ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№2, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.925.54

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ МНОГОЧЛЕНЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ПРИТЯГИВАЮЩЕЕ ИНВАРИАНТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

А. В. Братищев

Донской государственный технический университет

Аннотация

Пусть автономная система имеет притягивающее в целом в смысле А.А.Колесникова инвариантное многообразие. На нем лежат все состояния равновесия системы. Получен явный вид собственных чисел (в количестве, равном коразмерности многообразия) матрицы линеаризации такого состояния. Это позволяет понизить степень характеристического многочлена и тем самым облегчить исследование топологического характера состояния. В частном случае инвариантной плоскости свойство быть притягивающей в целом в смысле Колесникова равносильно устойчивости в целом.

ключевые слова: автономная система, инвариантное множество, состояние равновесия, характеристический многочлен, собственное число.

Abstract

Let an autonomous system have an invariant global attracting in the sense of A. A. Kolesnikov manifold. Then all equilibrium states of the system belong to the set. For each state the explicit form of the eigenvalues of the linearization matrix (in the amount equal to the manifold codimensioin) was found. This allows us to reduce the power of characteristic polynomial and facilitates the study of the topological character of equilibrium. In the particular case of the invariant plane we prove that the above mentioned attracting as a whole is equivalent to global stability.

keywords: autonomous system, attracting invariant set, the state of equilibrium, characteristic polynomial, eigenvalue.

Введение

Пусть автономная система имеет состояние равновесия *O*, в котором все собственные числа матрицы линеаризации имеют неположительные вещественные части. Тогда в окрестности этой точки существует центральное инвариантное многообразие [1], и любая остающаяся в этой окрестности траектория, экспоненциально приближается к многообразию. В статье рассмотрена в определенном смысле обратная задача о влиянии асимптотической, в частности экспоненциальной, устойчивости инвариантного многообразия на значения собственных чисел состояний равновесия, находящихся на этом многообразии. Полученный результат доложен на конференции [2]. Случай трехмерной автономной системы он по существу рассмотрен в статье [3].

Формула вычисления характеристического многочлена

Пусть автономная система n-го порядка с правыми частями из класса гладкости C^r, $r \ge 1$,

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1,...,x_n) \\ \quad\quad . \quad . \quad . \\ x_n' = f_n(x_1,...,x_n) \end{cases}, \qquad (1)$$

имеет инвариантное множество Λ, являющееся $(n-m)$-мерным дифференцируемым многообразием [4]

$$\mathrm{L} := \left\{ \left(x_1, \dots, x_n \right) : \psi_1(x_1,...,x_n) = 0, \dots, \psi_m(x_1,...,x_n) = 0 \right\}$$

Предполагается, что оно будет притягивающим в целом в том смысле (в смысле А.А.Колесникова [3]), что для каждой её траектории $x(t) := \left(x_1(t), ,\dots, x_n(t) \right)$

$$\lim_{t+\infty} \psi_1\left(x_1(t), ,\dots, x_n(t) \right) = \dots = \lim_{t+\infty} \psi_m\left(x_1(t), ,\dots, x_n(t) \right) = 0. \qquad (2)$$

Каждое состояние равновесия $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ такой системы необходимо лежит на L и потому $rangD_\Psi := rang\left(\psi'_{ix_j} \right) = m$ в этих точках. Считаем для определенности

$$\Delta = \Delta_{i_1 \dots i_m} := \left| \begin{matrix} \psi'_{1x_{i_1}} & \psi'_{1x_{i_m}} \\ \psi'_{mx_{i_1}} & \psi'_{mx_{i_m}} \end{matrix} \right|\Bigg|_{(x_1^0,...,x_n^0)} \ne 0.$$

Потребуем, чтобы функции $\psi_1(x_1,...,x_n),...,\psi_m(x_1,...,x_n)$ на траекториях системы удовлетворяли дифференциальным уравнениям вида

$$\psi'_{1t} = g_1(\psi_1), \ \dots \ ,\psi'_{mt} = g_m(\psi_m),$$

где $g_1(0) = ... = g_m(0) = 0$, а нулевые состояния равновесия этих уравнений были устойчивы в целом [5]. Последние равенства (на траекториях системы) продифференцируем по переменной t:

$$\begin{cases} \psi'_{1x_1} f_1 + ... + \psi'_{1x_n} f_n = \psi'_{1x_1} x'_1 + ... + \psi'_{1x_n} x'_n = g_1(\psi_1(x_1,...,x_n)) \\ \quad . \quad . \quad . \\ \psi'_{mx_1} f_1 + ... + \psi'_{mx_n} f_n = \psi'_{mx_1} x'_1 + ... + \psi'_{mx_n} x'_n = g_m(\psi_m(x_1,...,x_n)) \end{cases},$$

и разрешим линейную систему относительно функций $f_{i_1}, ..., f_{i_m}$ в окрестности $(x_1^0,...,x_n^0)$ по формулам Крамера :

$$\begin{cases} f_{i_1} = \sum_{l=1}^{m} \left(g_l(\psi_l) - \sum_{j \neq i_1,...,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j \right) \dfrac{A_{l,1}}{\Delta} \\ \quad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_{i_m} = \sum_{l=1}^{m} \left(g_l(\psi_l) - \sum_{j \neq i_1,...,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j \right) \dfrac{A_{l,m}}{\Delta} \end{cases}$$

Здесь $A_{l,k}$ - алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении l-ой строки и k-го столба определителя Δ.

Подставим полученные решения в правые части соответствующих уравнений системы (1):

$$\begin{cases} x'_1 = f_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x'_{i_1} = \sum_{l=1}^{m} \left(g_l(\psi_l) - \sum_{j \neq i_1,...,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j \right) \dfrac{A_{l,1}}{\Delta} =: \tilde{f}_{i_1} \\ x'_{i_1+1} = f_{i_1+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x'_{i_m} = \sum_{l=1}^{m} \left(g_l(\psi_l) - \sum_{j \neq i_1,...,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j \right) \dfrac{A_{l,m}}{\Delta} =: \tilde{f}_{i_m} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x'_n = f_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases} . \qquad (3)$$

Очевидно, её состояния равновесия там, где $\Delta \neq 0$, будут решениями следующей системы уравнений

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ . \quad . \quad . \\ \psi_1 = 0 \\ f_{i_1+1} = 0 \\ . \quad . \quad . \\ \psi_m = 0 \\ . \quad . \quad . \\ f_n = 0 \end{cases} . \qquad (4)$$

ТЕОРЕМА Характеристический многочлен матрицы Якоби для состояния равновесия $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ системы (1) вычисляется по формуле

$$p(\lambda) = (\lambda - g'_{1\psi_1}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - g'_{m\psi_m}) \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \lambda - f'_{1x_1} & \ldots & -f'_{1x_{i_1}} & \ldots & -f'_{1x_{i_m}} & \ldots & -f'_{1x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \psi'_{1,x_1} & \ldots & \psi'_{1,x_{i_1}} & \ldots & \psi'_{1,x_{i_m}} & \ldots & \psi'_{1,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \psi'_{m,x_1} & \ldots & \psi'_{m,x_{i_1}} & \ldots & \psi'_{m,x_{i_m}} & \ldots & \psi'_{m,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -f'_{nx_1} & \ldots & -f'_{nx_{i_1}} & \ldots & -f'_{nx_{i_m}} & \ldots & \lambda - f'_{nx_n} \end{vmatrix} \qquad (5).$$

Доказательство. Составим матрицу Якоби правой части системы (3), и вычислим ее в состоянии равновесия.

$$\left.\begin{pmatrix} f'_{1x_1} & \ldots & f'_{1x_n} \\ . & . & . \\ \tilde{f}'_{i_1x_1} & \ldots & \tilde{f}'_{i_1x_n} \\ . & . & . \\ \tilde{f}'_{i_mx_1} & \ldots & \tilde{f}'_{i_mx_n} \\ . & . & . \\ f'_{nx_1} & \ldots & f'_{nx_n} \end{pmatrix}\right|_{x^0} =: \begin{pmatrix} f'_{1x_1} & \ldots & f'_{1x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{l=1}^{m}\left(g'_{lx_1} - \sum\limits_{j\neq i_1,\ldots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{jx_1}\right)\frac{A_{l,1}}{\Delta} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{m}\left(g'_{lx_n} - \sum\limits_{j\neq i_1,\ldots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{jx_n}\right)\frac{A_{l,1}}{\Delta} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{l=1}^{m}\left(g'_{lx_1} - \sum\limits_{j\neq i_1,\ldots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{jx_1}\right)\frac{A_{l,m}}{\Delta} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{m}\left(g'_{lx_n} - \sum\limits_{j\neq i_1,\ldots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{jx_n}\right)\frac{A_{l,m}}{\Delta} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_{nx_1} & \ldots & f'_{nx_n} \end{pmatrix}.$$

Образуем характеристический многочлен этой матрицы.

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-f'_{1x_1} & \dots & -f'_{1x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m}\psi'_{l,x_j}f'_{jx_1}-g'_{lx_1}\right)\frac{A_{l,1}}{\Delta} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m}\psi'_{l,x_j}f'_{jx_n}-g'_{lx_n}\right)\frac{A_{l,1}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m}\psi'_{l,x_j}f'_{jx_1}-g'_{lx_1}\right)\frac{A_{l,m}}{\Delta} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m}\psi'_{l,x_m}f'_{jx_n}-g'_{lx_n}\right)\frac{A_{l,m}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ -f'_{nx_1} & \dots & \lambda-f'_{1x_n} \end{vmatrix}.$$

Исключая в строках $i_1,\dots,i_m$ слагаемые с множителями f'_{jx_k} с помощью остальных строк, приходим к следующему виду

$$\begin{vmatrix} \lambda-f'_{1x_1} & \dots & -f'_{1x_{i_1}} & \dots & -f'_{1x_{i_m}} & \dots & -f'_{1x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \sum\limits_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_1}-g'_{lx_1})\frac{A_{l,1}}{\Delta} & \dots & \lambda-\sum\limits_{l=1}^{m}g'_{lx_{i_1}}\frac{A_{l,1}}{\Delta} & \dots & -\sum\limits_{l=1}^{m}g'_{lx_{i_m}}\frac{A_{l,1}}{\Delta} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_n}-g'_{lx_n})\frac{A_{l,1}}{\Delta} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \sum\limits_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_1}-g'_{lx_1})\frac{A_{l,m}}{\Delta} & \dots & -\sum\limits_{l=1}^{m}g'_{lx_{i_1}}\frac{A_{l,m}}{\Delta} & \dots & \lambda-\sum\limits_{l=1}^{m}g'_{lx_{i_m}}\frac{A_{l,m}}{\Delta} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_n}-g'_{lx_n})\frac{A_{l,m}}{\Delta} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -f'_{nx_1} & \dots & -f'_{nx_{i_1}} & \dots & -f'_{nx_{i_m}} & \dots & \lambda-f'_{nx_n} \end{vmatrix}.$$

Представим определитель Δ в виде

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \psi'_{1x_{i_1}} & \dots & \psi'_{1x_{i_m}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \psi'_{mx_{i_1}} & \dots & \psi'_{mx_{i_m}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

и умножим его слева на предыдущий определитель. А затем используем свойства алгебраических дополнений [6]. $\Delta\cdot p(\lambda)=$

$$\begin{vmatrix} \lambda - f'_{1x_1} & \dots & -f'_{1x_{i_1}} & \dots & -f'_{1x_{i_m}} & \dots & -f'_{1x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \sum\limits_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_1} - g'_{lx_1})\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{1,x_{i_k}} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_{i_1}} - \sum\limits_{l=1}^{m} g'_{lx_{i_1}}\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{1,x_{i_k}} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_{i_m}} - \sum\limits_{l=1}^{m} g'_{lx_{i_m}}\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{1,x_{i_k}} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_n} - g'_{lx_n})\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{1,x_{i_k}} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \sum\limits_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_1} - g'_{lx_1})\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{m,x_{i_k}} & \dots & \lambda\psi'_{m,x_{i_1}} - \sum\limits_{l=1}^{m} g'_{lx_{i_1}}\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{m,x_{i_k}} & \dots & \lambda\psi'_{m,x_{i_m}} - \sum\limits_{l=1}^{m} g'_{lx_{i_m}}\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{m,x_{i_k}} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_n} - g'_{lx_n})\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{m,x_{i_k}} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -f'_{nx_1} & \dots & -f'_{nx_{i_1}} & \dots & -f'_{nx_{i_m}} & \dots & \lambda - f'_{nx_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - f'_{1x_1} & \dots & -f'_{1x_{i_1}} & \dots & -f'_{1x_{i_m}} & \dots & -f'_{1x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda\psi'_{1,x_1} - g'_{1x_1} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_{i_1}} - g'_{1x_{i_1}} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_{i_m}} - g'_{1x_{i_m}} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_n} - g'_{1x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda\psi'_{m,x_1} - g'_{mx_1} & \dots & \lambda\psi'_{m,x_{i_1}} - g'_{mx_{i_1}} & \dots & \lambda\psi'_{m,x_{i_m}} - g'_{mx_{i_m}} & \dots & \lambda\psi'_{m,x_n} - g'_{mx_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -f'_{nx_1} & \dots & -f'_{nx_{i_1}} & \dots & -f'_{nx_{i_m}} & \dots & \lambda - f'_{nx_n} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - g'_{1\psi_1})\cdot\ldots\cdot(\lambda - g'_{m\psi_m})\cdot \begin{vmatrix} \lambda - f'_{1x_1} & \dots & -f'_{1x_{i_1}} & \dots & -f'_{1x_{i_m}} & \dots & -f'_{1x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \psi'_{1,x_1} & \dots & \psi'_{1,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{1,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{1,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \psi'_{m,x_1} & \dots & \psi'_{m,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{m,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{m,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -f'_{nx_1} & \dots & -f'_{nx_{i_1}} & \dots & -f'_{nx_{i_m}} & \dots & \lambda - f'_{nx_n} \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 В частном случае $\psi_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + b_i,\ i = 1,\ldots m$, устойчивость инвариантного многообразия Λ в целом в смысле Колесникова совпадает с асимптотической устойчивостью инвариантного многообразия в целом [7]. Это следует из формулы расстояния от точки $x_0 = \left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ до гиперплоскости L_i в евклидовом пространстве $\rho(x^0,\mathrm{L}_i) = \dfrac{|\,a_{i1}x_1^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 + b_i\,|}{\sqrt{a_{i1}^2 + \ldots + a_{in}^2}}$ [8]. Действительно, если расстояние от изображающей точки до многообразия стремится к нулю, то расстояние до каждой из гиперплоскостей L_i стремится к нулю. Отсюда по формулам расстояния $\psi_i(x(t)) = a_{i1}x_1(t) + ... + a_{in}x_n(t) + b_i \to 0$.

Обратно, если последнее имеет место, то $\rho(x(t), \mathrm{L}_i) = \dfrac{|\psi_i(x(t))|}{\sqrt{a_{i1}^2 + ... + a_{in}^2}} \to 0$.

Расстояние от $x(t)$ до $\mathrm{L} = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{L}_i$ достигается в точке $x^t \in \mathrm{L}$, причем $\overline{x(t)x^t} \perp \mathrm{L}$ [8].

Обозначим $\bar{a}_i = \{a_{i1}, ..., a_{in}\}$ вектор нормали к гиперплоскости L_i. Тогда $\forall i \le m$

$$\rho(x(t), \mathrm{L}_i) = \rho(x(t), \mathrm{L})\cos\left(\overline{x(t)x^t}, \bar{a}_i\right) \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{m}\rho^2(x(t), \mathrm{L}_i) = \rho^2(x(t), \mathrm{L})\sum_{i=1}^{m}\cos^2\left(\overline{x(t)x^t}, \bar{a}_i\right).$$

Косинусы непрерывно зависят от точки $x(t)$ и одновременно не обращаются нуль. Потому сумма их квадратов равномерно ограничена снизу каким-то положительным числом ε. Тогда из последнего равенства

$$\rho(x(t), \mathrm{L}) < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\rho^2(x(t), \mathrm{L}_i)},$$

что и доказывает наше утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 В частном случае $g_k(x) = -\dfrac{x}{T_k},\; k = 1, ..., m$ решение

соответствующего дифференциального уравнения $\psi_k' = -\dfrac{1}{T_k}\psi_k$ на траекториях

системы имеет вид $\psi_k(x_1(t), ..., x_m(t)) = C_k e^{\frac{-t}{T_k}}$. В этом случае можно говорить об экспоненциальной устойчивости инвариантного множества Λ в смысле Колесникова по аналогии с экспоненциальной устойчивостью в смысле Зубова.

Продемонстрируем теорему на примере из [9]. Автономная система

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_3' = -2x_3 \end{cases}$$

имеет инвариантное многообразие Λ, задаваемое уравнением

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = x_3 - Ce^{\frac{-1}{x_1^2 + x_2^2}} = 0,\; \psi(0,0,0) := 0.$$

Нетрудно проверить, что последняя функция удовлетворяет уравнению $\psi_t' = -2\psi$ на траекториях системы, а многообразие дифференцируемо во всех своих точках. Согласно последнему замечанию оно будет притягивающим в целом в смысле Колесникова. Так как $\Delta := \psi_{x_3}'(x_1, x_2, x_3) \equiv 1$, то состояния равновесия являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} f_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ f_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ \psi = x_3 - C\exp\{-1/x_1^2 + x_2^2\} = 0 \end{cases}.$$

Её решение $x^0 = (0,0,0,)$ единственное. Согласно доказанной теореме характеристический многочлен матрицы линеаризации в этом состоянии можно вычислить по формуле

$$p(\lambda) = (\lambda+2)\cdot\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{vmatrix} \lambda - f'_{1x_1} & -f'_{1x_2} & -f'_{1x_3} \\ -f'_{1x_1} & \lambda - f'_{1x_1} & -f'_{1x_1} \\ \psi'_{x_1} & \psi'_{x_2} & \psi'_{x_3} \end{vmatrix}_{(0,0,0)} =$$

$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda + 4x_1^2 + x_2^2 & 1 + 2x_1x_2 & 0 \\ -1 + 2x_1x_2 & \lambda + x_1^2 + 4x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{(0,0,0)} = (\lambda+2)(\lambda^2+1).$$

В соответствии с определением Λ являются центральными инвариантными многообразиями [1] . Подпространство $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ является инвариантным, сильно устойчивым и трансверсальным к центральному многообразию. Все не лежащие в нем траектории экспоненциально приближаются к центральному многообразию.

Список литературы

[1] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2.* Издательство Институт компьютерных исследований. Москва-Ижевск, 2009, 548 с.

[2] Братищев А.В. Критерий устойчивости положений равновесия синергетичесого регулятора. Общий случай. *Тезисы конференции «VI Russian-Armenian Conference on Mathematical Analysis, Mathematical Physics and Analytical Mechanics»,*Ростов-на-Дону, 11-16.09.2016, с. 2-3. ISBN: 978-5-7890-1160-7. Режим доступа: http://rus-arm.sfedu.ru/.

[3] Братищев А.В. Три математические задачи из синергетической теории управления. *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* №2, 2016, 16-30. http://www.math.spbu.ru/diffjournal/RU/numbers/2016.2/issue.html

[4] Спивак М. *Математический анализ на многообразиях*. Издательство Лань, Санкт-Петербург, 2005, 160 с.

[5] Колесников А.А. *Последовательная оптимизация нелинейных агрегированных систем управления*. Энергоатомиздат, Москва,1987, 160 с.

[6] Курош А.Г *Курс высшей алгебры*. Издательство Наука, Москва, 1975, 432 с.

[7] Зубов В.И. *Устойчивость движения*. Издательство Высшая школа. Москва. 1973, 272 с.

[8] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. *Линейная алгебра и многомерная геометрия*.

Издательство Наука, Москва, 1970, 528 с.
[9] Плисс В. А. Принцип сведения в теории устойчивости движения. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1964, том 28, выпуск 6, 1297–1324.