идентифицируемости непрерывных моделей при дискретных наблюдениях оставалась нерешенной. Актуальность этой задачи несомненна, поскольку, например, в большинстве применяемых в настоящее время цифровых систем автоматизированного проведения эксперимента наблюдения регистрируются в дискретные моменты времени.

Цель этой книги – попытка ликвидировать указанный пробел в теории идентифицируемости. В ней прежде всего рассматривается именно эта задача о локальной параметрической идентифицируемости произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений при дискретных наблюдениях. Все остальные рассмотренные в книге задачи локальной параметрической идентифицируемости в своих постановках объединяются общей идеей о дискретном характере наблюдений и являются, на наш взгляд, естественными с точки зрения приложений.

Основное содержание книги базируется на результатах публикаций [87–98]. Ряд результатов здесь публикуется впервые.

Работа может представлять интерес не только полученными в ней новыми результатами об идентифицируемости различных математических моделей, но и приемами и техникой, которые были предложены в ходе доказательств основных результатов. Полученные результаты могут быть использованы для разработки новых методов и алгоритмов параметрической идентификации всех типов рассмотренных динамических систем и постановки новых задач.

Автор будет признателен читателям за любые замечания по содержанию книги.

Введение

Математические модели динамических систем обычно содержат неизвестные параметры, определение которых составляет сущность задачи параметрической идентификации. Точные значения либо приемлемые оценки неизвестных параметров обычно находят в результате обработки входных и выходных сигналов системы на этапе идентифицирующего эксперимента.

“Идентификация в настоящее время – обязательный элемент и наиболее сложная стадия процесса решения актуальных прикладных задач. В процессе идентификации создаются адекватные модели, необходимые для практического использования математических методов и сложных наукоемких технологий. Ввиду этого разработка методов и алгоритмов идентификации приобретает в настоящее время исключительно важное значение для фундаментальной науки” [1].

Понятиям и методам идентификации статических и динамических объектов посвящены известные книги [2–6], ряд сборников (например, [7]) и справочников по теории управления (например, [8]), многочисленные обзоры ([9–12] и др.) и огромное количество статей, относящихся к различным разделам теории и практики идентификации. Подавляющее большинство из имеющихся публикаций посвящено методам и алгоритмам идентификации. Количество таких работ устойчиво растет, а область практического использования предлагаемых алгоритмов постоянно расширяется. Кроме того, расширяется круг применяемых для решения прикладных задач математических идей и методов (см., например, [13–17]).

Число работ, посвященных вопросам теоретического обоснования методов параметрической идентификации и возможности их применения, значительно меньше. Однако очевидно, что еще до проведения идентифицирующего эксперимента исследователь должен быть уверен, что значения параметров модели могут быть определены по экспериментальным данным однозначно, в противном случае выводы, основанные на полученной информации, будут весьма сомнительными.

Фундаментальный вопрос – возможно или нет нахождение единственных значений параметров модели по имеющимся наблюдениям – составляет сущность проблемы параметрической идентифицируемости. Задача параметрической идентифицируемости не во всем пространстве параметров, а в окрестности некоторого значения параметра носит название локальной идентифицируемости.

Существуют различные подходы к проблеме идентифицируемости. Возможность однозначного определения параметров модели при отсутствии шума наблюдений представляет собой детерминистскую постановку проблемы, тогда как при стохастической постановке наблюдения предполагаются искаженными случайным шумом.

Первые работы, связанные с проблемой идентифицируемости в стохастической постановке, появились, пожалуй, раньше работ, посвященных детерминистской постановке и относятся к рубежу 50–60-х годов двадцатого столетия (см., например, [18–23]). К настоящему времени опубликовано достаточно много результатов по идентифицируемости в стохастическом случае, имеющих различия и в постановке задачи, и в исследуемых моделях, и даже в терминологии (в книгах [6], [7] и статьях [10–12] приведен обзор обширной литературы по этой проблематике).

К первым публикациям по идентифицируемости в детерминистской постановке относятся [24]–[26], основные понятия и определения введены в работе [27], а наиболее важные первые результаты получены в статьях [28]–[30] и других. В качестве математических моделей рассматривались системы обыкновенных дифференциальных уравнений (непрерывные модели) либо системы разностных уравнений (дискретные модели). Характерной особенностью работ по идентифицируемости непрерывных моделей является то, что наблюдение выходного сигнала всегда проводится на некотором отрезке времени. Приведем цитату из известного справочника по теории автоматического управления: “Под параметрической идентифицируемостью обычно понимают возможность определения параметров математической модели системы или процесса по результатам измерения определенных выходных величин в течение некоторого интервала времени” [8, с. 55]. По локальной идентифицируемости непрерывных моделей наиболее общими и сильными продолжают оставаться достаточные условия, полученные в работах [27] и [28]. Данные условия для линейных стационарных систем, зависящих от постоянного векторного параметра, имеют вид ранговых критериев (незначительное ослабление этих условий для одного частного случая было получено в работе [31]), а для нелинейных моделей сводятся к выполнению условий локальной идентифицируемости соответствующих линеаризованных моделей.

Основным понятием, на котором базируется свойство локальной идентифицируемости, является так называемый принцип неразличимости [27], заключающийся в следующем: пара значений параметров $\{p_1, p_2\}$ называется неразличимой, если

$$y(t, p_1) \equiv y(t, p_2), \quad t \in [t_0, T],$$

где $y(t, p)$ – измеряемый на отрезке времени $[t_0, T]$ выход рассматриваемой системы. В противном случае пара $\{p_1, p_2\}$ называется различимой. При этом говорят, что система локально идентифицируема при значении параметра $p = p_0$, если пара $\{p, p_0\}$ является различимой при всех p, принадлежащих некоторой проколотой окрестности точки p_0. Если система локально идентифицируема при всех $p \in \mathcal{P}$, то ее называют глобально идентифицируемой на множестве $\mathcal{P}$. Заметим, что мы придерживаемся в основном терминологии работы [32], близкой к соблюдаемой большинством авторов (в 80-е годы по поводу отсутствия установившейся совокупности понятий и терминологии некоторыми авторами велась дискуссия, отразившаяся в статьях [30, 33, 34, 35]). Заметим также, что введенное понятие локальной параметрической идентифицируемости не связывает это свойство со способом обработки экспериментальной информации, то есть относится к чисто структурным свойствам модели. В то же время одним из наиболее ранних определений идентифицируемости, которое ориентировано на определенный метод такой обработки, была так называемая локальная МНК-идентифицируемость [24]. Кроме того, в [28] было введено понятие идентифицируемости "в смысле чувствительности". В [30] было показано, что во многих случаях для задач в детерминистской постановке локальная идентифицируемость непрерывных моделей по наблюдениям выхода на отрезке времени, МНК-идентифицируемость и идентифицируемость в смысле чувствительности эквивалентны (см. также [36]).

Упомянутое выше ранговое условие локальной идентифицируемости при значении параметра $p = p_0$ линейной стационарной системы

$$\dot{x} = A(p)x, \quad x(0) = x_0, \quad x \in R^n, \quad p \in R^m,$$

при условии, что наблюдение линейной функции $y = C(p)x$ проводится на некотором отрезке $[0, T]$, имеет вид $\mathrm{rank} Q(p_0) = m$, где

$$Q(p) = \begin{bmatrix} C'_{p_1} & C'_{p_2} & \dots & C'_{p_m} \\ (CA)'_{p_1} & (CA)'_{p_2} & \dots & (CA)'_{p_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (CA^{2n-1})'_{p_1} & (CA^{2n-1})'_{p_2} & \dots & (CA^{2n-1})'_{p_m} \end{bmatrix},$$

($p = [p_1, p_2, ..., p_m]^t$, ^{t} – знак транспонирования). В основе доказательства этого условия лежит невырожденность отображения пространства параметров в пространство выходов, принцип неразличимости и теорема Кэли – Гамильтона. Для нелинейных систем условия локальной идентифицируемости при значении параметра $p = p_0$, как было отмечено выше, сводятся к выполнению условий идентифицируемости для линеаризованной вдоль решения, соответствующего p_0, системы. Однако эта линеаризованная модель является в общем случае нестационарной и проверка условий ее идентифицируемости сопряжена с определенными сложностями (полученное, например, в [27] условие предполагает использование фундаментальной матрицы линейной нестационарной системы, явный вид которой, как известно, удается получить в редких случаях).

С первых работ по идентифицируемости непрерывных моделей авторами высказывались предположения о связи между их идентифицируемостью, управляемостью и наблюдаемостью. Интерес к выяснению этой связи существенно уменьшился после того, как в ряде работ (см., например, [37–43], [30], [32]) на примерах было показано, что управляемость и наблюдаемость не являются ни необходимыми, ни достаточными условиями для идентифицируемости моделей.

В 90-е годы до настоящего времени количество работ по параметрической идентифицируемости непрерывных моделей в детерминистской постановке существенно уменьшилось. Отметим работу [44], в которой делается попытка аксиоматизировать теорию идентификации на языке теории множеств и отображений множества входов на множество выходов. Анализируются условия существования модели входных воздействий, разрешающей вопрос об апостериорном распознавании математической модели исследуемой динамической системы. В работе [45] исследуется идентифицируемость линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы, в которую аддитивно входят линейные комбинации координат некоторой неизвестной вектор-функции, являющейся решением дифференциального уравнения с неизвестным начальным условием. Задача сводится к определению этого вектора начальных условий. Измеряются функции решений на отрезке времени. Получены алгебраические (ранговые) условия идентифицируемости. В работе [46] для линейных нестационарных систем вводится понятие квазиидентифицируемости, связанное с нахождением близкой по выходу линейной стационарной системы. Отметим еще работу [47], в которой устанавливается связь между структурной идентифицируемостью (определяется стандартно на основе принципа неразличимости) и введенной авторами алгебраической идентифицируемостью. Последнее понятие определяется через невырожденность якобиана некоторой мероморфной функции, связывающей входные и выходные сигналы, и близко по смыслу к упомянутой выше идентифицируемости в смысле чувствительности.

В этом кратком обзоре мы остановились лишь на некоторых, наиболее важных результатах, полученных в области параметрической идентифицируемости непрерывных детерминированных моделей. Общим этих результатов, как уже отмечалось выше, является то, что наблюдение выхода модели проводится на некотором фиксированном промежутке времени.

Принципиально отличающейся является задача параметрической идентифицируемости непрерывных моделей по наблюдаемым в дискретные моменты времени выходным сигналам. Такая постановка особенно важна с точки зрения приложений, так как в реальности большинство наблюдающих систем фиксируют наблюдаемый сигнал в дискретном режиме. Новой является и задача параметрической идентифицируемости по каким-либо свойствам системы или ее решений, проявляющимся на бесконечном промежутке времени либо в дискретные моменты этого промежутка. При изучении систем с распределенными параметрами также приходится в некоторых случаях рассматривать неограниченные области фазового пространства в сочетании с бесконечными временными промежутками. Возникающие при этом задачи идентификации параметров часто не укладываются в рамки известной основной теории и требуют специальной постановки и особого решения.

Некоторые из таких новых задач локальной параметрической идентифицируемости рассматриваются в настоящей книге.

Как отмечалось в [48], различные постановки задачи о локальной параметрической идентифицируемости можно обобщить и рассматривать их, как частные случаи следующей задачи. Рассматривается динамическая система

$$x = F_p(t, x_0),$$

где $x \in X$, $p \in P$; x, P – топологические пространства. Здесь p – параметр, подлежащий определению по наблюдению траекторий с фиксированным начальным значением $F_p(0, x_0) = x_0$ или каких-либо функций от этих траекторий на некотором множестве значений времени t.

Фиксируется множество T значений t (это может быть конечный или бесконечный набор значений t ($T = \{t_1, t_2, ..., t_n, ...\}$) либо объединение конечного или бесконечного набора числовых промежутков ($T = \bigcup\limits_n (t_{1_n}, t_{2_n})$)).

Результатом наблюдений является множество

$$V(p) = \{G_n(F_p(t, x_0)),\ t \in T\},$$

где G_n – функции или функционалы в зависимости от природы множества T.

Мы говорим, что рассматриваемая динамическая система локально параметрически идентифицируема при значении параметра $p_0 \in P$ по результатам наблюдений на множестве T, если существует такая окрестность U точки p_0 в P, что

$$V(p) \neq V(p_0) \quad \text{при} \quad p \in U \setminus \{p_0\}.$$

Все рассмотренные в этой книге задачи в своих постановках укладываются в рамки указанной схемы.

Излагаются следующие новые результаты.

1. Рассмотрена общая постановка задачи о локальной идентифицируемости кусочно-постоянного векторного параметра нелинейной системы по наблюдению ее выхода в конечном числе точек (при этом возможно несовпадение моментов наблюдения с моментами изменения значений параметра). Получены ранговые условия локальной идентифицируемости. Рассмотрен вопрос об идентифицируемости в том случае, когда результат измерения выхода системы известен не точно, а с некоторой погрешностью. Полученная оценка погрешности определения параметра системы носит априорный характер и позволяет судить о качестве параметрической идентификации.

2. Разработан общий алгоритм идентификации кусочно-постоянного параметра нелинейной системы, основанный на градиентном методе минимизации специального функционала, связывающего решения системы с результатами измерений. На основе изучения возможности сведения задачи параметрической идентификации к задаче оптимального управления разработан алгоритм идентификации неизвестного параметра, использующий дискретный принцип максимума Понтрягина. Предложенные алгоритмы допускают эффективную реализацию на ЭВМ, а их работоспособность подтверждена численными примерами.

3. Детально изучен частный случай идентифицируемости по наблюдению выхода системы на концах фиксированного временного промежутка (идентифицируемость по двухточечному наблюдению). Получены условия локальной идентифицируемости по двухточечному наблюдению для линейных систем (условия первого порядка) и для квазилинейных систем по первому прибли-

жению. В случае, когда для нелинейных систем условия локальной идентифицируемости первого порядка не выполняются, получены условия высших порядков. Эти условия формулируются в терминах коэффициентов тейлоровских разложений решений и специальных диаграмм Ньютона.

4. Для линейных стационарных и периодических систем дифференциальных уравнений введено понятие локальной асимптотической идентифицируемости, связанное с зависимостью строгих показателей Ляпунова решений этих систем от векторного параметра. Изучена связь локальной асимптотической идентифицируемости с рассмотренной ранее локальной идентифицируемостью по двухточечному наблюдению. Найдены условия, при которых из локальной асимптотической идентифицируемости следует локальная идентифицируемость по двухточечному наблюдению.

5. Для линейного дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом, моделирующего систему управления с блоком временной задержки в цепи обратной связи, исследована задача об идентифицируемости входного воздействия системы по измерению ее выхода в произвольный момент времени. Получена оценка на величину запаздывания, при которой эта задача однозначно разрешима. Показано, что при увеличении запаздывания условие идентифицируемости может нарушаться.

6. Рассмотрена постановка задачи о локальной параметрической идентифицируемости для случая, когда наблюдение происходит с ошибками, при этом в процессе наблюдения ошибки асимптотически уменьшаются с течением времени. Введено свойство динамической положительной различимости инвариантных множеств диффеоморфизмов, которое в сочетании с результатами теории отслеживания псевдотраекторий и теории гиперболических аттракторов используется для получения достаточных условий локальной идентифицируемости периодических по времени нелинейных систем дифференциальных уравнений в данной постановке.

7. Для нелинейной периодической по времени системы дифференциальных уравнений, имеющей гиперболически устойчивое периодическое решение, исследована задача нахождения условий на характеристики применяемого численного метода и на величину шага интегрирования, при которых возможно идентифицировать неизвестный параметр по результатам численного эксперимента. Установлена связь локальной параметрической идентифицируемости линейных периодических систем по их дискретизациям с асимптотической устойчивостью таких систем.

8. Рассмотрена задача локальной параметрической идентифицируемости

для полулинейного параболического уравнения в предположении, что наблюдаются дискретизации классических решений, уточняющиеся с ростом дискретного времени. С использованием свойств эволюционных динамических систем, порожденных параболическими уравнениями, получены достаточные условия идентифицируемости. Показано, что эти условия выполняются в случае известной задачи Чэфи – Инфанте.

9. Для полулинейного параболического уравнения исследована задача локальной параметрической идентифицируемости по наблюдению решений дискретизации этого уравнения. Показано, что идентификация неизвестного параметра возможна без требования уточнения наблюдения с ростом времени.

Для обоснования основных научных результатов использовались методы общей и качественной теории динамических систем и обыкновенных дифференциальных уравнений, методы теории оптимального управления и теории ветвления решений нелинейных уравнений, аппарат дифференциальных и интегральных неравенств, методы глобальной дифференциальной динамики, в частности, теории отслеживания в динамических системах. Были использованы методы глобальной качественной теории бесконечномерных динамических систем, порождаемых уравнениями в частных производных, а также приемы и методы современного численного анализа. Ссылки на соответствующие источники помогут читателю при работе с книгой.

1 Локальная параметрическая идентифицируемость нелинейных систем при дискретных наблюдениях

§1. Достаточные условия локальной параметрической идентифицируемости. Алгоритм идентификации

Рассмотрим модель, описываемую системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, p), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $t \in [t_0, T]$; $x \in R^n$; параметр $p = p(t)$ является кусочно-постоянным: $p(t) = p_i \in \Omega \subset R^m$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, ..., N-1$, $t_N = T$; вектор-функция $f(t, x, p)$ предполагается достаточно гладкой и обеспечивающей продолжимость решений задачи Коши (1.1) на промежуток $[t_0, T]$ при любых значениях вектора параметров

$$\pi = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{bmatrix} \in D \subset R^{Nm} \quad (D = \Omega^N).$$

Обозначим через $x(t, \pi)$ решение задачи Коши (1.1): при $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, ..., N-1$, $x(t, \pi)$ есть решение системы

$$\dot{x} = f(t, x, p_i), \quad x(t_0, \pi) = x_0,$$

$$x(t_i, \pi) = \lim_{t \to t_i - 0} x(t, \pi), \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Считаем, что наблюдаемый выходной сигнал задается гладким отображением $y = \alpha(x)$, $\alpha : R^n \to R^k$. Результатом наблюдений служит набор векторов $y_i(\pi) = \alpha(x(t_i, \pi))$, $i = 1, 2, ..., N$.

Следуя известному определению [27], назовем пару значений параметров $\{\pi_1, \pi_2\}$, $\pi_1, \pi_2 \in D$, неразличимой, если для всех $i = 1, 2, ..., N$ $y_i(\pi_1) = y_i(\pi_2)$. В противном случае пара $\{\pi_1, \pi_2\}$ называется различимой.

Определение 1.1. *Система (1.1) называется локально идентифицируемой в точке $\pi_0 \in D$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что пара $\{\pi_0, \pi_1\}$ различима для любой точки π_1, такой, что $0 < \|\pi_1 - \pi_0\| < \varepsilon$.*

Введем в рассмотрение функцию

$$J(\pi_1, \pi_2) = \sum_{i=1}^{N} \|y_i(\pi_1) - y_i(\pi_2)\|^2 \geq 0, \quad \pi_1, \pi_2 \in D.$$

Поскольку неразличимость пары $\{\pi_1, \pi_2\}$ означает, что $J(\pi_1, \pi_2) = 0$, условие локальной идентифицируемости системы (1.1) в точке π_0 равносильно существованию строгого локального минимума, равного нулю, функции

$$F(\pi) = J(\pi, \pi_0) = \sum_{i=1}^{N} \|y_i(\pi) - y_i(\pi_0)\|^2 \tag{1.2}$$

в точке $\pi = \pi_0$.

Для формулировки основного результата проведем следующие дополнительные построения.

Предполагая, что вектор-функция f принадлежит классу C^1 по x, p, рассмотрим на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., N-1$, матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \pi), p_i)v + \frac{\partial f}{\partial p}(t, x(t, \pi), p_i), \quad v(t_i) = 0, \tag{1.3}$$

где $v(t)$ – $(n \times m)$-матрица. Обозначим $v_{i+1}(\pi) = v(t_{i+1})$. Определим теперь $(k \times m)$-матрицы

$$w_i(\pi) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x(t_i, \pi))v_i(\pi), \quad i = 1, 2, ..., N. \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. *Пусть точка $\pi_0 \in D$ обладает тем свойством, что*

$$\operatorname{ran}k(w_i(\pi_0)) = m, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Тогда π_0 – точка строгого локального минимума функции $F(\pi)$, т. е. система (1.1) *локально идентифицируема в этой точке.*

Доказательство. Рассмотрим решение $x(t, \pi)$ на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$. Обозначим

$$z(t) = \frac{\partial x(t, \pi)}{\partial p_i}.$$

Из теоремы о дифференцируемости решения по параметру (см., например, [49, с. 120]) следует, что

$$\dot{z}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \pi), p_i)z(t) + \frac{\partial f}{\partial p}(t, x(t, \pi), p_i), \quad z(t_i) = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial x(t_{i+1},\pi)}{\partial p_i} = v_{i+1}(\pi).$$

Дифференцируя равенство $y_{i+1}(\pi) = \alpha(x(t_{i+1},\pi))$ по p_i, получаем

$$\frac{\partial y_{i+1}(\pi)}{\partial p_i} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x(t_{i+1},\pi))\frac{\partial x(t_{i+1},\pi)}{\partial p_i} = w_{i+1}(\pi).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial y_{i+1}}{\partial p_i}(\pi_0) = w_{i+1}(\pi_0). \tag{1.5}$$

Предположим, что доказываемая теорема неверна. Тогда найдется последовательность векторов $\pi^q \in D$, $q = 1, 2, ...$, такая, что $\pi^q \to \pi_0$ при $q \to \infty$, $\pi^q \neq \pi_0$ и $F(\pi^q) = 0$ (см. (1.2)). У вектора π конечное число компонент, поэтому найдется такой индекс $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$, что для бесконечного множества индексов q верны равенства $p_i^q = p_i^0 + \delta_q$, где $\delta_q \in R^m$, $\delta_q \neq 0$, $\delta_q \to 0$ при $q \to \infty$,

$$\pi^q = \begin{bmatrix} p_0^q \\ p_1^q \\ \vdots \\ p_{N-1}^q \end{bmatrix}, \quad \pi_0 = \begin{bmatrix} p_0^0 \\ p_1^0 \\ \vdots \\ p_{N-1}^0 \end{bmatrix}.$$

Пусть $y_j^q = \alpha(x(t_j,\pi^q))$, $j = 1, 2, ..., N$. Так как $F(\pi^q) = 0$, очевидно, что для всех q и $j = 1, 2, .., N$

$$y_j^q = y_j^0 = \alpha(x(t_j,\pi_0)).$$

В частности, для указанного выше индекса i

$$y_{i+1}^q = y_{i+1}^0 \quad \text{при всех} \quad q. \tag{1.6}$$

Из формулы (1.5) следует, что

$$y_{i+1}^q = y_{i+1}^0 + w_{i+1}(\pi_0)\delta_q + g(\delta_q), \tag{1.7}$$

где

$$\frac{\|g(\delta_q)\|}{\|\delta_q\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta_q \to 0.$$

Равенства (1.6) и (1.7) означают, что

$$w_{i+1}(\pi_0)\delta_q + g(\delta_q) = 0$$

или

$$w_{i+1}(\pi_0)\frac{\delta_q}{\|\delta_q\|} + \frac{g(\delta_q)}{\|\delta_q\|} = 0. \tag{1.8}$$

Обозначим $z_q = \dfrac{\delta_q}{\|\delta_q\|}$, $\|z_q\| = 1$. Поскольку сфера $\|z\| = 1$ компактна, из последовательности z_q можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Не меняя индекса, будем считать, что $z_q \to \widetilde{z}$, $\|\widetilde{z}\| = 1$. Переходя в (1.8) к пределу при $q \to \infty$, получаем

$$w_{i+1}(\pi_0)\widetilde{z} = 0$$

и, следовательно $\widetilde{z} = 0$, так как по условию $\operatorname{ran} k(w_{i+1}(\pi_0)) = m$. Полученное противоречие ($\|\widetilde{z}\| = 1$) доказывает теорему.

Замечание 1.1. Условия теоремы 1.1 могут быть выполнены только в случае $k \geq m$, т. е. когда размерность параметра системы не больше размерности вектора наблюдений (см. формулу (1.4)).

Предположим теперь, что в точке π_0 система (1.1) локально идентифицируема и известны результаты наблюдений – набор векторов $y_i^0 = y_i(\pi_0)$, $i = 1, 2, ..., N$. Задача идентификации состоит в определении для системы (1.1) неизвестного вектора $\pi_0 \in D$ по указанным результатам наблюдений.

Решение поставленной задачи может быть получено алгоритмом идентификации, основанном на градиентном методе минимизации функции $F(\pi)$. Для этого прежде всего потребуются производные $\left.\dfrac{\partial x(t,\pi)}{\partial p_i}\right|_{t=t_j}$, $j \geq i+1$ (при $j \leq i$ $x(t_j,\pi)$ не зависит от p_i). На отрезке $[t_0, t_1]$ $x(t,\pi)$ зависит лишь от p_0 и, используя прежние обозначения, можем записать

$$\left.\frac{\partial x(t,\pi)}{\partial p_0}\right|_{t=t_1} = v_1.$$

Аналогично

$$\left.\frac{\partial x(t,\pi)}{\partial p_1}\right|_{t=t_2} v_2.$$

Для вычисления производной $\left.\dfrac{\partial x(t,\pi)}{\partial p_0}\right|_{t=t_2}$ применим теорему о дифференцируемости решения по начальным данным (см., например, [49, с. 120]). Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы

$$\dot{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\pi), p_j)u, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad \Phi(t_j) = E, \tag{1.9}$$

где E – единичная матрица. Обозначим $u_j = \Phi(t_{j+1})$. Тогда, если $x(t_j, \pi) = x_j$, то

$$\left.\frac{\partial x(t,\pi)}{\partial x_j}\right|_{t=t_{j+1}} = u_j.$$

Отсюда легко получаем

$$\left.\frac{\partial x(t,\pi)}{\partial p_0}\right|_{t=t_2} = \left.\frac{\partial x(t,\pi)}{\partial x_1}\right|_{t=t_2} \left.\frac{\partial x(t,\pi)}{\partial p_0}\right|_{t=t_1} = u_1 v_1$$

и, аналогично,

$$\left.\frac{\partial x(t,\pi)}{\partial p_0}\right|_{t=t_3} = u_2 u_1 v_1.$$

Теперь с достаточной очевидностью может быть записана общая формула: если $j > i+1$, $i \geq 0$, $j \leq N$, то

$$\left.\frac{\partial x(t,\pi)}{\partial p_i}\right|_{t=t_j} = u_{j-1} u_{j-2} ... u_{i+1} v_{i+1}. \tag{1.10}$$

Используя (1.10) и учитывая, что

$$\frac{\partial y_j(\pi)}{\partial p_i} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x(t_j,\pi)) \left(\left.\frac{\partial x(t,\pi)}{\partial p_i}\right|_{t=t_j} \right),$$

находим производные

$$\frac{\partial y_{i+1}(\pi)}{\partial p_i} = w_{i+1}(\pi)$$

(это обозначение нами уже использовалось в (1.5)) и

$$\frac{\partial y_j(\pi)}{\partial p_i} = \xi_{j,i}(\pi) \quad \text{при} \quad j \geq i+2.$$

Таким образом мы можем вычислять частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial p_i}$ (где, как и выше, $F(\pi) = \sum\limits_{j=1}^{N} \|y_j(\pi) - y_j^0\|^2$). При этом, если $p_i = [p_i^1, p_i^2, ..., p_i^m]^t$, то

$$\frac{\partial F}{\partial p_i^l} = \sum_{j=i+1}^{N} 2 < \frac{\partial y_j(\pi)}{\partial p_i^l}, \quad y_j(\pi) - y_j^0 >, \quad l = 1, 2, ..., m. \tag{1.11}$$

Здесь $\dfrac{\partial y_j(\pi)}{\partial p_i^l}$ – l-й столбец матрицы $w_j(\pi)$, если $j = i+1$, либо матрицы $\xi_{j,i}(\pi)$, если $j \geq i+2$; $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение.

Знание всех производных (1.11) позволяет осуществить минимизацию функции $F(\pi)$ градиентным методом (см., например, [50, с.29]), переходя от произвольного начального вектора $\pi \in D$ к $\pi + \Delta\pi$, где $\Delta\pi = -s\dfrac{\partial F}{\partial \pi}$, $s > 0$. При этом можно определять значение s_0 из условия

$$F(\pi) - s_0 \left\| \frac{\partial F}{\partial \pi} \right\|^2 = 0$$

и идти по отрезку $s \in [0, s_0]$, находя минимум $F(\pi)$.

Приведенный алгоритм допускает реализацию на ЭВМ, при которой проводятся параллельные вычисления:

1) интегрирование системы (1.1) – нахождение $x(t_{i+1}, \pi)$ и $y_{i+1} = \alpha(x(t_{i+1}, \pi))$;

2) интегрирование системы (1.3) – нахождение $v(t_{i+1})$;

3) интегрирование системы (1.9) – нахождение $\Phi(t_{i+1})$.

После этого формируются матрицы $w_{i+1}(\pi)$ и $\xi_{j,i}(\pi)$ и определяется производная $\dfrac{\partial F}{\partial \pi}$. На каждом шаге алгоритма получаем новое значение параметра $\widetilde{\pi} = \pi - s\dfrac{\partial F}{\partial \pi}$, для которого $F(\widetilde{\pi}) < F(\pi)$.

В качестве иллюстрации работы алгоритма идентификации рассмотрим следующий пример. Пусть модель объекта описывается системой двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - p x_2, \end{cases}$$

$t \in [t_0, T] = [0, 2]$. Начальные условия: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -2$. Параметр $p \in R$ кусочно-постоянен и принимает значение p_0 на промежутке $t \in [0, 1)$ и значение p_1 на промежутке $t \in [1, 2)$. Таким образом, $\pi = [p_0, p_1]^t$. Истинное значение параметра p таково: $p_0^0 = 1$, $p_1^0 = 1.2$, так что

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix}.$$

В качестве наблюдений в точках $t_1 = 1$, $t_2 = T = 2$ используются непосредственно значения фазовых переменных, т. е. $\alpha(x)$ – тождественное отображение: $y_1(\pi) = [x_1(1, \pi), x_2(1, \pi)]^t$, $y_2(\pi) = [x_1(2, \pi), x_2(2, \pi)]^t$.

Можно показать, что решением задачи Коши $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -2$ для рассматриваемой системы на отрезке $[0,1]$ служат функции

$$x_1(t) = \left(\frac{p-1}{\sqrt{p^2+1}} + 1\right) e^{\sqrt{p^2+1}\,t} + \left(1 - \frac{p-1}{\sqrt{p^2+1}}\right) e^{-\sqrt{p^2+1}\,t},$$

$$x_2(t) = \left(\frac{p+1}{\sqrt{p^2+1}} - 1\right) e^{\sqrt{p^2+1}\,t} - \left(1 + \frac{p+1}{\sqrt{p^2+1}}\right) e^{-\sqrt{p^2+1}\,t}.$$

Используя обозначения, введенные при доказательстве теоремы 1.1 , можем записать

$$v_1(\pi_0) = v_1(1) = \left[\left.\frac{\partial x_1(1)}{\partial p}\right|_{p=1},\ \left.\frac{\partial x_2(1)}{\partial p}\right|_{p=1}\right]^t. \tag{1.12}$$

Далее находим

$$\frac{\partial x_1(1)}{\partial p} = \left[\frac{\sqrt{p^2+1} - (p-1)\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}}{p^2+1} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{p-1}{\sqrt{p^2+1}} + 1\right) \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right] e^{\sqrt{p^2+1}} +$$

$$+ \left[\frac{-\sqrt{p^2+1} + (p-1)\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}}{p^2+1} + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{p-1}{\sqrt{p^2+1}}\right)\left(-\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right)\right] e^{-\sqrt{p^2+1}}.$$

Таким образом,

$$\left.\frac{\partial x_1(1)}{\partial p}\right|_{p=1} = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} \neq 0. \tag{1.13}$$

Из (1.12) и (1.13) следует, что $\operatorname{ran} k(v_1(\pi_0)) = 1$. В рассматриваемом примере $w_i(\pi) = v_i(\pi)$, следовательно, $\operatorname{ran} k(w_i(\pi_0)) = \operatorname{ran} k(v_i(\pi_0))$. Таким образом, условие теоремы 1.1 выполнено при $i = 1$. Нетрудно показать, что и при $i = 2$ $\operatorname{ran} k(v_2(\pi_0)) = 1$. Это означает, что рассматриваемая система в окрестности значения параметра π_0 локально идентифицируема и можно применить предложенный выше алгоритм идентификации.

Было взято начальное значение параметра $\pi = [1.1,\, 1.1]^t$, т. е. начальные значения $p_0 = p_1 = 1.1$, а интегрирование соответствующих систем дифференциальных уравнений вида (1.1), (1.3) и (1.9) проводилось по методу Эйлера с фиксированным рангом дробления отрезка $[0, 2]$ на 100 частей для каждого шага алгоритма. Результаты вычислений приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Номер шага	Значение $F(\pi)$	Оценка p_0^0 $(t \in [0, 1))$	Оценка p_1^0 $(t \in [1, 2))$
1	1.4584	1.0994	1.0966
2	1.0260	1.0971	1.0831
3	0.6796	1.0918	1.0620
4	0.2276	1.0439	1.1164
5	0.0081	1.0096	1.1832
6	0.0004	1.0016	1.1971

§2. Локальная идентифицируемость нелинейных систем по дискретным наблюдениям, содержащим погрешности

Прежде всего в этом параграфе мы обобщим полученные выше результаты по идентифицируемости нелинейных систем на случай, когда моменты наблюдения могут не совпадать с моментами изменения кусочно-постоянного параметра системы. Пусть, по-прежнему, модель объекта описывается системой (1.1), где $x \in R^n$, $p \in R^k$, $f \in C^1$. Предположим, что параметр p принимает значения p_i на промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1})$, где $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_s < \tau_{s+1} = T$.

Введем вектор параметров $\pi = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{bmatrix} \in R^{k(s+1)}$ и обозначим через $x(t, \pi)$ решение задачи Коши (1.1), определяемое по ранее описанной схеме. Будем предполагать также, что выполнены условия продолжимости любых решений системы (1.1) на $[t_0, T]$.

Фиксируем точки $t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$ и гладкое отображение $\alpha :\; R^n \to$

R^d. Наблюдаемой величиной является вектор

$$Y(\pi) = \begin{bmatrix} y_1(\pi) = \alpha(x(t_1, \pi)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m(\pi) = \alpha(x(t_m, \pi)) \end{bmatrix}. \tag{1.14}$$

При этом условие различимости двух значений параметров π_1 и π_2 означает, что $Y(\pi_1) \neq Y(\pi_2)$, а условие локальной идентифицируемости системы (1.1) в точке π_0 означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что пара $\{\pi, \pi_0\}$ различима для любого π: $0 < \|\pi - \pi_0\| < \varepsilon$.

Итак, в отличие от рассмотренной выше задачи идентификации теперь моменты наблюдения t_i не обязательно совпадают с концами промежутков постоянства параметра. Такое обобщение является естественным при следующем подходе к задаче локальной идентифицируемости: моменты наблюдения t_i фиксированы, а переменный параметр $p(t)$ аппроксимируется кусочно-постоянной функцией, при этом промежутки $[\tau_i, \tau_{i+1})$ постоянства параметра выбираются, исходя из какой-либо априорной информации о поведении функции $p(t)$.

Введем следующие объекты. Пусть $\Psi_i(t)$ – матрица размера $n \times k$, удовлетворяющая линейной системе

$$\dot{\psi} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \pi), p_i)\, \psi + \frac{\partial f}{\partial p}(t, x(t, \pi), p_i)$$

на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ и такая, что $\Psi_i(\tau_i) = 0$, $i = 0, 1, ..., s$.

Пусть $\Phi_i(t)$ – матрица размера $n \times n$, удовлетворяющая линейной системе

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \pi), p_i)\, \varphi$$

на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ и такая, что $\Phi_i(\tau_i) = E$. Конечно, матрицы Ψ_i и Φ_i зависят от параметра π, но мы не отмечаем эту зависимость в наших обозначениях.

Рассмотрим индекс $i \in \{1, 2, ..., m\}$ и предположим, что $[t_0, t_i) \cap \{\tau_0, \tau_1, ..., \tau_s\} = \{\tau_0, ..., \tau_j\}$. Определим матрицы $\Theta_l^i(\pi)$, $l = 0, 1, ..., s$, размера $n \times k$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \Theta_j^i(\pi) = \Psi_j(t_i), \\ \Theta_{j-1}^i(\pi) = \Phi_j(t_i)\Psi_{j-1}(\tau_j), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Theta_0^i(\pi) = \Phi_j(t_i)\Phi_{j-1}(\tau_j)\cdots\Phi_1(\tau_2)\Psi_0(\tau_1). \end{gathered}$$

Наконец, $\Theta_l^i(\pi) = 0$ при $l = j+1, ..., s$.

Из теорем о дифференцируемости решения по начальным данным и параметрам следует, что если фиксировано значение $\pi_0 \in R^{k(s+1)}$, то

$$\left.\frac{\partial x(t_i, \pi)}{\partial p_j}\right|_{\pi=\pi_0} = \Psi_j(t_i) = \Theta_j^i(\pi_0),$$

$$\left.\frac{\partial x(t_i, \pi)}{\partial p_{j-1}}\right|_{\pi=\pi_0} = \Phi_j(t_i)\Psi_{j-1}(\tau_j) = \Theta_{j-1}^i(\pi_0)$$

и так далее (конечно, все значения матриц Φ и Ψ вычисляются при $\pi = \pi_0$). Так как значения $x(t_i, \pi)$ не зависят от $p_{j+1}, ..., p_s$, то

$$\left.\frac{\partial x(t_i, \pi)}{\partial p_l}\right|_{\pi=\pi_0} = 0 = \Theta_l^i(\pi_0), \qquad l = j+1, ..., s.$$

Таким образом, для всех $l = 0, 1, ..., s$

$$\left.\frac{\partial x(t_i, \pi)}{\partial p_l}\right|_{\pi=\pi_0} = \Theta_l^i(\pi_0). \tag{1.15}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Отображение α – тождественное, т. е. $\alpha(x) = x \in R^n$ (в этом случае наблюдаются значения самого решения $x(t, \pi)$ в моменты $t_1, ..., t_m$). Введем матрицу размера $nm \times k(s+1)$

$$\Theta(\pi) = \begin{bmatrix} \Theta_0^1(\pi) & \Theta_1^1(\pi) & ... & \Theta_s^1(\pi) \\ \Theta_0^2(\pi) & \Theta_1^2(\pi) & ... & \Theta_s^2(\pi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta_0^m(\pi) & \Theta_1^m(\pi) & ... & \Theta_s^m(\pi) \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.2. *Если*

$$\operatorname{ran}k\,(\Theta(\pi_0)) = k(s+1), \tag{1.16}$$

то система (1.1) *локально идентифицируема в точке* π_0.

Доказательство. Докажем теорему от противного. Предположим, что система (1.1) не является локально идентифицируемой при $\pi = \pi_0$. Тогда найдется последовательность $\pi^q \in R^{k(s+1)}$, $q = 1, 2, ...$, такая, что $\pi^q \to \pi_0$ при $q \to \infty$, $\pi^q \neq \pi_0$ и

$$x(t_i, \pi^q) = x(t_i, \pi_0) \tag{1.17}$$

при всех $i = 1, 2, ..., m$ и при всех $q \in N$.

Исходя из полученных выше равенств, можем записать

$$x(t_i, \pi^q) = x(t_i, \pi_0) + \sum_{l=0}^{j} \Theta_l^i(\pi_0)(p_l^q - p_l^0) + G(\pi^q),$$

где мы считаем, что

$$\pi^q = \begin{bmatrix} p_0^q \\ p_1^q \\ \vdots \\ p_s^q \end{bmatrix}, \quad \pi_0 = \begin{bmatrix} p_0^0 \\ p_1^0 \\ \vdots \\ p_s^0 \end{bmatrix}.$$

а вектор-функция G обладает свойством

$$\frac{\|G(\pi^q)\|}{\|\pi^q - \pi_0\|} \to 0 \quad \text{при} \quad q \to \infty.$$

Из (1.17) следует, что

$$\sum_{l=0}^{j} \Theta_l^i(\pi_0)(p_l^q - p_l^0) + G(\pi^q) = 0. \tag{1.18}$$

Так как $\Theta_l^i(\pi_0) = 0$ при $l = j+1, ..., s$, можно переписать (1.18) в виде

$$\sum_{l=0}^{s} \Theta_l^i(\pi_0)(p_l^q - p_l^0) + G(\pi^q) = 0. \tag{1.19}$$

Пусть $\Theta^i(\pi_0) = \left[\Theta_0^i(\pi_0)\ \Theta_1^i(\pi_0)\ ...\ \Theta_s^i(\pi_))\right]$ – “блок” матрицы $\Theta(\pi_0)$. Тогда ясно, что

$$\sum_{l=0}^{s} \Theta_l^i(\pi_0)(p_l^q - p_l^0) = \Theta^i(\pi_0)(\pi^q - \pi_0).$$

Поэтому (1.19) принимает вид

$$x(t_i, \pi^q) - x(t_i, \pi_0) = \Theta^i(\pi_0)(\pi^q - \pi_0) + G(\pi^q) = 0. \tag{1.20}$$

Разделим (1.20) на $\|\pi^q - \pi_0\|$ и устремим $q \to \infty$. Поскольку сфера $\|z\| = 1$ компактна, из последовательности

$$z^q = \frac{\pi^q - \pi_0}{\|\pi^q - \pi_0\|}$$

можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что $z^q \to z_0$ при $q \to \infty$, $\|z_0\| = 1$. Переходя в равенстве

$$\Theta^i(\pi_0)z^q + \frac{G(\pi^q)}{\|\pi^q - \pi_0\|} = 0$$

к пределу при $q \to \infty$, получим

$$\Theta^i(\pi_0)z_0 = 0. \tag{1.21}$$

Так как π^q не зависит от индекса i момента наблюдения t_i, мы получаем, что равенство (1.21) верно при любом $i = 1, 2, ..., m$, а, следовательно, верно равенство

$$\Theta(\pi_0)z_0 = 0,$$

которое противоречит условию (1.16), так как $z_0 \neq 0$. Теорема доказана.

Замечание 1.2. Условие (1.16) показывает, что локальная идентифицируемость возможна лишь при выполнении неравенства $k(s+1) \leq nm$.

Замечание 1.3. Теорема 1.2 дает достаточные условия локальной идентифицируемости в важном частном случае постоянного вектора параметров $p = p_0 \in R^k$ при $t \in [t_0, t_m]$. Наблюдение решения, по-прежнему, происходит в некоторые моменты t_1, t_2, ..., t_m.

Если, как и выше, ввести матрицу $\Psi(t,p)$ размера $n \times k$, удовлетворяющую системе

$$\dot{\psi} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,p), p)\psi + \frac{\partial f}{\partial p}(t, x(t,p), p)$$

и условию $\Psi(t_0, p) = 0$, то достаточным условием локальной идентифицируемости системы (1.1) при $p = p_0$ по наблюдениям решения в моменты t_1, t_2, ..., t_m является следующее:

$$\operatorname{ran} k \, [\Psi(t_1, p_0) \ \Psi(t_2, p_0) \ \dots \ \Psi(t_m, p_0)] = k.$$

Рассмотрим теперь вопрос об идентификации кусочно-постоянного параметра в системе (1.1) в том случае, когда результат измерения (наблюдения) величин $x(t_i, \pi)$ известен не точно, а с некоторой погрешностью (как это и происходит чаще всего на практике). Предположим, что вместо точного значения (1.14) вектора $Y(\pi)$ удается измерить вектор $\widetilde{Y}(\pi)$, такой, что

$$\|\widetilde{Y}(\pi) - Y(\pi)\| < \Delta \tag{1.22}$$

при всех допустимых значениях параметра π.

Теорема 1.3. *Предположим, что функция f в системе* (1.1) *непрерывна по совокупности переменных и принадлежит классу C^2 по x, p. Пусть выполнено условие* (1.16). *Тогда существуют такие положительные константы μ и G, зависящие только от π_0 и системы* (1.1), *что если в неравенстве* (1.22)

$$\Delta < \frac{\mu^2}{8G}, \tag{1.23}$$

то из равенства

$$\widetilde{Y}(\pi) = \widetilde{Y}(\pi_0) \tag{1.24}$$

следует, что либо $\|\pi - \pi_0\| \geq \dfrac{\mu}{2G}$, либо

$$\|\pi - \pi_0\| \leq \frac{4\Delta}{\mu + \sqrt{\mu^2 - 8\Delta G}}. \tag{1.25}$$

Замечание 1.4. При малых $\Delta > 0$ величина, стоящая в правой части неравенства (1.25), равна $\frac{2\Delta}{\mu} + o(\Delta)$. Это означает, что при наличии погрешности измерения, имеющей порядок Δ (где Δ мало), "зона неразличимости", соответствующая тем значениям параметра π в фиксированной окрестности $\|\pi - \pi_0\| < \frac{\mu}{2G}$, для которых выполнено (1.24), имеет тот же порядок Δ.

Доказательство теоремы 1.3 . При выполнении условия (1.16) матрица $\Theta(\pi_0)$ имеет неособую подматрицу Θ^* размера $k(s+1) \times k(s+1)$. Найдем число $\mu > 0$, такое, что

$$\|\Theta^* z\| \geq \mu \|z\| \tag{1.26}$$

для любого вектора $z \in R^{k(s+1)}$ (поскольку из неравенства

$$\|z\| = \|\Theta^{*-1}\Theta^* z\| \leq \|\Theta^{*-1}\| \cdot \|\Theta^* z\|$$

следует, что

$$\|\Theta^{*-1}\|^{-1}\|z\| \leq \|\Theta^* z\|,$$

то в качестве μ можно взять число $\|\Theta^{*-1}\|^{-1}$, где $\|\cdot\|$ – операторная норма матрицы, соответствующая евклидовой норме вектора).

В рассматриваемом случае ($\alpha(x) \equiv x$) из равенств (1.15) и из сделанных предположений о вектор-функции f следует, что

$$Y(\pi) - Y(\pi_0) = \begin{bmatrix} x(t_1,\pi) - x(t_1,\pi_0) \\ x(t_2,\pi) - x(t_2,\pi_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x(t_m,\pi) - x(t_m,\pi_0) \end{bmatrix} = \Theta(\pi_0)(\pi - \pi_0) + g(\pi),$$

где $\|g(\pi)\| \leq G\|\pi - \pi_0\|^2$ с некоторой константой $G > 0$. Отметим, что из неравенства (1.26) вытекает неравенство

$$\|\Theta(\pi_0)(\pi - \pi_0)\| \geq \|\Theta^*(\pi - \pi_0)\| \geq \mu\|\pi - \pi_0\|,$$

поэтому, применяя неравенство (1.22), мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{Y}(\pi) - \widetilde{Y}(\pi_0)\| = \\
&= \|\widetilde{Y}(\pi) - \widetilde{Y}(\pi_0) + Y(\pi) - Y(\pi) + Y(\pi_0) - Y(\pi_0)\| \geq \\
&\geq \|Y(\pi) - Y(\pi_0)\| - 2\Delta \geq \mu\|\pi - \pi_0\| - G\|\pi - \pi_0\|^2 - 2\Delta.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Обозначим $a = \|\pi - \pi_0\|$ и рассмотрим квадратный трехчлен

$$Ga^2 - \mu a + 2\Delta. \tag{1.28}$$

При условии (1.23) число $\mu^2 - 8\Delta G$ положительно, поэтому корни a_1 и a_2 квадратного трехчлена (1.28) положительны и равны

$$a_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 8\Delta G}}{2G}.$$

Меньший из этих корней

$$a_1 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 8\Delta G}}{2G} = \frac{4\Delta}{\mu + \sqrt{\mu^2 - 8\Delta G}} \approx \frac{2\Delta}{\mu}$$

при малых Δ, а больший из корней

$$a_2 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 8\Delta G}}{2G} > \frac{\mu}{2G}.$$

Таким образом, если одновременно выполнены неравенства

$$\|\pi - \pi_0\| < \frac{\mu}{2G} \quad \text{и} \quad \|\pi - \pi_0\| > a_1,$$

то правая часть неравенства (1.27) положительна. Следовательно, равенство (1.24) невозможно. Теорема доказана.

Замечание 1.5. Константа G определяется структурными свойствами вектор-функции f. Константа μ зависит от выбора подматрицы Θ^*. Ясно, что оценка (1.25) тем лучше, чем больше число μ.

Случай 2. Фиксируем отображение α: $R^n \to R^d$ и рассмотрим матрицы A_i размера $d \times n$, определяемые равенствами

$$A_i = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x(t_i, \pi_0)), \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Легко понять, что

$$\left.\frac{\partial y_i}{\partial p_j}\right|_{\pi=\pi_0} = A_i \Theta^i_j(\pi_0), \quad i = 1, 2, ..., m; \quad j = 0, 1, ..., s;$$

(напомним, что $y_i = \alpha(x(t_i, \pi))$).

Рассмотрим матрицу A размера $md \times mn$ следующего вида:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & ... & A_m \end{bmatrix}$$

Так же, как теорема 1.2 , доказывается следующая теорема.

Теорема 1.4. *Если*

$$\operatorname{ran} k(A\Theta(\pi_0)) = k(s+1),$$

то система (1.1) *локально идентифицируема в точке* π_0.

Если отображение α принадлежит классу C^2, то верно и утверждение, аналогичное теореме 1.3 . Кроме того, предложенный в предыдущем параграфе алгоритм идентификации неизвестного параметра системы (1.1) с необходимыми уточнениями пригоден и в рассматриваемом сейчас случае, когда измерения содержат погрешности.

§3. Использование методов оптимального управления для решения задач параметрической идентификации нелинейных систем

В этом параграфе мы исследуем задачу параметрической идентификации математических моделей динамических систем по дискретным наблюдениям решений с позиций теории оптимального управления. Пусть математическая модель объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x, p), \tag{1.29}$$

где $x \in R^m$ – вектор состояния, $p \in R^l$ – вектор параметров. Для системы (1.29) рассмотрим задачу Коши $x(0) = x_0$, считая вектор x_0 фиксированным.

Предположим, что в дискретные моменты времени измеряется величина

$$y = \varphi(t, x, p), \quad y \in R^r, \quad t \in I = \{t_1, t_2, ..., t_{n_0}\}, \quad t_1 \geq 0 \tag{1.30}$$

(в частном случае $y = \varphi(x)$), т.е. в результате измерения получаем набор векторов измерения $Y = \{y_1, y_2, ..., y_{n_0}\}$, $y_i = \varphi(t_i, x(t_i), p(t_i))$, $i = 1, 2, ..., n_0$.

Задача идентификации заключается в отыскании вектора параметров $p = p(t)$, $t \in [0, T]$, $T = t_{n_0}$, такого, при котором решение $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x, p(t)), \qquad x(0) = x_0 \tag{1.31}$$

доставляет минимум функционалу

$$J(x(t)) = \sum_{i=1}^{n_0} \|y_i - \varphi(t_i, x(t_i), p(t_i))\|^2 \tag{1.32}$$

где $\|y\| = (y^t y)^{1/2}$ – евклидова норма. На вектор параметров накладывается ограничение

$$p(t) \in \mathcal{P}, \qquad t \geq 0, \tag{1.33}$$

где $\mathcal{P}$ – заданное замкнутое множество в пространстве R^l.

Таким образом, задачу параметрической идентификации можно рассматривать как задачу оптимального управления – задачу слежения, в которой управляющее воздействие – идентифицируемый параметр $p(t)$ – следует выбирать таким образом, чтобы критерий (1.32) был минимальным.

Возьмем любой допустимый параметр $p(t) \in \mathcal{P}$, $0 \leq t \leq T$. Тогда задача Коши для системы (1.29) принимает вид (1.31). Предположим, что выполнены условия существования и единственности решения $x(t)$ задачи (1.31).

Дискретный характер измерений (1.30) не позволяет иметь информацию о поведении наблюдаемой системы (1.29) между моментами $t_i \in I$ проведения измерений. Поэтому естественно рассмотреть некоторую аппроксимацию параметра $p(t)$, а значит и соответствующую аппроксимацию исходной задачи идентификации. Будем считать, что параметр $p(t)$ кусочно-непрерывен на $[0, T]$. Для системы (1.31) рассмотрим кусочно-разностную аппроксимацию Эйлера. Пусть

$$\tau_k = kh, \quad k = 0, 1, ..., n, \quad nh = T,$$
$$x_h(\tau_{k+1}) = x_h(\tau_k + h) = x_h(\tau_k) + hf(\tau_k, x_h(\tau_k), p(\tau_k)),$$
$$x_h(0) = x_0, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Введем теперь кусочно-линейную функцию

$$\begin{gathered} \widetilde{x}_h(t) = \widetilde{x}(\tau_k) + (t - \tau_k) f(\tau_k, \widetilde{x}_h(\tau_k), p(\tau_k)), \\ \tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}; \quad k = 0, 1, ..., n-1; \quad \widetilde{x}_h(0) = x_0. \end{gathered} \tag{1.34}$$

Ясно, что $\widetilde{x}_h(\tau_k) = x_h(\tau_k)$.

Будем считать, что вектор-фукнция $f(t,x,p)$ удовлетворяет условию Липшица по (t,x,p). В теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [51, с. 12]) доказывается следующая

Теорема 1.5. *При сделанных предположениях*

$$\max_{0\le t\le T} \|x(t) - \widetilde{x}_h(t)\| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

На отрезке $[0,T]$ рассмотрим дискретную задачу идентификации

$$\begin{gathered} x_h(\tau+h) = x_h(\tau) + hf(\tau, x_h(\tau), p_h(\tau)) \\ x_h(0) = x_0, \quad \tau = 0, h, ..., T-h, \end{gathered} \tag{1.35}$$

$$p_h(\tau) \in \mathcal{P}, \tag{1.36}$$

$$J(x_h(t)) = \min. \tag{1.37}$$

При этом будем считать, что точки t_1, t_2, ..., t_{n_0} находятся среди моментов $\tau = kh$.

Покажем, что при $h \to 0$ решение этой дискретной задачи идентификации сходится в определенном смысле к решению исходной задачи (1.31)–(1.33).

Обозначим через $p_h^*(\tau)$, $\tau = 0, h, ..., T-h$, оптимальный параметр задачи (1.35)–(1.37). Пусть $x_h^*(\tau)$ – соответствующая ему траектория. Пусть, кроме того, $x^*(t)$, $p^*(t)$ – решения задачи (1.31)–(1.33). Доопределим дискретный параметр $p_h^*(\tau)$ на весь отрезок $[0,T]$, заменив его кусочно-постоянным параметром $\hat{p}_h^*(t)$. Очевидно, $\hat{p}_h^*(t)$ является допустимым параметром-решением непрерывной задачи (1.31)–(1.33). Обозначим соответствующую ему траекторию системы (1.31) через $\hat{x}_h^*(t)$.

Теорема 1.6.

$$J(x_h^*(t)) \to J(x^*(t)) \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство. Обозначим $\Delta J = J(x_h^*(t)) - J(x^*(t))$. Пусть $\varepsilon > 0$.

1) пусть $\Delta J \le 0$. Поскольку параметр $\hat{p}_h^*(t)$ не лучше $p^*(t)$, то

$$0 \ge \Delta J \ge J(x_h^*(t)) - J(\hat{x}_h^*(t)).$$

В силу теоремы 1.5 $x_h^*(t) \rightrightarrows \hat{x}_h^*(t)$ при $h \to 0$, $t \in [0, T]$, $p_h(t) \in \mathcal{P}$. Следовательно, $0 \geq \Delta J \geq -\varepsilon$ или $|\Delta J| \leq \varepsilon$ при малых h;

2) пусть $\Delta J \geq 0$. Рассмотрим параметр $p_h(\tau) = p^*(\tau)$ для $\tau = 0, h, ..., T - h$, и соответствующую ему траекторию $\widetilde{x}_h(\tau)$ задачи (1.35). Очевидно,

$$\Delta J \leq J(\widetilde{x}_h(t)) - J(x^*(t)).$$

По теореме 1.5 $\widetilde{x}_h \rightrightarrows x^*(t)$ при $h \to 0$, $t \in [0, T]$ (более точно, $\widetilde{x}_h(t)$ – кусочно-линейная функция (1.34)). Следовательно, $0 \leq \Delta J \leq \varepsilon$ или $|\Delta J| \leq \varepsilon$ при малых h.

Таким образом, в обоих случаях для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при $0 < h < \delta$ будет $|\Delta J| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Замечание 1.6. Легко видеть, что при $h \to 0$

$$J(\hat{x}_h^*(t)) \to J(x^*(t)).$$

Иначе говоря, если оптимальный параметр задачи (1.35)–(1.37) доопределить на отрезок $[0, T]$, сделав его кусочно-постоянным, то получится допустимый параметр исходной непрерывной задачи, при котором значение функционала J сколь угодно мало отличается от оптимального. Заметим, что приведенные рассуждения применимы для доказательства сходимости решений иных конечно-разностных аналогов непрерывной задачи идентификации.

Обратимся к дискретной задаче (1.35)–(1.37).

Рассмотрим функцию

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 1, t = t_1, t_2, ..., t_{n_0} \quad (t \in I), \\ 0, t = kh, \quad k = 0, 1, ..., n, \quad t \notin I. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$J(x_h(t)) = \sum_{i=0}^{n} \|y_i - \varphi(ih, x_h(ih), p_h(ih))\|^2 \delta_h(ih),$$

где $y_i \in Y$ при $ih \in I$ (см. (1.30)) и y_i – произвольны при остальных i.

Считая $x_h = \left[x_h^{(1)}, x_h^{(2)}, ..., x_h^{(m)}\right]^t$, введем новую переменную $x_h^{(m+1)}$ (увеличим на единицу размерность вектора состояния x_h), полагая

$$\begin{gathered} x_h^{(m+1)}(\tau + h) = x_h^{(m+1)}(\tau) + \\ +\delta_h(\tau) \left\| y_{\frac{\tau}{h}} - \varphi(\tau, x_h(\tau), p_h(\tau)) \right\|^2, \\ x_h^{(m+1)}(0) = 0, \quad \tau = 0, h, ..., T. \end{gathered} \tag{1.38}$$

Тогда

$$x_h^{(m+1)}(T+h) = J(x_h(t)) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \delta_h(ih) \|y_i - \varphi(ih, x_h(ih), p_h(ih))\|^2. \tag{1.39}$$

Таким образом, увеличивая на единицу размерность задачи (полагая $f^{(m+1)}(\tau) = \dfrac{1}{h}\delta_h(\tau) \left\| y_{\frac{\tau}{h}} - \varphi(\tau, x_h(\tau), p_h(\tau)) \right\|^2$,

$$x_h(\tau) := \begin{bmatrix} x_h(\tau) \\ x_h^{(m+1)}(\tau) \end{bmatrix} \in R^{m+1}, \quad f := \begin{bmatrix} f \\ f^{(m+1)} \end{bmatrix} \in R^{m+1},$$

$$x_0 := \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{m+1},$$

$f^0(x_h(T+h)) = x_h^{(m+1)}(T+h))$ и добавляя один шаг от $\tau = T$ до $\tau = T + h$, с учетом (1.38), (1.39) задача (1.35)–(1.37) может быть сведена к новой дискретной задаче идентификации вида

$$\begin{gathered} x_h(\tau+h) = x_h(\tau) + hf(\tau, x_h(\tau), p_h(\tau)), \\ x_h(0) = x_0, \quad \tau = 0, h, ..., T, \end{gathered} \tag{1.40}$$

$$p_h(\tau) \in \mathcal{P}, \tag{1.41}$$

$$f^0(x_h(T+h)) = \min. \tag{1.42}$$

Заметим, что $f^0(x_h(T+h)) = (c, x_h(T+h))$, где $c = [0, ..., 0, 1]^t \in R^{m+1}$.

Легко видеть, что задача идентификации (1.40)–(1.42) может рассматриваться как задача оптимального управления, при этом оптимальный параметр является оптимальным управлением соответствующей задачи. Для решения задачи идентификации применим дискретный принцип максимума Понтрягина [52, с. 102].

Рассмотрим вначале следующий вариант задачи (1.40)–(1.42):

$$x(k+1) = A(k)x(k) + f(k, p(k)), \quad x(0) = x_0, \tag{1.43}$$

$$p(k) \in \mathcal{P}(k), \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{1.44}$$

$$f^0(x(n)) = (c, x(n)) = \min, \tag{1.45}$$

т. е. здесь система уравнений (1.43) линейна по $x(k)$, линейность же функции $f(k, p(k))$ не обязательна. Будем считать, что $x(k) \in R^m$, $p(k) \in R^l$. Для решения задачи (1.43)–(1.45) может быть предложен известный алгоритм:

1) из соотношений

$$\begin{gathered}\lambda(n) = -c,\\ \lambda(k) = A^t(k)\lambda(k+1), \quad k = n-1, ..., 1, 0\end{gathered} \tag{1.46}$$

определяются сопряженные переменные $\lambda(k) \in R^m$;

2) находится оптимальный параметр $p(k)$ в результате решения задачи

$$(\lambda(k+1), f(k, p(k))) = \max_{v(k)\in\mathcal{P}(k)} (\lambda(k+1), f(k, v(k))); \tag{1.47}$$

3) из (1.43) находится соответствующая оптимальная траектория $x(k)$.

Предположим теперь, что идентифицируемый объект описывается нелинейными уравнениями, т. е. будем рассматривать задачу минимизации $f^0(x(n))$ при условиях

$$x(k+1) = f(k, x(k), p(k)), \tag{1.48}$$

$$x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

$$p(k) \in \mathcal{P}(k), \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

где $x(k) \in R^m$, $\mathcal{P}(k)$ – выпуклое, замкнутое множество из R^l. Для решения этой задачи используем линеаризацию уравнения (1.48).

Пусть $p^0(k)$ – произвольный параметр из $\mathcal{P}(k)$, $x^0(k)$ – соответствующая ему траектория; $p^s(k)$, $x^s(k)$ – параметр и траектория, полученные после s итераций. Новый параметр $p^{s+1}(k)$ находим по формуле

$$p^{s+1}(k) = p^s(k) + \rho\left(\hat{p}^s(k) - p^s(k)\right), \tag{1.49}$$

где $\hat{p}^s(k)$ – подлежащий определению неизвестный параметр, ρ – шаговый множитель. Ясно, что при $0 \leq \rho \leq 1$ вектор $p^{s+1}(k) \in \mathcal{P}(k)$, поскольку множество $\mathcal{P}(k)$ выпуклое.

Траекторию, соответствующую $p^{s+1}(k)$, запишем в виде

$$x^{s+1}(k) = x^s(k) + \rho\hat{x}^s(k), \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{1.50}$$

и найдем соотношения, связывающие $\hat{p}^s(k)$ и $\hat{x}^s(k)$. Имеем:

$$x_i^{s+1}(k+1) = x_i^s(k+1) + \rho\hat{x}_i^s(k+1) =$$

$$= f_i\left(k, x^s(k) + \rho\hat{x}^s(k), p^s(k) + \rho\left(\hat{p}^s(k) - p^s(k)\right)\right) =$$

$$= f_i\left(k, x^s(k), p^s(k)\right) + \rho\left(f_{i_x}\left(k, x^s(k), p^s(k)\right), \hat{x}^s(k)\right) +$$

$$+\rho\left(f_{i_p}\left(k, x^s(k), p^s(k)\right), \hat{p}^s(k)-p^s(k)\right)+o(\rho).$$

Здесь под f_{i_x} и f_{i_p} понимаются векторы частных производных i-й компоненты вектор-функции f по компонентам векторов x и p соответственно.

Учитывая, что $p^s(k)$, $x^s(k)$ удовлетворяют уравнениям (1.48), при $\rho \to 0$ получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i^s(k+1) = &\left(f_{i_x}\left(k, x^s(k), p^s(k)\right), \hat{x}^s(k)\right) + \\ &+\left(f_{i_p}\left(k, x^s(k), p^s(k)\right), \hat{p}^s(k)\right) - \\ &-\left(f_{i_p}\left(k, x^s(k), p^s(k)\right), p^s(k)\right).\end{aligned} \tag{1.51}$$

Поэтому неизвестный параметр $\hat{p}^s(k)$ можно отыскивать путем решения следующей задачи вида (1.43)–(1.45):

минимизировать функцию

$$f^0\left(\hat{x}^s(n)\right)=\left(c, \hat{x}^s(n)\right)$$

при ограничениях (1.51), где $\hat{x}_i^s(0) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$; $k = 0, 1, ..., n-1$; $\hat{p}^s(k) \in \mathcal{P}(k)$.

Пусть $\hat{p}^s(k)$, $\hat{x}^s(k)$ – оптимальные параметр и траектория этой задачи. Согласно формулам (1.46), (1.47) параметр $\hat{p}^s(k)$ определяют из условия

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^s(k+1)\left(f_{i_p}\left(k, x^s(k), p^s(k)\right), \hat{p}^s(k)\right)=$$

$$=\max_{v \in \mathcal{P}(k)} \sum_{i=1}^m \lambda_i^s(k+1)\left(f_{i_p}\left(k, x^s(k), p^s(k)\right), v\right),$$

где

$$\lambda^s(n)=-c,$$

$$\lambda_j^s(k-1)=\sum_{i=1}^m \lambda_i^s(k) f_{i_{x_j}}\left(k, x^s(k), p^s(k)\right),$$

$k = n, n-1, ..., 1$; $j = 1, 2, ..., m$. После определения $\hat{p}^s(k)$ из системы (1.51) находят $\hat{x}^s(k)$.

Новый параметр теперь определится по формуле (1.49), а новая траектория $x^{s+1}(k)$ – по формуле (1.50) (без решения системы (1.48)). При этом значение шагового множителя ρ определяют из соотношения

$$f^0\left(x^s(n)+\rho \hat{x}^s(n)\right)=\min_{0 \leq \hat{\rho} \leq 1} f^0\left(x^s(n)+\hat{\rho} \hat{x}^s(n)\right).$$

Однако, если ρ недостаточно мало, то между $x^{s+1}(k)$ и истинной траекторией, удовлетворяющей системе (1.48) при $p(k) = p^{s+1}(k)$, вообще говоря, будет расхождение. Чтобы это расхождение не стало значительным в процессе дальнейших итераций, необходимо на некоторых итерациях (можно и на всех) производить коррекцию траектории. Для этого можно рассматривать траектории $x^s_{\rho_i}(k)$, удовлетворяющие системе (1.48) при всевозможных

$$p_{\rho_i}(k) = p^s(k) + \rho_i\left(\hat{p}^s(k) - p^s(k)\right),$$

где $\rho_i = \dfrac{i}{N}$, $i = 0, 1, ..., N$, (значение N можно задавать произвольным, при этом с ростом N увеличивается объем вычислений, но вместе с тем и точность решаемой задачи) и полагать

$$x^{s+1}(k) = x^s_{\rho_i}(k),$$

где i – то значение (минимальное) из множества $\{0, 1, ..., N\}$, при котором достигается минимум функции $f^0\left(x^s_{\rho_i}(n)\right)$.

Проиллюстрируем работу описанного алгоритма параметрической идентификации на следующем примере. Для простоты и большей наглядности в качестве исходной возьмем дискретную систему вида

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + p(k), & x_1(0) = 1, \\ x_2(k+1) = x_2(k) - x_1(k), & x_2(0) = 1, \end{cases}$$
$$k = 0, 1, ..., 9; \quad p(k) \in [0, 1]. \tag{1.52}$$

Найдем параметр $p(k)$ из условия минимизации $x_1(10)$. Из системы (1.52) нетрудно получить, что

$$x_1(10) = 32 + 16p(0) + 16p(1) + 8p(2) - 4p(4) - 4p(5) - 2p(6) + p(8) + p(9).$$

Из этого представления легко находим,что при условии $p(k) \in [0, 1]$

$$\min x_1(10) = 32 - 4 - 4 - 2 = 22$$

и достигается при

$$\begin{cases} p(0) = 0,\ p(1) = 0,\ p(2) = 0,\ p(4) = 1, \\ p(5) = 1,\ p(6) = 1,\ p(8) = 0,\ p(9) = 0, \\ p(3) \text{ и } p(7) \ - \ \text{произвольные}. \end{cases} \tag{1.53}$$

Получив данную информацию о системе (1.52), решим для нее задачу параметрической идентификации, считая, что результатом измерения служит $x_1(10) = 22$.

Увеличивая на единицу размерность вектора состояния, перейдем от системы (1.52) к системе

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + p(k), & x_1(0) = 1, \\ x_2(k+1) = x_2(k) - x_1(k), & x_2(0) = 1, \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \delta(k)(22 - x_1(k))^2, & x_3(0) = 0, \end{cases} \tag{1.54}$$

в которой $\delta(0) = \delta(1) = ... = \delta(9) = 0$, $\delta(10) = 1$, $k = 0, 1, ..., 10$. Требуется найти параметр $p(k) \in [0, 1]$ из условия минимизации

$$f^0(x(11)) = (c, x(11)),$$

где $x = [x_1, x_2, x_3]^t$, $c = [0, 0, 1]^t$.

В качестве произвольного начального параметра возьмем $p^0(k) \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., 10$. Из системы (1.54) находим соответствующую траекторию $x_1^0(k)$, $x_2^0(k)$, $x_3^0(k)$, для которой оказывается $x_1^0(10) = 32$, $x_3^0(11) = 100$.

Согласно (1.49) новое значение параметра находим по формуле

$$p^1(k) = p^0(k) + \rho\left(\hat{p}^1(k) - p^0(k)\right) = \rho\hat{p}^1(k), \tag{1.55}$$

где неизвестный параметр $\hat{p}^1(k)$ находится путем решения следующей задачи (см. (1.51))

$$\begin{cases} \hat{x}_1^1(k+1) = \hat{x}_1^1(k) + \hat{x}_2^1(k) + \hat{p}^1(k), \\ \hat{x}_2^1(k+1) = \hat{x}_2^1(k) - \hat{x}_1^1(k), \\ \hat{x}_3^1(k+1) = \hat{x}_3^1(k) - 2\delta(k)\left(22 - x_1^0(k)\right)\hat{x}_1^1(k), \end{cases} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned} &\hat{x}_1^1(0) = 0,\ \hat{x}_2^1(0) = 0,\ \hat{x}_3^1(0) = 0,\ \hat{p}^1(k) \in [0, 1], \\ &\hat{x}_3^1(11) = \left(c, \hat{x}^1(11)\right) = \min, \end{aligned}$$

где $c = [0, 0, 1]^t$. Система (1.56) есть система вида (1.43), для которой

$$A(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, ..., 9; \quad A(10) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f\left(k, \hat{p}^1(k)\right) = \left[\hat{p}^1(k), 0, 0\right]^t.$$

Используя (1.46), находим сопряженные переменные

$$\begin{array}{ll}
\lambda(11)=[0,0,-1]^t, & \lambda(10)=[-20,0,-1]^t,\\
\lambda(9)=[-20,-20,-1]^t, & \lambda(8)=[0,-40,-1]^t,\\
\lambda(7)=[40,-40,-1]^t, & \lambda(6)=[80,0,-1]^t,\\
\lambda(5)=[80,80,-1]^t, & \lambda(4)=[0,160,-1]^t,\\
\lambda(3)=[-160,160,-1]^t, & \lambda(2)=[-320,0,-1]^t,\\
\lambda(1)=[-320,-320,-1]^t, & \lambda(0)=[0,-640,-1]^t.
\end{array}$$

Теперь, с учетом (1.47), видим, что если первая координата вектора $\lambda(k+1)$ отрицательна, то $\hat{p}^1(k)=0$, если положительна, то $\hat{p}^1(k)=1$, а если равна нулю, то $\hat{p}^1(k)$ можно брать любым, в частности, равным нулю. Итак,

$$\begin{array}{l}
\hat{p}^1(0)=0,\ \hat{p}^1(1)=0,\ \hat{p}^1(2)=0,\ \hat{p}^1(3)=0,\ \hat{p}^1(4)=1,\\
\hat{p}^1(5)=1,\ \hat{p}^1(6)=1,\ \hat{p}^1(7)=0,\ \hat{p}^1(8)=0,\ \hat{p}^1(9)=0,\ \hat{p}^1(10)=0.
\end{array}$$

По формуле (1.55) находим новое значение параметра $p^1(k)$:

$$\begin{array}{l}
p^1(0)=0,\ p^1(1)=0,\ p^1(2)=0,\ p^1(3)=0,\\
p^1(4)=\rho,\ p^1(5)=\rho,\ p^1(6)=\rho,\ p^1(7)=0,\\
p^1(8)=0,\ p^1(9)=0,\ p^1(10)=0,\ 0\le\rho\le 1.
\end{array} \tag{1.57}$$

Вычисляя соответствующую этому параметру траекторию $x_1^1(k)$, $x_2^1(k)$, $x_3^1(k)$ системы (1.54), получаем,что $x_3^1(11)=(-10+10\rho)^2$.

Ясно, что минимум этого выражения достигается при $\rho=1$, т.е. оптимальным значением параметра $p(k)$ служит набор (1.57) при $\rho=1$, что совпадает с (1.53). Заметим, что значение $p(10)$ в системе (1.54) не влияет на $x_3(11)$ и не входит в набор значений идентифицируемого параметра.

2 Локальная параметрическая идентифицируемость дифференциальных систем по двухточечному наблюдению

§1. Локальная идентифицируемость по двухточечному наблюдению и наблюдению на отрезке времени

С общей постановкой задачи об идентифицируемости динамических моделей по наблюдениям в дискретные моменты времени тесно связана задача о локальной идентифицируемости по двухточечному наблюдению.

Под двухточечным наблюдением понимается наблюдение, выполненное в двух соседних точках дискретного времени. По сути дела всякую задачу с многоточечным наблюдением (т. е. наблюдениями, проведенными во многих точках дискретного времени) можно представить как последовательность задач с двухточечным наблюдением. В этом смысле задача с двухточечным наблюдением есть простейший частный случай задачи с многоточечным наблюдением, к которому, вместе с тем, сводится любая задача рассматриваемого класса.

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, p), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

$x \in R^n$, $t \in [t_0, T]$, зависящую от параметра $p \in R^m$. Поставим следующую задачу идентификации: известны значения некоторого решения $x(t)$ системы (2.1) в двух точках t_1 и t_2. Следует определить по результатам наблюдения $x(t_1)$ и $x(t_2)$ соответствующее значение параметра p.

Дадим точные определения. Пусть $x(t, x_0, p)$ – решение задачи Коши (2.1), предполагая теперь без ограничения общности, что $t_0 = 0$. Будем считать, что моментами наблюдения решения являются $t_1 = 0$ и $t_2 = T > 0$ (считаем, что для системы (2.1) выполнены условия существования и единственности решений и что каждое решение определено на отрезке $[0, T]$).

Мы предполагаем, что значение $x(0) = x_0$ не зависит от параметра p. При таком предположении задача идентифицируемости сводится к исследованию возможности определения параметра p по зависящему от p значению решения $x(t)$ задачи (2.1) в момент $t_2 = T$. Как было отмечено во введении, предлагаемые авторами алгоритмы идентификации зачастую не имеют должного обоснования возможности их применения. Это относится и к задаче идентификации по двухточечному наблюдению. В частности, в работе

[53] был предложен метод идентификации параметра модели по однократному наблюдению ее состояния (идейно близкий к предложенному нами в § 3 предыдущей главы), однако условия разрешимости этой задачи в данной работе отсутствуют.

Зафиксируем значение параметра p_0 и введем следующие функции

$$F(p,x_0) = \|x(T,x_0,p) - x(T,x_0,p_0)\|\,,$$
$$\Phi(p,x_0) = \max_{t\in[0,T]} \|x(t,x_0,p) - x(t,x_0,p_0)\|\,.$$

Определение 2.1. *Говорим, что система* (2.1) *при* $p = p_0$ *локально идентифицируема по наблюдениям решения* $x(t,x_0,p)$ *в точках 0,* T*, если существует такое* $\Delta > 0$*, что* $F(p,x_0) > 0$ *для* $0 < \|p-p_0\| < \Delta$.

Будем писать в этом случае $p_0 \in I_{\text{loc}}(T,x_0)$ и говорить, что система (2.1) локально идентифицируема при $p = p_0$ по двухточечному наблюдению.

По аналогии с [27] дадим следующее

Определение 2.2. *Говорим, что система* (2.1) *при* $p = p_0$ *локально идентифицируема по наблюдению решения* $x(t,x_0,p)$ *на промежутке* $[0,T]$*, если существует такое* $\Delta > 0$*, что* $\Phi(p,x_0) > 0$ *при* $0 < \|p-p_0\| < \Delta$.

Будем далее без ограничения общности рассматривать случай $p_0 = 0$.

Рассмотрим зависящую от параметра линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = A(p)x, \quad x \in R^n, \quad p \in R^m, \tag{2.2}$$

и изучим связь между локальной идентифицируемостью по наблюдению решения в точках 0, T и по наблюдению решения на отрезке $[0,T]$. Ясно, что всегда $0 \le F(p,x_0) \le \Phi(p,x_0)$, поэтому равенство $\Phi(p,x_0) = 0$ влечет $F(p,x_0) = 0$, т. е. из локальной идентифицируемости системы (2.1) (в частности, системы (2.2)) при $p = p_0$ по наблюдению решения в точках 0, T всегда следует локальная идентифицируемость этой системы при $p = p_0$ по наблюдению решения на полном отрезке $[0,T]$.

Теорема 2.1. *Пусть матрица* $A(p)$ *непрерывна при* $p_0 = 0$ *и существует такое* $\Delta_1 > 0$*, что*

$$A(p) \cdot A(0) = A(0) \cdot A(p) \tag{2.3}$$

при $\|p\| < \Delta_1$*. Тогда для любого* $x_0 \in R^n$ *и для любого* $T > 0$ *найдется такое* $\Delta_2 > 0$*, что при* $\|p\| < \Delta_2$ *равенство* $F(p, x_0) = 0$ *влечет* $\Phi(p, x_0) = 0$.

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in R^n$, $T > 0$ и обозначим $D(p) = A(p) - A(0)$. Ясно, что из (2.3) следует равенство $D(p)A(0) = A(0)D(p)$. Запишем решения системы (2.2)

$$x(t, x_0, p) = e^{A(p)t}\, x_0, \qquad x(t, x_0, 0) = e^{A(0)t}\, x_0.$$

Условие их совпадения при $t = T$ таково:

$$e^{A(p)T}\, x_0 = e^{A(0)T}\, x_0,$$

отсюда

$$\left(e^{A(p)T} - e^{A(0)T}\right) x_0 = e^{A(0)T}\left(e^{D(p)T} - E\right) x_0 = 0 \tag{2.4}$$

(мы используем коммутативность матриц $D(p)$ и $A(0)$ для получения равенства

$$\left. e^{A(p)T} = e^{(A(0)+D(p))T} = e^{A(0)T}\, e^{D(p)T}\right).$$

Так как матрица $e^{A(0)T}$ невырожденная, равенство (2.4) равносильно

$$\left(e^{D(p)T} - E\right) x_0 = 0$$

или

$$\left(E + D(p)T + \frac{D^2(p)T^2}{2} + \frac{D^3(p)T^3}{6} + ... - E\right) x_0 = 0.$$

Отсюда

$$\left(E + \frac{D(p)T}{2} + \frac{D^2(p)T^2}{6} + ...\right) D(p)Tx_0 = 0.$$

Так как ряд в скобках сходится и стремится к E при $\|D(p)\| \to 0$, найдется такое $\Delta_2 > 0$, что при $\|p\| < \Delta_2$ матрица

$$E + \frac{D(p)T}{2} + \frac{D^2(p)T^2}{6} + ...$$

неособая, отсюда при этих p $\quad D(p)Tx_0 = 0$ ($D(p)x_0 = 0$). Из последнего равенства получаем, что

$$e^{D(p)t}\, x_0 = \left(E + D(p)t + \frac{D^2(p)t^2}{2} + ...\right) x_0 = x_0 + 0 + 0 + ... = x_0$$

при любом $t \in R$. Отсюда

$$x(t, x_0, p) = e^{A(0)t}\, e^{D(p)t}\, x_0 = e^{A(0)t}\, x_0 = x(t, x_0, 0)$$

при $t \in R$, $\|p\| < \Delta_2$ и поэтому $\Phi(p, x_0) = 0$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Значение числа Δ_2, как видно из доказательства, определяется необходимой малостью величины $\|D(p)T\|$ и не зависит от конкретного семейства матриц $A(p)$ и от x_0.

Следствие 2.1. Пусть $x(t)$ – решение системы

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in R^n,$$

такое, что $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$, $T > 0$. Пусть у последовательности систем

$$\dot{x} = A_m x,$$

где $A_m \to A$ при $m \to \infty$, есть решения $x_m(t)$, такие, что $x_m(0) = x_0$, $x_m(T) = x_1$. Если $A_m A = A A_m$, то найдется такое m_0, что для $m \geq m_0$

$$x(t) \equiv x_m(t).$$

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 2.1 . Достаточно положить $A(0) = A$ и рассмотреть дискретный параметр $p = \dfrac{1}{m}$, $m \in N$, для которого $A(p) = A\left(\dfrac{1}{m}\right) = A_m$.

Доказанная теорема 2.1 показывает, что при выполнении условия (2.3) для системы (2.2) оба введенных понятия локальной идентифицируемости становятся равносильными. Однако в общем случае аналогичное утверждение для системы (2.2) неверно. Покажем это на примере следующей системы

$$\dot{x} = (A + D(p))x,$$

где $x \in R^2$, $p \in R$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D(p) = p \begin{bmatrix} r_1(p) & r_2(p) \\ r_3(p) & r_4(p) \end{bmatrix}.$$

Здесь $r_1(p)$, $r_2(p)$, $r_3(p)$, $r_4(p)$ – неопределенные пока аналитические функции.

Запишем матрицу

$$e^{(A+D(p))t} - e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[A + D(p)]^k - A^k}{k!}\, t^k =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\sum_{m=0}^{k-1}A^m\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}A^{k-1-m} + p^2B(t,p,r)$$

(здесь $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$).

Заметим, что $A^m = E$ при $m = 0$ и $A^m = A$ при $m > 0$. Так как

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_2 \\ 0 & r_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_4 \end{bmatrix},$$

имеем:

$$\sum_{m=0}^{k-1}A^m\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}A^{k-1-m} = \begin{cases} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix} & \text{при} \quad k = 1, \\ \begin{bmatrix} 0 & r_2 \\ r_3 & kr_4 \end{bmatrix} & \text{при} \quad k > 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\sum_{m=0}^{k-1}A^m\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}A^{k-1-m} =$$

$$= t\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} 0 & r_2 \\ r_3 & 2r_4 \end{bmatrix} + \frac{t^3}{6}\begin{bmatrix} 0 & r_2 \\ r_3 & 3r_4 \end{bmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{bmatrix} tr_1 & r_2(e^t - 1) \\ r_3(e^t - 1) & r_4te^t \end{bmatrix}.$$

Пусть теперь

$$r_1(p) = \frac{(e-1)^2}{e} + \rho_1(p), \quad r_2(p) = r_3(p) = 1, \quad r_4(p) = 1 + \rho_2(p),$$

где функции $\rho_1(p)$, $\rho_2(p)$ будут найдены позже. Поскольку

$$A(A + D(p)) = A^2 + AD(p) = A^2 + p\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix},$$

$$(A + D(p))A = A^2 + D(p)A = A^2 + p \begin{bmatrix} 0 & r_2 \\ 0 & r_4 \end{bmatrix},$$

условие (2.3) для рассматриваемой системы не выполняется ($r_2 = r_3 = 1$). Пусть

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1-e}{e} \end{bmatrix}.$$

Тогда получаем:

$$\left(e^{(A+D(p))t} - e^{At}\right) x_0 =$$

$$= p \begin{bmatrix} \dfrac{(e-1)^2}{e} t + (e^t - 1)\dfrac{1-e}{e} + t\rho_1(p) \\ e^t - 1 + te^t \dfrac{1-e}{e} + te^t \dfrac{1-e}{e} \rho_2(p) \end{bmatrix} +$$

$$+ p^2 \begin{bmatrix} B_1(p, \rho_1, \rho_2, t) \\ B_2(p, \rho_1, \rho_2, t) \end{bmatrix}. \qquad (2.5)$$

Отсюда при $t = 1$ и $p \neq 0$ равенство

$$\left(e^{(A+D(p))} - e^{A}\right) x_0 = 0$$

равносильно выполнению следующих двух равенств:

$$\begin{cases} g_1(p, \rho_1, \rho_2) = \rho_1(p) + pB_1(p, \rho_1, \rho_2, 1) = 0, \\ g_2(p, \rho_1, \rho_2) = (1-e)\rho_2(p) + pB_2(p, \rho_1, \rho_2, 1) = 0. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Из сделанных предположений следует, что $g_1, g_2 \in C^1$, $g_1(0,0,0) = g_2(0,0,0) = 0$ и, кроме того,

$$\left.\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(\rho_1, \rho_2)}\right|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}.$$

По теореме о неявной функции найдутся решающие систему (2.6) функции $\rho_1(p)$, $\rho_2(p)$, аналитические при малых p и такие, что $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0$. Поэтому при малых p решения всех рассматриваемых систем

$$\dot{x} = (A + D(p))x$$

с начальными данными $x(0) = x_0$, где x_0 указано выше, совпадают при $t = 1$. Из представления (2.5) следует, что при малых $p \neq 0$ эти решения не совпадают тождественно с решением $x(t, x_0, 0)$ на $[0, 1]$. Тем самым построенная система локально идентифицируема при $p = 0$ по наблюдению решения $x(t, x_0, p)$ на $[0, 1]$ и $0 \notin I_{\mathrm{loc}}(1, x_0)$.

Для системы (2.2), удовлетворяющей условию (2.3) теоремы 2.1 , справедливы следующие необходимые и достаточные условия локальной идентифицируемости по двухточечному наблюдению.

Теорема 2.2. *Если для системы* (2.2) *выполнено условие* (2.3), *то эта система локально идентифицируема при* $p = 0$ *по наблюдению решения* $x(t, x_0, p)$ *задачи Коши* $x(0, x_0, p) = x_0$ *в точках 0,* T $(0 \in I_{\mathrm{loc}}(T, x_0))$ *тогда и только тогда, когда при всех* $p \in R^m$, *таких, что* $0 < \|p\| < \delta \leq \Delta_1$ *выполнено неравенство*

$$(A(p) - A(0))x_0 \neq 0. \tag{2.7}$$

Доказательство. 1. Достаточность. Обозначим $D(p) = A(p) - A(0)$. Тогда с учетом (2.4)

$$x(T, x_0, p) - x(T, x_0, 0) = e^{A(0)T}\left[e^{D(p)T} - E\right]x_0 =$$

$$= e^{A(0)T}\left[D(p)T + \frac{D^2(p)T^2}{2} + ...\right]x_0 =$$

$$= e^{A(0)T}\left[E + \frac{D(p)T}{2} + \frac{D^2(p)T^2}{6} + ...\right]D(p)Tx_0.$$

Предположим, что система (2.2) не является локально идентифицируемой при $p = 0$. Тогда найдется последовательность $\{p_k\}$, $p_k \neq 0$, $p_k \to 0$ при $k \to \infty$, такая, что $x(T, x_0, p_k) = x(T, x_0, 0)$. Это означает, что

$$e^{A(0)T}\left[E + \frac{D(p_k)T}{2} + \frac{D^2(p_k)T^2}{6} + ...\right]D(p_k)Tx_0 = 0 \tag{2.8}$$

при всех p_k. В силу невырожденности матрицы $e^{A(0)T}$ из (2.8) следует, что

$$\left[E + \frac{D(p_k)T}{2} + \frac{D^2(p_k)T^2}{6} + ...\right]D(p_k)x_0 = 0.$$

Но при малых $\|p_k\|$ матрица в квадратных скобках невырожденная. Отсюда следует, что при малых $\|p_k\|$

$$D(p_k)x_0 = 0,$$

а это противоречит условию (2.7).

2. Необходимость. Пусть система (2.2) локальньно идентифицируема при $p = 0$ по наблюдению решения $x(t, x_0, p)$ в точках 0, T. Предположим, что

условие (2.7) не выполнено. Это означает, что существует такая последовательность $\{p_k\}$, $p_k \neq 0$, $p_k \to 0$ при $k \to \infty$, что

$$(A(p_k) - A(0))x_0 = 0.$$

Но тогда

$$x(T, x_0, p_k) - x(T, x_0, 0) =$$
$$= e^{A(0)T}\left[E + \frac{D(p_k)T}{2} + \frac{D^2(p_k)T^2}{6} + ...\right] D(p_k)Tx_0 = 0,$$

что противоречит условию локальной идентифицируемости. Теорема доказана.

Следствие 2.2. Если матрица $A(p)$ в системе (2.2) класса C^1, то достаточным условием локальной идентифицируемости этой системы при $p = 0$ по двухточечному (в точках $0, T > 0$) наблюдению решения задачи Коши $x(0, x_0, p) = x_0$ при выполнении условия (2.3) служит

$$\operatorname{ran} k\, [R_1x_0, R_2x_0, ..., R_mx_0] = m, \tag{2.9}$$

где $R_i = \left.\dfrac{\partial A(p)}{\partial p_i}\right|_{p=0}$, $i = 1, 2, ..., m$, $p = [p_1, p_2, ..., p_m]^t$.

Действительно, в этом случае

$$A(p) = A(0) + p_1R_1 + p_2R_2 + ... + p_mR_m + R_{m+1}(p),$$

где $\dfrac{\|R_{m+1}(p)\|}{\|p\|} \to 0$ при $p \to 0$. Но тогда

$$(A(p) - A(0))x_0 = (p_1R_1 + p_2R_2 + ... + p_mR_m)x_0 + R_{m+1}(p)x_0.$$

Предположим, что утверждение неверно. Тогда найдется последовательность p^k, $p^k \to 0$ при $k \to \infty$ $(p^k \neq 0)$, такая, что

$$\left(A(p^k) - A(0)\right)x_0 = 0$$

или

$$\left(p_1^kR_1 + p_2^kR_2 + ... + p_m^kR_m\right)x_0 + R_{m+1}(p^k)x_0 = 0 \tag{2.10}$$

$\left(p^k = \left[p_1^k, p_2^k, ..., p_m^k\right]^t\right)$. Обозначим $\pi^k = \dfrac{p^k}{\|p^k\|}$, $\|\pi^k\| = 1$. Вследствие компактности единичной сферы в R^m из последовательности $\{\pi^k\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Будем, без ограничения общности, считать, что $\pi^k \to \pi$ при $k \to \infty$, $\|\pi\| = 1$. Деля (2.10) на $\|p^k\|$ и переходя к пределу, получим равенство ($\pi = [\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m]^t$)

$$(\pi_1 R_1 + \pi_2 R_2 + ... + \pi_m R_m)\, x_0 = 0$$

или

$$[R_1 x_0, R_2 x_0, ..., R_m x_0]\, \pi = 0, \tag{2.11}$$

противоречащее условию (2.9) (по этому условию однородная система (2.11) должна иметь единственное нулевое решение). Справедливость следствия 2.2 установлена.

§2. Локальная идентифицируемость по двухточечному наблюдению линейных и квазилинейных систем

В этом параграфе для линейной системы (2.2) будут получены достаточные условия локальной идентифицируемости по двухточечному наблюдению. Будет доказано, что для квазилинейных систем они служат условиями идентифицируемости по первому приближению и поэтому эти условия естественно называть условиями идентифицируемости первого порядка. Изучение системы (2.2) мы начнем с особого случая одномерного параметра $p \in R$. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $p \in R$ и $(n \times n)$-матрица $A(p)$ обладает следующими свойствами:*

1) *$A(p)$ класса C^1;*

2) *$A = A(0) = \operatorname{diag}(a_1, ..., a_n)$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$;*

3) *$A'(0) = R = \{r_{ij}\}$, $1 \leq i, j \leq n$.*

Тогда

$$e^{A(p)t} - e^{A(0)t} = pB(t) + B_1(t, p),$$

где $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$, $1 \leq i, j \leq n$;

$$b_{ii}(t) = r_{ii} t e^{a_i t}, \quad i = 1, ..., n;$$

$$b_{ij}(t) = r_{ij} \frac{e^{a_i t} - e^{a_j t}}{a_i - a_j} \text{ при } 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j;$$

матрица $B_1(t, p)$ – класса C^1 по t, p и

$$\frac{\|B_1(t, p)\|}{p} \underset{p \to 0}{\longrightarrow} 0$$

при любом фиксированном $t \in R$.

Доказательство. Ясно, что

$$A(p) = A + pR + R_1(p),$$

где

$$\frac{\|R_1(p)\|}{p} \underset{p \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Имеем:

$$e^{(A+pR+R_1(p))t} - e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[(A + pR + R_1(p))^k - A^k\right] t^k}{k!} =$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} A^m R A^{k-1-m} + B_1(t, p).$$

В первое слагаемое вошли члены, содержащие p в первой степени и не содержащие элементов $R_1(p)$. Ясно, что матрица $B_1(t,p)$ обладает нужными свойствами.

Так как

$$A^m = \begin{bmatrix} a_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^m \end{bmatrix},$$

$$A^{k-1-m} = \begin{bmatrix} a_1^{k-1-m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{k-1-m} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{k-1-m} \end{bmatrix},$$

имеем

$$RA^{k-1-m} = \begin{bmatrix} r_{11}a_1^{k-1-m} & r_{12}a_2^{k-1-m} & \dots & r_{1n}a_n^{k-1-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}a_1^{k-1-m} & r_{n2}a_2^{k-1-m} & \dots & r_{nn}a_n^{k-1-m} \end{bmatrix},$$

$$A^m R A^{k-1-m} = \begin{bmatrix} r_{11}a_1^{k-1} & r_{12}a_1^m a_2^{k-1-m} & \dots & r_{1n}a_1^m a_n^{k-1-m} \\ r_{21}a_2^m a_1^{k-1-m} & r_{22}a_2^{k-1} & \dots & r_{2n}a_2^m a_n^{k-1-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}a_n^m a_1^{k-1-m} & r_{n2}a_n^m a_2^{k-1-m} & \dots & r_{nn}a_n^{k-1} \end{bmatrix},$$

т. е. элемент с индексами (i,j) в матрице $A^m R A^{k-1-m}$ имеет вид

$$r_{ij} a_i^m a_j^{k-1-m}.$$

Поэтому в матрице

$$\sum_{m=0}^{k-1} A^m R A^{k-1-m}$$

диагональный элемент с индексами (i, i) равен

$$\sum_{m=0}^{k-1} r_{ii} a_i^{k-1} = k r_{ii} a_i^{k-1},$$

а внедиагональный элемент с индексами (i, j) равен

$$\sum_{m=0}^{k-1} r_{ij} a_i^m a_j^{k-1-m} = r_{ij} a_j^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^m =$$

$$= r_{ij} a_j^{k-1} \frac{\left(\frac{a_i}{a_j}\right)^k - 1}{\frac{a_i}{a_j} - 1} = r_{ij} \frac{a_i^k - a_j^k}{a_i - a_j}.$$

(Заметим, что при $a_j = 0$ вывод формулы не будет корректным, однако ее справедливость в этом случае очевидна.) Отсюда

$$b_{ii}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} k r_{ii} a_i^{k-1} = r_{ii} t e^{a_i t}, \quad i = 1, 2, ..., n;$$

а при $i \neq j$

$$b_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} r_{ij} \frac{a_i^k - a_j^k}{a_i - a_j} = r_{ij} \frac{e^{a_i t} - e^{a_j t}}{a_i - a_j}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.3. *Пусть для системы* (2.2) *выполнены условия:*

1) $A(p)$ *дифференцируема по* p *при* $p = 0$;

2) $A = A(0) = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$, $a_i \neq a_j$ *при* $i \neq j$;

3) *для* $x_0 \in R^n$ $\quad B(T)x_0 \neq 0$ *(матрица* $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$ *определена в лемме* 2.1).

Тогда $0 \in I_{\mathrm{loc}}(T, x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$x(T, x_0, p) - x(T, x_0, 0) = e^{A(p)T} x_0 - e^{A(0)T} x_0 =$$

$$= pB(T)x_0 + B_1(T,p)x_0 = pB(T)x_0 + Q(p),$$

где

$$\frac{\|Q(p)\|}{p} \xrightarrow[p\to 0]{} 0.$$

Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдется последовательность $\{p_m\}$, $p_m \to 0$ при $m \to \infty$, $p_m \neq 0$, такая, что $F(p_m, x_0) = 0$, т. е. $x(T, x_0, p_m) - x(T, x_0, 0) = 0$, или

$$p_m B(T)x_0 + Q(p_m) = 0. \tag{2.12}$$

Делим (2.12) на p_m и переходим к пределу при $m \to \infty$. Получаем $B(T)x_0 = 0$, что противоречит условию 3) теоремы. Теорема доказана.

Следствие 2.3. Если условие 3) теоремы 2.3 заменить на условие $\det(B(T)) \neq 0$, то для любого $x_0 \neq 0$, $x_0 \in R^n$, $0 \in I_{\text{loc}}(T, x_0)$.

Замечание 2.2. Из доказательства теоремы 2.3 немедленно следует, что

$$\frac{\partial}{\partial p} x(T, x_0, p)\bigg|_{p=0} = B(T)x_0. \tag{2.13}$$

Таким образом, условие 3) теоремы 2.3 с учетом (2.13) означает, что достаточным условием локальной идентифицируемости при $p = 0$ системы (2.2) по двухточечному наблюдению в 0, T ее решения $x(t, x_0, p)$ служит условие

$$\frac{\partial}{\partial p} x(T, x_0, p)\bigg|_{p=0} \neq 0.$$

Замечание 2.3. Полученное в теореме 2.3 достаточное условие локальной идентифицируемости системы (2.2) по двухточечному наблюдению является необходимым в следующем смысле. Пусть даны матрицы $A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, и $R = \{r_{ij}\}$, $1 \leq i, j \leq n$. Построим по ним матрицу $B(t)$ так же, как это сделано в лемме 2.1 . Тогда $B(T) = \{b_{ij}(T)\}$, где

$$b_{ii}(T) = r_{ii} T e^{a_i T}, \quad i = 1, ..., n;$$
$$b_{ij}(T) = r_{ij} \frac{e^{a_i T} - e^{a_j T}}{a_i - a_j} \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Пусть при некотором $x_0 \neq 0$, $x_0 \in R^n$, выполняется равенство $B(T)x_0 = 0$. Тогда существует система (2.2), такая, что:

1) $A(p) \in C^1(p)$, $A(0) = A$, $A'(0) = R$;

2) $0 \notin I_{\mathrm{loc}}(T, x_0)$.

Доказательство. Положим

$$A(p) = A + pR + pQ(p),$$

где $Q(p) = \{q_{ij}(p)\}$, $q_{ij}(p)$ – не определенные пока аналитические функции, $q_{ij}(0) = 0$. Как и при доказательстве леммы 2.1 , можно показать, что

$$e^{A(p)t} - e^{A(0)t} = pB(t) + p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\sum_{m=0}^{k-1}A^m Q(p)A^{k-1-m} + p^2C(t) + D(p,t),$$

где матрица $C(t)$ выражается через A и R, а

$$\frac{\|D(p,t)\|}{p^2}\underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Умножим последнее равенство на x_0 и положим $t = T$:

$$\left(e^{A(p)T} - e^{A(0)T}\right)x_0 = pB(T)x_0 + p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T^k}{k!}\sum_{m=0}^{k-1}A^m Q(p)A^{k-1-m}x_0 +$$

$$+p^2C(T)x_0 + D(p,T)x_0 =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T^k}{k!}\sum_{m=0}^{k-1}A^m Q(p)A^{k-1-m}x_0 + p^2C(T)x_0 + D(p,T)x_0.$$

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T^k}{k!}\sum_{m=0}^{k-1}A^m Q(p)A^{k-1-m} = G(p).$$

Диагональный элемент $g_{ii}(p)$ матрицы $G(p)$ равен

$$q_{ii}(p)Te^{a_iT} = q_{ii}l_{ii},$$

а внедиагональный элемент $g_{ij}(p)$ –

$$q_{ij}(p)\frac{e^{a_iT} - e^{a_jT}}{a_i - a_j} = q_{ij}(p)l_{ij}.$$

Ясно, что $l_{ij} \neq 0$, $1 \leq i, j \leq n$.

Предположим для определенности, что первая координата вектора x_0 не равна нулю. Обозначим ее через α. В этих предположениях с учетом полученных соотношений равенство

$$\left(e^{A(p)T} - e^{A(0)T}\right)x_0 = 0$$

равносильно выполнению следующих n равенств

$$\begin{cases} \alpha l_{11}q_{11}(p) + pc_1 + d_1(p) = 0, \\ \alpha l_{21}q_{21}(p) + pc_2 + d_2(p) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha l_{n1}q_{n1}(p) + pc_n + d_n(p) = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

если только в матрице $Q(p)$ взять все $q_{ij}(p) \equiv 0$ при $1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n$. Через c_1, c_2, ..., c_n и $d_1(p)$, $d_2(p)$, ..., $d_n(p)$ обозначены координаты векторов $C(T)x_0$ и $\dfrac{1}{p}D(p,T)x_0$ соответственно. Ясно, что

$$\frac{d_i(p)}{p} \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Заметим также, что все $d_i(p)$ зависят от $q_{j1}(p)$, $1 \leq j \leq n$. По теореме о неявной функции существуют решающие систему (2.14) функции $q_{11}(p)$, $q_{21}(p)$, ..., $q_{n1}(p)$, аналитические при малых p и такие, что $q_{11}(0) = ... = q_{n1}(0) = 0$.

Это означает, что при малых p решения $x(t, x_0, p)$ всех систем вида (2.2), где $A(p) = A + pR + pQ(p)$, совпадают при $t = T$, т.е. $0 \notin I_{\text{loc}}(T, x_0)$.

Замечание 2.4. В данном примере не только $0 \notin I_{\text{loc}}(T, x_0)$, но и для малых p_0 выполнено условие $p_0 \notin I_{\text{loc}}(T, x_0)$.

Рассмотрим теперь квазилинейную систему вида

$$\dot{x} = A(p)x + g(t, x, p), \tag{2.15}$$

где $x \in R^n$, $p \in R$. Мы предполагаем, что матрица $A(p)$ класса C^1 по p, а вектор-функция $g(t, x, p)$ – класса C^1 по всем своим аргументам.

Теорема 2.4. *Пусть для системы* (2.15) *выполнены следующие условия:*

1) $A = A(0) = \text{diag}(a_1, ..., a_n)$, $a_i \neq a_j$ *при* $i \neq j$;

2) $g(t, x, p) = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial p}(t, x, p) = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(t, x, p) = 0$ *при* $p = 0$ *и при всех* t, x.

Если для $x_0 \in R^n$

$$B(T)x_0 \neq 0, \tag{2.16}$$

где матрица $B(t)$ *введена в лемме* 2.1, *то для системы* (2.15) $0 \in I_{\text{loc}}(T, x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v(t) = \left. \frac{\partial x(t, x_0, p)}{\partial p} \right|_{p=0}.$$

Как известно, $v(t)$ является решением линейной неоднородной системы

$$\dot{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left[A(p)x + g(t, x, p) \right] v + \frac{\partial}{\partial p} [A(p)x + g(t, x, p)],$$

где берется $p = 0$, а вместо x надо подставлять решение $x(t, x_0, 0) = e^{A(0)t} x_0$. При этом $v(0) = 0$.

Таким образом, $v(t)$ является решением задачи

$$\dot{v} = A(0)v + Re^{A(0)t} x_0, \quad v(0) = 0. \tag{2.17}$$

Заметим, что если $\widetilde{x}(t, x_0, p)$ – решение системы (2.2), являющейся "укорочением" системы (2.15) и

$$w(t) = \left. \frac{\partial \widetilde{x}(t, x_0, p)}{\partial p} \right|_{p=0},$$

то $w(t)$ является решением задачи

$$\dot{w} = A(0)w + Re^{A(0)t} x_0, \quad w(0) = 0,$$

совпадающей с (2.17). Таким образом, $v(t) = w(t)$.

В частности, $v(T) = w(T) = \left. \dfrac{\partial \widetilde{x}(T, x_0, p)}{\partial p} \right|_{p=0} = B(T)x_0$ (см. (2.13)). Из (2.16) вытекает, что

$$v(T) = \left. \frac{\partial x(T, x_0, p)}{\partial p} \right|_{p=0} \neq 0,$$

а это означает, что при малых $p \neq 0$

$$x(T, x_0, p) \neq x(T, x_0, 0).$$

Следовательно, для системы (2.15) $0 \in I_{\text{loc}}(T, x_0)$. Теорема доказана.

Следствие 2.4 (см. следствие 2.3). Если в теореме 2.4 условие (2.16) заменить на условие $\det(B(T)) \neq 0$, то при любом $x_0 \neq 0$, $x_0 \in R^n$, для системы (2.15) $0 \in I_{\text{loc}}(T, x_0)$.

Предположим теперь, что мы наблюдаем не само решение $x(t, x_0, p)$ системы (2.1), а функцию $y(t) = g\left(x(t, x_0, p)\right)$, где g: $R^n \to R^l$ – отображение класса C^1. Зафиксируем $x_0 \in R^n$, $p_0 \in R^m$, $T > 0$ и ведем функцию

$$\Psi(p, x_0) = \left\| g\left(x(T, x_0, p)\right) - g\left(x(T, x_0, p_0)\right) \right\|.$$

Определение 2.3. *Будем говорить, что система* (2.1) *при* $p = p_0$ *локально идентифицируема по наблюдению в точках 0, T g-образа решения* $x(t, x_0, p)$, *если существует такое* $\Delta > 0$, *что* $\Psi(p, x_0) > 0$ *при* $0 < \|p - p_0\| < \Delta$.

Будем писать в этом случае

$$p_0 \in I_{\text{loc}}(g, T, x_0).$$

Для определенности считаем опять, что $p_0 = 0$. Введем матрицу

$$Q(x) = \left\{ \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right\}, \quad i = 1, ..., l; \quad j = 1, 2, ..., n;$$

($g_i(x)$ – координаты вектор-функции $g(x)$).

Рассмотрим систему (2.15) (либо ее частный случай – систему (2.2)), считая, что $p \in R$.

Теорема 2.5. *Пусть для системы* (2.15) *выполнены условия теоремы* 2.4 (*если рассматривается система* (2.2), *то условие* 2) *теоремы* 2.4 *следует опустить*) *и пусть* $B(t)$ – *матрица, введенная в лемме* 2.1. *Если для* $x_0 \in R^n$

$$Q\left(x(T, x_0, 0)\right) B(T) x_0 \neq 0, \tag{2.18}$$

то $0 \in I_{\text{loc}}(g, T, x_0)$ *для рассматриваемой системы.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 2.4 вытекает, что

$$\left. \frac{\partial g\left(x(T, x_0, p)\right)}{\partial p} \right|_{p=0} = Q\left(x(T, x_0, 0)\right) B(T) x_0,$$

отсюда и из условия (2.18) немедленно следует, что при малых $p \neq 0$ $\Psi(p, x_0) > 0$. Теорема доказана.

Заметим, что если $n = l$ и матрица $Q(x)$ невырожденная, то условие (2.18) равносильно условию 3) теоремы 2.3 (условию (2.16)). Поскольку всегда из (2.18) следует (2.16), заключаем, что из условия $0 \in I_{\text{loc}}(g, T, x_0)$ всегда следует, что $0 \in I_{\text{loc}}(T, x_0)$.

Покажем теперь, как полученные выше условия локальной идентифицируемости системы (2.15) (в частности, системы (2.2)) по двухточечному наблюдению ее решения (теоремы 2.3 и 2.4) распространяются на случай, когда матрица $A = A(0)$ не обязательно диагональная, а имеет произвольную жорданову форму вида

$$A(0) = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad J_m = \begin{bmatrix} \lambda_m & & & 0 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_m \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

J_m – матрица размера $(a_m \times a_m)$, $m = 1, 2, ..., k$; $\sum\limits_{m=1}^{k} a_m = n$.

Итак, рассматриваем систему (2.2) (позже рассмотрим "возмущенную" систему (2.15)) в предположении, что $p \in R$, $A(p) \in C^1$, а матрица $A(0)$ имеет указанный выше вид (2.19).

Обозначим через $\widetilde{x}(t, x_0, p) = e^{A(p)t}x_0$ решение системы (2.2) с начальными данными $\widetilde{x}(0, x_0, p) = x_0$.

Для получения достаточных условий локальной идентифицируемости, как было показано ранее, требуется вычислить

$$\left.\frac{\partial \widetilde{x}(t, x_0, p)}{\partial p}\right|_{p=0} = \left.\left(e^{A(p)t}x_0\right)'_p\right|_{p=0}.$$

Укажем алгоритм вычисления этой производной в рассматриваемом случае. В силу теоремы о дифференцируемости решения по параметру данная задача сводится к нахождению решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{y} = A(0)y + \frac{\partial A}{\partial p}(0)e^{A(0)t}x_0, \quad y(0) = 0.$$

Это решение имеет вид

$$y(t) = e^{A(0)t} \int\limits_0^t e^{-A(0)\tau} A'_p(0) e^{A(0)\tau} x_0 \, d\tau.$$

Таким образом,

$$\left.\left(e^{A(p)t}x_0\right)'_p\right|_{p=0} = e^{A(0)t} \int\limits_0^t e^{-A(0)\tau} A'_p(0) e^{A(0)\tau} x_0 \, d\tau. \tag{2.20}$$

Обозначим

$$A'_p(0) = R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

и пусть $R_1 = Re^{A(0)\tau}$. Вычислим элемент i-ой строки, j-го столбца матрицы R_1. Матрица $e^{A(0)\tau}$ состоит из k блоков, каждый из которых можно описать следующим образом.

Рассмотрим блок размерности $a_l \times a_l$, соответствующий блоку J_l матрицы $A(0)$; его элементы ρ_{kj}, $1 \le k, j \le a_l$, находятся по формулам:

$$\rho_{kj} = \begin{cases} e^{\lambda_l \tau}, & \text{если} \quad \text{k=j;} \\ 0, & \text{если} \quad \text{j>k;} \\ \dfrac{\tau^{k-j}}{(k-j)!} e^{\lambda_l \tau}, & \text{если} \quad \text{j<k.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что элемент i-ой строки и j-го столбца матрицы R_1 записывается в виде

$$(R_1)_{i,j} = e^{\lambda_l \tau} \sum_{k=j}^{a_1+\ldots+a_l} r_{ik} \frac{\tau^{k-j}}{(k-j)!},$$

при этом l находится из условия $a_1 + \ldots + a_{l-1} < j \le a_1 + \ldots + a_l$. Аналогично находим:

$$\left(e^{-A(0)\tau} R_1\right)_{i,j} = \sum_{k=a_1+\ldots+a_{m-1}}^{i} e^{-\lambda_m \tau} \frac{(-\tau)^{i-k}}{(i-k)!} (R_1)_{k,j} =$$

$$= \sum_{k=a_1+\ldots+a_{m-1}}^{i} e^{-\lambda_m \tau} \frac{(-\tau)^{i-k}}{(i-k)!} e^{\lambda_l \tau} \sum_{p=j}^{a_1+\ldots+a_l} r_{kp} \frac{\tau^{p-j}}{(p-j)!} =$$

$$= \sum_{k=a_1+\ldots+a_{m-1}}^{i} e^{(\lambda_l - \lambda_m)\tau} \frac{(-\tau)^{i-k}}{(i-k)!} \sum_{p=j}^{a_1+\ldots+a_l} r_{kp} \frac{\tau^{p-j}}{(p-j)!},$$

где индексы l, m находятся из условий:

$$a_1 + \ldots + a_{l-1} < j \le a_1 + \ldots + a_l,$$

$$a_1 + \ldots + a_{m-1} < i \le a_1 + \ldots + a_m.$$

Таким образом, если через $S(t) = \{s_{ij}(t)\}$ обозначить матрицу $\int\limits_0^t e^{-A(0)\tau} R_1\, d\tau$, то

$$s_{ij}(t) = \int\limits_0^t \left(e^{-A(0)\tau} R_1\right)_{i,j} d\tau =$$

$$= \sum_{k=a_1+\ldots+a_{m-1}}^{i} \sum_{p=j}^{a_1+\ldots+a_l} (-1)^{i-k} r_{kp} \int\limits_0^t e^{(\lambda_l-\lambda_m)\tau} \frac{\tau^{i-k+p-j}}{(i-k)!(p-j)!} d\tau.$$

Если $\lambda_l = \lambda_m$, то

$$s_{ij}(t) =$$

$$= \sum_{k=a_1+\ldots+a_{m-1}}^{i} \sum_{p=j}^{a_1+\ldots+a_l} (-1)^{i-k} r_{kp} \frac{t^{i-k+p-j+1}}{(i-k)!(p-j)!(i-k+p-j+1)}.$$

Если $\lambda_l \neq \lambda_m$, то для нахождения интеграла

$$I = \int\limits_0^t e^{(\lambda_l-\lambda_m)\tau} \tau^{i-k+p-j} d\tau$$

применим формулу интегрирования по частям. На первом шаге будем иметь:

$$I = \tau^{i-k+p-j} \left. \frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)\tau}}{\lambda_l-\lambda_m} \right|_0^t - \int\limits_0^t (i-k+p-j)\tau^{i-k+p-j-1} \frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)\tau}}{\lambda_l-\lambda_m} d\tau =$$

$$= t^{i-k+p-j} \frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)t}}{\lambda_l-\lambda_m} - (i-k+p-j) \int\limits_0^t \tau^{i-k+p-j-1} \frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)\tau}}{\lambda_l-\lambda_m} d\tau.$$

Еще раз применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$I = t^{i-k+p-j} \frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)t}}{\lambda_l-\lambda_m} - (i-k+p-j) \left[t^{i-k+p-j-1} \frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)t}}{(\lambda_l-\lambda_m)^2} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^t \tau^{i-k+p-j-2} (i-k+p-j-1) \frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)\tau}}{(\lambda_l-\lambda_m)^2}\, d\tau \right] =$$

$$= t^{i-k+p-j} \frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)t}}{\lambda_l-\lambda_m} - (i-k+p-j) t^{i-k+p-j-1} \frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)t}}{(\lambda_l-\lambda_m)^2} +$$

$$+(i-k+p-j)(i-k+p-j-1)\int\limits_0^t \tau^{i-k+p-j-2}\frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)\tau}}{(\lambda_l-\lambda_m)^2}\,d\tau.$$

За конечное число шагов получим окончательный результат вида:

$$I=\sum_{A=0}^{i-k+p-j}(-1)^A\frac{(i-k+p-j)!}{(i-k+p-j-A)!}\,t^{i-k+p-j-A}\frac{e^{(\lambda_l-\lambda_m)t}}{(\lambda_l-\lambda_m)^{A+1}}+$$
$$+(-1)^{i-k+p-j+1}(i-k+p-j)!\,\frac{1}{(\lambda_l-\lambda_m)^{i-k+p-j+1}}. \tag{2.21}$$

Таким образом, при $\lambda_l\neq\lambda_m$

$$s_{ij}(t)=\sum_{k=a_1+\ldots+a_{m-1}}^{i}\ \sum_{p=j}^{a_1+\ldots+a_l}(-1)^{i-k}r_{kp}\frac{I}{(i-k)!(p-j)!},$$

где I вычисляется по формуле (2.21).

Наконец, элементы матрицы $B(t)=e^{A(0)t}S(t)=\{b_{ij}(t)\}$ вычисляются по формуле

$$b_{ij}(t)=\sum_{q=a_1+\ldots+a_{k-1}}^{i}\frac{t^{i-q}}{(i-q)!}\,e^{\lambda_k t}s_{qj}(t),$$

где индекс k находится из условия

$$a_1+\ldots+a_{k-1}<i\leq a_1+\ldots+a_k.$$

Из (2.20) теперь следует, что

$$\left(e^{A(p)t}x_0\right)'_p\Big|_{p=0}=B(t)x_0. \tag{2.22}$$

Для нахождения матрицы $B(t)$ предварительно последовательно вычисляются матрицы R, R_1, $S(t)$ по найденным выше формулам.

С учетом указанного алгоритма нахождения матрицы $B(t)$ можно сформулировать следующий аналог теоремы 2.4 для случая матрицы $A(0)$ произвольной формы.

Теорема 2.6. *Пусть в системе* (2.15)*:*

1) *матрица* $A(0)$ *имеет вид* (2.19)*;*

2) $g(t,x,0)\equiv 0,\ \dfrac{\partial g}{\partial p}(t,x,p)\Big|_{p=0}\equiv 0,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x,p)\Big|_{p=0}\equiv 0.$

Если для $x_0\in R^n$ *выполнено условие* (2.16)*, то* $0\in I_{\mathrm{loc}}(T,x_0)$.

Теорема 2.7. *Пусть в системе* (2.15) *функция* $g(t,x,p)$ *удовлетворяет условию* 2) *теоремы* 2.4 *и выполнено условие*

$$A(0)A'(0) = A'(0)A(0). \tag{2.23}$$

Если для $x_0 \in R^n$

$$A'(0)x_0 \neq 0, \tag{2.24}$$

то для системы (2.15) $0 \in I_{\text{loc}}(T, x_0)$ *при любом* $T > 0$.

Доказательство. Как следует из доказательства теоремы 2.4 условие $0 \in I_{\text{loc}}(T, x_0)$ выполнено для системы (2.15), если

$$\left.\frac{\partial x(T,x_0,p)}{\partial p}\right|_{p=0} \neq 0, \tag{2.25}$$

где $x(t,x_0,p)$ – решение задачи Коши $x(0,x_0,p) = x_0$ для линейной системы (2.2), т. е.

$$x(t,x_0,p) = e^{A(p)t}x_0.$$

Таким образом, условие (2.25) означает, что

$$\left.\Big(e^{A(p)T}x_0\Big)'_p\right|_{p=0} \neq 0. \tag{2.26}$$

Записывая разложение матричной экспоненты, получим

$$e^{A(p)T}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(p)T^k}{k!}\,x_0. \tag{2.27}$$

Поскольку при $k \geq 1$

$$\big(A^k(p)\big)' = \sum_{l=0}^{k-1} A^l(p)A'(p)A^{k-l-1}(p),$$

с учетом (2.23) получаем

$$\left.\big(A^k(p)\big)'\right|_{p=0} = \sum_{l=0}^{k-1} A^l(0)A'(0)A^{k-l-1}(0) = kA^{k-1}(0)A'(0).$$

Дифференцируя (2.27) по p и учитывая последнее равенство, получим

$$\left.\Big(e^{A(p)T}x_0\Big)'_p\right|_{p=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kA^{k-1}(0)A'(0)T^k}{k!}\,x_0 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} T^{k-1} \right) A'(0)Tx_0 = e^{A(0)T}\, A'(0)Tx_0.$$

Последнее соотношение показывает, что из условия (2.24) следует условие (2.26). Теорема доказана.

В заключение покажем, как полученные в этом параграфе достаточные условия локальной идентифицируемости систем (2.2) и (2.15) по двухточечному наблюдению для случая одномерного параметра могут быть обобщены на случай параметра произвольной размерности. Итак, будем рассматривать систему (2.2), где

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \in R^m.$$

Предположим, что матрица $A(p)$ непрерывно дифференцируема. Обозначим по аналогии с (2.22)

$$B_i(t) = \frac{\partial}{\partial p_i} e^{A(p)t} \bigg|_{p=0}, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Теорема 2.8. *Если для вектора $x_0 \in R^n$ и для $T > 0$*

$$\operatorname{ran} k\, (B_1(T)x_0, B_2(T)x_0, ..., B_m(T)x_0) = m, \tag{2.28}$$

то для системы (2.2) $0 \in I_{\text{loc}}(T, x_0)$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдется последовательность $\{p^k\}$, $p^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $p^k \neq 0$, такая, что $x(T, x_0, p^k) = x(T, x_0, 0)$. Пусть

$$p^k = \begin{bmatrix} p_1^k \\ \vdots \\ p_m^k \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$x(T, x_0, p^k) = x(T, x_0, 0) + \sum_{i=1}^{m} B_i(T)x_0 p_i^k + o(\|p^k\|),$$

или

$$0 = \sum_{i=1}^{m} B_i(T)x_0 p_i^k + o(\|p^k\|). \tag{2.29}$$

Обозначим

$$\pi^k = \frac{1}{\|p^k\|}\, p^k, \quad \|\pi^k\| = 1.$$

Вследствие компактности единичной сферы в R^m из последовательности $\{\pi^k\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Будем, без ограничения общности, считать, что

$$\pi^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \pi.$$

Тогда $\|\pi\| = 1$. Деля (2.29) на $\|p^k\|$ и переходя к пределу, получим равенство

$$0 = \sum_{i=1}^{m} B_i(T) x_0 \pi_i,$$

или

$$(B_1(T)x_0, B_2(T)x_0, ..., B_m(T)x_0)\, \pi = 0, \tag{2.30}$$

противоречащее условию (2.28) (по этому условию однородная система (2.30) должна иметь единственное нулевое решение). Теорема доказана.

Для системы (2.2) с многомерным параметром p справедлив следующий аналог теоремы 2.7 .

Теорема 2.9. *Пусть для системы* (2.2) *выполняется условие*

$$A(0)C_i = C_i A(0), \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{2.31}$$

где $C_i = A'_{p_i}(p)\big|_{p=0}$. *Если для вектора* $x_0 \in R^n$

$$\operatorname{ran} k\, (C_1 x_0, C_2 x_0, ..., C_m x_0) = m, \tag{2.32}$$

то для системы (2.2) $0 \in I_{\text{loc}}(T, x_0)$ *при любом* $T > 0$.

Доказательство. Повторяя рассуждения, используемые при доказательстве теоремы 2.7 , можно показать, что из (2.31) следует, что

$$B_i(T) = \frac{\partial}{\partial p_i}\, e^{A(p)T}\bigg|_{p=0} = e^{A(0)T} T C_i.$$

Это означает, что условие (2.28) для рассматриваемого случая принимает вид

$$\operatorname{ran} k\left(e^{A(0)T} T C_1 x_0, e^{A(0)T} T C_2 x_0, ..., e^{A(0)T} T C_m x_0\right) = m.$$

С учетом невырожденности матрицы $e^{A(0)T}$ последнее условие равносильно условию (2.32). Теорема доказана.

Следствие 2.5. Если для системы (2.15) выполнено условие 2) теоремы 2.4 и условие (2.28) либо условия (2.31) и (2.32), то $0 \in I_{\mathrm{loc}}(T, x_0)$ для этой системы. При выполнении условий (2.31) и (2.32) T – любое положительное число.

Доказательство этого утверждения незначительно отличается от доказательства теоремы 2.4 .

Замечание 2.5. Все вышесформулированные утверждения сохраняют силу для случая локальной идентифицируемости в произвольной точке $p = p_0$. При этом во всех формулах $p = 0$ следует заменить на $p = p_0$.

§3. Условия высших порядков в задаче о локальной идентифицируемости

Полученные в главе 1 и в предыдущих параграфах этой главы достаточные условия локальной идентифицируемости системы (2.1) и частных случаев этой системы – систем (2.2) и (2.15) были сформулированы в терминах рангов некоторых специальных матриц (см. теоремы 1.1 , 1.2 , 1.4 , 2.8, 2.9 , а также следствия 2.2 и 2.5) и эти условия естественно назвать условиями первого порядка. В этом параграфе мы получим условия локальной идентифицируемости высших порядков в предположении, что условия первого порядка не выполняются.

По-прежнему, будем рассматривать систему дифференциальных уравнений (2.1) в предположении, что вектор-функция f непрерывна по всем своим аргументам, аналитична по x и p, и что обеспечена продолжимость на $[t_0, T]$ решения $x(t, p)$ задачи Коши (2.1) для всех рассматриваемых значений параметра $p \in R^m$.

Во избежание излишне громоздких конструкций (не вносящих ничего принципиально нового), мы ограничимся здесь случаем двухточечного наблюдения решения системы (2.1) (т. е. наблюдения в точках t_0, T при постоянном на $[t_0, T]$ параметре p) и будем рассматривать параметр $p \in R$ или $p \in R^2$.

Пусть $y_i(p)$, $i = 1, 2, ..., n$ – компоненты вектора $y(p) = x(T, p)$. Следуя определению 2.1, система (2.1) локально идентифицируема при значении параметра p_0 (опускаем слова “по двухточечному наблюдению”), если существует такое $\varepsilon > 0$, что $y(p) \neq y(p_0)$ при $0 < \|p - p_0\| < \varepsilon$.

Основные результаты, полученные в предыдущем параграфе, с учетом замечания 2.2 в нашем случае могут быть переформулированы так: если ранг матрицы $\left.\dfrac{\partial y}{\partial p}\right|_{p=p_0}$ равен размерности параметра p, то система (2.1) локально идентифицируема при $p = p_0$ (условие первого порядка).

Для простоты изложения считаем, как и прежде, что $p_0 = 0$. Изучим вопрос о локальной идентифицируемости при нарушении сформулированного выше условия.

Случай 1. Одномерный параметр.

В том случае, когда $p \in R$, матрица $\left.\dfrac{\partial y}{\partial p}\right|_{p=0}$ является столбцом:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial p}\right|_{p=0} = \left.\left[\frac{\partial y_1}{\partial p}, ..., \frac{\partial y_n}{\partial p}\right]^t\right|_{p=0}.$$

Нарушение условий локальной идентифицируемости первого порядка означает, что ранг этой матрицы равен нулю, т. е. выполнены равенства

$$\left.\frac{\partial y_i}{\partial p}\right|_{p=0} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.33}$$

Из аналитичности по x, p вектор-функции $f(t, x, p)$ в системе (2.1) вытекает, что существуют производные всех порядков

$$\frac{\partial^m y_i}{\partial p^m}, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad m = 1, 2, ...$$

Теорема 2.10. *Предположим, что выполнено условие* (2.33) *и существуют* $j \in \{1, 2, ..., n\}$ *и* $m > 1$, $m \in N$, *такие, что*

$$\left.\frac{\partial^m y_j}{\partial p^m}\right|_{p=0} \neq 0. \tag{2.34}$$

Тогда система (2.1) *локально идентифицируема при* $p = 0$.

Доказательство. Предположим противное. Отсутствие локальной идентифицируемости системы (2.1) означает, что существует последовательность $\{p_k\}$, $p_k \to 0$ при $k \to \infty$, $p_k \neq 0$, такая, что $y_j(p_k) = y_j(0)$, $j = 1, 2, ..., n$. Для аналитической функции $y_j(p)$ это условие влечет выполнение равенств

$$\left.\frac{\partial^l y_j}{\partial p^l}\right|_{p=0} = 0$$

для всех $l \geq 1$, противоречащее (2.34). Теорема доказана.

Случай 2. Двумерный параметр.

Пусть $p = [p_1, p_2]^t \in R^2$. Введем обозначения

$$a_i = \left.\frac{\partial y_i}{\partial p_1}\right|_{p_1=p_2=0}, \quad b_i = \left.\frac{\partial y_i}{\partial p_2}\right|_{p_1=p_2=0}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Нарушение условий локальной идентифицируемости первого порядка означает, что ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

равен либо 1, либо 0.

Пусть ранг этой матрицы равен 1. В этом случае один из ее элементов отличен от нуля. Не умаляя общности, считаем,что $a_1 \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции существует аналитическая в некоторой окрестности точки $p_2 = 0$ функция $\varphi(p_2)$, такая, что

$$\varphi(0) = 0, \quad y_1\left(\varphi(p_2), p_2\right) - y_1(0,0) \equiv 0. \tag{2.36}$$

Введем функции $z_i(p_2) = y_i\left(\varphi(p_2), p_2\right)$, $i = 2, 3, ..., n$.

Теорема 2.11. *Предположим, что существует индекс $j \in \{2, 3, ..., n\}$ и $m \in N$, такие, что*

$$\left.\frac{\partial^m z_j}{\partial p_2^m}\right|_{p_2=0} \neq 0. \tag{2.37}$$

Тогда система (2.1) *локально идентифицируема при $p_1 = p_2 = 0$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\left\{p^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)})\right\}$, $p_1^{(k)} \to 0$, $p_2^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$, такая, что

$$y_i(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) = y_i(0,0), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Из равенств $y_1(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) = y_1(0,0)$ и из единственности неявной функции следует, что при достаточно больших k справедливо равенство $p_1^{(k)} = \varphi(p_2^{(k)})$. Тогда при этих k с учетом (2.36)

$$z_j(p_2^{(k)}) = y_j\left(\varphi(p_2^{(k)}), p_2^{(k)}\right) = y_j(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) = y_j(0,0) = z_j(0).$$

Для аналитической функции z_j это влечет выполнение равенств

$$\left.\frac{\partial^l z_j}{\partial p_2^l}\right|_{p_2=0} = 0, \quad l = 1, 2, ...,$$

что противоречит (2.37). Теорема доказана.

Пусть теперь ранг матрицы (2.35) равен нулю. В этом случае функции $z_i(p_1, p_2) = y_i(p_1, p_2) - y_i(0, 0)$ – аналитические функции (в некоторой окрестности точки $p_1 = p_2 = 0$), не имеющие свободных и линейных членов. Пусть $I = \{1, 2, ..., n\}$. Хорошо известно, что для любой функции z_i могут иметь место следующие возможности:

а) $z_i \equiv 0$ (в этом случае пишем $i \in I_0$);

б) $z_i = p_1^l p_2^m u_i(p_1, p_2)$, где $l > 0$, $m > 0$, u_i – аналитическая функция, $u_i(0, 0) \neq 0$ (пишем $i \in I_{p_1,p_2}$);

в) $z_i(p_1, 0) \not\equiv 0$, т. е. в разложении z_i есть член $a_0 p_1^{l_0}$, $a_0 \neq 0$ (пишем $i \in I_{p_1}$);

г) $z_i(0, p_2) \not\equiv 0$, т. е. в разложении z_i есть член $b_0 p_2^{m_0}$, $b_0 \neq 0$ (пишем $i \in I_{p_2}$).

Таким образом, множество индексов I распадается на подмножества I_0, I_{p_1,p_2}, I_{p_1} и I_{p_2}. При этом пересечение подмножеств I_0 и I_{p_1,p_2} с любыми другими указанными подмножествами всегда пусто, в то время, как не всегда $I_{p_1} \cap I_{p_2} = \emptyset$.

Теорема 2.12. *Предположим, что*

1) $I_{p_1} \neq \emptyset$, $I_{p_2} \neq \emptyset$;

2) *существуют $i, j \in I \setminus I_0$, такие, что ломаные Ньютона Γ_i, Γ_j функций z_i, z_j не имеют параллельных конечных ребер. Тогда система* (2.1) *локально идентифицируема при $p_1 = p_2 = 0$ по наблюдению решения задачи Коши $x(t_0) = x_0$ в точках t_0, T.*

Замечание 2.6. Условие 1) сформулированной теоремы является и необходимым (в том случае, если ранг матрицы (2.35) равен нулю). Действительно, если, например, $I_{p_1} = \emptyset$, то для всех i $z_i(p_1, 0) \equiv 0$ при достаточно малых p_1, $|p_1| > 0$.

Доказательство теоремы. Предположим противное. Пусть $p^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) \to (0, 0)$ при $k \to \infty$, $p^{(k)} \neq (0, 0)$ и при этом $z_i(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) \equiv 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Если для бесконечного множества значений k $p_1^{(k)} = 0$, то для функции z_i, $i \in I_{p_2}$, получаем $z_i(0, p_2^{(k)}) = 0$, что невозможно. Аналогично показывается, что равенство $p_2^{(k)} = 0$ возможно лишь при конечном числе индексов k. Таким образом, мы можем считать, что $p_1^{(k)} \neq 0$, $p_2^{(k)} \neq 0$ при всех значениях k.

Рассмотрим последовательность

$$\alpha_k = \frac{\ln |p_1^{(k)}|}{\ln |p_2^{(k)}|}.$$

Пусть $\alpha \in [0, +\infty]$ – предел одной из подпоследовательностей $\{\alpha_k\}$ (ясно, что при достаточно больших k выполняется: $\alpha_k > 0$). Не умаляя общности, считаем, что $\alpha_k \to \alpha$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим две функции z_i, z_j, $i, j \in I \setminus I_0$, такие, что их ломаные Ньютона Γ_i, Γ_j не имеют параллельных конечных ребер. Пусть (l_0, m_0), ..., (l_s, m_s) – вершины Γ_i, занумерованные так, что $l_0 > ... > l_s$. Им соответствуют главные члены в разложении $z_i(p_1, p_2)$ вида

$$a_0 p_1^{l_0} p_2^{m_0}, ..., a_s p_1^{l_s} p_2^{m_s}; \quad a_0 \neq 0, ..., a_s \neq 0.$$

Пусть (λ_0, μ_0), ..., (λ_t, μ_t) – вершины Γ_j, занумерованные так, что $\lambda_0 > ... > \lambda_t$. Из свойств ломаных Ньютона, описанных в [54], следует, что:

– если $\alpha = 0$, то при достаточно больших k

$$\left| z_i(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) \right| \geq \frac{1}{2} |a_0| \, |p_2^{(k)}|^{l_0 \alpha_k + m_0} > 0,$$

что приводит к противоречию;

– если $\alpha = +\infty$, то при достаточно больших k

$$\left| z_i(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) \right| \geq \frac{1}{2} |a_s| \, |p_2^{(k)}|^{l_s \alpha_k + m_s} > 0,$$

что приводит к противоречию;

– если $\alpha \in (0, +\infty)$ и не совпадает ни с одним из чисел

$$\gamma_r = \frac{m_r - m_{r-1}}{l_{r-1} - l_r}, \quad r = 1, 2, ..., s,$$

(эти числа являются угловыми коэффициентами конечных ребер ломаной Ньютона Γ_i на плоскости (p_1, p_2)), то найдется такое $r \in \{0, ..., s\}$, что при достаточно больших k

$$\left| z_i(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) \right| \geq \frac{1}{2} |a_r| \, |p_2^{(k)}|^{l_r \alpha_k + m_r} > 0,$$

что вновь приводит к противоречию.

Осталось рассмотреть лишь тот случай, когда α совпадает с одним из чисел γ_r. В этом случае из второго условия теоремы следует, что α не совпадает ни с одним из чисел

$$\frac{\mu_r - \mu_{r-1}}{\lambda_{r-1} - \lambda_r}, \quad r = 1, 2, ..., t.$$

Поэтому найдется такое $r \in \{0, 1, ..., t\}$, что при достаточно больших k и при некотором $b > 0$

$$\left| z_j(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) \right| \geq b|p_2^{(k)}|^{\lambda_r \alpha_k + \mu_r} > 0,$$

что вновь приводит к противоречию. Теорема доказана.

3 Специальные постановки задачи о локальной параметрической идентифицируемости

§1. Локальная асимптотическая идентифицируемость линейных систем

Рассмотренные в предыдущих главах задачи локальной параметрической идентифицируемости систем дифференциальных уравнений по наблюдению решений или функций от решений в моменты времени из некоторого конечного промежутка можно считать основными задачами теории идентифицируемости. Однако во многих теоретических и прикладных задачах, например, связанных с исследованием устойчивости решений или их асимптотическим поведением, приходится рассматривать решения дифференциальных уравнений или функции от этих решений на бесконечном промежутке времени. Возникающие при этом задачи идентификации параметров часто не укладываются в рамки основной теории и требуют специальной постановки и особого решения.

В этом параграфе мы изучим одну специальную постановку задачи о локальной идентифицируемости для стационарной или периодической линейной дифференциальной системы, когда наблюдаемой величиной служит некоторая функция решения этой системы, рассматриваемого на бесконечном промежутке времени.

Итак, будем рассматривать линейную стационарную систему вида

$$\dot{x} = A(p)x, \tag{3.1}$$

где $x \in R^n$, параметр $p \in R^m$, или линейную периодическую систему вида

$$\dot{x} = A(t,p)x, \tag{3.2}$$

где $x \in R^n$, $p \in R^m$, $A(t+\omega,p) \equiv A(t,p)$, $\omega > 0$.

Для таких систем мы определим свойство локальной параметрической идентифицируемости, связанное с асимптотическим поведением их решений при $t \to +\infty$. Будем обозначать через $x(t,x_0,p)$ решения этих систем с начальными данными

$$x(0,x_0,p) = x_0. \tag{3.3}$$

Известно [55, т. 3.9.1], что если $x(t)$ – нетривиальное решение стационарной или периодической линейной системы, то существует предел

$$\chi[x] = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|,$$

называющийся строгим показателем Ляпунова решения $x(t)$.

Определение 3.1. *Будем говорить, что система* (3.1) *или* (3.2) *локально идентифицируема при* $p = p_0$ *по асимптотическому наблюдению решения задачи Коши* (3.3) *с* $x_0 \neq 0$ (*локально асимптотически идентифицируема*), *если существует такое* $\delta > 0$, *что*

$$\chi[x(t, x_0, p)] \neq \chi[x(t, x_0, p_0)]$$

при $0 < \|p - p_0\| < \delta$.

Прежде всего мы изучим связь введенного свойства локальной асимптотической идентифицируемости с рассмотренной ранее локальной идентифицируемостью по двухточечному наблюдению.

Рассмотрим сначала случай линейной стационарной системы дифференциальных уравнений вида (3.1). Задача о локальной идентифицируемости для системы (3.1) по двухточечному наблюдению была изучена в главе 2. В теореме 2.1 было установлено, что если матрица $A(p)$ в системе (3.1) непрерывна при $p = 0$ и существует такое $\Delta_1 > 0$, что

$$A(p)A(0) = A(0)A(p) \tag{3.4}$$

при $\|p\| < \Delta_1$, то для любых $x_0 \in R^n$ и $T > 0$ существует такое $\Delta_2 > 0$, что при $\|p\| < \Delta_2$ из равенства

$$x(T, x_0, p) = x(T, x_0, 0) \tag{3.5}$$

следует равенство

$$x(t, x_0, p) = x(t, x_0, 0), \quad t \in [0, T]. \tag{3.6}$$

При доказательстве теоремы 2.1 было установлено, что равенство (3.6) выполняется при всех $t \in R$, но тогда при $\|p\| < \Delta_2$

$$\chi[x(t, x_0, p)] = \chi[x(t, x_0, 0)]. \tag{3.7}$$

Таким образом, для системы (3.1) справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть в системе* (3.1) *матрица* $A(p)$ *непрерывна при* $p = 0$ *и выполнено условие* (3.4). *Тогда для любых* $x_0 \in R^n$, $x_0 \neq 0$, *и* $T > 0$ *существует такое* $\Delta_2 > 0$, *что если* $\|p\| < \Delta_2$ *и выполнено равенство* (3.5), *то выполнено равенство* (3.7).

Замечание 3.1. Теорема 3.1 означает, что при условии (3.4) из локальной асимптотической идентифицируемости ($\chi[x(t, x_0, p)] \neq \neq \chi[x(t, x_0, 0)]$ при $0 < \|p\| < \Delta_2$) следует локальная идентифицируемость по двухточечному наблюдению ($x(T, x_0, p) \neq x(T, x_0, 0)$ при $0 < \|p\| < \Delta_2$).

Теперь из теорем 2.2 и 3.1 вытекает справедливость следующего утверждения: если в системе (3.1) матрица $A(p)$ непрерывна при $p = 0$ и выполнено условие (3.4), то из неравенства

$$\chi[x(t, x_0, p)] \neq \chi[x(t, x_0, 0)] \quad \text{при} \quad 0 < \|p\| < \Delta_2$$

следует, что при малых $p \neq 0$

$$(A(p) - A(0))x_0 \neq 0.$$

Для линейной системы (3.1) строгими показателями Ляпунова ее решений служат вещественные части собственных чисел $\lambda_i(p)$, i =1, 2, ..., n, матрицы $A(p)$. Поскольку система (3.1), удовлетворяющая условию (3.4), не может быть неидентифицируемой по двухточечному наблюдению и одновременно локально асимптотически идентифицируемой, получаем следующее утверждение о поведении спектра матрицы $A(p)$; если матрица $A(p)$ непрерывна при $p = 0$, удовлетворяет условию (3.4) и для некоторого $x_0 \neq 0$ $(A(p) - A(0))x_0 = 0$ при $\|p\| < \Delta$, $\Delta > 0$, то существует такая последовательность $\{p_k\}$, $p_k \neq 0$, $p_k \to 0$ при $k \to \infty$, что

$$\{\operatorname{Re}\lambda_i(p_k),\ i = 1, 2, ..., n\} \cap \{\operatorname{Re}\lambda_i(0),\ i = 1, 2, ..., n\} \neq \emptyset.$$

Покажем, что при нарушении условия (3.4) утверждение теоремы 3.1, вообще говоря, неверно. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = (A + D(p)), \quad x \in R^2, \quad p \in R, \tag{3.8}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(p) = p \begin{bmatrix} \dfrac{(e-1)^2}{e} + \rho_1(p) & 1 \\ 1 & 1 + \rho_2(p) \end{bmatrix},$$

а функции $\rho_1(p)$ и $\rho_2(p)$ аналитичны при малых $|p|$ и удовлетворяют условию $\rho_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. В § 1 главы 2 было показано, что можно найти функции ρ_1, ρ_2, при которых для системы (3.8)

$$x(1, x_0, p) = x(1, x_0, 0)$$

при малых $|p|$, где

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1-e}{e} \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

т. е. при этих ρ_1, ρ_2 система (3.8) не является локально идентифицируемой при $p = 0$ по двухточечному наблюдению (в моменты 0, 1) решения задачи Коши $x(t, x_0, p)$, где x_0 определяется равенством (3.9).

Для системы(3.8) условие (3.4) не выполняется, т. е. при $p \neq 0$

$$(A + D(p))A \neq A(A + D(p)).$$

Покажем, что система (3.8) является локально асимптотически идентифицируемой при $p = 0$ по наблюдению задачи Коши (3.3), где x_0 из (3.9).

При $p = 0$ решение указанной задачи Коши имеет вид

$$x(t, x_0, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ (e^{-1} - 1)e^t \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Характеристический многочлен матрицы $A + D(p)$ имеет вид

$$\lambda^2 + b_1(p)\lambda + b_2(p), \tag{3.11}$$

где $b_1(p) = -[1 + p + ap - o(p)]$, $b_2(p) = (1 + p)ap + o(p)$, $a = \dfrac{(e-1)^2}{e} > 0$. Из формулы (3.10) следует, что $\chi[x(t, x_0, 0)] = 1$. Покажем, что при малых $|p| \neq 0$ строгий показатель Ляпунова решений $x(t, x_0, p)$ не может быть равным единице. Если бы он равнялся единице, то либо один из вещественных корней многочлена (3.11) был бы равен единице, либо корни (комплексные) этого многочлена были бы равны $\lambda_1 = 1 + i\beta$, $\lambda_2 = 1 - i\beta$. В первом случае должно было бы выполняться равенство

$$1 + b_1(p) + b_2(p) = 0 \iff -p + o(p) = 0,$$

что невозможно при малых $|p| \neq 0$. Во втором случае должно было бы выполняться равенство

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 = -b_1(p),$$

что также невозможно при малых $|p| \neq 0$. Таким образом, равенство (3.7) не выполняется ни при каком p, $0 < |p| < \delta$, $\delta > 0$ – некоторая константа, а это и означает локальную асимптотическую идентифицируемость при $p = 0$ системы (3.8).

Итак, мы привели пример системы (3.1), не удовлетворяющей условию (3.4), которая является локально асимптотически идентифицируемой, но не является локально идентифицируемой по двухточечному наблюдению.

Рассмотрим еще один пример системы (3.1), не удовлетворяющей условию (3.4). Пусть в (3.1) $x \in R^2$, $p \in R$ и

$$A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда при $p \neq 0$

$$A(p)A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -p^2 \end{bmatrix} \neq A(0)A(p) = \begin{bmatrix} -p^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т. е. условие (3.4) для такой системы не выполнено. Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Легко выдеть, что решением этой задачи Коши для рассматриваемой системы служит

$$x(t,p) = \begin{bmatrix} \cos(pt) \\ -p\sin(pt) \end{bmatrix}.$$

Поскольку при всех p

$$\chi[x(t,p)] = \chi[x(t,0)] = 0,$$

система не является локально асимптотически идентифицируемой. В то же время при малых $p \neq 0$

$$x(1,p) \neq x(1,0),$$

т. е. система является локально идентифицируемой по двухточечному наблюдению решения выбранной задачи Коши (в моменты 0, 1).

Приведем теперь пример системы (3.1), удовлетовряющей условию (3.4), для которой имеет место локальная идентифицируемость по двухточечному наблюдению, однако нет локальной асимптотической идентифицируемости (тем самым мы установим, что теорема 3.1 необратима). Итак, пусть в (3.1) $x \in R^2$, $p \in R$ и

$$A(p) = \begin{bmatrix} 1 & p \\ -p & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $A(0) = E$, условие (3.4) выполнено. Пусть

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$(A(p) - A(0))x_0 = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ -p \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

при $p \neq 0$. По теореме 2.2 данная система локально идентифицируема по двухточечному наблюдению решения задачи Коши с выбранным начальным значением x_0 в моменты 0, $T > 0$. Собственные числа матрицы $A(p)$ равны

$$\lambda_{1,2}(p) = 1 \pm ip$$

и поэтому при всех p

$$\chi[x(t, x_0, p)] = \chi[x(t, x_0, 0)] = 1,$$

т. е. данная система не является локально асимптотически идентифицируемой.

Приведенные примеры показывают, что в общем случае для системы (3.1) свойства локальной асимптотической идентифицируемости и локальной идентифицируемости по двухточечному наблюдению являются независимыми.

Рассмотрим теперь систему вида (3.2), где $A(t, p)$ – непрерывная по t и p матрица. Пусть $\Phi(t, p)$ – фундаментальная матрица системы (3.2), нормированная в точке $t = 0$, т. е.

$$\Phi(0, p) = E, \tag{3.12}$$

где E – единичная матрица. По теореме Флоке [55] матрица $\Phi(t, p)$ представима в виде

$$\Phi(t, p) = G(t, p)e^{B(p)t}, \tag{3.13}$$

где матрица $G(t,p)$ ω-периодична по t, а матрица $B(p)$ постоянная. Из (3.12) и ω-периодичности $G(t,p)$ следует, что при всех p

$$G(l\omega,p) = G(0,p) = E \tag{3.14}$$

при всех целых l.

Решение $x(t,x_0,p)$ задачи Коши (3.3) для системы (3.2) представимо в виде

$$x(t,x_0,p) = \Phi(t,p)x_0 = G(t,p)e^{B(p)t}x_0. \tag{3.15}$$

Для системы (3.2) справедлив следующий аналог теоремы 3.1 .

Теорема 3.2. *Пусть система* (3.2) *такова, что для матрицы* $B(p)$ *из представления* (3.13) *существует такое* $\Delta > 0$*, что*

$$B(p)B(0) = B(0)B(p) \tag{3.16}$$

при $\|p\| < \Delta$*. Тогда для любого* $x_0 \in R^n$*,* $x_0 \neq 0$*, и любого* $T = l\omega$*,* l *– натуральное число, найдется такое* $\delta > 0$*, что при* $\|p\| < \delta$ *из равенства* (3.5) *следует равенство* (3.7).

Доказательство. Из (3.15) с учетом (3.14) для $T = l\omega$ и любого p следует, что

$$x(T,x_0,p) = G(l\omega,p)e^{B(p)T}x_0 = e^{B(p)T}x_0.$$

Таким образом, условие (3.5) при $T = l\omega$ означает, что

$$e^{B(p)T}x_0 = e^{B(0)T}x_0. \tag{3.17}$$

Наряду с системой (3.2) рассмотрим линейную стационарную систему

$$\dot{x} = B(p)x, \quad x(0) = x_0. \tag{3.18}$$

Из непрерывности матрицы $A(t,p)$ следует непрерывность матрицы $B(p)$. Равенство (3.16) означает, что для этой системы выполнены все условия теоремы 2.1. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что при $\|p\| < \delta$ из равенства (3.17), означающего для системы (3.18) выполнение условия (3.5), следует, что при всех $t \in R$

$$e^{B(p)t}x_0 = e^{B(0)t}x_0. \tag{3.19}$$

Матрица $G(t,p)$ в представлении Флоке (3.13) для системы (3.2) ω-периодична и непрерывна, а поэтому ограничена. Кроме того, эта матрица невырожденная. Поэтому при любом p существуют такие положительные постоянные $c_1(p)$ и $c_2(p)$, что для любого вектора ν выполнены неравенства

$$c_1(p)\|\nu\| \leq \|G(t,p)\nu\| \leq c_2(p)\|\nu\|. \tag{3.20}$$

Из (3.20) с учетом (3.15) получаем

$$c_1(p)\left\|e^{B(p)t}x_0\right\| \le \|x(t,x_0,p)\| \le c_2(p)\left\|e^{B(p)t}x_0\right\|.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\ln c_1(p)}{t} + \frac{1}{t}\,\ln\left\|e^{B(p)t}x_0\right\| \le \frac{1}{t}\,\ln\|x(t,x_0,p)\| \le$$

$$\le \frac{\ln c_2(p)}{t} + \frac{1}{t}\,\ln\left\|e^{B(p)t}x_0\right\|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \to +\infty$, получаем

$$\chi[x(t,x_0,p)] = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\,\left\|e^{B(p)t}x_0\right\|. \tag{3.21}$$

Теперь из (3.19) и (3.21) следует, что при $\|p\| < \delta$

$$\chi[x(t,x_0,p)] = \chi[x(t,x_0,0)].$$

Теорема доказана.

Укажем теперь один частный случай линейной периодической системы (3.2), для которой выполняется условие (3.16) теоремы 3.2 .

Аналогом условия коммутирования (3.4) в случае системы (3.2) является следующее условие: существует такое $\Delta > 0$, что

$$\int\limits_0^\omega A(s,p)ds\int\limits_0^\omega A(s,0)ds = \int\limits_0^\omega A(s,0)ds\int\limits_0^\omega A(s,p)ds \tag{3.22}$$

при $\|p\| < \Delta$.

Действительно, для матрицы $A(t,p) \equiv A(p)$

$$\int\limits_0^\omega A(s,p)ds = \int\limits_0^\omega A(p)ds = A(p)\omega,$$

поэтому в случае стационарной линейной системы (являющейся частным случаем линейной периодической системы) условие (3.22) сводится к условию (3.4).

Теорема 3.3. *Пусть для системы* (3.2) *найдется такое* $\Delta > 0$, *что выполнено равенство* (3.22) *при* $\|p\| < \Delta$. *Пусть, кроме того, выполнено условие Лаппо – Данилевского* [55], *т. е.*

$$\left[\int\limits_0^t A(s,p)ds\right] A(t,p) = A(t,p)\left[\int\limits_0^t A(s,p)ds\right] \tag{3.23}$$

при $\|p\| < \Delta$ *и* $t \in R$. *Тогда для любого* $x_0 \in R^n$, $x_0 \neq 0$, *и любого числа* $T = l\omega$, l *– натуральное число, найдется такое* $\delta > 0$, *что если* $\|p\| < \delta$ *и выполнено равенство* (3.5), *то выполнено и равенство* (3.7).

Доказательство. Из теории систем Лаппо – Данилевского [55] следует, что при выполнении условия (3.23) матрица

$$\Phi(t,p) = e^{\int\limits_0^t A(s,p)ds} \tag{3.24}$$

является фундаментальной матрицей системы (3.2).

Поскольку $B(p) = \dfrac{1}{\omega}\ln\Phi(\omega,p)$, из (3.24) следует, что

$$B(p) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega A(s,p)ds. \tag{3.25}$$

Из условия коммутирования (3.22) следует, что

$$B(p)B(0) = B(0)B(p)$$

при $\|p\| < \Delta$. Таким образом, для рассматриваемой системы выполнены все условия теоремы 3.2 . Теорема доказана.

Замечание 3.2. Теоремы 3.2 и 3.3 означают, что при выполнении указанных в них условий для системы (3.2) из локальной асимптотической идентифицируемости следует локальная идентифицируемость по двухточечному наблюдению на концах любого отрезка $[0, l\omega]$, $l \in N$.

Заметим также, что строгими показателями Ляпунова решений системы (3.2), удовлетворяющей условию (3.23), являются вещественные части собственных чисел $\lambda_i(p)$, $i = 1, 2, ..., n$, матрицы $B(p)$, определенной формулой (3.25). Поэтому условие локальной асимптотической идентифицируемости ($\chi[x(t,x_0,p)] \neq \chi[x(t,x_0,p_0)]$ при $0 < \|p - p_0\| < \delta$) будет выполнено, если при p, близких к p_0 ($p \neq p_0$) множества $\{\mathrm{Re}\lambda_i(p)\}$ и $\{\mathrm{Re}\lambda_i(p_0)\}$ не пересекаются. Таким образом, задача локальной асимптотической идентифицируемости (а, следовательно, при выполнении (3.22) и задача параметрической идентифицируемости по двухточечному наблюдению на отрезках $[0, l\omega]$) в данном случае сводится к алгебраической задаче, связанной с чувствительностью собственных чисел матрицы к изменению ее параметров.

Примером системы (3.2), удовлетворяющей условиям (3.22) и (3.23) может служить двумерная ($n = 2$) система с матрицей

$$A(t,p) = \begin{bmatrix} a(t,p) & \alpha b(t,p) \\ \beta b(t,p) & a(t,p) \end{bmatrix},$$

где $a(t,p)$, $b(t,p)$ – ω-периодические функции, α и β – произвольные числа. Так выглядит, например, система дифференциальных уравнений, соответствующая следящей системе переменного тока, когда передаточные функции усилителя и стационарной части имеют первый порядок, а опорными сигналами модулятора и демодулятора служит произвольная периодическая функция [56]. Легко проверить, что условия (3.22) и (3.23) выполнены для матрицы $A(t,p)$ указанного вида при любом p.

Замечание 3.3. В теореме 2.2 главы 2 было получено условие (2.7) локальной идентифицируемости системы (3.1) по двухточечному наблюдению, когда для этой системы выполняется условие коммутирования (3.4). Для системы (3.2) при выполнении условия (3.16) можно получить аналогичное условие. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Если для системы* (3.2) *выполняется условие* (3.16) *теоремы* 3.2, *то эта система локально идентифицируема при* $p = 0$ *по наблюдению решения задачи Коши* (3.3) *в точках* 0, $T = l\omega$, *где* l *– произвольное натуральное число, тогда и только тогда, когда при* $0 < \|p\| < \Delta$

$$(B(p) - B(0))x_0 \neq 0. \tag{3.26}$$

Доказательство. 1. Достаточность. С учетом (3.14), (3.15) и (3.16)

$$x(l\omega, x_0, p) - x(l\omega, x_0, 0) =$$

$$= G(l\omega, p)e^{B(p)l\omega}x_0 - G(l\omega, 0)e^{B(0)l\omega}x_0 = \left(e^{B(p)l\omega} - e^{B(0)l\omega}\right)x_0 =$$

$$= e^{B(0)l\omega}\left(e^{D(p)} - E\right)x_0 = e^{B(0)l\omega}\left(E + \frac{D(p)}{2} + \frac{D^2(p)}{6} + \ldots\right)D(p)x_0,$$

где $D(p) = [B(p) - B(0)]l\omega$.

Предположим, что система (3.2) не является локально идентифицируемой при $p = 0$. Тогда найдется последовательность $\{p_k\}$, $p_k \neq 0$, $p_k \to 0$ при $k \to +\infty$, такая, что $x(l\omega, x_0, p_k) = x(l\omega, x_0, 0)$. Это означает, что при всех p_k

$$e^{B(0)l\omega}\left(E + \frac{D(p_k)}{2} + \frac{D^2(p_k)}{6} + ...\right) D(p_k)x_0 = 0. \tag{3.27}$$

В силу невырожденности матрицы $e^{B(0)l\omega}$ из (3.27) следует, что

$$\left[E + \frac{D(p_k)}{2} + \frac{D^2(p_k)}{6} + ...\right] D(p_k)x_0 = 0.$$

Но при малых $\|p_k\|$ матрица в квадратных скобках невырожденная. Отсюда следует, что при малых $\|p_k\|$

$$D(p_k)x_0 = 0,$$

или

$$[B(p_k) - B(0)]l\omega x_0 = 0,$$

что противоречит условию (3.26).

2. Необходимость условия (3.26) устанавливается с использованием полученного выше выражения для разности $x(l\omega, x_0, p) - x(l\omega, x_0, 0)$ и повторением рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2.2. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Пусть для системы (3.2) выполняются все условия теоремы 3.3. Условие: для $x_0 \in R^n$ и $0 < \|p\| < \Delta$

$$\left(\int\limits_0^\omega [A(s,p) - A(s,0)]ds\right) x_0 \neq 0$$

– является необходимым и достаточным для локальной идентифицируемости системы (3.2) при $p = 0$ по наблюдению решения задачи Коши (3.3) в точках 0, $T = l\omega$, где l – произвольное натуральное число.

Справедливость этого следствия теоремы 3.4 немедленно вытекает из формул (3.25) и (3.26).

В этом параграфе наше основное внимание было уделено выяснению связи между введенным свойством локальной асимптотической идентифицируемости и рассмотренным ранее свойством локальной параметрической идентифицируемости по дискретным (в частности, двухточечным) наблюдениям для линейных стационарных и периодических систем. В процессе изучения этой связи для отдельных классов линейных периодических систем были получены новые достаточные (а также необходимые и достаточные) условия локальной параметрической идентифицируемости по двухточечному наблюдению.

Свойство локальной асимптотической идентифицируемости, как следует из определения 3.1 , означает различие строгих показателей Ляпунова решений задачи Коши для идентифицируемого (p_0) и близких к нему значений параметра p. Для линейной стационарной системы это свойство связано с поведением спектра матрицы $A(p)$, а для линейной периодической – с поведением ее мультипликаторов. Эти задачи имеют самостоятельное значение в теории дифференциальных уравнений (см., например, [57]). Они тесно связаны с вопросами устойчивости линейных систем и выходят за рамки наших рассмотрений. Отметим, что некоторые условия зависимости спектра матрицы $A(p)$ от параметра p указаны, например, в [58, с. 275] и [59, с. 444].

§2. Параметрическая идентифицируемость одного дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом

В этом параграфе нами будет рассмотрена задача идентифицируемости входного воздействия для системы управления частного вида, содержащей блок временной задержки, по наблюдению переходной характеристики (выхода) этой системы в произвольный момент времени. Математической моделью этой системы является линейное дифференциальное уравнение первого порядка с запаздывающим аргументом. Специфика таких уравнений не позволяет применить к ним общие методы получения условий параметрической идентифицируемости обыкновенных дифференциальных уравнений и требует разработки собственных методов.

В работах [60], [61] предлагаются методы нахождения параметров функционально-дифференциальных систем с последействием по косвенным измерениям их входа и выхода на некотором промежутке времени. Предполагается известной реакция системы на входное воздействие. В частности, для линейной системы с запаздывающим аргументом на конечном отрезке времени идентификации указанная реакция находится методом пошагового интегрирования системы. Укажем еще работу [62], в которой полученные условия идентифицируемости передаточной функции системы требуют существенной информации о соотношении “вход – выход” системы на отрезке времени идентификации. В нашей постановке, как было отмечено выше, наблюдение выхода производится в один произвольно выбираемый момент времени.

Итак, изучаемой моделью служит линейная физическая система первого порядка с обратной связью и элементом задержки, на вход которой подается сигнал $px(t)$ типа “размытого скачка”. Структурная схема системы изображена на рис. 3.1.

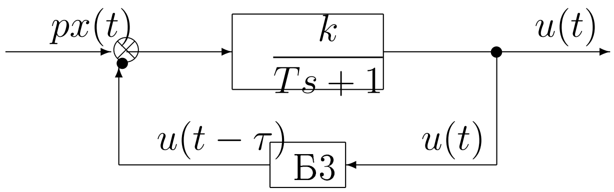

Рис. 3.1

Здесь БЗ – блок задержки на время $\tau > 0$. Система описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$Tu'(t) + u(t) = k[px(t) - u(t-\tau)], \tag{3.28}$$

где $T > 0$, $\tau > 0$, $k > 0$, $x(t)$ – непрерывная функция, такая, что

$$\eta(t - t_0) \le x(t) \le \eta(t), \quad 0 \le t_0 \le \tau, \tag{3.29}$$

$\eta(t)$ – функция Хевисайда, $p \ge 0$ – параметр, задающий полосу скачка $px(t)$, подаваемого на вход системы. Для уравнения (3.28) ставится начальная задача

$$u(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{3.30}$$

Решение этой задачи зависит от параметра p и поэтому будем обозначать его в общем случае $u(t,p)$. Задачу идентификации неизвестного параметра p сформулируем, как задачу определения этого параметра по известному значению решения $u(t,p)$ (выхода системы) в некоторый момент времени $t = t^* > 0$. Исследуем возможность однозначного решения этой задачи.

Определение 3.2. *Будем говорить, что уравнение* (3.28) *локально параметрически идентифицируемо при* $p = p_0$ *по наблюдению решения* $u(t,p)$ *начальной задачи* (3.30) *в момент времени* $t^* > 0$*, если найдется такое* $\delta > 0$*, что*

$$u(t^*, p) \ne u(t^*, p_0) \quad \text{при} \quad 0 < |p - p_0| < \delta.$$

Из линейности уравнения (3.28) следует, что $u(t,p) = pu(t,1)$. Отсюда с очевидностью следует, что условие

$$u(t^*,1) \neq 0 \tag{3.31}$$

гарантирует для любого $p = p_0 \geq 0$ локальную параметрическую идентифицируемость уравнения (3.28) по наблюдению решения $u(t,p_0)$ начальной задачи (3.30) в момент времени $t = t^*$, поскольку

$$u(t^*,p) \neq u(t^*,p_0) \quad \text{при любом} \quad p, \quad p \neq p_0.$$

Поэтому, если выполнено условие (3.31), говорим, что уравнение (3.28) глобально параметрически идентифицируемо по наблюдению решения начальной задачи (3.30) в момент времени t^*.

Наконец, если уравнение (3.28) глобально параметрически идентифицируемо по наблюдению решения начальной задачи (3.30) в любой момент времени t^* из некоторого промежутка I, говорим, что это уравнение глобально параметрически идентифицируемо на промежутке I.

Начнем изучение уравнения (3.28) со случая, когда в условии (3.29) $t_0 = 0$, т. е. $x(t) = \eta(t)$. В этом случае уравнение (3.28) принимает вид

$$Tu'(t) + u(t) = k[p - u(t-\tau)]. \tag{3.32}$$

Будем исследовать на полуоси $t \in [0;+\infty)$ поведение решения $u(t)$ уравнения (3.32), удовлетворяющего начальному условию (3.30). В результате замены

$$u(t) = py(t) \tag{3.33}$$

уравнение (3.32) преобразуется в уравнение

$$Ty'(t) + y(t) = k[1 - y(t-\tau)], \tag{3.34}$$

а начальная задача (3.30) для $y(t)$ сохраняет свой вид:

$$y(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{3.35}$$

Теорема 3.5. *Решение* $y(t)$ *уравнения* (3.34)*, удовлетворяющее начальному условию* (3.35)*, является возрастающим на полуоси* $[0,+\infty)$*, если* $\tau \in [0,\tau^*]$*, где*

$$\tau^* = \frac{T}{1 + k\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}}. \tag{3.36}$$

Доказательство. Посмотрим, прежде всего, как ведет себя решение $y(t)$ в “вырожденном” случае, когда $\tau = 0$. Уравнение (3.34) тогда записывается в виде

$$Ty'(t) + (k+1)y(t) = k,$$

а его решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, задается формулой

$$y(t) = \frac{k}{k+1}\left(1 - e^{-\frac{k+1}{T}t}\right)$$

и, очевидно, возрастает при $t \in [0; +\infty)$, причем $y(t) \to \dfrac{k}{k+1}$ при $t \to +\infty$.

Пусть теперь $\tau > 0$. Монотонность исследуемого решения можно доказать, используя явный вид этого решения

$$y_n(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i k^{i+1} e^{\frac{i\tau - t}{T}} \left[e^{\frac{t - i\tau}{T}} - \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!} \left(\frac{t - i\tau}{T}\right)^j \right]. \tag{3.37}$$

Здесь $y_n(t)$ – решение задачи (3.34), (3.35) на отрезке $[n\tau, (n+1)\tau]$ (при $i = 0$ вторая сумма равна единице).

Справедливость этой формулы устанавливается пошаговым интегрированием уравнения (3.34) с применением метода математической индукции. Мы докажем возрастание решения $y(t)$ без использования формулы (3.37).

Известно [63, с. 63], что интересующее нас решение $y(t)$ существует, единственно и принадлежит классу C^1 на $(0, +\infty)$ и классу C^2 на $(\tau, +\infty)$. Нахождение решения $y(t)$ на отрезке $[0, \tau]$ сводится к решению задачи Коши

$$Ty'(t) + y(t) = k, \quad y(0) = 0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$y(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \quad t \in [0, \tau]. \tag{3.38}$$

Рассмотрим решение $y(t)$ при $t > \tau$. Дифференцируя (3.34), находим

$$Ty''(t) + y'(t) = -ky'(t - \tau).$$

Умножая это уравнение на $\dfrac{1}{k}e^{\frac{t}{T}}$, получаем

$$\frac{T}{k}e^{\frac{t}{T}}y''(t) + \frac{1}{k}e^{\frac{t}{T}}y'(t) = -e^{\frac{t}{T}}y'(t - \tau)$$

или
$$\left[\frac{T}{k}e^{\frac{t}{T}}y'(t)\right]' = -e^{\frac{\tau}{T}}\left[e^{\frac{t-\tau}{T}}y'(t-\tau)\right]. \tag{3.39}$$
Из (3.39) следует, что функция
$$v(t) = \frac{T}{k}\,e^{\frac{t}{T}}y'(t) \tag{3.40}$$
при $t > \tau$ удовлетворяет уравнению
$$v'(t) = -\frac{k}{T}\,e^{\frac{\tau}{T}}\,v(t-\tau) \tag{3.41}$$
и начальному условию
$$v(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau]. \tag{3.42}$$
Начальное условие для $v(t)$ получается из (3.38): $y'(t) = \dfrac{k}{T}\,e^{\frac{t}{T}}$ при $t \in [0, \tau]$. С учетом (3.40) для возрастания $y(t)$ при $t \geq \tau$ (при $t \in [0, \tau]$ $y(t)$ возрастает, что следует из (3.38)) достаточно доказать, что $v(t) > 0$ при $t \geq \tau$, а для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что для всех $n \geq 1$
$$v(n\tau) > 0, \tag{3.43}$$
ибо, если решение $v(t)$ обращается в ноль (естественно, это может произойти только при некотором $t > \tau$), то оно становится отрицательным и остается таковым на промежутке длиной не меньше τ (см. (3.41)). Для $n = 1$ неравенство (3.43) выполнено. Докажем, что для всех $n \geq 1$
$$v((n+1)\tau) \geq (\sqrt{2}-1)v(n\tau), \tag{3.44}$$
тем самым соотношение (3.43) будет установлено. Доказательство (3.44) проведем по индукции. Найдем решение уравнения (3.41) на отрезке $[\tau, 2\tau]$. Для этого решим задачу Коши
$$v'(t) = -\frac{k}{T}\,e^{\frac{\tau}{T}}, \quad v(\tau) = 1.$$
Очевидно, что
$$v(t) = 1 - \frac{k}{T}\,e^{\frac{\tau}{T}}(t-\tau), \quad t \in [\tau, 2\tau]$$
и, следовательно,
$$v(2\tau) = 1 - \frac{k}{T}\,\tau e^{\frac{\tau}{T}}. \tag{3.45}$$

Покажем, что
$$1-\frac{k}{T}\tau e^{\frac{\tau}{T}}\geq\sqrt{2}-1. \qquad (3.46)$$
Неравенство (3.46) равносильно неравенству
$$e^{-\frac{\tau}{T}}\geq\frac{k}{2-\sqrt{2}}\frac{\tau}{T}. \qquad (3.47)$$

Докажем, что неравенство (3.47) выполнено при $\tau\in[0,\tau^*]$, где τ^* определяется формулой (3.36).

Так как $e^{-\frac{\tau}{T}}\geq 1-\dfrac{\tau}{T}$ (неравенство Бернулли), то достаточно доказать, что
$$1-\frac{\tau}{T}\geq\frac{k}{2-\sqrt{2}}\frac{\tau}{T}\quad\text{при}\quad\tau\in[0,\tau^*]. \qquad (3.48)$$
С учетом (3.36) имеем:

$$1-\frac{\tau^*}{T}=1-\frac{1}{1+k\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}}=\frac{k\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}}{1+k\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}}=\frac{k(\sqrt{2}+1)^2}{2+k(\sqrt{2}+1)^2}, \qquad (3.49)$$

а также
$$\frac{k}{2-\sqrt{2}}\frac{\tau^*}{T}=\frac{k}{2-\sqrt{2}}\ \frac{1}{1+k\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}}=$$
$$=\frac{k(2+\sqrt{2})}{2+k(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}\,\frac{k(\sqrt{2}+1)}{2+k(\sqrt{2}+1)^2}. \qquad (3.50)$$

Соотношения (3.49) и (3.50) показывают, что неравенство (3.48) выполнено при $\tau=\tau^*$, а, следовательно, и при всех $\tau\in[0,\tau^*]$. Таким образом, справедливость (3.46) установлена, а значит, с учетом (3.42) и (3.45) неравенство (3.44) для $n=1$ доказано.

Предположим теперь, что неравенство (3.44) выполнено для всех $n\in\{1,2,...,n\}$ и докажем его справедливость для $n+1$. Из уравнения (3.41) получаем:

$$v((n+2)\tau)=v((n+1)\tau)-\frac{k}{T}e^{\frac{\tau}{T}}\int\limits_{(n+1)\tau}^{(n+2)\tau}v(t-\tau)dt. \qquad (3.51)$$

Оценим сверху интеграл (см. рис. 3.2)

$$J = \int\limits_{(n+1)\tau}^{(n+2)\tau} v(t-\tau)dt.$$

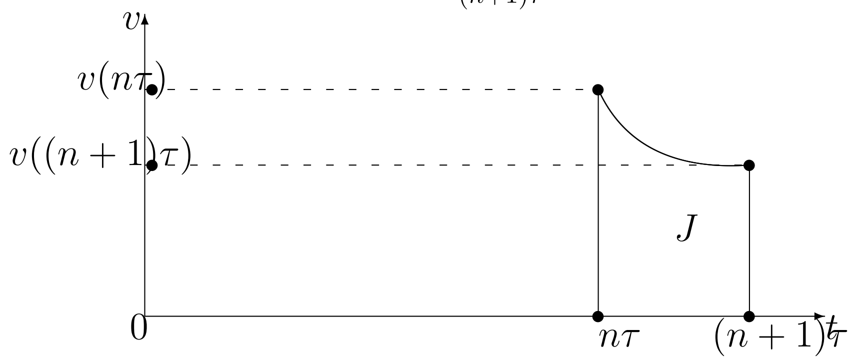

Рис. 3.2

В силу индукционного предположения $v(n\tau) \le \dfrac{v((n+1)\tau)}{\sqrt{2}-1}$, а функция $v(t)$ на отрезке $[n\tau,(n+1)\tau]$ является вогнутой, так как

$$v''(t) = -\frac{k}{T}\,e^{\frac{\tau}{T}}v'(t-\tau) = \left(\frac{k}{T}\,e^{\frac{\tau}{T}}\right)^2 v(t-2\tau) > 0.$$

Следовательно, (см. рис. 3.2),

$$J \le \frac{\tau}{2}[v(n\tau)+v((n+1)\tau)] \le \frac{\tau}{2}\left(\frac{v((n+1)\tau)}{\sqrt{2}-1} + v((n+1)\tau)\right] =$$

$$= \tau\,\frac{v((n+1)\tau)}{2-\sqrt{2}}.$$

Из (3.51) с учетом полученной оценки интеграла J находим:

$$v((n+2)\tau) \ge v((n+1)\tau) - \frac{k}{T}\,e^{\frac{\tau}{T}}\,\tau\,\frac{v((n+1)\tau)}{2-\sqrt{2}} =$$

$$= v((n+1)\tau)\left(1-\frac{k}{T}\,\tau e^{\frac{\tau}{T}}\,\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right).$$

Покажем, что

$$1-\frac{k}{T}\,\tau e^{\frac{\tau}{T}}\,\frac{1}{2-\sqrt{2}} \ge \sqrt{2}-1 \quad \text{при} \quad \tau\in[0,\tau^*]. \qquad (3.52)$$

Тем самым неравенство (3.44) будем доказано для $n \in \{n+1\}$, что и завершит доказательство теоремы. Неравенство (3.52) равносильно неравенству

$$\frac{k}{T}\,\tau e^{\frac{\tau}{T}} \le (2-\sqrt{2})^2$$

или
$$e^{-\frac{\tau}{T}} \geq \frac{k}{(2-\sqrt{2})^2}\,\frac{\tau}{T}. \tag{3.53}$$
Так как $e^{-u} \geq 1-u$, то неравенство (3.53) следует из неравенства
$$1-\frac{\tau}{T} \geq \frac{k}{(2-\sqrt{2})^2}\,\frac{\tau}{T}, \tag{3.54}$$
которое равносильно неравенству
$$1 \geq \frac{\tau}{T}\left[1+\frac{k}{(2-\sqrt{2})^2}\right]. \tag{3.55}$$
Неравенство (3.55) выполняется при $\tau = \tau^*$:
$$\frac{\tau^*}{T}\left[1+\frac{k}{(2-\sqrt{2})^2}\right] = \frac{1}{1+k\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}}\left[1+\frac{k}{(2-\sqrt{2})^2}\right] =$$
$$= \frac{(2-\sqrt{2})^2+k}{(2-\sqrt{2})^2+k\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2(2-\sqrt{2})^2}{2}} = 1.$$
Итак, неравенство (3.54) выполняется при $\tau = \tau^*$, а, следовательно, оно справедливо при всех $\tau \in [0, \tau^*]$, и теорема доказана.

Теорема 3.6. *Решение $y(t)$ задачи* (3.34), (3.35) *ограничено сверху при $\tau \in [0, \tau^*]$.*

Доказательство. Перепишем уравнение (3.34) в виде
$$y'(t) = \frac{k}{T} - \frac{k}{T}\,y(t-\tau) - \frac{1}{T}\,y(t). \tag{3.56}$$
Из (3.56) с учетом возрастания, а следовательно, неотрицательности рассматриваемого решения получаем, что оно удовлетворяет при всех $t \in [0, +\infty)$ неравенству
$$y'(t) \leq \frac{k}{T} - \frac{1}{T}\,y(t).$$
Следовательно,
$$y(t) \leq z(t), \tag{3.57}$$
где $z(t)$ – решение уравнения
$$z'(t) = \frac{k}{T} - \frac{1}{T}\,z(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $z(0) = y(0) = 0$. Это решение имеет вид (см. (3.38))

$$z(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \tag{3.58}$$

Из (3.57) и (3.58) получаем, что

$$y(t) \le k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \le k, \quad t \in [0, +\infty). \tag{3.59}$$

Теорема доказана.

Замечание 3.4. В ходе доказательства была получена оценка сверху (3.59) для решения $y(t)$ задачи (3.34), (3.35).

Теорема 3.7. *Решение* $y(t)$ *задачи* (3.34), (3.35) *удовлетворяет предельному соотношению*

$$y(t) \to \frac{k}{k+1} \quad \textit{при} \quad t \to +\infty. \tag{3.60}$$

Доказательство. Существование предела следует из возрастания и ограниченности сверху $y(t)$. Обозначим $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = c$. Очевидно, что $y'(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Перейдем в уравнении (3.34) к пределу при $t \to +\infty$. Получим $0 + c = k(1 - c)$, откуда следует, что $c = \dfrac{k}{k+1}$. Теорема доказана.

Следствие 3.2. Для строго возрастающего решения $y(t)$ задачи (3.34), (3.35) оценка сверху (3.59) может быть улучшена:

$$y(t) < \frac{k}{k+1}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Получим еще некоторые дополнительные оценки сверху и снизу для рассматриваемого решения $y(t)$ задачи (3.34), (3.35).

Лемма 3.1. *Решение* $y(t)$ *задачи* (3.34), (3.35) *при всех* $t \ge 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$y(t) \le \frac{k}{k+1}\left(1 - e^{-\frac{k+1}{T}t}\right) + \frac{k}{T}\tau e^{\frac{\tau}{T}}\left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{k+1}{T}t}\right). \tag{3.61}$$

Доказательство. Как следует из (3.38),

$$y'(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \in [0, \tau]. \tag{3.62}$$

Формулу (3.40) перепишем в виде

$$y'(t) = \frac{k}{T} v(t) e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq \tau. \tag{3.63}$$

При доказательстве теоремы 3.5 было установлено, что $v(t) > 0$ при $t \geq 0$. Следовательно, с учетом (3.41) производная $v'(t)$ отрицательна при $t \geq \tau$, т. е. функция $v(t)$ убывает на промежутке $[\tau, +\infty)$. Поскольку $v(t) = 1$ при $t \in [0, \tau]$, справедливо неравенство

$$v(t) \leq 1 \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Поэтому при $t \geq \tau$

$$y'(t) \leq \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \tag{3.64}$$

Теперь, учитывая (3.62), можем утверждать, что неравенство (3.64) справедливо для всех $t \geq 0$.

По теореме о среднем

$$y(t) - y(t - \tau) = y'(\theta)\tau, \quad \theta \in [t - \tau, t]. \tag{3.65}$$

Учитывая (3.64) и очевидные неравенства

$$\theta \geq t - \tau, \quad -\theta \leq -(t - \tau),$$

получаем:

$$y(t) - y(t - \tau) \leq \frac{k}{T} \tau e^{-\frac{\theta}{T}} \leq \frac{k}{T} \tau e^{-\frac{t-\tau}{T}}.$$

Отсюда следует, что при всех $t \geq 0$

$$-y(t - \tau) \leq \frac{k}{T} \tau e^{-\frac{t-\tau}{T}} - y(t). \tag{3.66}$$

Из (3.56) и (3.66) следует, что при $t \geq 0$

$$y'(t) \leq \frac{k}{T} \left(1 + \frac{k}{T} \tau e^{-\frac{t-\tau}{T}}\right) - \frac{k+1}{T} y(t).$$

Следовательно, $y(t) \leq z(t)$, где $z(t)$ – решение уравнения

$$z'(t) = \frac{k}{T} \left(1 + \frac{k}{T} \tau e^{-\frac{t-\tau}{T}}\right) - \frac{k+1}{T} z(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $z(0) = y(0) = 0$. Это решение имеет вид

$$z(t) = \frac{k}{k+1}\left(1 - e^{-\frac{k+1}{T}t}\right) + \frac{k}{T}\tau e^{\frac{\tau}{T}}\left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{k+1}{T}t}\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Решение* $y(t)$ *задачи* (3.34), (3.35) *при всех* $t \geq 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$y(t) \geq \frac{k}{k+1}\left[1 - e^{-\frac{(k+1)t}{\left(1-\frac{k}{T}\tau\right)T}}\right]. \tag{3.67}$$

Доказательство. Из (3.62) и (3.63) следует, что $y'(t)$ – убывающая функция. Следовательно, из (3.65) получаем:

$$y(t) - y(t-\tau) \geq y'(t)\tau$$

или

$$-y(t-\tau) \geq y'(t)\tau - y(t). \tag{3.68}$$

Из (3.56) и (3.68) следует, что при всех $t \geq 0$

$$y'(t) \geq \frac{k}{T} + \frac{k}{T}\left[y'(t)\tau - y(t)\right] - \frac{1}{T}y(t).$$

Отсюда

$$y'(t)\left(1 - \frac{k}{T}\tau\right) \geq \frac{k}{T} - \frac{k+1}{T}y(t)$$

или

$$y'(t) \geq \frac{k}{\left(1 - \frac{k}{T}\tau\right)T} - \frac{k+1}{\left(1 - \frac{k}{T}\tau\right)T}y(t).$$

Следовательно, $y(t) \geq z(t)$, где $z(t)$ – решение уравнения

$$z'(t) = \frac{k}{\left(1 - \frac{k}{T}\tau\right)T} - \frac{k+1}{\left(1 - \frac{k}{T}\tau\right)T}z(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $z(0) = y(0) = 0$. Это решение имеет вид

$$z(t) = \frac{k}{k+1}\left(1 - e^{-\frac{(k+1)t}{\left(1-\frac{k}{T}\tau\right)T}}\right).$$

Лемма доказана.

Замечание 3.5. Оценки (3.61) и (3.67) справедливы для $\tau \in [0, \tau^*]$, где τ^* определяется в (3.36). При этом для величины $1 - \dfrac{k}{T}\tau$, используемой в (3.67), справедливо неравенство

$$0 < 1 - \frac{k}{T}\tau < 1.$$

Из полученных оценок следует, что решение $y(t)$ задачи (3.34), (3.35) можно заключить в экспоненциально сужающуюся при $t \to +\infty$ полосу, стремящуюся к значению $\dfrac{k}{k+1}$, что, разумеется, согласуется с условием (3.60).

Обратимся теперь к уравнению (3.28). Изучим поведение решения $u(t)$ при $p > 0$ начальной задачи (3.30). Интегрируя (3.28) на отрезке $[0, \tau]$, получаем

$$u(t) = \frac{kp}{T}\int\limits_0^t x(\theta) e^{\frac{\theta - t}{T}}\, d\theta, \quad t \in [0, \tau]. \tag{3.69}$$

Рассмотрим функцию

$$z(t) = e^{\frac{t}{T}} w(t), \tag{3.70}$$

где

$$w(t) = y(t) - \frac{1}{p}u(t), \tag{3.71}$$

$y(t)$ – решение задачи (3.34), (3.35). Учитывая, что при $t \geq \tau$ уравнение (3.28) принимает вид (3.32), а также то, что при $t \in [0, \tau]$ функции $u(t)$ и $y(t)$ имеют вид (3.69) и (3.38) соответственно, можно показать, что при $t \geq \tau$ функция $z(t)$ является решением уравнения

$$z'(t) = -Az(t - \tau), \quad A = \frac{k}{T} e^{\frac{\tau}{T}}, \tag{3.72}$$

удовлетворяющим начальному условию

$$z(t) = k\left(e^{\frac{t}{T}} - 1\right) - \frac{k}{T}\int\limits_0^t x(\theta) e^{\frac{\theta}{T}}\, d\theta, \quad t \in [0, \tau]. \tag{3.73}$$

Будем считать, что $z(\tau) > 0$ (из (3.73) следует, что $z(\tau) \geq 0$, при этом равенство $z(\tau) = 0$ означает, что $u(t)$ является решением задачи (3.32), (3.30), которая уже изучена, так как заменой (3.33) сводится к задаче (3.34), (3.35)).

Теорема 3.8. *Если $\tau \in [0, \tau^*]$, то функция $z(t)$ является невозрастающей и положительной при $t \geq \tau$ (τ^* определяется формулой* (3.36)).

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.5 было установлено, что при $\tau \in [0, \tau^*]$ справедливо неравенство

$$A\tau \leq \left(2 - \sqrt{2}\right)^2. \tag{3.74}$$

Из (3.73) следует, что $z(t)$ не убывает при $t \in [0, \tau]$. Поэтому

$$z(2\tau) = z(\tau) - A \int\limits_{\tau}^{2\tau} z(t-\tau)dt > z(\tau) - A\tau z(\tau) =$$

$$= z(\tau)(1 - A\tau) > 0. \tag{3.75}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $z(n\tau) > 0$ для всех натуральных $n \geq 2$, ибо если решение $z(t)$ уравнения (3.72) обращается в нуль при $t = t_1$, причем $z(t) > 0$ при $t \in [\tau, t_1)$, то оно становится отрицательным при $t > t_1$ и остается таковым на промежутке длиной не меньше τ. Мы докажем, что при $n \geq 2$

$$z((n+1)\tau) > \left(\sqrt{2} - 1\right) z(n\tau). \tag{3.76}$$

Учитывая (3.75) и то, что $z(t) \leq z(\tau)$ при $t \in [\tau, 2\tau]$ ($z'(t) \leq 0$ при $t \in [\tau, 2\tau]$), получаем:

$$z(3\tau) = z(2\tau) - A \int\limits_{2\tau}^{3\tau} z(t-\tau)dt > z(2\tau) - A\tau z(\tau) >$$

$$> z(2\tau) - z(2\tau)\frac{A\tau}{1 - A\tau} = \frac{1 - 2A\tau}{1 - A\tau} z(2\tau).$$

Из (3.74) следует, что $\dfrac{1 - 2A\tau}{1 - A\tau} \geq \sqrt{2} - 1$. Таким образом, неравенство (3.76) выполняется при $n = 2$. Предполагая (3.76) выполненным при всех $n \in \{2, 3, ..., n\}$, докажем его справедливость для $n + 1$. Из (3.72) находим:

$$z((n+2)\tau) = z((n+1)\tau) - A \int\limits_{(n+1)\tau}^{(n+2)\tau} z(t-\tau)dt. \tag{3.77}$$

Из индукционного предположения и вида уравнения (3.72) следует, что подынтегральная функция в (3.77) положительна и вогнута ($z''(t) > 0$ при $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$). Следовательно,

$$z((n+2)\tau) > z((n+1)\tau) - \frac{A\tau}{2}[z(n\tau) + z((n+1)\tau)] >$$

$$> z((n+1)\tau) - \frac{A\tau}{2}\left[\frac{z((n+1)\tau)}{\sqrt{2}-1} + z((n+1)\tau)\right] =$$

$$= z((n+1)\tau)\left(1 - \frac{A\tau}{2-\sqrt{2}}\right) \geq z((n+1)\tau)\left[1 - \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2-\sqrt{2}}\right] =$$

$$= z((n+1)\tau)(\sqrt{2}-1).$$

Теорема доказана.

Следствие 3.3 При $\tau \in [0, \tau^*]$ решение $u(t)$ задачи (3.28), (3.30) является на полуоси $[\tau, +\infty)$ возрастающей функцией, для которой справедлива оценка

$$p\left(y(t) - z_0 e^{-\frac{t}{T}}\right) \leq u(t) \leq py(t), \tag{3.78}$$

где $y(t)$ решение задачи (3.34), (3.35), а $z_0 = z(\tau)$, функция $z(t)$ определена формулой (3.73).

Доказательство. Из теоремы следует, что функция $w(t) = z(t)e^{-\frac{t}{T}}$ является убывающей при $t \geq \tau$. Обозначим $z_0 = \max\limits_{[0,\tau]} z(t) = z(\tau)$. Тогда

$$0 < w(t) \leq z_0 e^{-\frac{t}{T}},$$

т. е. при $\tau \in [0, \tau^*]$ для решения $u(t)$ задачи (3.28), (3.30) с учетом (3.71) получается оценка (3.78), справедливая при $t \geq \tau$.

Поскольку $u(t) = p(y(t) - w(t))$, функция $u(t)$ возрастает при $t \geq \tau$ как сумма возрастающих функций. Следствие доказано.

Из теоремы 3.7 и оценки (3.78) следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \frac{pk}{k+1}.$$

Теорема 3.9. *При* $\tau \in [0, \tau^*]$ *уравнение* (3.28) *глобально параметрически идентифицируемо по наблюдению решения* $u(t, p)$ *начальной задачи* (3.30) *на промежутке* $(\tau, +\infty)$.

Справедливость теоремы следует из выполнения условия

$$u(t,1) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in (\tau; +\infty)$$

(см. условие (3.31)),так как $u(t,p)$ – возрастающая функция на $[\tau; +\infty)$ при любом $p > 0$ (следствие 3.3) и $u(\tau, 1) \geq 0$.

Замечание 3.6. При $\tau \in [0, \tau^*]$ уравнение (3.32) также глобально параметрически идентифицируемо на промежутке $(\tau, +\infty)$, так как является частным случаем уравнения (3.28).

Замечание 3.7. Как следует из введенных выше определений, глобальная идентифицируемость означает, что по наблюденному в произвольный момент $t > \tau$ решению $u(t)$ соответствующее значение параметра p в уравнении (3.28) (либо (3.32)) определяется однозначно. С учетом полученных выше оценок (3.61), (3.67) и (3.78) можно получить оценку идентифицируемого параметра p.

Обозначим правую часть неравенства (3.61) через $f(t)$, а неравенства (3.67) – через $g(t)$. Тогда из (3.78) следует, что

$$\frac{u(t)}{y(t)} \leq p \leq \frac{u(t)}{y(t) - z_0 e^{-\frac{t}{T}}},$$

а отсюда с учетом (3.61) и (3.67) получаем

$$\frac{u(t)}{f(t)} \leq p \leq \frac{u(t)}{g(t) - z_0 e^{-\frac{t}{T}}}. \tag{3.79}$$

После подстановки в (3.79) явных выражений функций $f(t)$, $g(t)$ и значения $z_0 = z(\tau)$, вычисляемого по формуле (3.73), эта оценка принимает вид

$$\frac{u(t)}{\frac{k}{k+1}\left(1 - e^{-\frac{k+1}{T}t}\right) + \frac{k}{T}\tau e^{\frac{\tau}{T}}\left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{k+1}{T}t}\right)} \leq p \leq$$

$$\leq \frac{u(t)}{\frac{k}{k+1}\left[1 - e^{-\frac{(k+1)t}{T-k\tau}}\right] - k\left(e^{\frac{\tau}{T}} - 1\right)e^{-\frac{t}{T}} + \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}\int\limits_0^\tau x(\theta)e^{\frac{\theta}{T}}d\theta}.$$

В заключение покажем, что при больших значениях запаздывания τ и при дополнительном условии $k > 1$ свойство глобальной параметрической идентифицируемости задачи (3.32), (3.30) нарушается.

Теорема 3.10. *При* $\tau \geq \tau^{**}$, *где*

$$\tau^{**} = \frac{4T}{k-1}, \tag{3.80}$$

$y(2\tau) < 0$, $y(t)$ – *решение задачи* (3.34), (3.35).

Доказательство. По формуле (3.37) решение $y(t)$ задачи (3.34), (3.35) на отрезке $[\tau, 2\tau]$ имеет вид

$$y(t) = ke^{-\frac{t}{T}}\left(e^{\frac{t}{T}} - 1\right) - k^2 e^{\frac{\tau - t}{T}}\left(e^{\frac{t-\tau}{T}} - 1 - \frac{t-\tau}{T}\right).$$

Отсюда

$$y(2\tau) = k - ke^{-\frac{2\tau}{T}} - k^2 + k^2 e^{-\frac{\tau}{T}}\left(1 + \frac{\tau}{T}\right).$$

Неравенство $y(2\tau) < 0$ означает, что

$$1 - e^{-\frac{2\tau}{T}} - k + ke^{-\frac{\tau}{T}}\left(1 + \frac{\tau}{T}\right) < 0$$

или

$$\frac{\tau}{T} < \frac{k-1}{k}\, e^{\frac{\tau}{T}} + \frac{1}{k}\, e^{-\frac{\tau}{T}} - 1. \tag{3.81}$$

Обозначим

$$f(\tau) = \frac{k-1}{k}\, e^{\frac{\tau}{T}} + \frac{1}{k}\, e^{-\frac{\tau}{T}} - 1.$$

При $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$f(\tau) > \frac{k-1}{k}\left[1 + \frac{\tau}{T} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{T}\right)^2\right] + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) - 1 = g(\tau). \tag{3.82}$$

Уравнение $\dfrac{\tau}{T} = g(\tau)$ равносильно уравнению

$$\frac{k-1}{2k}\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 - \frac{2}{k}\,\frac{\tau}{T} = 0,$$

единственным положительным решением которого служит τ^{**}. Пусть $h(\tau) = g(\tau) - \dfrac{\tau}{T}$. При $\tau \geq \tau^{**}$

$$h'(\tau) = \frac{k-1}{k}\left(\frac{1}{T} + \frac{\tau}{T^2}\right) - \frac{1}{kT} - \frac{1}{T} = \frac{1}{kT}\left(\frac{k-1}{T}\tau - 2\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{kT}(4-2) = \frac{2}{kT} > 0.$$

Отсюда следует, что при $\tau > \tau^{**}$ $h(\tau) > h(\tau^{**}) = 0$, т. е.

$$g(\tau) > \frac{\tau}{T}. \tag{3.83}$$

Из (3.82) и (3.83) следует справедливость неравенства (3.81). Теорема доказана.

Теорема 3.11. *При $\tau \geq \tau^{**}$ и $k > 1$ задача* (3.32), (3.30) *не является глобально параметрически идентифицируемой на промежутке* $(\tau, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $u(t, p_1)$ и $u(t, p_0)$ – решения задачи (3.32), (3.30), соответствующие значениям параметра p_1 и p_0. Пусть $p_1 > p_0$. Обозначим

$$u(t) = u(t, p_1) - u(t, p_0).$$

Легко видеть, что функция $u(t)$ является решением задачи (3.32), (3.30), соответствующим значению параметра $p = p_1 - p_0 > 0$. В результате замены (3.33) получаем решение $y(t)$ задачи (3.34), (3.35). По теореме 3.10 $y(2\tau) < 0$, в то время, как $y(\tau) > 0$. Это же относится и к решению $u(t)$. Следовательно, хотя бы в одной точке $t \in (\tau, 2\tau)$ $u(t) = 0$, т. е. $u(t, p_1) = u(t, p_0)$. Случай $p_0 > p_1$ рассматривается аналогично и приводит к тому же результату. Полученное равенство доказывает теорему.

Пусть теперь в рассматриваемой нами системе управления (рис. 3.1) передаточная функция $W(s) = \dfrac{k}{Ts+1}$ заменяется на функцию $W(s) = \dfrac{k}{s}$. Покажем, что в этом случае система сохраняет свойство глобальной параметрической идентифицируемости при соответствующем ограничении на величину запаздывания τ. Система теперь описывается дифференциальным уравнением вида

$$u'(t) = kpx(t) - ku(t - \tau). \tag{3.84}$$

Предполагается, что функция $x(t)$ по-прежнему удовлетворяет условию (3.29), а начальной задачей для уравнения (3.84) служит (3.30). Изучение этого уравнения мы начнем со случая, когда в условии (3.29) $t_0 = 0$ ($x(t) = \eta(t)$). При этом уравнение (3.84) приобретает вид

$$u'(t) = kp - ku(t - \tau). \tag{3.85}$$

Замена (3.33) преобразует уравнение (3.85) в уравнение

$$y'(t) = k - ky(t - \tau) \tag{3.86}$$

с начальной задачей (3.35).

Теорема 3.12. *Решение $y(t)$ уравнения (3.86), удовлетворяющее начальному условию (3.35), является возрастающим на полуоси $[0,+\infty)$, если $\tau \in [0, \tau^*]$, где*

$$\tau^* = \frac{6-4\sqrt{2}}{k}. \tag{3.87}$$

Доказательство. При $\tau = 0$ уравнение (3.86) принимает вид

$$y'(t) = k - ky(t), \quad y(0) = 0,$$

а его решение задается формулой

$$y(t) = 1 - e^{-kt}$$

и, очевидно, возрастает при $t \in [0, +\infty)$, причем $y(t) \to 1$ при $t \to +\infty$.

Пусть теперь в уравнении (3.86) $\tau > 0$. Нахождение решения $y(t)$ на отрезке $[0, \tau]$ сводится к решению задачи Коши

$$y'(t) = k, \quad y(0) = 0 \tag{3.88}$$

и, следовательно, это решение равно

$$y(t) = kt, \quad t \in [0, \tau].$$

Ясно, что $y(t)$ возрастает на отрезке $[0, \tau]$, причем $y(\tau) = k\tau$.

Рассмотрим решение $y(t)$ при $t > \tau$. Дифференцируя (3.86), находим

$$y''(t) = -ky'(t-\tau).$$

Обозначим $v(t) = y'(t)$. Функция $v(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$v'(t) = -kv(t-\tau), \tag{3.89}$$

удовлетворяющим начальному условию

$$v(t) = k, \quad t \in [0, \tau]. \tag{3.90}$$

Докажем, что

$$v(t) > 0 \quad \text{при} \quad t > \tau. \tag{3.91}$$

Для выполнения (3.91) достаточно, чтобы при всех $n \geq 1$

$$v(n\tau) > 0. \tag{3.92}$$

Мы докажем, что для всех $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$v((n+1)\tau) \geq (\sqrt{2}-1)v(n\tau), \tag{3.93}$$

тем самым справедливость (3.92) будет установлена. На отрезке $[\tau, 2\tau]$

$$v(t) = v(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} v'(\theta)d\theta = k - k\int\limits_{\tau}^{t} kd\theta = k(1-k(t-\tau)) =$$
$$= v(\tau)(1-k(t-\tau)).$$

Следовательно,

$$v(2\tau) = v(\tau)(1-k\tau) \geq v(\tau)(1-k\tau^*) =$$
$$= v(\tau)(1-6+4\sqrt{2}) = v(\tau)(4\sqrt{2}-5) =$$
$$= v(\tau)(\sqrt{2}-1+3\sqrt{2}-4) > v(\tau)(\sqrt{2}-1)$$

и неравенство (3.93) для $n=1$ доказано. Пусть неравенство (3.93) справедливо для всех $n = 1, 2, ..., k$. Докажем его справедливость для $n = k+1$. Из уравнения (3.89) получаем:

$$v((k+2)\tau) = v((k+1)\tau) - k\int\limits_{(k+1)\tau}^{(k+2)\tau} v(\theta-\tau)d\theta =$$

$$= v((k+1)\tau) - k\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} v(s)ds \geq v((k+1)\tau) - \frac{k\tau}{2}[v((k+1)\tau) + v(k\tau)] \geq$$

$$\geq v((k+1)\tau) - \frac{k\tau}{2}v((k+1)\tau)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) =$$

$$= v((k+1)\tau)\left(1-\frac{k\tau}{2-\sqrt{2}}\right) \geq v((k+1)\tau)\left(1-\frac{k\tau^*}{2-\sqrt{2}}\right) =$$

$$= v((k+1)\tau)\left(1-\frac{6-4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) = v((k+1)\tau)\frac{3\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}} =$$

$$= v((k+1)\tau)\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = v((k+1)\tau)(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) =$$
$$= v((k+1)\tau)(\sqrt{2}-1)$$

и неравенство (3.93), а следовательно, и неравенство (3.91) доказаны. Теперь возрастание решения $y(t)$ следует из (3.91). Теорема доказана.

Теорема 3.13. *Решение* $y(t)$ *задачи* (3.86), (3.35) *ограничено сверху при* $\tau \in [0, \tau^*]$.

Доказательство. Из уравнения (3.89) с учетом положительности $v(t)$ при всех t получаем, что функция $v(t)$ является убывающей при $t \geq \tau$, т. е. при $t \geq \tau$

$$v(t) \leq v(t-\tau)$$

и, следовательно,

$$v'(t) \leq -kv(t), \quad t \in [\tau, +\infty). \tag{3.94}$$

Поскольку $v(\tau) = k$, из неравенства (3.94) следует, что

$$v(t) \leq ke^{-k(t-\tau)}, \quad t \in [\tau, +\infty),$$

т. е.

$$y'(t) \leq ke^{-k(t-\tau)} \quad \text{при} \quad t \in [\tau, +\infty).$$

Отсюда следует, что при $t \geq \tau$

$$y(t) \leq y(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} ke^{-k(\theta-\tau)} d\theta = k\tau - e^{-k(\theta-\tau)}\Big|_{\tau}^{t} =$$

$$= k\tau - e^{-k(t-\tau)} + 1 \leq 1 + k\tau.$$

Теорема доказана.

Из теорем 3.12 и 3.13 следует существование предела

$$\lim_{t\to+\infty} y(t).$$

Поскольку со всей очевидностью $y'(t) = v(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, из уравнения (3.86) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1.$$

Учитывая замену (3.33), получаем, что для любого решения $u(t)$ задачи (3.85), (3.30) выполняется условие

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = p.$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения (3.84). Для этого уравнения можно повторить все рассуждения и выкладки, проведенные нами для уравнения (3.28) при доказательстве теоремы 3.8 и следствия 3.3 . Опуская соответствующее доказательство, сформулируем основное утверждение для уравнения (3.84).

Теорема 3.14. *При* $\tau \in [0, \tau^*]$, *где* τ^* *определяется в* (3.87), *уравнение* (3.84) *глобально параметрически идентифицируемо по наблюдению решения начальной задачи* (3.30) *на промежутке* $(\tau, +\infty)$.

Заметим, что это же относится и к уравнению (3.85), причем для уравнения (3.85) промежутком идентифицируемости служит вся полуось $(0, +\infty)$.

Полученные в теоремах 3.9 и 3.14 условия глобальной параметрической идентифицируемости уравнений (3.28) и (3.84) можно обобщить на случай произвольного линейного дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом следующего вида

$$au'(t) + bu(t) + cu(t-\tau) = \lambda x(t), \tag{3.95}$$

где $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$, $\lambda \geq 0$ – параметр, $x(t)$ удовлетворяет условию (3.29). Если $b = 0$, то полагая

$$\frac{c}{a} = k, \quad \frac{\lambda}{c} = p, \tag{3.96}$$

приводим уравнение (3.95) к уравнению (3.84). Если же $b > 0$, то полагая

$$\frac{a}{b} = T, \quad \frac{c}{b} = k, \quad \frac{\lambda}{c} = p, \tag{3.97}$$

приводим уравнение (3.95) к уравнению (3.28). Таким образом, для уравнения (3.95) справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.15. *Уравнение* (3.95) *глобально параметрически идентифицируемо по наблюдению решения начальной задачи* (3.30) *на промежутке* $(\tau, +\infty)$ *при* $\tau \in [0, \tau^*]$, *где*

$$\tau^* = \frac{a}{b + c\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}}. \tag{3.98}$$

Замечание 3.8. Значение τ^* из (3.98) получается из (3.36) с учетом (3.97). Если $b = 0$, то значение τ^* получаем из (3.87), заменяя k на $\dfrac{c}{a}$ с учетом (3.96). В результате получаем

$$\tau^* = \frac{a}{c}(6 - 4\sqrt{2}),$$

что, как нетрудно показать, совпадает со значением τ^* из (3.98) при $b = 0$.

4 Локальная параметрическая идентифицируемость нелинейных периодических систем

§1. Параметрическая идентифицируемость периодических систем дифференциальных уравнений при уточнении наблюдений

Математическое моделирование реальных процессов и явлений практически всегда сопряжено с идеализацией моделей, которые в абсолютном большинстве случаев “расходятся” с объективно существующими физическими системами. Вопросы соответствия математических моделей реальным системам (физическим, химическим, экономическим, биологическим и т. п.) входят в компетенцию соответствующих областей знания и рассматриваются в рамках соответствующих научных дисциплин. Чаще всего математическая модель рассматриваемой системы, постулируемая из априорных соображений, в силу неполного соответствия содержит неизвестные параметры, оценки которых находятся по результатам измерения наблюдаемых величин на этапе идентифицирующего эксперимента. При этом идеализация модели позволяет считать, что результаты измерений получаются при наилучших условиях эксперимента, т. е. являются точными значениями наблюдаемых величин. Именно в такой постановке чаще всего рассматривается задача параметрической идентифицируемости детерминированных математических моделей. Она вполне естественна, ибо в определенном смысле погрешности наблюдений “компенсируются” погрешностью самой модели. Можно обоснованно предположить, что если “неточная” математическая модель реальной системы является параметрически идентифицируемой по результатам точных наблюдений, то в результате идентифицирующего эксперимента и последующей идентификации параметров произойдет уточнение модели и полученная модель будет вполне адекватна реальной системе.

Вместе с тем можно предположить, что и в случае, когда наблюдения содержат незначительные погрешности, идентифицирующий эксперимент позволяет уточнять математическую модель, в частности, корректировать значения ее параметров, что, в свою очередь, приводит к улучшению условий эксперимента, т. е. к уменьшению ошибок в наблюдениях.

В этом параграфе будет рассмотрена задача параметрической идентифицируемости именно в такой постановке, т. е. в предположении, что наблюдение происходит с ошибкой, при этом в процессе наблюдения ошибка уменьшается с течением времени. Будем предполагать, что наблюдения производятся в дискретные моменты времени, отстоящие друг от друга на постоянную величину $\omega > 0$, совпадающую с периодом исследуемой нелинейной системы дифференциальных уравнений. Формализуем эту задачу.

Будем рассматривать периодические по времени системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, p), \quad x \in R^n, \tag{4.1}$$

где $p \in R^m$ – параметр. Будем считать, что при любом значении параметра p правая часть системы (4.1) имеет период $\omega > 0$ по t:

$$f(t + \omega, x, p) \equiv f(t, x, p)$$

и удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решений на всю временную ось.

Обозначим через $x(t, t_0, x_0, p)$ решение задачи Коши с начальными данными $x(t_0, t_0, x_0, p) = x_0$ для системы (4.1) и пусть T_p – преобразование Пуанкаре [64, с. 77] этой системы,т. е.

$$T_p(x) = x(\omega, 0, x, p).$$

Определение 4.1. *Для точки $y_0 \in R^n$ и для значения параметра $p \in R^m$ будем называть последовательностью наблюдений с начальным данным y_0 и с ошибками $\delta_k(p)$, $k \geq 1$, последовательность $y_k(p) \in R^n$, $k \geq 1$, для которой выполнены равенства*

$$\delta_k(p) = \left\| x\left(k\omega, (k-1)\omega, y_{k-1}(p), p\right) - y_k(p) \right\|, \quad k \geq 1.$$

Замечание 4.1. Числа $\delta_k(p)$ можно интерпретировать следующим образом: в момент времени $(k-1)\omega$ измеряющая аппаратура "настраивается"на точку $y_{k-1}(p)$, отслеживает решение $x(t, (k-1)\omega, y_{k-1}(p), p)$ на периоде $[(k-1)\omega, k\omega]$ и выдает его приближенное значение $y_k(p)$ в момент $k\omega$ с ошибкой $\delta_k(p)$.

Определение 4.2. *Будем говорить, что последовательность наблюдений $y_k(p)$, $k \geq 1$, с начальным данным y_0 и с ошибками $\delta_k(p)$ является последовательностью наблюдений с неограниченным уточнением (п.н.н.у.), если выполнено соотношение*

$$\delta_k(p) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Рассмотрим множества $V \subset R^n$, $P \subset R^m$. Дадим основное определение.

Определение 4.3. *Будем говорить, что система* (4.1) *параметрически идентифицируема на паре* (V, P) *по последовательнотям наблюдений с неограниченным уточнением, если для любых двух п.н.н.у.* $y_k(p_1)$, $y_k(p_2)$, $y_k(p_i) \in V$, $i = 1, 2$*;* $p_1, p_2 \in P$, $p_1 \neq p_2$*, найдется такое* $k_0 \in N$*, что при* $k \geq k_0$

$$y_k(p_1) \neq y_k(p_2).$$

Нашей основной задачей будет получение достаточных условий параметрической идентифицируемости системы (4.1) на паре (V, P) по п.н.н.у.

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения.

Будем предполагать, что вектор-функция $f(t, x, p)$ непрерывна по t, x при любом p вместе с матрицей Якоби

$$Y(t, x, p) = \frac{\partial f(t, x, p)}{\partial x}$$

и что $f(t, x, p)$, $Y(t, x, p)$ непрерывно зависят от p. При этих предположениях преобразование Пуанкаре $T_p(x)$ системы (4.1) является диффеоморфизмом класса C^1 при любом p и зависит от p непрерывно в C^1-топологии.

Будем использовать стандартные определения гиперболического множества и аттрактора диффеоморфизма (см., например, [65]). Для точки x из гиперболического множества будем обозначать через $W^s(x)$ ее устойчивое многообразие. Для аттрактора I диффеоморфизма F обозначим через $D(I)$ его область притяжения, т. е. множество

$$D(I) = \{x \colon d(F^k(x), I) \to 0 \text{ при } k \to \infty\}$$

(здесь $d(q, A)$ – расстояние от точки q до множества A). При $\varepsilon > 0$ будем обозначать через $N_\varepsilon(A)$ открытую ε-окрестность множества A.

В нашем дальнейшем исследовании основной интерес будут представлять гиперболические аттракторы диффеоморфизмов T_p (обзор теории гиперболических аттракторов содержится, например, в [65]).

Предположим, что при значении параметра $p = p_0$ диффеоморфизм T_{p_0} имеет гиперболический аттрактор I_{p_0}. Не умаляя общности, будем считать, что $p_0 = 0$, т. е. рассматриваем далее аттрактор I_0.

Из общих свойств аттракторов диффеоморфизмов следует [66], что существует такое открытое множество $V \subset R^n$, что

$$I_0 \subset V \subset \overline{V} \subset D(I_0), \quad T_0(\overline{V}) \subset V, \tag{4.2}$$

при этом

$$I_0 = \bigcap_{k \geq 0} T_0^k(\overline{V}).$$

Так как диффеоморфизмы T_p зависят от p непрерывно, найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $\|p\| < \varepsilon$ выполнено включение

$$T_p(\overline{V}) \subset V. \tag{4.3}$$

Поэтому (см. [65]) при $\|p\| < \varepsilon$ множество

$$I_p = \bigcap_{k \geq 0} T_p^k(\overline{V}) \tag{4.4}$$

является аттрактором для T_p, лежащим в силу (4.3) в V.

Для произвольных диффеоморфизмов введем одно дополнительное понятие, которое нам потребуется для формулировки основного результата.

Определение 4.4. *Будем говорить, что инвариантные множества K_1, K_2 диффеоморфизмов F_1, F_2 динамически положительно различимы, если для любых $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$ найдутся такие $\beta > 0$ и $l > 0$, что*

$$\left\|F_1^k(x_1) - F_2^k(x_2)\right\| \geq \beta \text{ при } k \geq l.$$

Корректность этого определения подтвердим следующим примером.

Предположим, что в системе (4.1) $p \in R^n$, а вектор-функции $f(t, x, p)$ задаются равенством

$$f(t, x, p) = f(t, x - p, 0),$$

т. е. рассмотрим семейство ω-периодических систем вида

$$\dot{x} = f(t, x - p, 0). \tag{4.5}$$

Через $x(t, 0, x_0, p)$ обозначим решение задачи Коши для системы (4.5) с начальными данными $x(0, 0, x_0, p) = x_0$, а через T_p – преобразование Пуанкаре этой системы.

Дифференцируя по t равенство

$$y(t) = x(t, 0, x_0, 0) + p,$$

находим

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t, 0, x_0, 0) = f(t, x(t, 0, x_0, 0), 0) = f(t, y(t) - p, 0). \tag{4.6}$$

Поскольку $y(0) = x_0 + p$, функция $y(t)$, как следует из (4.6), совпадает с решением $x(t, 0, x_0 + p, p)$ системы (4.5), т. е. при всех t

$$x(t, 0, x_0 + p, p) = x(t, 0, x_0, 0) + p.$$

В частности, при $t = \omega$ получаем

$$T_p(x_0 + p) = T(x_0) + p. \tag{4.7}$$

Рассмотрим гомеоморфизм h: $h(x) = x + p$. Ясно, что диффеоморфизмы T_p топологически сопряжены с диффеоморфизмом T_0 посредством этого гомеоморфизма, т. е. $T_p = h \circ T_0 \circ h^{-1}$. Действительно, если $y_0 = x_0 + p = h(x_0)$ $(x_0 = h^{-1}(y_0))$, то с учетом (4.7)

$$T_p(y_0) = T_0(x_0) + p = h(T_0(x_0)) = h \circ T_0 \circ h^{-1}(y_0).$$

Пусть K_0 – гиперболическое множество диффеоморфизма T_0. Из топологической сопряженности диффеоморфизмов следует, что множества $K_p = h(K_0)$ – гиперболические множества для T_p.

Из теоремы Перрона ([67], с. 109) вытекает, что существует число $\alpha > 0$ (зависящее от K_0), обладающее следующим свойством: если $x \in K_0$, $y \in R^n$ и

$$\|T_0^k(x) - T_0^k(y)\| < \alpha, \ k \geq 0,$$

то $y \in W^s(x)$ и поэтому

$$\|T_0^k(x) - T_0^k(y)\| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Ясно, что при любом p множество K_p обладает тем же свойством (с тем же $\alpha > 0$).

Лемма 4.1. *При $p_1 \neq p_2$, $\|p_i\| < \dfrac{\alpha}{3}$, $i = 1, 2$, гиперболические множества K_{p_1} и K_{p_2} диффеоморфизмов T_{p_1} и T_{p_2} динамически положительно различимы.*

Доказательство. Ясно, что для всех p, x и $k \geq 1$

$$T_p^k(x) = T_0^k(x - p) + p. \tag{4.8}$$

(Из (4.7) следует, что $T_p(x) = T_0(x - p) + p$. Но тогда $T_p^2(x) = T_p(T_p(x)) = T_0(T_p(x) - p) + p = T_0(T_0(x - p)) + p = T_0^2(x - p) + p$ и т. д.)

Рассмотрим множества K_{p_1} и K_{p_2}. Покажем, что в качестве числа β (см. определение 4.4) можно взять $\beta = \dfrac{1}{2}\|p_2 - p_1\|$. Предположим, что это не так. Тогда найдутся точки $x_1 \in K_{p_1}$ и $x_2 \in K_{p_2}$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} \left\|T^k_{p_1}(x_1) - T^k_{p_2}(x_2)\right\| < \beta. \qquad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что найдется такое l_0, что при $k \geq l_0$

$$\left\|T^k_{p_1}(x_1) - T^k_{p_2}(x_2)\right\| < \frac{1}{2}\|p_2 - p_1\| = \beta. \qquad (4.10)$$

Теперь с учетом (4.8) и (4.10) получаем, что при $k \geq l_0$

$$\left\|T^k_0(x_1 - p_1) - T^k_0(x_2 - p_2)\right\| = \left\|T^k_{p_1}(x_1) - p_1 - T^k_{p_2}(x_2) + p_2\right\| \leq$$

$$\leq \left\|T^k_{p_1}(x_1) - T^k_{p_2}(x_2)\right\| + \|p_2 - p_1\| < \frac{3}{2}\|p_2 - p_1\| \leq$$

$$\leq \frac{3}{2}\left(\|p_2\| + \|p_1\|\right) < \alpha. \qquad (4.11)$$

Учитывая, что из $x_1 \in K_{p_1}$ следует, что $(x_1 - p_1) \in K_0$, по следствию теоремы Перрона получаем, что

$$\left\|T^k_0(x_1 - p_1) - T^k_0(x_2 - p_2)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Из равенства в (4.11) теперь следует, что

$$\left\|T^k_{p_1}(x_1) - T^k_{p_2}(x_2)\right\| \to \|p_2 - p_1\| = 2\beta \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому найдется такое $l \geq l_0$, что при $k \geq l$

$$\left\|T^k_{p_1}(x_1) - T^k_{p_2}(x_2)\right\| > \beta.$$

Полученное неравенство противоречит неравенству (4.10). Лемма доказана.

Замечание 4.2. Доказательство леммы показывает, что в рассмотренном примере выполнено свойство более сильное, чем динамическая положительная различимость (число β зависит лишь от множеств K_{p_1}, K_{p_2}, а не от точек x_1, x_2).

Сформулируем, наконец, еще один необходимый для нас результат.

Лемма 4.2 [68]. *Пусть I – гиперболический аттрактор диффеоморфизма F, а множество V обладает свойством, аналогичным (4.2). Допустим, что для последовательности точек $x_k \in V$, $k \geq 0$, выполнено соотношение*

$$\|x_{k+1} - F(x_k)\| \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

Тогда существует такая точка $x \in V$, что

$$\|F^k(x) - x_k\| \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

Теперь можно сформулировать основной результат этого параграфа.

Теорема 4.1. *Предположим, что для семейства систем* (4.1)*:*

а) *множество I_0 – гиперболический аттрактор диффеоморфизма T_0;*

б) *для множества V выполнено* (4.2)*;*

в) *существует такая окрестность P_0 нуля в R^m, что для любых $p_1, p_2 \in P_0$ с $p_1 \neq p_2$ аттракторы I_{p_1}, I_{p_2}, определенные формулой* (4.4)*, динамически положительно различимы.*

Тогда существует такая окрестность P нуля в R^m, что система (4.1) *параметрически идентифицируема на паре (V, P) по п.н.н.у.*

Доказательство. Из известного свойства грубости гиперболического множества (см., например, [67]) следует, что гиперболическое множество I_0 диффеоморфизма T_0 обладает свойством: найдется такое число $\Delta > 0$, что если T_p – диффеоморфизм, отличающийся от T_0 меньше чем на Δ в C^1-метрике, а I_p – компактное инвариантное множество T_p, лежащее в $N_\Delta(I_0)$, то I_p – гиперболическое множество для T_p.

Фиксируем такое $\Delta > 0$. В силу определения множества V (см. (4.2)) и благодаря равномерности притяжения к аттрактору (см. [65]), найдется такое $k \in N$, что

$$T_0^k(\overline{V}) \subset N_\Delta(I_0),$$

но тогда при малых p (пусть, для определенности, при $\|p\| < \varepsilon_0$)

$$T_p^k(\overline{V}) \subset N_\Delta(I_0).$$

Отсюда с учетом (4.4) следует, что при $\|p\| < \min\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$ (ε введено нами для выполнения (4.3))

$$I_p \subset N_\Delta(I_0).$$

Следовательно, учитывая указанное выше свойство грубости гиперболического множества, можем утверждать, что при малых p аттракторы I_p диффеоморфизмов T_p – гиперболические.

Поэтому мы можем выбрать такую окрестность P нуля в R^m, что $P \subset P_0$ и для $p \in P$ аттракторы I_p – гиперболические. Пусть $p_1, p_2 \in P$ и $p_1 \neq p_2$.

Рассмотрим две произвольные п.н.н.у. $y_k(p_i) \in V$, $k \geq 0$, $i = 1,2$. Из соотношений

$$\|T_{p_i}\left(y_{k-1}(p_i)\right) - y_k(p_i)\| =$$
$$= \|x\left(k\omega, (k-1)\omega, y_{k-1}(p_i), p_i\right) - y_k(p_i)\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad i = 1,2,$$

в силу леммы 4.2 вытекает существование таких точек $x_i \in V$, $i = 1,2$, что

$$\left\|y_k(p_i) - T^k_{p_i}(x_i)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,\ i = 1,2. \tag{4.12}$$

Если I – аттрактор диффеоморфизма F, то он локально максимален, т.е. у него существует такая окрестность U, что

$$I = \bigcap_{k\in Z} F^k(U).$$

В [91] показано, что если для точки x и локально максимального гиперболического множества I диффеоморфизма F выполнено соотношение

$$d\left(F^k(x), I\right) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то существует такая точка $z \in I$, что

$$\left\|F^k(x) - F^k(z)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поскольку $d\left(T^k_{p_i}(x_i), I_{p_i}\right) \to 0$ при $k \to \infty$, найдутся такие точки $z_i \in I_{p_i}$, $i = 1,2$, что

$$\left\|T^k_{p_i}(x_i) - T^k_{p_i}(z_i)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{4.13}$$

Из (4.12) и (4.13) следует, что

$$\left\|y_k(p_i) - T^k_{p_i}(z_i)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,\ i = 1,2.$$

Так как аттракторы I_{p_1}, I_{p_2} динамически положительно различимы, существуют такие $\beta > 0$ и $l \in N$, что

$$\left\|T^k_{p_1}(z_1) - T^k_{p_2}(z_2)\right\| \geq \beta, \quad k \geq l.$$

Поэтому найдется такое k_0, что

$$\|y_k(p_1) - y_k(p_2)\| > 0, \quad k \geq k_0.$$

Теорема доказана.

§2. Локальная параметрическая идентифицируемость периодических систем по наблюдению их дискретизаций

В общем случае проблема параметрической идентифицируемости для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \tag{4.14}$$

где λ – параметр, состоит в выяснении возможности определения неизвестного параметра по результатам наблюдения решения некоторой начальной задачи.

Однако на практике точные решения нелинейной системы (4.14) в большинстве случаев неизвестны и для нахождения приближенных решений приходится применять те или иные численные методы. В этом случае возникает задача нахождения условий на характеристики применяемого численного метода (например, на его порядок) и на величину шага интегрирования, при которых возможно идентифицировать неизвестный параметр с предписанной точностью (в такой постановке задача идентифицируемости близка к одной из проблем, сформулированных в [70] (Preface, Question II)).

В этом параграфе предлагается решение сформулированной задачи для случая, когда система (4.14) ω-периодична по t и имеет гиперболически устойчивое ω-периодическое решение при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_0$.

Итак, будем рассматривать систему (4.14), где $x \in R^N$, $\lambda \in R^m$ и

$$f(t + \omega, x, \lambda) \equiv f(t, x, \lambda), \quad \omega > 0$$

для всех t, x, λ. Вектор-функция f предполагается непрерывной по всем аргументам и достаточно гладкой по x и λ (мы не будем указывать точные требования гладкости, поскольку они ясны из контекста).

Обозначим через $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ решение начальной задачи $x(t_0) = x_0$ для системы (4.14). Если решение $x(t, 0, x_0, \lambda)$ определено на отрезке $[0, \omega]$, то для точки x_0 преобразование Пуанкаре T_λ задается равенством $T_\lambda(x_0) = x(\omega, 0, x_0, \lambda)$.

Наше основное предположение заключается в следующем: при $\lambda = \lambda_0$ система (4.14) имеет ω-периодическое решение $\varphi_{\lambda_0}(t)$, которое является гиперболически устойчивым. Это означает, что если $p(\lambda_0) = \varphi_{\lambda_0}(0)$ – начальное значение периодического решения(т. е. $p(\lambda_0)$ – неподвижная точка преобразования Пуанкаре T_{λ_0}), то собственные числа μ_j матрицы Якоби $DT_{\lambda_0}(p(\lambda_0))$ удовлетворяют неравенствам

$$|\mu_j| < 1, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{4.15}$$

Хорошо известно, что в этом случае для λ, близких к λ_0, система (4.14) имеет ω-периодические решения $\varphi_\lambda(t)$, начальные значения которых $p(\lambda) = \varphi_\lambda(0)$ удовлетворяют условию

$$p(\lambda) \to p(\lambda_0) \quad \text{при} \quad \lambda \to \lambda_0.$$

Все эти решения также гиперболически устойчивы, т. е. собственные числа матриц Якоби $DT_\lambda(p(\lambda))$ удовлетворяют неравенствам (4.15), если величина $\|\lambda - \lambda_0\|$ достаточно мала.

Рассмотрим для системы (4.14) численный метод $\Theta_{\lambda,h}$ с шагом h по времени t. Будем предполагать, что этот метод имеет порядок q. Это означает, что одношаговая ошибка метода имеет следующую оценку

$$\|x(t_0 + h, t_0, x_0, \lambda) - \Theta_{\lambda,h}(t_0, x_0)\| \leq Ch^{q+1}. \tag{4.16}$$

Оценка (4.16) с фиксированной константой C справедлива для всех $h > 0$, начальных значений x_0 из некоторого компактного подмножества пространства R^N и λ, принадлежащих ограниченному подмножеству пространства R^m.

Зафиксируем натуральное число ν и пусть $h = \dfrac{\omega}{\nu}$. Процедура идентификации параметра λ основана на наблюдении векторов

$$\tau_\lambda(n, x_0) = \Theta^{n\nu h}_{\lambda,h}(0, x_0). \tag{4.17}$$

Эти векторы служат приближенными значениями итераций

$$T^n_\lambda(x_0) = x(n\omega, 0, x_0, \lambda)$$

преобразования Пуанкаре системы (4.14) для точки x_0.

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть существуют такие положительные числа a_0, A и l, что*

$$\|p(\lambda) - p(\lambda_0)\| \geq A\,\|\lambda - \lambda_0\|^l \tag{4.18}$$

для $\|\lambda - \lambda_0\| \leq a_0$. Пусть R – компактное подмножество области притяжения B_{λ_0} неподвижной точки $p(\lambda_0)$ преобразования Пуанкаре T_{λ_0}. Тогда существует такое число $a_1 > 0$, что система (4.14) локально идентифицируема по наблюдению векторов дискретизаций (4.17) в следующем смысле: для любого λ, $0 < \|\lambda - \lambda_0\| < a_1$, существуют такие числа h_0 и n_0, что если $h < h_0$ и $x, y \in R$, то для $n \geq n_0$

$$\tau_\lambda(n, x) \neq \tau_{\lambda_0}(n, y). \tag{4.19}$$

Замечание 4.3. Условие (4.18) выполняется, если, например,

$$p'(\lambda_0) = p''(\lambda_0) = ... = p^{(l-1)}(\lambda_0) = 0, \quad p^{(l)}(\lambda_0) \neq 0. \tag{4.20}$$

Для линейной неоднородной ω-периодической системы

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, \lambda) \tag{4.21}$$

в случае, когда соответствующая однородная система

$$\dot{x} = A(t)x \tag{4.22}$$

не имеет нетривиальных ω-периодических решений (т. е. имеет место так называемый нерезонансный случай), условие (4.20) равносильно следующему условию

$$y'(\lambda_0) = y''(\lambda_0) = ... = y^{(l-1)}(\lambda_0) = 0, \quad y^{(l)}(\lambda_0) \neq 0, \tag{4.23}$$

где

$$y^{(k)}(\lambda_0) = [E - X(\omega)]^{-1} X(\omega) \int\limits_0^\omega X^{-1}(t) \frac{\partial^k g}{\partial \lambda^k}(t, \lambda_0) dt,$$

$X(t)$ – нормированная ($X(0) = E$) фундаментальная матрица системы.

В свою очередь, нерезонансный случай для системы (4.22) имеет место, например, когда эта система асимптотически устойчива. В этом случае, как хорошо известно, неоднородная система (4.21) при любом λ имеет единственное ω-периодическое решение, являющееся гиперболически устойчивым в указанном выше смысле. Таким образом, асимптотическая устойчивость линейной однородной ω-периодической системы (4.22) в сочетании с условиями (4.23) обеспечивает выполнение всех условий теоремы 4.2 для системы (4.21). Это означает, что в задаче локальной параметрической идентифицируемости линейных неоднородных периодических систем (4.21) по их дискретизациям важную роль играет анализ асимптотической устойчивости таких систем.

Доказательство теоремы 4.2 . Зафиксируем компактное подмножество R области притяжения B_{λ_0} неподвижной точки $p(\lambda_0)$ диффеоморфизма T_{λ_0}. Из стандартных результатов теории устойчивости следует существование такого числа $a_2 > 0$, что множество R является подмножеством области притяжения B_λ неподвижной точки $p(\lambda)$ диффеоморфизма T_λ для любого λ, $\|\lambda - \lambda_0\| \leq a_2$.

Любая точка $p(\lambda)$ при λ, близких к λ_0, гиперболически устойчива, при этом

$$DT_\lambda(p(\lambda)) \to DT_{\lambda_0}(p(\lambda_0)) \quad \text{при} \quad \lambda \to \lambda_0.$$

Поэтому найдется число $a_3 \in (0, a_2)$ со следующим свойством: существуют такие числа $K \geq 1$ и $\mu \in (0,1)$, что для любого $x \in R$

$$\|T_\lambda^n(x) - p(\lambda)\| \leq K\mu^n \|x - p(\lambda)\|, \quad n \geq 0,$$

при всех λ, $\|\lambda - \lambda_0\| \leq a_3$.

Близкое утверждение было доказано в работе [71] для аттрактора более общей структуры, чем одна неподвижная точка.

Не умаляя общности, будем предполагать, что компактное множество R для некоторого $b > 0$ содержит b-окрестность любой точки $p(\lambda)$ при $\|\lambda - \lambda_0\| \leq a_3$.

Из стандартных результатов теории численных методов вытекает следующее утверждение: если S-ограниченное подмножество пространства R^N, погрешность численного метода $\Theta_{\lambda,h}$ удовлетворяет оценке (4.16), а точная траектория $\{T_\lambda^n(x_0)\}$ и ее приближенные значения $\{\tau_\lambda(n, x_0)\}$ содержатся в S для $0 \leq n \leq n^*$, то

$$\|\tau_\lambda(n, x_0) - T_\lambda^n(x_0)\| \leq C_0 L^n h^q \tag{4.24}$$

для $0 \leq n \leq n^*$, где L – постоянная Липшица диффеоморфизма T_λ на S.

Можно найти такие постоянные C_0, $h_1 > 0$ и $a_1 \leq \min\{a_0, a_3\}$, что если $h < h_1$, то оценка (4.24) справедлива для любой начальной точки $x_0 \in R$, любого λ, удовлетворяющего условию $\|\lambda - \lambda_0\| \leq a_1$, и любого $n \geq 0$ (см., например, [70, Chapter 7]). Будем предполагать, что $L \geq 1$ в оценке (4.24).

Зафиксируем теперь λ', удовлетворяющее условию $0 < \|\lambda' - \lambda_0\| < a_1$. Обозначим

$$\Delta = \frac{A\|\lambda' - \lambda_0\|^l}{4}.$$

Будем предполагать дополнительно, что число a_1 настолько мало, чтобы выполнялось неравенство $\Delta < b$ (напомним, что R содержит b-окрестность любой точки $p(\lambda)$ при $\|\lambda - \lambda_0\| \leq a_3$). Пусть

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{K}.$$

Найдем такое натуральное число n_1, что

$$K\mu^{n_1} < \frac{1}{2} \tag{4.25}$$

(заметим, что n_1 не зависит от Δ).

Возьмем произвольное λ, удовлетворяющее условию $\|\lambda - \lambda_0\| < a_1$ (заметим, что все получаемые ниже оценки для λ справедливы и для λ_0 и для λ').

Если $\|x - p(\lambda)\| < \Delta_1$, то

$$\|T_\lambda^n(x) - p(\lambda)\| = \|T_\lambda^n(x) - T_\lambda^n(p(\lambda))\| \leq K\mu^n \|x - p(\lambda)\| \leq K\Delta_1 = \Delta$$

для $n \geq 0$ (поскольку $\Delta_1 \leq \Delta < b$).

Укажем первое ограничение на величину h:

$$C_0 L^{n_1} h^q < \frac{\Delta_1}{2}. \tag{4.26}$$

Если точка ζ_0 удовлетворяет неравенству

$$\|\zeta_0 - p(\lambda)\| < \Delta_1,$$

то

$$\|\tau_\lambda(n, \zeta_0) - p(\lambda)\| \leq$$
$$\leq \|\tau_\lambda(n, \zeta_0) - T_\lambda^n(\zeta_0)\| + \|T_\lambda^n(\zeta_0) - p(\lambda)\| \leq C_0 L^n h^q + \Delta. \tag{4.27}$$

Если $0 \leq n \leq n_1$, то правая часть в неравенстве (4.27) не превышает 2Δ, и из (4.25) и (4.26) следует, что

$$\|\tau_\lambda(n_1, \zeta_0) - p(\lambda)\| < \Delta_1.$$

Таким образом, можно взять точку $\zeta_1 = \tau_\lambda(n_1, \zeta_0)$ и повторить наши рассуждения. Продолжая этот процесс, получаем, что

$$\|\tau_\lambda(n, \zeta_0) - p(\lambda)\| < 2\Delta, \quad n \geq 0. \tag{4.28}$$

Найдем такое положительное число r, что

$$\|z - p(\lambda)\| < r$$

для всех $z \in R$ и всех λ, удовлетворяющих условию $\|\lambda - \lambda_0\| < a_1$.

Найдем такое натуральное число n_0, что

$$K\mu^{n_0} r < \frac{\Delta_1}{2}. \tag{4.29}$$

Укажем второе ограничение на величину h:

$$C_0 L^{n_0} h^q < \frac{\Delta_1}{2}. \tag{4.30}$$

Возьмем произвольную точку $z \in R$. Из неравенств (4.29) и (4.30) следует, что

$$\|\tau_\lambda(n_0, z) - p(\lambda)\| \leq \|\tau_\lambda(n_0, z) - T_\lambda^{n_0}(z)\| + \|T_\lambda^{n_0}(z) - p(\lambda)\| < \Delta_1 \qquad (4.31)$$

если $\|\lambda - \lambda_0\| < a_1$.

Возьмем теперь $h < h_1$, предполагая, что h удовлетворяет неравенствам (4.26) и (4.30), и произвольные точки $x, y \in R$. Из (4.31) следует, что точки $x_0 = \tau_{\lambda_0}(n_0, x)$ и $y_0 = \tau_{\lambda'}(n_0, y)$ удовлетворяют неравенствам

$$\|x_0 - p(\lambda_0)\| < \Delta_1 \quad \text{и} \quad \|y_0 - p(\lambda')\| < \Delta_1.$$

Из неравенств (4.28) следует, что

$$\|\tau_{\lambda_0}(n, x_0) - p(\lambda_0)\| < 2\Delta$$

и

$$\|\tau_{\lambda'}(n, y_0) - p(\lambda')\| < 2\Delta$$

для $n \geq 0$. Теперь ясно, что

$$\|\tau_{\lambda_0}(n, x) - \tau_{\lambda'}(n, y)\| > \|p(\lambda_0) - p(\lambda')\| - 4\Delta > 0$$

для $n \geq n_0$, т. е. выполнено условие (4.19). Теорема доказана.

5 Локальная параметрическая идентифицируемость параболических уравнений по различным дискретизациям

§1. Локальная параметрическая идентифицируемость параболического уравнения по уточняющимся дискретным наблюдениям их решений

В этом параграфе мы рассмотрим задачу локальной параметрической идентифицируемости для полулинейных параболических уравнений. Следует отметить, что в большей части работ по идентификации систем с распределенными параметрами, моделируемых дифференциальными уравнениями в частных производных, предлагаются методы и алгоритмы восстановления входных сигналов по результатам приближенных измерений фазовых положений системы на конечном промежутке времени, близкие к методам решения обратных задач динамики (см., например, [72]–[74]). В обзорной статье [75] дается введение в проблематику таких задач, подробно описаны некоторые способы построения конечношаговых алгоритмов, основанные на сочетании методов теории позиционного управления и теории некорректных задач. В незначительной части имеющихся работ затрагиваются теоретические вопросы идентификации и, в частности, исследуется идентифицируемость рассматриваемых систем. При различных подходах к проблеме идентифицируемости общим в них остается наблюдение решения системы при всех значениях времени t из некоторого промежутка (это относится, прежде всего, к обратным задачам динамики), либо на всей полуоси $t > 0$. Отметим работу [76], в которой рассматривается задача восстановления коэффициентов линейного параболического уравнения по измерению его решения $u(t, x)$ при $t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, которое удовлетворяет начальному условию и краевым условиям Дирихле. Условия идентифицируемости формулируются через линейную независимость коэффициентов Фурье этого решения. В работе [77] наблюдается решение параболического уравнения при $t \geq 0$ и с дискретизацией по $x \in (0, 1)$. Условия идентифицируемости коэффициентов уравнения связаны с точными решениями соответствующей задачи Штурма–Лиувилля.

Мы будем рассматривать задачу параметрической идентифицируемости в предположении, что наблюдаются дискретизации классических решений, уточняющиеся с ростом дискретного времени. Для решения этой задачи используются свойства эволюционных динамических систем, порожденных параболическими уравнениями.

Итак, будем рассматривать полулинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(\lambda, u), \tag{5.1}$$

где $x \in (0, \pi)$, $t > 0$, $\lambda \in R$ – параметр. Для уравнения (5.1) ставятся краевые условия Дирихле

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \tag{5.2}$$

Обозначим через $u(\lambda, x, t, u_0)$ классическое решение уравнения (5.1), т. е. функцию $u \in C^{2,1}_{x,t}$, удовлетворяющую уравнению (5.1), условиям (5.2) и начальному условию

$$u(\lambda, x, 0, u_0) = u_0(x). \tag{5.3}$$

Будем изучать проблему локальной параметрической идентифицируемости задачи (5.1)–(5.3) в следующей постановке.

Фиксируется число $T > 0$ и для каждого натурального числа n выбирается натуральное число $m(n)$, подчиненное условию

$$m(n) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5.4}$$

Рассмотрим конечные множества

$$V(\lambda, n, u_0) = \{u(\lambda, kh_n, Tn, u_0) : 0 < k \leq m(n) - 1\},$$

определенные для всех $n > 0$, где

$$h_n = \frac{\pi}{m(n)}.$$

Каждый набор $V(\lambda, n, u_0)$ – это множество значений решения $u(\lambda, x, t, u_0)$ на конечном подмножестве

$$\{(kh_n, Tn) : 0 < k \leq m(n) - 1\}$$

множества $(0, \pi) \times \{Tn\}$.

Условие (5.4) означает, что наборы $V(\lambda, n, u_0)$ можно трактовать как результаты наблюдения решения задачи (5.1)–(5.3) в моменты времени Tn с уточнением этого наблюдения (уменьшением шага дискретизации по x) по мере роста времени.

Для дальнейшего рассмотрения нам потребуются следующие функциональные пространства.

Будем рассматривать соболевское пространство $H^1_{[0,\pi]}$ с нормой

$$\|u\| = \left(\int\limits_0^{\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Через H^1_0 обозначим следующее подпространство в $H^1_{[0,\pi]}$:

$$H^1_0 = \{u \in H^1_{[0,\pi]} : \, u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Будем рассматривать также соболевское пространство $H^2_0 \subset H^1_0$ с нормой

$$\|u\|_2 = \left(\int\limits_0^{\pi} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Далее будем предполагать, что $f(\lambda, \cdot) \in C^2(R)$.

Кроме того, предположим, что нелинейность f в уравнении (5.1) удовлетворяет следующему условию: существует такая функция $C(\lambda)$, $\lambda \in R$, что

$$uf(\lambda, u) \leq C(\lambda). \tag{5.5}$$

Известно [78], что при условии (5.5) задача (5.1)–(5.3) генерирует в пространстве H^1_0 эволюционную динамическую систему $S(\lambda, t)$, $t > 0$, такую, что для любой функции $u_0 \in H^1_0$ решение $u(\lambda, x, t, u_0)$ определено при всех $t > 0$ и представимо формулой

$$u(\lambda, x, t, u_0) = S(\lambda, t)u_0(x).$$

Кроме того, из условия (5.5) следует, что динамическая система $S(\lambda, t)$ имеет глобальный аттрактор $A(\lambda)$ в пространстве H^1_0 [78, 79].

Сформулируем теперь основное определение.

Определение 5.1. *Будем говорить, что задача* (5.1) – (5.3) *локально идентифицируема при* $\lambda = \lambda_0$ *по уточняющимся дискретным наблюдениям решения* $u(\lambda_0, x, t, u_0)$, *если существует* $\varepsilon > 0$, *обладающее следующим свойством: для любого* λ, $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, *и для любой функции* $v_0 \in H^1_0$ *найдется такое* $n_0 > 0$, *что*

$$V(\lambda_0, n, u_0) \neq V(\lambda, n, v_0) \quad \textit{при} \quad n \geq n_0.$$

Такое определение локальной идентифицируемости задачи (5.1)–(5.3) соответствует введенному в главе 1 понятию локальной идентифицируемости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений по наблюдению их решений в дискретные моменты времени (определение 1.1).

Обозначим через $F(\lambda)$, $\lambda \in R$, множество неподвижных точек системы $S(\lambda, t)$. Очевидно, что функция $u(x)$ является неподвижной точкой системы $S(\lambda, t)$ тогда и только тогда, когда $u(x)$ служит решением следующей краевой задачи:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(\lambda, u) = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0. \tag{5.6}$$

Известно, что любая система $S(\lambda, t)$ имеет глобальную функцию Ляпунова [78, 79] и для любой функции $u_0 \in H_0^1$ решение $S(\lambda, t)u_0$ стремится при $t \to +\infty$ (в метрике H_0^1) к множеству $F(\lambda)$. Если обозначить через $\omega(\lambda, u_0)$ ω-предельное множество решения $S(\lambda, t)u_0$ [79], то, очевидно, выполняются следующие включения:

$$\omega(\lambda, u_0) \subset F(\lambda) \subset A(\lambda), \quad u_0 \in H_0^1, \quad \lambda \in R. \tag{5.7}$$

Предположим, что при $\lambda = \lambda_0$ функция $f(\lambda, u)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие I в точке λ_0**.** Для любого $\delta > 0$ существуют такие числа $v^+ \in (0, \delta)$, $v^- \in (-\delta, 0)$ и $\mu > 0$, что

$$f(\lambda, v^+) \neq f(\lambda_0, v^+),$$
$$f(\lambda, v^-) \neq f(\lambda_0, v^-)$$

при $0 < |\lambda - \lambda_0| < \mu$.

Очевидно, что Условие I в точке λ_0 выполняется при следующем условии.

Условие II в точке λ_0**.** Функция $f(\lambda, u)$ непрерывно дифференцируема по λ на множестве $R \times \{0\}$ и

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, 0) \right|_{\lambda = \lambda_0} \neq 0.$$

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Предположим, что*

(a) все неподвижные точки системы $S(\lambda_0, t)$ гиперболические;

(b) если $f(\lambda_0, 0) = 0$, *то неподвижная точка* $u \equiv 0$ *системы* $S(\lambda_0, t)$ *неустойчива;*

(c) выполнено Условие I в точке λ_0.

Тогда существует такое открытое и плотное подмножество $\mathcal{H}$ *пространства* H_0^1, *что для любой функции* $u_0 \in \mathcal{H}$ *задача* $(5.1)-(5.3)$ *локально идентифицируема при* $\lambda = \lambda_0$ *по уточняющимся дискретным наблюдениям решения* $u(\lambda_0, x, t, u_0)$.

Если $f(\lambda_0, 0) \neq 0$, *то можно брать* $\mathcal{H} = H_0^1$.

Прежде чем начинать доказательство этой теоремы, сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть выполнено Условие I в точке* λ_0. *Если* $u(\lambda_0, x)$ – *ненулевое решение краевой задачи* (5.6), *то существует такое* $\Delta > 0$, *что при* $0 < |\lambda - \lambda_0| < \Delta$ *для любого решения* $u(\lambda, x)$ *задачи* (5.6) *выполняется условие*

$$u(\lambda, x) \not\equiv u(\lambda_0, x). \tag{5.8}$$

Доказательство. Поскольку $u(\lambda_0, x) \not\equiv 0$,

$$u^* = \max_{x \in [0,\pi]} |u(\lambda_0, x)| > 0.$$

Из Условия I в точке λ_0 найдем числа $v^+ \in (0, u^*)$, $v^- \in (-u^*, 0)$ и соответствующее $\mu > 0$. Докажем, что утверждение леммы справедливо при $\Delta = \mu$.

Фиксируем такое $x_0 \in (0, \pi)$, что

$$u^* = |u(\lambda_0, x_0)|.$$

Предположим, что $u(\lambda_0, x_0) > 0$ (случай $u(\lambda_0, x_0) < 0$ рассматривается аналогично). Тогда существует такое $x_1 \in (0, \pi)$, что

$$u(\lambda_0, x_1) = v^+$$

(поскольку $u(\lambda_0, 0) = 0$).

Возьмем $\lambda \in R$, удовлетворяющее условию $0 < |\lambda - \lambda_0| < \Delta$ и любое решение $u(\lambda, x)$ соответствующей краевой задачи (5.6). Если $u(\lambda, x_1) \neq u(\lambda_0, x_1)$, то (5.8) выполнено. Если это не так, то $u(\lambda, x_1) = u(\lambda_0, x_1) = v^+$ и из Условия I в точке λ_0 немедленно следует, что

$$\left.\frac{\partial^2 u(\lambda_0, x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_1} = -f(\lambda_0, v^+) \neq -f(\lambda, v^+) = \left.\frac{\partial^2 u(\lambda, x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_1}.$$

Из полученного неравенства следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 5.1 . По набору $V(\lambda, n, u_0)$ построим на отрезке $[0, \pi]$ непрерывную кусочно-линейную функцию $v^*(\lambda, x, n, u_0)$ со свойствами:

$$v^*(\lambda, kh_n, n, u_0) = u(\lambda, kh_n, Tn, u_0), \quad k = 0, 1, ..., m(n),$$

$v^*(\lambda, \cdot, n, u_0)$ линейна на любом отрезке

$$[kh_n, (k+1)h_n], \quad k = 0, 1, ..., m(n) - 1.$$

Известно (см. [80, глава 1]), что для любого $\lambda \in R$ оператор $S(\lambda, t)$ является ограниченным оператором из H_0^1 в H_0^2, т. е. для любой функции $v_0 \in H_0^1$ существует такая постоянная $K = K(\lambda, v_0)$, что

$$\|S(\lambda, t)v_0\|_2 \leq K, \quad t > 0.$$

Докажем, что для любой функции $v_0 \in H_0^1$ и для любого $\lambda \in R$

$$\|v^*(\lambda, x, n, v_0) - u(\lambda, x, Tn, v_0)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{5.9}$$

Рассмотрим произвольный отрезок $[kh_n, (k+1)h_n]$. Обозначим его Δ_k. По теореме о среднем существует такая точка $\xi \in \Delta_k$, что

$$u'(\lambda, \xi, Tn, v_0) = \frac{u(\lambda, (k+1)h_n, Tn, v_0) - u(\lambda, kh_n, Tn, v_0)}{h_n} \equiv$$

$$\equiv v^{*\prime}(\lambda, x, n, v_0)$$

при всех $x \in \Delta_k$. Поэтому для $x \in \Delta_k$

$$|u'(\lambda, x, Tn, v_0) - v^{*\prime}(\lambda, x, n, v_0)| = \left|\int\limits_{\xi}^{x} u''(\lambda, s, Tn, v_0) ds\right|.$$

Используя неравенство Коши – Буняковского, теперь получаем

$$\|v^*(\lambda, x, n, v_0) - u(\lambda, x, Tn, v_0)\|^2_{H^1_{\Delta_k}} =$$

$$= \int\limits_{kh_n}^{(k+1)h_n} |v'(\lambda,x,n,v_0) - u'(\lambda,x,Tn,v_0)|^2 dx =$$

$$= \int\limits_{kh_n}^{(k+1)h_n} \left| \int\limits_{\xi}^{x} u''(\lambda,s,Tn,v_0)ds \right|^2 dx \le$$

$$\le \int\limits_{kh_n}^{(k+1)h_n} \left(h_n \int\limits_{kh_n}^{(k+1)h_n} |u''(\lambda,s,Tn,v_0)|^2 ds \right) dx =$$

$$= h_n^2 \left(\int\limits_{kh_n}^{(k+1)h_n} |u''(\lambda,s,Tn,v_0)|^2 ds \right) =$$

$$= h_n^2 \|u(\lambda,x,Tn,v_0)\|^2_{H^2_{\Delta_k}} \le K h_n^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|v^*(\lambda,x,n,v_0) - u(\lambda,x,Tn,v_0)\|^2 \le m(n) K h_n^2 = \frac{K\pi^2}{m(n)}$$

и, с учетом (5.4), условие (5.9) доказано.

Предположим, что $f(\lambda_0, 0) = 0$ (случай $f(\lambda_0, 0) \ne 0$ более прост, поскольку при этом условии $u \equiv 0$ не является неподвижной точкой системы $S(\lambda_0, t)$).

Из условий (a) и (b) теоремы следует, что $u \equiv 0$ является гиперболической неустойчивой неподвижной точкой системы $S(\lambda_0, t)$. Поэтому ее устойчивое многообразие $W^s(0)$ имеет положительную коразмерность в пространстве H_0^1. Очевидно, в этом случае множество

$$\mathcal{H} = H_0^1 \setminus W^s(0) \tag{5.10}$$

является открытым и плотным подмножеством пространства H_0^1.

Возьмем $u_0 \in \mathcal{H}$ и рассмотрим соответствующее решение $u(\lambda_0, x, t, u_0)$. Как было отмечено выше,

$$u(\lambda_0, x, t, u_0) \to F(\lambda_0) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Поскольку все неподвижные точки системы $S(\lambda_0, t)$ гиперболические, они являются изолированными. Глобальный аттрактор $A(\lambda_0)$ компактен и содержит все неподвижные точки системы $S(\lambda_0, t)$. Поэтому множество $F(\lambda_0)$ конечно. Поскольку множество $\omega(\lambda_0, u_0)$ связно [79], оно совпадает с единственной неподвижной точкой. Обозначим ее $w(x)$. Из (5.10) следует, что $w(x) \not\equiv 0$.

Используя лемму 5.1 , найдем для решения $w(x)$ такое число $\varepsilon > 0$, что при $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ любое решение $u(\lambda, x)$ краевой задачи (5.6) удовлетворяет условию

$$u(\lambda, x) \not\equiv w(x). \tag{5.11}$$

Мы утверждаем, что это число $\varepsilon > 0$ обладает свойством, указанным в определении 5.1 .

Действительно, возьмем λ, удовлетворяющее условию $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ и произвольную начальную функцию $v_0 \in H_0^1$.

Множество $\omega(\lambda, v_0)$ является замкнутым подмножеством компактного множества $A(\lambda)$ (см. включение (5.7)). Это множество состоит из решений $u(\lambda, x)$ краевой задачи (5.6). Отсюда и из неравенства (5.11) следует существование такого положительного числа $a > 0$, что

$$\operatorname{dist}(w(x), \omega(\lambda, v_0)) = a, \tag{5.12}$$

где dist – расстояние, порожденное нормой пространства H_0^1.

Для получения противоречия предположим, что существует последовательность чисел $\{n_m\}$, такая, что $n_m \to \infty$ при $m \to \infty$ и

$$V(\lambda_0, n_m, u_0) = V(\lambda, n_m, v_0) \tag{5.13}$$

для всех m.

Построим соответствующие непрерывные кусочно-линейные функции $v^*(\lambda_0, x, n_m, u_0)$ и $v^*(\lambda, x, n_m, v_0)$. Для сокращения записи переобозначим эти функции через $v_{0,m}^*(x)$ и $v_m^*(x)$ соответственно. В силу (5.13)

$$v_{0,m}^*(x) \equiv v_m^*(x) \tag{5.14}$$

для всех m.

Поскольку

$$\|u(\lambda_0, x, n_m, u_0) - w(x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

из (5.9) следует, что

$$\|v_{0,m}^*(x) - w(x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{5.15}$$

Аналогично, поскольку

$$\operatorname{dist}(u(\lambda, x, n_m, v_0), \omega(\lambda, v_0)) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

их (5.9) следует, что

$$\operatorname{dist}(v_m^*(x), \omega(\lambda, v_0)) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{5.16}$$

Одновременное выполнение условий (5.12), (5.14), (5.15) и (5.16) невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему для случая $f(\lambda_0, 0) = 0$. Если $f(\lambda_0, 0) \neq 0$, то достаточно взять $\mathcal{H} = H_0^1$ и повторить все рассуждения. Теорема доказана.

Замечание 5.1. В то время, как условия (b) и (c) теоремы 5.1 достаточно легко проверяются и вполне естественны, условие (a) может показаться весьма ограничительным. Однако в работе [81] для уравнения вида (5.1), не содержащего параметра λ

$$u_t = u_{xx} + f(u),$$

было установлено, что любая неподвижная точка соответствующей эволюционной системы является гиперболической для нелинейностей $f(u)$, принадлежащих подмножеству функционального пространства $C^k(R)$, $k \geq 2$, которое является множеством второй категории по Бэру в этом пространстве (т. е. является пересечением счетного множества открытых и плотных подмножеств этого функционального пространства). Это означает, что условие (a) незначительно сужает класс нелинейностей $f(\lambda, u)$ уравнения (5.1), для которых выполняются все остальные условия теоремы 5.1 .

Покажем, что условия теоремы 5.1 могут быть легко проверены для задачи Чэфи – Инфанте [78, 82] (уравнение (5.1) с линейной зависимостью от параметра λ).

Итак, предположим, что в уравнении (5.1) $f(\lambda, u) = \lambda g(u)$, где функция $g \in C^2(R)$ и удовлетворяет следующим условиям:

(CI1) $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$;

(CI2) $\limsup\limits_{|u| \to \infty} \dfrac{g(u)}{u} \leq 0$;

(CI3) $ug''(u) < 0$ при $u \neq 0$.

Типичным примером функции $g(u)$, удовлетворяющей условиям (CI1)–(CI3), служит $g(u) = u - u^3$.

Известно [78], что при выполнении перечисленных условий соответствующая динамическая система $S(\lambda, t)$ имеет глобальный аттрактор при всех

$\lambda > 0$ и ее траектории стремятся к множеству неподвижных точек при $t \to \infty$.

Кроме того, известно, что при

$$\lambda > 1, \quad \lambda \neq m^2, \quad m \in Z, \tag{5.17}$$

любая неподвижная точка системы $S(\lambda, t)$является гиперболической, в то время как неподвижная точка $u \equiv 0$ является неустойчивой.

Из условия (CI3) следует, что функция $g(u)$ имеет не более двух ненулевых корней. Поэтому Условие I очевидным образом выполняется при $f(\lambda, u) = \lambda g(u)$ в любой точке λ_0 (при этом число $\mu > 0$ может быть произвольным).

Таким образом, получаем следствие теоремы 5.1 .

Теорема 5.2. *Предположим, что в уравнении* (5.1) $f(\lambda, u) = \lambda g(u)$, *где функция* $g(u)$ *удовлетворяет условиям* (CI1)–(CI3). *Тогда для любого* $\lambda = \lambda_0$, *удовлетворяющего неравенствам* (5.17), *существует такое открытое и плотное подмножество* $\mathcal{H}$ *пространства* H_0^1, *что для любой функции* $u_0 \in \mathcal{H}$ *задача* (5.1) – (5.3) *локально идентифицируема при* λ_0 *по уточняющимся дискретным наблюдениям решения* $u(\lambda_0, x, t, u_0)$.

Эта теорема обобщает основной результат работы [83].

§2. Локальная параметрическая идентифицируемость дискретизаций параболических уравнений

При компьютерном моделировании, основанном на использовании тех или иных вычислительных методов, исследуемое уравнение (5.1) заменяется некоторой аппроксимирующей его системой, для которой вновь возникает задача о возможности идентификации неизвестного параметра λ. В этом параграфе мы покажем, что идентификация параметра λ возможна для дискретизации уравнения (5.1), причем без требования уточнения наблюдений с ростом времени.

Будем рассматривать следующую полунеявную дискретизацию уравнения (5.1). Фиксируем натуральное число N, положим $d = \dfrac{\pi}{N+1}$, и пусть $h > 0$ – шаг дискретизации по времени t. Будем приближать значения $u(\lambda, md, nh, u_0)$ решения задачи (5.1)–(5.3) величинами v_m^n, $n \geq 0$, $m =$

$0, 1, ..., N+1$, зависящими от λ и задаваемыми следующей системой уравнений

$$\Delta v^{n+1} = Av^{n+1} + \underline{f}(\lambda, v^n), \quad n \geq 0, \tag{5.18}$$

где

$$v^n = (v_1^n, ..., v_N^n) \in R^N, \quad \underline{f}(\lambda, v) = (f(\lambda, v_1), ..., f(\lambda, v_N)),$$

$$\Delta v^{n+1} = \frac{1}{h}(v^{n+1} - v^n), \quad (Av)_m = \frac{1}{d^2}(v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}),$$

а $v_0 = v_{N+1} = 0$ (следует из условия (5.2)). Система (5.18) задает отображение

$$\varphi(\lambda, \cdot) : R^N \to R^N, \tag{5.19}$$

такое, что $v^{n+1} = \varphi(\lambda, v^n)$.

Будем предполагать, что выполнено условие

$$h\|A\| < 1, \tag{5.20}$$

где $\|A\|$ – операторная норма матрицы A. При выполнении условия (5.20) отображение (5.19) определяется следующим выражением

$$\varphi(\lambda, v) = J^{-1}(v + h\underline{f}(\lambda, v)), \tag{5.21}$$

где $J = E - hA$, E – единичная матрица порядка N.

В работе [84] доказано следующее утверждение. Если при фиксированном значении λ

$$f(\lambda, \cdot) \in C^1, \quad \left|\frac{\partial}{\partial u} f(\lambda, u)\right| \leq M, \quad hM < 1, \tag{5.22}$$

то $\varphi(\lambda, v)$ является диффеоморфизмом пространства R^N.

Основное внимание мы уделим изучению случая $f(\lambda, u) = \lambda g(u)$, поскольку в этом случае достаточные условия локальной идентифицируемости системы (5.18) (определение дадим ниже) формулируются сравнительно просто (общий случай будет рассмотрен позже, в замечании 5.3).

Определение 5.2. *Будем говорить, что система (5.18) локально идентифицируема при λ_0 по наблюдению траектории $\{\varphi^n(\lambda_0, u_0) : n \geq 0\}$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого λ, $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, и для любого $v_0 \in R^N$ найдется такое $n_0 > 0$, что при $n \geq n_0$*

$$\varphi^n(\lambda_0, u_0) \neq \varphi^n(\lambda, v_0).$$

Теорема 5.3. *Предположим, что* $f(\lambda, u) = \lambda g(u)$ *и для фиксированного значения* $\lambda_0 \in R$ *условия* (5.22) *выполнены для всех* $(\lambda, u) \in \Lambda \times R$, *где* Λ – *некоторая окрестность точки* λ_0. *Пусть, кроме того, выполнены условия*

(a) все неподвижные точки диффеоморфизма $\varphi(\lambda_0, \cdot)$ *являются гиперболическими;*

(b) если $g(0) = 0$, *то неподвижная точка* $u = 0$ *диффеоморфизма* $\varphi(\lambda_0, \cdot)$ *неустойчива.*

Тогда существует такое открытое и плотное подмножество $\mathcal{H}$ *пространства* R^N, *что для любого* $u_0 \in \mathcal{H}$ *система* (5.18) *локально идентифицируема при* λ_0 *по наблюдению траектории* $\{\varphi^n(\lambda_0, u_0) : n \geq 0\}$.

Если $g(0) \neq 0$ *и* $\lambda_0 \neq 0$, *то можно взять* $\mathcal{H} = R^N$.

Доказательство. В работе [84] установлено, что при любом λ диффеоморфизм $\varphi(\lambda, \cdot)$ имеет глобальную функцию Ляпунова. Следовательно, любая траектория этого диффеоморфизма стремится к множеству $F(\lambda)$ его неподвижных точек.

Поскольку все неподвижные точки диффеоморфизма $\varphi(\lambda, \cdot)$ гиперболические, каждая из них является изолированной в $F(\lambda_0)$. Отсюда следует, что для любой начальной точки $u_0 \in R^N$ соответствующая траектория $\varphi^n(\lambda_0, u_0)$ стремится к единственной неподвижной точке.

Предположим, что $g(0) = 0$ (случай $g(0) \neq 0$ более прост, поскольку при этом условии $u = 0$ не является неподвижной точкой диффеоморфизма $\varphi(\lambda_0, \cdot)$).

Аналогично теореме 5.1 (формула (5.10)) определим множество $\mathcal{H}$ формулой $\mathcal{H} = R^N \setminus W^s(0)$, где $W^s(0)$ – устойчивое многообразие гиперболической неустойчивой неподвижной точки $u = 0$ диффеоморфизма $\varphi(\lambda_0, \cdot)$. Множество $\mathcal{H}$ является открытым и плотным подмножеством пространства R^N.

Зафиксируем $u_0 \in \mathcal{H}$ и пусть

$$\varphi^n(\lambda_0, u_0) \underset{n \to \infty}{\to} w_0,$$

где w_0 – неподвижная точка диффеоморфизма $\varphi(\lambda_0, \cdot)$.

Как следует из формулы (5.21), $w \in R^N$ является неподвижной точкой диффеоморфизма $\varphi(\lambda, \cdot)$ тогда и только тогда, когда

$$J^{-1}(w + h\lambda \underline{g}(w)) = w.$$

Отсюда следует, что

$$w + h\lambda \underline{g}(w) = Jw = w - hAw,$$

или

$$Aw + \lambda \underline{g}(w) = 0. \tag{5.23}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda, w) = \varphi(\lambda, w) - w.$$

Она непрерывно дифференцируема по w и λ, поскольку $\varphi(\lambda, \cdot)$ является диффеоморфизмом, а λ входит в выражение (5.21) линейно в рассматриваемом случае. Кроме того,

$$\Phi(\lambda_0, w_0) = 0,$$

поскольку w_0 – неподвижная точка диффеоморфизма $\varphi(\lambda_0, \cdot)$.

Так как w_0 – гиперболическая неподвижная точка $\varphi(\lambda_0, \cdot)$, все собственные числа λ_j матрицы Якоби

$$\left.\frac{\partial \varphi(\lambda_0, w)}{\partial w}\right|_{w=w_0}$$

удовлетворяют неравенствам $|\lambda_j| \neq 1$. Поэтому $\lambda_j \neq 1$ и

$$\det\left(\left.\frac{\partial \Phi(\lambda_0, w)}{\partial w}\right|_{w=w_0}\right) = \det\left(\left.\frac{\partial \varphi(\lambda_0, w)}{\partial w}\right|_{w=w_0} - E_N\right) \neq 0.$$

По теореме о неявной функции уравнение

$$\Phi(\lambda, w) = 0$$

имеет единственное решение $w(\lambda)$ в окрестности λ_0, являющееся непрерывно дифференцируемой функцией, при этом $w(\lambda_0) = w_0$. Это означает, что уравнение (5.23), задающее неподвижные точки диффеоморфизма $\varphi(\lambda, \cdot)$, можно дифференцировать по λ в точке λ_0. В результате получим следующее равенство:

$$A \left.\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} + \underline{g}(w(\lambda_0)) + \lambda_0 D \left.\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = 0, \tag{5.24}$$

где

$$D = \operatorname{diag}\left(g'\left(w_{0,1}(\lambda_0)\right), ..., g'\left(w_{0,N}(\lambda_0)\right)\right)$$

и

$$w_0 = (w_{0,1}, ..., w_{0,N}).$$

Из условия (b) теоремы и выбора множества $\mathcal{H}$ следует, что $w_0 \neq 0$, а поскольку матрица A невырожденная, $Aw_0 \neq 0$. Поэтому из равенства (5.23) при $\lambda = \lambda_0$ следует, что $\underline{g}(w_0) \neq 0$. Из этого неравенства и соотношения (5.24) немедленно следует, что

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0. \qquad (5.25)$$

Теперь становится очевидным следующее утверждение: существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех λ, $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, диффеоморфизм $\varphi(\lambda, \cdot)$ не имеет неподвижных точек, совпадающих с w_0.

Зафиксируем λ, удовлетворяющее условию $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ и обозначим через $A(\lambda)$ глобальный аттрактор диффеоморфизма $\varphi(\lambda, \cdot)$ (его существование при выполнении условия (5.5) было доказано в [85]). Возьмем произвольное $v_0 \in R^N$. Для ω-предельного множества $\omega(\lambda, v_0)$ траектории $\varphi^n(\lambda, v_0)$ выполняются следующие включения:

$$\omega(\lambda, v_0) \subset F(\lambda) \subset A(\lambda).$$

$F(\lambda)$ является замкнутым подмножеством компактного множества $A(\lambda)$, а потому само является компактом. Выше было установлено, что $w_0 \notin F(\lambda)$. Следовательно,

$$\operatorname{dist}(w_0, \omega(\lambda, v_0)) > 0. \qquad (5.26)$$

Условие (5.26) и соотношения

$$\operatorname{dist}(\varphi^n(\lambda, v_0), \omega(\lambda, v_0)) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и

$$\varphi^n(\lambda_0, u_0) \to w_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

устанавливают справедливость доказываемой теоремы 5.3 .

Замечание 5.2. В отличие от рассмотренной в предыдущем параграфе задачи локальной параметрической идентифицируемости уравнения (5.1) по уточняющимся дискретным наблюдениям его решения, условия локальной идентифицируемости аппроксимирующей системы (5.18) не требуют уточнения наблюдений траекторий $\varphi^n(\lambda_0, u_0)$ и $\varphi^n(\lambda, v_0)$.

Замечание 5.3. Теорема 5.3 может быть обобщена на случай произвольной нелинейности $f(\lambda, u)$, удовлетворяющей условиям (5.22). Дополнительное ограничение

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} \in C, \quad \left.\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, u)\right|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0 \quad \text{для всех} \quad u \qquad (5.27)$$

является достаточным для справедливости утверждения теоремы 5.3 в этом случае (разумеется, условия (a) и (b) теоремы предполагаются выполненными).

Действительно, в этом случае равенство (5.24) заменяется равенством

$$A\frac{\partial w}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, w_{0,1}), ..., \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, w_{0,N})\right) +$$

$$+\mathrm{diag}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\lambda_0, w_{0,1}), ..., \frac{\partial f}{\partial u}(\lambda_0, w_{0,N})\right)\frac{\partial w}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0} = 0.$$

Из этого равенства и условия (5.27) следует выполнение неравенства (5.25). В остальном доказательство теоремы остается неизменным.

Замечание 5.4. Условие (a) теоремы 5.3 не является существенным ограничением множества нелинейностей $g(u)$ и множества идентифицируемых значений параметра λ. В работе [86] доказано, что это условие является типичным для множества B пар (λ, g), т. е. множество пар $(\lambda, g) \in B$, удовлетворяющих условию (a), является пересечением счетного множества открытых и плотных в B подмножеств этого множества. Заметим также, что для фиксированного значения λ_0 и произвольной нелинейности $f(\lambda, u)$ типичность условия (a) теоремы 5.3 была доказана в работе [85].

Список литературы

1. Гинсберг К. С. Системные закономерности и теория идентификации. I // Автоматика и телемеханика. 2002. № 5. С. 156–170.

2. Сейдж Э. П., Мелса Д. Л. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974.

3. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.

4. Goodwin G. C., Payne R. L. Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis. New York: Academic Press, 1977.

5. Гроп Д. Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979.

6. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.

7. Современные методы идентификации систем / Под ред. П. Эйкхоффа. М.: Мир, 1983.

8. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.

9. Райбман Н. С. Идентификация объектов управления // Автоматика и телемеханика. 1979. № 6. С. 80–93.

10. Клейман Е. Г., Мочалов И. А. Идентификация нестационарных объектов // Автоматика и телемеханика. 1994. № 2. С. 3–22.

11. Клейман Е. Г. Идентификация нестационарных объектов // Автоматика и телемеханика. 1999. № 10. С. 3–45.

12. Клейман Е. Г. Идентификация входных сигналов в динамических системах // Автоматика и телемеханика. 1999. № 12. С. 3–15.

13. Зарипов М. Н., Салыга В. Н. Идентификация нелинейных объектов на базе предикатных описаний с использованием R-функций // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С. 47–51.

14. Константинова Л. И., Кочегуров В. А., Шумилов Б. М. Параметрическая идентификация нелинейных дифференциальных уравнений на основе сплайн-схем, точных на многочленах // Автоматика и телемеханика. 1997.

№ 5. С. 53–63.

15. Parrilo P. A., Sanchez Pena R. S., Sznaier M. A parametric extension of mixed time / frequency robust identification // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 44. № 2. 1999. pp. 364–369.

16. Gorinevsky D., Heaven M. Performance-optimized applied identification of separable distributed-parameter processes // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 46. № 10. 2001. pp. 1584–1589.

17. Ягодкина Т. В. Структурная и параметрическая идентификация многомерных динамических систем // Труды III Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'04. Москва, 28–30 января 2004 г. М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2004. С. 1990–2020.

18. Anderson T. W. On asymptotic distributions of estimated parameters of stochastic difference equations // Ann. Math. Stat. 1959. Vol. 30. pp.676–687.

19. Durbin J. Efficient estimators of parameters in moving average models // Biometrica. 1959. Vol. 46. pp. 306–316.

20. Narendra K. S., Gallman P. G. An iterative method for identification of nonlinear systems using a Hammerstein model // IEEE Trans. Automatic Control. 1966. Vol. AC-11. p.546.

21. Steiglitz K., McBride L. E. A technique for the identification of linear systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1965. Vol. AC-10. pp. 461–464.

22. Rothenberg T. J. Identification in parametric models // Econometrics. Vol. 39. May 1971. pp. 577–591.

23. Tse E., Anton J. On the identifiability of parameters // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 17. № 5. 1972. pp. 637–646.

24. Bellman R., Aström K. J. On structural identifiability // Mathematical Biosciences. 1970. № 7. pp. 329–339.

25. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.

26. Glover K., Willems J. C. Parametrizations of linear dynamical systems: canonical forms and identifiability // IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-

19. № 6. 1974. pp.640–646.

27. Grewal M. S., Glover K. Identifiability of linear and nonlinear dynamical systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1976. Vol. 21. № 6. pp. 833–837.

28. Reid J. G. Structural identifiability in linear time-invariant systems // IEEE Trans. on Automatic Control. № 4. 1977. pp. 242–246.

29. Vajda S. Identifiability of first order reaction systems // React. Kinet. Catal. Lett. Vol. 11. № 1. 1979. pp. 39–43.

30. DiStefano J. J., Cobelli C. On parameter and structural identifiability: nonunique observability / reconstructibility for identifiable systems, other ambiguities, and new definitions // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. AC-25. № 4. 1980. pp. 830–833.

31. Бодунов Н. А., Постников Е. В. Локальная идентифицируемость одного класса динамических систем // Численные методы в математическом моделировании гидродинамических и технологических процессов. Межвуз. тематич. сб. тр. – Л.: ЛИСИ, 1989. С. 69–71.

32. Walter E., Lecourtier Y., Happel J. On the structural output distinguishability of parametric models, and its relations with structural identifiability // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. AC-29. № 1. 1984. pp. 56–57.

33. Vajda S. Further comments on “On parameter and structural identifiability: nonunique observability / reconstructibility for identifiable systems, other ambiguities, and new definitions” // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 27. № 5. 1982. pp. 1136–1137.

34. Lecourtier Y., Walter E. Comments on “On parameter and structural identifiability: Nonunique observability / reconstructibility for identifiable systems, other ambiguities, and new definitions” // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. AC-26. № 3. 1981. pp. 800–801.

35. Walter E., Lecourtier Y. “Unidentifiable compartmental models: What to do?” // Math. Biosci. Vol. 56. № 1–2. 1981. pp. 1–25.

36. Vajda S. Comments on “Structural identifiability in linear time-invariant systems” // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. AC-24. № 3. 1979. pp. 495–496.

37. Glover K., Silverman L. M. Characterization of structural controllability // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. AC-27. № 8. 1976. pp. 534–537.

38. Milanese M. Unidentifiability versus “actual” observability // IEEE Trans. on Automat. Contr. 1976. № 12. p. 876.

39. Cobelli C., Romanin-Jacur. Controllability, observability and structural identifiability of multiinput and multioutput biological compartmental systems // IEEE Trans. Biomed. Eng. Vol. BME-23. № 3. 1976. pp. 93–100.

40. DiStefano J. On the relationships between structural identifiability and the controllability, observability properties // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 22. № 4. 1977. p. 652.

41. Davidson E. J. Connectability and structural controllability of composite systems // Automatica. Vol. 13. 1977. pp. 109–123.

42. Cobelli C., Lepschy A., Romanin-Jacur G. Comments on “On the relationships between structural identifiability and the controllability, observability properties” // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. AC-23. № 5. 1978. pp. 965–966.

43. Jacquez J. Further comments on “On the relationships between structural identifiability and the controllability, observability properties” // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 23. № 5. 1978. pp. 966–967.

44. Данеев А. В., Русанов В. А. К аксиоматической теории идентификации динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 8. С. 126–136.

45. Копейкина Т. Б., Цехан О. Б. Метод пространства состояний в задаче исследования идентифицируемости линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 4. С. 5–14.

46. Болонин Н. А., Попов О. С. Критерии идентифицируемости линейных стационарных и нестационарных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 1994. Т. 37. № 1. С. 22–27.

47. Xia X., Moog C. H. Identifiability of nonlinear systems with application to HIV/AIDS models // IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. 48. № 2. 2003. pp. 330–336.

48. Bodunov N. A. Problem of local identifiability from discrete observations / The second int. conf. “Differential Equations and Applications”. June 15–20, 1998. S.-Petersburg. pp. 12–13.

49. Бибиков Ю. Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие. Л.: Изд-во Ленинг. ун-та, 1981.

50. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

51. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

52. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.

53. Панасенко В. В., Соколов С. В., Щербань И. В. Решение задачи идентификации модели динамического объекта при однократном наблюдении его состояния // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 1. С. 24–28.

54. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.

55. Адрианова Л. Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. Изд-во С.-Петербургского университета, 1992.

56. Бодунов Н. А., Котченко Ф. Ф. Применение функций Ляпунова к исследованию устойчивости следящей системы переменного тока // Изв. вузов. Электромеханика. 1986. № 8. С. 54–57.

57. Гайшун И. В. Канонические формы, управление показателями Ляпунова и стабилизируемость линейных нестационарных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 6. С. 24–32.

58. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

59. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

60. Култышев С. Ю., Култышева Л. М. К вопросу об идентификации функционально-дифференциальных систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 1998. № 3. С. 16–27.

61. Култышев С. Ю., Култышева Л. М. Об идентификации некоторых классов операторных моделей эволюционного типа // Изв. вузов. Математика. 2004. № 6. С. 30–40.

62. Orlov Y., Belkoura L., Richard J. P., Dambrine M. On identifiability of linear time-delay systems // IEEE Trans on Automat. Contr. Vol. 47. № 8. 2002.

pp. 1319–1324.

63. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

64. Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977.

65. Pilyugin S. Yu. The Space of Dynamical Systems with the C^0-Topology. Springer, 1994. (Lect. Notes in Math. Vol. 1571).

66. Pilyugin S. Yu. Complete families of pseudotrajectories and shape of attractors // Rand. Comp. Dyn. 1994. Vol. 2, № 2. pp. 205–226.

67. Пилюгин С. Ю. Введение в грубые системы дифференциальных уравнений: Учеб. пособие. Л.: ЛГУ, 1988.

68. Pilyugin S. Yu. Limit shadowing property // Conf. Num. Dyn. Anal.: Abstracts. Atlanta, 1995. P. 29.

69. Corless R. M., Pilyugin S. Yu. Evaluation of upper Lyapunov exponents on hyperbolic sets // J. Math. Anal. Appl. 1995. Vol. 189. pp. 145–159.

70. Stuart A. M., Humphries A. R. Dynamical Systems and Numerical Analysis. Cambridge Univ. Press (1996).

71. Костин И. Н., Пилюгин С. Ю. Равномерная экспоненциальная устойчивость аттракторов возмущенных эволюционных уравнений // Докл. РАН. Т. 369 (1999). С. 449–450.

72. Соловьев В. В. Определение источника и коэффициентов в параболическом уравнении в многомерном случае // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 6. С. 1060–1069.

73. Кряжимский А. В., Максимов В. И., Самарская Е. А. О реконструкции входов в параболических системах // Мат. моделирование. 1997. Т. 9. № 3. С. 51–72.

74. Yu W. Identification for parabolic distributed parameter systems with constraints on the parameters and the state // SIAM J. Control and Optim. 1995. Vol. 33. № 6. P. 1801–1815.

75. Короткий А. И. Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Матем. 1995. № 11. С. 101–124.

76. Orlov Y., Bentsman J. Adaptive distributed parameter systems identification with enforceable identifiability conditions and reduced-order spatial differentiation // IEEE Trans on Automat. Contr. V. 45. № 2. 2000. pp. 203–216.

77. Courdesses M., Polis M. P., Amouroux M. On identifiability of parameters in a class of parabolic distributed systems // IEEE Trans. on Automat. Contr. V. AC-26. № 2. 1981. pp. 474–477.

78. Henry D. B. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Lect. Notes in Math. Vol 840. Springer-Verlag (1981).

79. Sell G. R., Yu Y. Dynamics of Evolutionary Equations // Appl. Math. Sci. Vol. 143. Springer-Verlag (2002).

80. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.

81. Brunovský P., Chow S.-N. Generic properties of stationary solutions of reaction diffusion equations // J. Diff. Equat. Vol. 53. 1984. pp. 1–23.

82. Chaffee N., Infante E. F. A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equations of parabolic type // Applicable Anal. Vol. 4. 1974. pp. 17–37.

83. Бодунов Н. А., Колбина С. А., Пилюгин С. Ю. Локальная идентифицируемость параболического уравнения по уточняющимся дискретным наблюдениям // Изв. ГЭТУ. Сб. научн. тр. Вып. 512. СПб.: ГЭТУ, 1997. С. 7–13.

84. Oliva W. M., Kuhl N. M., Magalhães L. T. Diffeomorphisms of R^n with oscillatory Jacobians // Publ. Math. Vol. 37. 1993. pp. 255–269.

85. Eirola T., Pilyugin S. Yu. Pseudotrajectories generated by a discretization of a parabolic equation // J. Dynam. Diff. Equat. Vol. 8. 1996. pp. 281–297.

86. Шляго П. Ю. Типичность свойства гиперболичности для дискретизаций параболических уравнений с параметром // (в печати).

87. Бодунов Н. А., Постников Е. В. Условия локальной идентифицируемости нелинейных систем при дискретных наблюдениях // Изв.вузов. Математика. 1992. № 11. С. 8–11.

88. Бодунов Н. А. Локальная идентифицируемость динамических систем по дискретным наблюдениям, содержащим погрешности // Известия СПбГ-

ЭТУ “ЛЭТИ”. Серия “Физика. Математика. Химия”. 2001. Вып. 1. С. 3–7.

89. Бодунов Н. А. Локальная параметрическая идентифицируемость дифференциальных уравнений по дискретным наблюдениям // Труды III международной конференции “Идентификация систем и задачи управления”. Москва 28–30 января 2004 г. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. SICPRO’04. (ISBN 5-201-14948-0). С. 244–250.

90. Бодунов Н. А., Постников Е. В. Использование методов оптимального управления для параметрической идентификации динамических систем // Л.: ЛЭТИ, 1991. Деп. ВИНИТИ 28.05.91, № 2230-В91, 14 с.

91. Бодунов Н. А., Пилюгин С. Ю., Постников Е. В. Локальная идентифицируемость линейных систем по двухточечному наблюдению // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1994, вып. 1 (№ 1). С. 11–14.

92. Бодунов Н. А. Локальная идентифицируемость квазилинейных систем по двухточечному наблюдению // Изв. ГЭТУ. Сб. научн. тр. Вып. 512. СПб.: ГЭТУ, 1997. С. 3–7.

93. Бодунов Н. А., Пилюгин С. Ю. Условия высших порядков в задаче о локальной идентифицируемости // Известия ГЭТУ. Сб. научн. тр. Вып. 472, Математика, 1994. С. 8–12.

94. Бодунов Н. А. Локальная идентифицируемость и локальная асимптотическая идентифицируемость линейных систем // Известия СПбГЭТУ “ЛЭТИ”. Сер. “Физика твердого тела и электроника”. Вып. 1, 2004. С. 3–10.

95. Бодунов Н. А. Некоторые специальные задачи локальной параметрической идентифицируемости динамических систем // Труды IV международной конференции “Идентификация систем и задачи управления”. Москва 25–28 января 2005 г. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. SICPRO’05. (ISBN 5-201-14975-8). С. 187–190.

96. Бодунов Н. А. О монотонности решения одного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом // Изв. “ЛЭТИ”. Вып. 204. Математ. методы в задачах электротехники, 1976. С. 48–50.

97. Бодунов Н. А. Качественное исследование решения одного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом // Прикладная матема-

тика. Межвуз. темат. сб. тр. Вып. 1(135). Л.: ЛИСИ, 1977. С. 18–22.

98. Бодунов Н. А., Пилюгин С. Ю. Параметрическая идентифицируемость систем дифференциальных уравнений при уточнении наблюдений // Изв. ГЭТУ. Сб. научн. тр. Вып. 501. СПб.: ГЭТУ, 1996. С. 3–10.

Оглавление