ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2009
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Бифуркационные Решения В Одномерной Краевой Задаче, Описывающей Распределение Зарядов В Полупроводниках

Е.З.Боревич

Россия, 197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5
С.-Петербургский государственный электротехнический университет
кафедра высшей математики N°1
e-mail: danitschi@mail.ru

Аннотация.

Рассматривается одномерная краевая задача, описывающая распределение зарядов в полупроводниках в случае, когда плотность ионизированной примеси неоднородна. Доказано существование бифуркационных решений данной краевой задачи и их продолжимость по параметру.

Рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} (D(|E|)(n' + nE))' = 0, \\ E' = f - n, \quad \alpha < x < \beta, \\ E(\alpha) = \gamma_1, \quad E(\beta) = \gamma_2, \\ D(|E(\alpha)|)(n'(\alpha) + n(\alpha)E(\alpha)) = j > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $E(x)$, $n(x)$ – напряженность электрического поля и плотность электронов; $D > 0$ – коэффициент диффузии, функция $f(x)$ задает неоднородную плотность ионизированной примеси. В работах [1, 2] был изучен случай, когда плотность ионизированной примеси однородна, т. е. функция f постоянна. Будем считать, что $0 < \alpha < \beta$ и $0 < \gamma_1 < \gamma_2$. Задача (1) эквивалентна следующей краевой задаче

$$\begin{cases} D(|E|)(f'(x) - E'' + (f - E')E) = j, \\ E(\alpha) = \gamma_1, \quad E(\beta) = \gamma_2. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что неоднородная плотность ионизированной примеси $f(x)$ линейно зависит от плотности тока электронов j:

$$f(x) = jg_1(x) + g_0, \quad g_1(x) > 0, \quad g_0 > 0.$$

Перепишем задачу (2) в виде

$$\begin{cases} E'' + E'E - g_0 E = j(g_1'(x) + g_1 E - D^{-1}(|E|)), \\ E(\alpha) = \gamma_1, \quad E(\beta) = \gamma_2. \end{cases} \tag{3}$$

Определение. *Решение краевой задачи* (3)*, не зависящее от параметра j, назовем тривиальным решением задачи* (3)*.*

Утверждение 1. *Если плотность ионизированной примеси постоянна и $f = jg_1$, а также $\gamma_1 = \gamma_2$, то краевая задача* (3) *имеет тривиальное решение $E(x) \equiv E_0$, где $E_0 = \gamma_1 = \gamma_2$, тогда и только тогда, когда $f = j(D(E_0)E_0)^{-1}$.*

Доказательство. Проверяется непосредственно. □

Этот случай был изучен в работах [1, 2].

Нетрудно видеть. что краевая задача (3) имеет тривиальное решение, если оно является решением следующих двух задач

$$\begin{cases} E'' + E'E = g_0 E, \\ E(\alpha) = \gamma_1, \quad E(\beta) = \gamma_2; \end{cases} \tag{4}$$

$$g_1'(x) + g_1(x)E = D(|E|)^{-1}. \tag{5}$$

Обозначим через $a = \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{\beta - \alpha}$.

Утверждение 2. *Если $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ и $0 < g_0 \le a$, то краевая задача* (4) *имеет монотонно возрастающее решение $E(x)$, причем*

$$\widetilde{E}(x) \le E(x) \le \gamma_2,$$

где $\widetilde{E}(x) = \gamma_1 + a(x - \alpha)$.

Доказательство. Если $g_0 = a$, то решение задачи (4) $E(x) \equiv \widetilde{E}(x)$, что проверяется непосредственно. Пусть теперь $0 < g_0 < a$, тогда функция $E(x) \equiv \gamma_2$ является верхней барьерной для краевой задачи (4), а $\widetilde{E}(x)$ является нижней барьерной. Тогда по теореме Нагумо [3] существует решение краевой задачи (4), причем $\widetilde{E}(x) \le E(x) \le \gamma_2$. Осталось показать монотонное возрастание решения $E(x)$. Действительно, предположим противное. Тогда на интервале (α, β) найдется такая точка x_0, что в ней функция $E(x)$ достигает максимума. Тогда $E''(x_0) \le 0$, $E'(x_0) = 0$, $E(x_0) > 0$, что невозможно, так как $E(x)$ удовлетворяет уравнению задачи (4). $\square$

Предположим, что коэффициент диффузии $D(y)$ имеет следующие свойства:

(a) $D(y) \in C^{(2)}(R_+)$;

(b) $D(y)$ имеет при $y > 0$ единственный положительный локальный максимум и единственную точку перегиба;

(c) $\lim\limits_{y\to+\infty} D(y) = D_0 > 0$;

(d) при $y > 0$ функция $D(y)$ удовлетворяет условию отрицательной дифференциальной проводимости, т. е. существует интервал, на котором $D(y) + yD'(y) < 0$.

Утверждение 3. *Пусть коэффициент диффузии* $D(y)$ *имеет свойства* $(a) - (d)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *функция* $G(y) = yD(y)$ *имеет единственный локальный максимум* $(y_{\max}, G_{\max})$ *и единственный локальный минимум* $(y_{\min}, G_{\min})$, *причем* $0 < y_{\max} < y_{\min}$*;*

(2) *при условии* $y_{\max} < \gamma_1 < \gamma_2 < y_{\min}$ *и при условии, что функция* $g_1(x)$ *удовлетворяет условиям:* $g_1'(x) > 0$, $g_1''(x) > 0$ *при* $x \in [\alpha, \beta]$

$$1 - g_1'(\alpha)D(\gamma_1) = g_1(\alpha)G(\gamma_1), \quad 1 - g_1'(\beta)D(\gamma_2) = g_1(\beta)G(\gamma_2),$$

уравнение (5) *имеет ровно три положительных решения* $0 < E_1(x) < E_0(x) < E_2(x)$, *причем* $E_0'(x) > 0$, $E_i'(x) < 0$, $i = 1, 2$, $x \in [\alpha, \beta]$, *причем* $E_0(\alpha) = \gamma_1$, $E_0(\beta) = \gamma_2$.

Доказательство. Справедливость утверждения 3 следует из свойств (a)–(d) функции $D(y)$ и теоремы о неявной функции. Перепишем задачу (5) в виде

$$H(E, x) = 0, \tag{6}$$

где $H(E,x) = g_1'(x) + g_1(x)E - D^{-1}(E)$. Используя теорему о неявной функции для уравнения (6) и условия (2) из утверждения 3, получаем, что уравнение (6) имеет ровно три положительных решения $E_1(x) < E_0(x) < E_2(x)$, причем $H_E'(E,x) < 0$ при $E \in (y_{\max}, y_{\min})$ и при любом $x \in [\alpha, \beta]$, $H_x'(E,x) > 0$ при любом $x \in [\alpha, \beta]$ и $E > 0$. Следовательно, $E_0'(x) > 0$, а $E_i(x) < 0$, $i = 1, 2$, при $x \in [\alpha, \beta]$, причем $E_0(\alpha) = \gamma_1$, $E_0(\beta) = \gamma_2$. $\square$

Основное предположение. Будем считать, что монотонно возрастающее решение $E_0(x)$ уравнения (5) совпадает с решением краевой задачи (4).

В этом случае $E_0(x)$ является тривиальным решением краевой задачи (3).

Сделаем замену $E(x) = E_0(x) + u(x)$, тогда задача (3) эквивалентна следующей краевой задаче

$$\begin{cases} Lu = jg(x)u + N(x,u), \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $Lu = -u'' - (E_0 u)' + g_0 u$ – линейный оператор из пространства $X = C_0^{(2)}([\alpha, \beta])$ в $Y = C([\alpha, \beta])$, $g(x) = -\dfrac{D'(E_0(x))}{D^2(E_0(x))} - g_1(x)$, и оператор $N(x,u) = j\left[D^{-1}(|E_0 + u|) - D^{-1}(E_0) + \dfrac{D'(E_0)}{D^2(E_0)}u\right] + u'u$ – нелинейный оператор из X в Y, причем $N(x,0) = 0$, $N_u(x,0) = 0$.

Обозначим через S замыкание множества всех нетривиальных решений $(j,u) \in R \times X$ задачи (7) и пусть S_k – максимальная компонента связности множества S, содержащая точку $(j_k, 0)$, где j_k, $k = 1, 2, \ldots$, – собственные числа линейной задачи

$$\begin{cases} Lu = jg(x)u, \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Теорема 1. *Предположим, что выполнены все условия утверждения* 3. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) для любого $k \in N$ множество S_k неограничено в $R \times X$;

(ii) если $(f,u) \in S_k$ и $u \not\equiv 0$, то решение $u(x)$ имеет ровно $(k+1)$ нулей на $[\alpha, \beta]$, причем все нули простые;

(iii) для любого $k \in N$ существуют константы $s_k > 0$, окрестность $U_k \subset R \times X$ решения $(j_k, 0)$ и два $C^{(1)}$ – отображения $\hat{j}_k$: $(-s_k, s_k) \to R$, $\hat{u}_k$: $(-s_k, s_k) \to X$, такие, что $\hat{j}_k(s) = j_k + O(s)$, $\hat{u}_k(s) = su_k(x) + O(s^2)$ при $s \to 0$ и $S \cap U_k = \{(\hat{j}_k(s), \hat{u}_k(s)) : |s| < s_k\}$, где $u_k(x)$ – собственные функции линейной краевой задачи (8);

(*Эти решения называются бифуркационными* [4].)

Доказательство. Теорема доказывается так же, как теорема 1 из [1] с использованием теоремы 2.3 из [4]. Заметим, что условие отрицательной дифференциальной проводимости функции $D(y)$ и положительность функций $g_1'(x)$ и $E_0(x)$ гарантируют положительность функции $g(x)$ на $[\alpha, \beta]$. Утверждение (iii) следует из теоремы 2.3 [4] о бифуркациях в случае алгебраически простых собственных значениях. Докажем (ii). Обозначим через M_k множество всех $u \in X$, таких, что u имеет ровно $(k+1)$ нулей на $[\alpha, \beta]$ и все нули простые. Мы должны показать, что

$$\{(j, u) \in S_k : \; u \neq 0\} \subset R \times M_k. \tag{9}$$

Согласно (iii) для произвольного $l \in N$ имеем $S_l \neq \emptyset$ и

$$\{(j, u) \in S \cap U_l : \; u \neq 0\} \subset R \times M_l, \tag{10}$$

если окрестность U_l достаточно мала. Более того, M_l открыто в X. Следовательно, существует пара $(j, u) \in S_k \cap (R \times \partial M_k)$, причем

$$(j, u) \neq (j_k, 0), \tag{11}$$

если не выполнено (9). Для $u \in S_k$ имеем

$$Lu = jg(x)u + N(x, u), \quad x \in [\alpha, \beta]. \tag{12}$$

Из условия $u \in \partial M_k$ следует, что $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ для некоторого $x_0 \in [\alpha, \beta]$. В силу единственности задачи Коши для уравнения (12) имеем $u(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, существуют нетривиальные решения задачи (7) достаточно близкие к $(j_l, 0)$ и, следовательно, $j \in \mathrm{spec} L$. Из (11) мы получаем, что $j = j_l$, $l \neq k$. Таким образом, существуют решения задачи (7) достаточно близкие к $(j_l, 0)$, которые принадлежат $R \times M_k$. Но это противоречит (10).

Докажем (i). Предположим противное. Тогда согласно теореме 2.3 [4] имеем, что $(j_l, 0) \in S_k$, $k \neq l$. Но это противоречит (9) и (10). □

Покажем теперь, что каждое бифуркационное решение продолжимо по параметру $j > j_k$, $k = 1, 2, ...$, для чего докажем следующее.

Утверждение 4. *Существует такая непрерывная положительная функция* $\mu(j)$*:* $R_+ \to R_+$*, что для любого решения* (j, u) *задачи* (7) *выполняется неравенство*

$$\|u\|_X(j) \leq \mu(j). \tag{13}$$

Доказательство. Запишем задачу (3) в виде

$$\begin{cases} -E'' + E(f(x) - E') = j(D^{-1}(|E|) - g_1'(x)), \\ E(\alpha) = \gamma_1, \quad E(\beta) = \gamma_2. \end{cases}$$

Сделаем замену $E(x) = E_0(x) + u(x)$, тогда получим

$$\begin{cases} -u'' - E_0 u' = -ur(u) + jh(u), \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

где $r(u) = f(x) - E_0'(x) - u'(x)$, $h(u) = D^{-1}(|E_0 + u|) - D^{-1}(E_0)$. Заметим, что поскольку плотность электронов $n(x)$ неотрицательна, то при любом $x \in [\alpha, \beta]$ $r(u) \geq 0$, а в силу свойств (a)–(d) коэффициента диффузии D функция $h(u)$ – ограниченная функция от u.

Теперь легко получается оценка

$$c_1 \|u\|_{L_2}^2 \leq (Lu, u) \leq jc_2 \|u\|_{L_2} + c_3 \|u\|_{L_2}, \quad c_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $Lu = -u'' - E_0 u'$. Следовательно, $\|u\|_{L_2} \leq j\widetilde{c}_2 + \widetilde{c}_3$. Из последних двух оценок следует, что норма $\|u'\|_{L_2}$ ограничена, а значит, есть аналогичная оценка в $C^{(0)}([\alpha, \beta])$-норме. Далее, используя (14) и ограниченность $\|u\|_{L_2}$, $\|u'\|_{L_2}$, получим ограниченность $\|u''\|_{L_2}$. Эта же оценка справедлива для $u(x)$ в $C^{(1)}([\alpha, \beta])$-норме. Оценивая теперь равномерную норму $u''(x)$ из (14), получим требуемую оценку (13). $\square$

Из утверждения (i) теоремы 1 и утверждения 4 следует, что бифуркационные решения, полученные в утверждении (iii) теоремы 1, продолжимы по параметру j при любом $j > j_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Исследуем теперь поведение бифуркационных решений при $j \to +\infty$, т. е. при больших концентрациях примеси. Пусть $u_k(x, j)$ – бифуркационные решения задачи (7), тогда $E_k(x, j) = u_k(x, j) + E_0(x)$ назовем бифуркационными решениями задачи (3), $k = 1, 2, \ldots$.

Утверждение 5. *При любом $x \in [\alpha, \beta]$ и любом $j > j_k$, $k = 1, 2, \ldots$, выполняется неравенство $0 < E_k(x, j) < E_2(x)$, т. е. все бифуркационные решения задачи (3) остаются в некотором компактном множестве.*

Доказательство. Перепишем задачу (3) в виде

$$\begin{cases} E'' + E'E - g_0 E = jH(E, x), \\ E(\alpha) = \gamma_1, \quad E(\beta) = \gamma_2, \end{cases}$$

где

$$H(E, x) = g_1'(x) + g_1 E - D^{-1}(|E|). \tag{15}$$

Пусть $E_k(x, j)$ – бифуркационное решение задачи (3). Предположим противное. Тогда найдется такая точка $x_0 \in (\alpha, \beta)$, что x_0 – локальный максимум решения $E_k(x, j)$ и $E_k(x_0, j) = E_2(x_0)$. Следовательно, $E_k''(x_0, j) \leq 0$, $E_k'(x_0, j) = 0$, $E_k(x_0, j) > 0$, но $H(E_2(x_0), x_0) = 0$, что невозможно в силу уравнения (15). Тем самым доказана оценка $E_k(x, j) < E_2(x)$ при любом $x \in [\alpha, \beta]$.

Докажем теперь оценку $0 < E_k(x, j)$ при любом $x \in [\alpha, \beta]$. Предположим противное. Тогда найдется такая точка $x_1 \in (\alpha, \beta)$, что x_1 – локальный минимум решения $E_k(x, j)$ и $E_k(x_1, j) = 0$. Следовательно, $E_k''(x_1, j) \geq 0$, $E_k'(x_1, j) = 0$, но $H(0, x_1) < 0$, что невозможно в силу уравнения (15). $\square$

Список литературы

[1] L.Reche, "An example for bifurcation of solutions of the basic equations for carrier distribution in semiconductors", *Z. Angew. Math. Mech.,* **67** (1987), 269–271.

[2] E.Z.Borevich, V.M.Chistyakov, "Nonlinear boundary value problems describing mobile carrier transport in semiconductor devices", *J. Appl. Math.,* **46** (2001), no. 5, 383–400.

[3] К. Чанг, Ф. Хауэс, *Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи,* М.: Мир (1988).

[4] P. H. Rabinowitz, " Some global results for nonlinear eigenvalue problems", *J. Funct. Anal.* **7** (1971), 487–513.