ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N.3, 2019
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений
Управление колебаниями и хаосом
Компьютерное моделирование динамических и управляемых систем

ФАКТОРИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ИНВАРИАНТНОЕ МНОЖЕСТВО

А. В. Братищев
Донской государственный технический университет
avbratishchev@spark-mail.ru

Аннотация

В работе получен критерий того, что дифференцируемое многообразие является инвариантным множеством автономной системы дифференциальных уравнений n-го порядка. Пусть автономная система имеет инвариантное множество. В работе предложена формула факторизации характеристического многочлена матрицы Якоби для состояния равновесия, лежащего в этом множестве, на два многочлена меньшей степени с явно вычисляемыми коэффициентами. Эта формула используется далее в задаче синтеза управления перевернутым маятником на подвижной тележке. Методом аналитического конструирования агрегированного регулятора найдено одноуровневое нелинейное управление, стабилизирующее маятник в вертикальном положении для достаточно больших начальных отклонений.

ключевые слова: автономная система, инвариантное множество, состояние равновесия, характеристический многочлен, матрица Якоби, агрегированная переменная, перевернутый маятник.

Abstract

Let an autonomous n-th order system of differential equations have an invariant set. For an equilibrium point being on this set, we form the Jacobi matrix in this point and prove the formula for the factorization of the characteristic polynomial in two polynomials of lesser degrees. Such a factorization is useful in the problem of the design of controllers of dynamical systems. The proposed formula is applied to solve the known problem of controlling an inverted pendulum on a movable trolley. By using the method of analytical design of aggregated regulators we construct a single-level nonlinear control stabilizing the pendulum in vertical position for sufficiently large initial deviations.

keywords: autonomous system, invariant set, state of equilibrium, characteristic polynomial, Jacobi matrix, aggregated variable, inverted pendulum.

п.1. Пусть дана автономная система n-го порядка с правыми частями из класса гладкости C^r, $r \ge 1$,

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1,\ldots,x_n) =: f_1(x) \\ \quad . \quad . \quad . \qquad\qquad . \\ x_n' = f_n(x_1,\ldots,x_n) =: f_n(x) \end{cases} \qquad (1)$$

Как известно, функция $\psi(x)$ является полным интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда её производная в силу системы (1) тождественно равна нулю. Геометрически это означает, что каждое множество $\mathcal{L}_c := \{x : \psi(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, является инвариантным: решение задачи Коши с начальными данными $x_0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0) \in \mathcal{L}_c$ всегда лежит на этом множестве.

Более общим является вопрос, когда $\psi(x)$ является частным интегралом: множество $\mathcal{L} = \{x : \psi(x) = 0\}$ инвариантно? Он актуален в обратных задачах динамики и синергетической теории управления [1]-[3].

Заметим, что обратная задача об описании всех дифференциальных уравнений, имеющих заданное множество инвариантным, впервые была рассмотрена в [4].

В этом пункте устанавливается признак наличия у системы (1) инвариантного множества.

ЛЕММА. Рассмотрим $(n-m)$-мерное дифференцируемое многообразие

$$\mathcal{L} := \{(x_1,\ldots,x_n) : \psi_1(x_1,\ldots,x_n) = 0,\ldots,\psi_m(x_1,\ldots,x_n) = 0\}, \quad m < n, \quad (2)$$

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \quad rang\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n)\right) = m.$$

Пусть функции $\psi_1,\ldots,\psi_m$ и правые части системы (1) связаны соотношениями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} f_1(x) + \ldots + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} f_n(x) = \Phi_1(\psi_1,\ldots,\psi_m, x_1,\ldots,x_n) \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \\ \dfrac{\partial \psi_m}{\partial x_1} f_1(x) + \ldots + \dfrac{\partial \psi_m}{\partial x_n} f_n(x) = \Phi_m(\psi_1,\ldots,\psi_m, x_1,\ldots,x_n) \end{cases}, \qquad (3)$$

где $\Phi_i(0,\ldots,0,x_1,\ldots,x_n) \equiv 0$, $i = 1,\ldots,m$. Обозначим $x(t,x_0) = (x_1(t,x_0),\ldots,x_n(t,x_0))$ решение задачи Коши для системы (1) с начальным условием $x(0,x_0) = x_0$. Пусть $\forall x_0 \in \mathcal{L}$ и соответствующей вообще говоря неавтономной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_{1,t}' = \Phi_1(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t), x_1(t,x_0),\ldots,x_n(t,x_0)) \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \\ \varphi_{m,t}' = \Phi_m(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t), x_1(t,x_0),\ldots,x_n(t,x_0)) \end{cases} \qquad (4)$$

задача Коши $\varphi_1(0)=\ldots=\varphi_m(0)=0$ имеет единственное (нулевое) решение. Тогда $\mathcal{L}$ является инвариантным множеством системы (1).

Доказательство. Нужно доказать, что

$$\forall x_0\in\mathcal{L}\quad \forall t\ge 0\quad \begin{cases}\psi_1(x_1(t,x_0),\ldots,x_n(t,x_0))\equiv 0\\ \quad\ldots\\ \psi_m(x_1(t,x_0),\ldots,x_n(t,x_0))\equiv 0\end{cases}. \qquad (5)$$

Обозначим $\varphi_i(t):=\psi_i(x_1(t,x_0),\ldots,x_n(t,x_0)),\ i=1,\ldots,m$. Тогда в силу (1), (4) имеем

$$\begin{cases}\varphi'_{1,t}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_k}(x_k(t,x_0))'_t=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_k}f_k(x(t,x_0))=\Phi_1\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t),x_1(t,x_0),\ldots,x_n(t,x_0)\right)\\ \quad\ldots\\ \varphi'_{m,t}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_k}(x_k(t,x_0))'_t=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_k}f_k(x(t,x_0))=\Phi_m\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t),x_1(t,x_0),\ldots,x_n(t,x_0)\right)\end{cases}$$

То есть функции $\varphi_i(t)$ являются решением системы уравнений (4), причем с начальным условием $\varphi_i(0):=\psi_i(x_1^0,\ldots,x_n^0)=0,\ i=1,\ldots,m$. В силу единственности решения этой задачи Коши получаем требуемое равенство (5).

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ Если функции, определяющие многообразие (2), и правые части системы (1) связаны соотношениями вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}f_1(x)+\ldots+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n}f_n(x)=\Phi_1(\psi_1,\ldots,\psi_m)\\ \quad\ldots\\ \dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_1}f_1(x)+\ldots+\dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_n}f_n(x)=\Phi_m(\psi_1,\ldots,\psi_m)\end{cases},$$

где $\Phi_i(0,\ldots,0)=0\ \ i=1,\ldots,m$, то вместо (4) нужно потребовать, чтобы задача Коши $\varphi_1(0)=\ldots=\varphi_m(0)=0$ для автономной системы

$$\begin{cases}\varphi'_{1,t}=\Phi_1(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)\\ \quad\ldots\\ \varphi'_{m,t}=\Phi_m(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)\end{cases} \qquad (6)$$

имела единственное (нулевое) решение.

п.2. Пусть автономная система (1) имеет инвариантное множество (2), для которого выполнены условия леммы. В предположении аналитичности функций Φ_i в окрестности начала координат по всем переменным, из условия $\Phi_i(0,\ldots,0,x_1,\ldots,x_n)\equiv 0\ \ i=1,\ldots,m$ следуют равенства

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_1}(0,\ldots,0,x_1,\ldots,x_n)\equiv 0,\ldots,\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_n}(0,\ldots,0,x_1,\ldots,x_n)\equiv 0,\ \ i=1,\ldots,m. \qquad (7)$$

Пусть точка $x_0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)\in\mathcal{L}$ есть состояние равновесия системы (1), и

$$\Delta=\Delta_{i_1\ldots i_m}:=\left.\begin{vmatrix}\psi'_{1x_{i_1}} & \ldots & \psi'_{1x_{i_m}}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \psi'_{mx_{i_1}} & \ldots & \psi'_{mx_{i_m}}\end{vmatrix}\right|_{(x_1^0,\ldots,x_n^0)}\neq 0.$$

Тогда имеет место такое обобщение теоремы 2 статьи [5].

ТЕОРЕМА. Характеристический многочлен матрицы Якоби правой части (1) в точке x_0 можно факторизовать следующим образом

$$p(\lambda)=\frac{1}{\Delta}\cdot\left.\begin{vmatrix}\lambda-\Phi'_{1,\psi_1} & \ldots & -\Phi'_{1,\psi_k} & \ldots & -\Phi'_{1,\psi_m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\Phi'_{k,\psi_1} & \ldots & \lambda-\Phi'_{k,\psi_k} & \ldots & -\Phi'_{k,\psi_m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\Phi'_{m,\psi_1} & \ldots & -\Phi'_{m,\psi_k} & \ldots & \lambda-\Phi'_{m,\psi_m}\end{vmatrix}\right|_{x=x_0}\times$$

$$\times\left.\begin{vmatrix}\lambda-f'_{1,x_1} & \ldots & -f'_{1,x_{i_1}} & \ldots & -f'_{1,x_{i_m}} & \ldots & -f'_{1,x_n}\\ . & . & . & . & . & . & .\\ \psi'_{1,x_1} & \ldots & \psi'_{1,x_{i_1}} & \ldots & \psi'_{1,x_{i_m}} & \ldots & \psi'_{1,x_n}\\ . & . & . & . & . & . & .\\ \psi'_{m,x_1} & \ldots & \psi'_{m,x_{i_1}} & \ldots & \psi'_{m,x_{i_m}} & \ldots & \psi'_{m,x_n}\\ . & . & . & . & . & . & .\\ -f'_{n,x_1} & \ldots & -f'_{n,x_{i_1}} & \ldots & -f'_{n,x_{i_m}} & \ldots & \lambda-f'_{n,x_n}\end{vmatrix}\right|_{x=x_0}.$$

Доказательство. Схема доказательства та же, что и в упомянутой теореме. Поэтому мы приведем ту часть, которая связана с присутствием переменных $x_1,\ldots,x_n$ в функциях Φ_i. Разрешим линейную систему (3) относительно функций $f_{i_1},\ldots,f_{i_m}$ в окрестности $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$:

$$\begin{cases} f_{i_1}=\sum\limits_{l=1}^{m}\left(\Phi_l(\psi_1,\ldots,\psi_m,x_1,\ldots,x_n)-\sum\limits_{j\neq i_1,\ldots,i_m}\psi'_{l,x_j}f_j\right)\dfrac{A_{1,l}}{\Delta}\\ \quad .\ .\ .\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ f_{i_m}=\sum\limits_{l=1}^{m}\left(\Phi_l(\psi_1,\ldots,\psi_m,x_1,\ldots,x_n)-\sum\limits_{j\neq i_1,\ldots,i_m}\psi'_{l,x_j}f_j\right)\dfrac{A_{m,l}}{\Delta}\end{cases},$$

Где $A_{l,k}$ - алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении l-ой строки и k-го столба определителя Δ, и подставим полученные решения в правые части соответствующих уравнений системы (1):

$$\begin{cases} x_1' = f_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ x_{i_1}' = \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi_l(\psi_1,\dots,\psi_m,x_1,\dots,x_n) - \sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j \right) \dfrac{A_{1,l}}{\Delta} =: \tilde{f}_{i_1} \\ x_{i_1+1}' = f_{i_1+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ x_{i_m}' = \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi_l(\psi_1,\dots,\psi_m,x_1,\dots,x_n) - \sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j \right) \dfrac{A_{m,l}}{\Delta} =: \tilde{f}_{i_m} \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ x_n' = f_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{cases} \tag{8}$$

Заметим, что состояние равновесия $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ является решением системы

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \quad . \; . \; . \\ \psi_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ f_{i_1+1}(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \quad . \; . \; . \\ \psi_m(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \quad . \; . \; . \\ f_n(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{cases}.$$

Вычислим матрицу Якоби правой части системы (8) в точке x_0.

$$\left.\begin{pmatrix} f'_{1,x_1} & \dots & f'_{1,x_n} \\ . & . & . \\ \tilde{f}'_{i_1,x_1} & \dots & \tilde{f}'_{i_1,x_n} \\ . & . & . \\ \tilde{f}'_{i_m,x_1} & \dots & \tilde{f}'_{i_m,x_n} \\ . & . & . \\ f'_{n,x_1} & \dots & f'_{n,x_n} \end{pmatrix}\right|_{x_0} =: \begin{pmatrix} f'_{1,x_1} & \dots & f'_{1,x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi'_{l,x_1} - \sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_1} \right) \dfrac{A_{1,l}}{\Delta} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi'_{l,x_n} - \sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_n} \right) \dfrac{A_{1,l}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi'_{l,x_1} - \sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_1} \right) \dfrac{A_{m,l}}{\Delta} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi'_{l,x_n} - \sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_n} \right) \dfrac{A_{m,l}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ f'_{n,x_1} & \dots & f'_{n,x_n} \end{pmatrix}$$

Вычисление характеристического многочлена этой числовой матрицы, повторяют соответствующие выкладки в теореме 1 [5] до момента

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-f'_{1,x_1} & \dots & -f'_{1,x_{i_1}} & \dots & -f'_{1,x_{i_m}} & \dots & -f'_{1,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda\psi'_{1,x_1}-\Phi'_{1,x_1} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_{i_1}}-\Phi'_{1,x_{i_1}} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_{i_m}}-\Phi'_{1,x_{i_m}} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_n}-\Phi'_{1,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda\psi'_{m,x_1}-\Phi'_{m,x_1} & \dots & \lambda\psi'_{m,x_{i_1}}- & \dots & \lambda\psi'_{m,x_{i_m}}-\Phi'_{m,x_{i_m}} & \dots & \lambda\psi'_{m,x_n}-\Phi'_{m,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -f'_{n,x_1} & \dots & -f'_{n,x_{i_1}} & \dots & -f'_{n,x_{i_m}} & \dots & \lambda-f'_{n,x_n} \end{vmatrix}=.$$

Вычисляя производные Φ'_{i,x_j}, получаем

$$=\begin{vmatrix} \lambda-f'_{1,x_1} & \dots. & -f'_{1,x_{i_1}} & \dots \\ . & . & . & . \\ \lambda\psi'_{1,x_1}-\sum_{l=1}^{m}\Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_1}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_{i_1}}-\sum_{l=1}^{m}\Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_1}}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{i_1}} & \dots \\ . & . & . & . \\ \lambda\psi'_{m,x_1}-\sum_{l=1}^{m}\Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_1}-\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_1} & \dots & \lambda\psi'_{m,x_{i_1}}-\sum_{l=1}^{m}\Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_1}}-\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{i_1}} & \dots \\ . & . & . & . \\ -f'_{n,x_1} & \dots & -f'_{n,x_{i_1}} & \dots \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \dots & -f'_{1,x_{i_m}} & \dots & -f'_{1,x_n} \\ . & . & . & . \\ \dots & \lambda\psi'_{1,x_{i_m}}-\sum_{l=1}^{m}\Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_m}}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{i_m}} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_n}-\sum_{l=1}^{m}\Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_n}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \dots & \lambda\psi'_{m,x_{i_m}}-\sum_{l=1}^{m}\Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_m}}-\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{i_m}} & \dots & \lambda\psi'_{m,x_n}-\sum_{l=1}^{m}\Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_n}-\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \dots & -f'_{n,x_{i_m}} & \dots & \lambda-f'_{n,x_n} \end{vmatrix}=$$

Учитывая равенство (7), убираем слагаемые $\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}(0,\dots,0,x_1^0,\dots,x_n^0)$ в определителе:

$$
= \begin{vmatrix}
\lambda - f'_{1,x_1} & \cdots & -f'_{1,x_{i_1}} & \cdots & -f'_{1,x_{i_m}} & \cdots & -f'_{1,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\lambda\psi'_{1,x_1} - \sum_{l=1}^{m} \Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_1} & \cdots & \lambda\psi'_{1,x_{i_1}} - \sum_{l=1}^{m} \Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_1}} & \cdots & \lambda\psi'_{1,x_{i_m}} - \sum_{l=1}^{m} \Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_m}} & \cdots & \lambda\psi'_{1,x_n} - \sum_{l=1}^{m} \Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\lambda\psi'_{m,x_1} - \sum_{l=1}^{m} \Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_1} & \cdots & \lambda\psi'_{m,x_{i_1}} - \sum_{l=1}^{m} \Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_1}} & \cdots & \lambda\psi'_{m,x_{i_m}} - \sum_{l=1}^{m} \Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_m}} & \cdots & \lambda\psi'_{m,x_n} - \sum_{l=1}^{m} \Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
-f'_{n,x_1} & \cdots & -f'_{n,x_{i_1}} & \cdots & -f'_{n,x_{i_m}} & \cdots & \lambda - f'_{n,x_n}
\end{vmatrix}
$$

Дальнейшее доказательство теоремы повторяет соответствующий фрагмент доказательства теоремы 1 [5].

п.3. Рассмотрим задачу нахождения методом АКАР (аналитического конструирования агрегированных регуляторов) [6] аддитивного управления $u(x)$ для свободной системы (1)

$$
\begin{cases}
x_1' = f_1(x) + a_{11}(x)u_1(x) + \ldots + a_{1m}(x)u_m(x) =: f_1(x,u) \\
\quad . \quad . \quad . \\
x_n' = f_n(x) + a_{n1}(x)u_1(x) + \ldots + a_{nm}(x)u_m(x) =: f_n(x,u)
\end{cases} \qquad (9)
$$

с тем, чтобы управляемая система имела наперед заданное инвариантное множество (2). Агрегированные переменные $\psi_1,\ldots,\psi_m$ отыскиваются с условием

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} \psi'_{1,x_i} f_i(x,u) = \sum_{i=1}^{n} \psi'_{1,x_i} f_i(x) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi'_{1,x_i} a_{ik}(x) \right) u_k(x) = \Phi_1(\psi_1,\ldots,\psi_m) \\
\quad . \quad . \quad . \\
\sum_{i=1}^{n} \psi'_{m,x_i} f_i(x,u) = \sum_{i=1}^{n} \psi'_{m,x_i} f_i(x) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi'_{m,x_i} a_{ik}(x) \right) u_k(x) = \Phi_m(\psi_1,\ldots,\psi_m)
\end{cases},
$$

где $\Phi_1(0,\ldots,0) = \ldots = \Phi_m(0,\ldots,0) = 0$. В свою очередь функции Φ_i назначаются так, чтобы нулевое решение соответствующей системы (6) было асимптотически устойчивым.

Пусть последняя система m уравнений разрешима относительно неизвестных $u_1,\ldots,u_m$. Подставляя эти решения в (9), получаем в силу следствия к лемме искомую управляемую систему с инвариантным множеством $\mathcal{L}$, которую обозначим так

$$
\begin{cases}
x_1' = \tilde{f}_1(x) \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \\
x_n' = \tilde{f}_n(x)
\end{cases}
$$

Состояние равновесия $x_0 \in \mathcal{L}$ этой системы является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(x)=0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ \psi_1(x)=0 \\ \tilde{f}_{i_1+1}(x)=0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ \psi_m(x)=0 \\ \tilde{f}_{i_m+1}(x)=0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ \tilde{f}_n(x)=0 \end{cases}$$

в предположении $\left.\begin{vmatrix} \psi'_{1x_{i_1}} & \dots & \psi'_{1x_{i_m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi'_{mx_{i_1}} & \dots & \psi'_{mx_{i_m}} \end{vmatrix}\right|_{x=x_0} \neq 0$.

В случае $m=1$ управляемая система принимает такой вид

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x) + \dfrac{a_1(x)}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\psi'_{1,x_i}} \left(\Phi(\psi) - \sum\limits_{i=1}^{n} \psi'_{x_i} f_i(x) \right) =: \tilde{f}_1(x) \\ \quad . \quad . \quad . \qquad . \\ x'_n = f_n(x) + \dfrac{a_n(x)}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\psi'_{1,x_i}} \left(\Phi(\psi) - \sum\limits_{i=1}^{n} \psi'_{x_i} f_i(x) \right) =: \tilde{f}_n(x) \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ В прикладных задачах возникает вопрос, как выбрать агрегированную переменную $\psi(x)$, чтобы знаменатель правой части не обращался в ноль в определенной области G фазового пространства. Это можно сделать так: выбрать подходящую и не обращающуюся в ноль в точках G функцию $\omega(x)$, и решить уравнение в частных производных первого порядка
$a_1(x)\psi'_{x_1} + \ldots + a_n(x)\psi'_{x_n} = \omega(x)$.

Состояние равновесия $x_0 \in \mathcal{L}$ этой системы управления находится из решения системы уравнений

$$\begin{cases} \psi(x)=0 \\ f_1(x)-\dfrac{a_1(x)}{\omega(x)}\sum_{i=1}^{n}\psi'_{x_i}\, f_i(x)=0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ f_n(x)-\dfrac{a_n(x)}{\omega(x)}\sum_{i=1}^{n}\psi'_{x_i}\, f_i(x)=0 \end{cases}.$$

Заметим, что левые части последних n уравнений системы функционально зависима: их линейная комбинация с коэффициентами соответственно $\psi'_{x_1},\ldots,\psi'_{x_n}$ тождественно равна нулю.

Характеристический многочлен матрицы Якоби правой части системы управления по теореме 1 [5] факторизуется в состоянии равновесия x_0 таким образом

$$p(\lambda)=\frac{1}{\psi'_{x_1}(x_0)}\left(\lambda-\Phi'_{\psi}(0)\right)\begin{vmatrix} \psi'_{x_1}(x_0) & \psi'_{x_2}(x_0) & \ldots & \psi'_{x_n}(x_0) \\ -\tilde{f}'_{2,x_1}(x_0) & \lambda-\tilde{f}'_{2,x_2}(x_0) & \ldots & \tilde{f}'_{2,x_n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\tilde{f}'_{n,x_1}(x_0) & -\tilde{f}'_{n,x_2}(x_0) & \ldots & \lambda-\tilde{f}'_{n,x_n}(x_0) \end{vmatrix}$$

в предположении, например, $\psi'_{x_1}(x_0)\neq 0$.

п.4. Частным случаем рассмотренной в предыдущем пункте задачи управления является задача управления перевернутым маятником на подвижной тележке [7]. Уравнение движения управляемой системы (регулятора) имеет вид

$$\begin{cases} x'_{1,t}=x_2 \\ x'_{2,t}=\dfrac{m l l_0 x_4^2\sin x_3-m l g\cos x_3\sin x_3+l_0(u-\mu x_2)}{(M+m)l_0-ml\cos^2 x_3}=:A+\dfrac{l_0}{(M+m)l_0-ml\cos^2 x_3}(u-\mu x_2) \\ x'_{3,t}=x_4 \\ x'_{4,t}=\dfrac{-mlx_4^2\cos x_3\sin x_3+(M+m)g\sin x_3-\cos x_3(u-\mu x_2)}{(M+m)l_0-ml\cos^2 x_3}=:B-\dfrac{\cos x_3}{(M+m)l_0-ml\cos^2 x_3}(u-\mu x_2) \end{cases}$$

(10),

где $x_1(t)$ - функция перемещения тележки, $x_3(t)$ - функция отклонения маятника от вертикальной оси, m - масса маятника, M - масса тележки, l - расстояние от центра масс маятника до оси вращения, J - момент инерции маятника относительно центра масс, $l_0:={J}/{ml}+l$ - эффективная длина маятника, μ - коэффициент трения, $\mathrm{g}=9.81$.

Если сила, приложенная к тележке, $u=u(t)\equiv 0$, то тележка находится в свободном движении. Состояниями равновесия свободной системы являются точки $S(x_0,0,\pi k,0)$, $x_0\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ищется сила, являющаяся функцией текущего состояния:

$u = u\big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\big)$,

которая приводит маятник в верхнее положение равновесия:

$x_3(t) \to 2\pi k,\ \ x_2(t), x_4(t) \to 0,\ \ x_1(t) \to x_0$.

Согласно методу АКАР будем искать агрегированную переменную $\psi(x)$, которая задает инвариантное множество

$\mathcal{L} := \big\{\big(x_1, x_2, x_3, x_4\big) : \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\big\}$

в фазовом пространстве системы (10) и которая на траекториях этого регулятора удовлетворяет дифференциальному уравнению $\psi'_t = -\dfrac{1}{T}\psi$. Константа $T > 0$ характеризует скорость стремления к нулю агрегированной переменной на траекториях, так как решение последнего уравнения имеет вид $\psi\big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\big) = C\exp\left\{-{}^{t}\!/_{T}\right\} \to 0$ при $t \to +\infty$. Отсюда, в частности, следует, что все состояния равновесия проектируемого регулятора $x_0 = \big(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0\big)$ лежат на многообразии: $\Psi(x_0) = 0$. Свойство стремления к нулю агрегированной переменной на всех траекториях управляемой системы мы назвали в статье [5] устойчивостью в смысле А. А. Колесникова. Это понятие не совпадает с устойчивость в целом инвариантного множества [8].

Вычислим производную агрегированной переменной в силу системы (10):

$$\psi'_t = \psi'_{x_1}x_2 + \psi'_{x_3}x_4 + \psi'_{x_2}A + \psi'_{x_4}B + \big(u - \mu x_2\big)\frac{\psi'_{x_2}l_0 - \psi'_{x_4}\cos x_3}{(M+m)l_0 - ml\cos^2 x_3} = -\frac{1}{T}\psi\,.$$

Исключая с помощью последнего равенства величину $\big(u - \mu x_2\big)$ из уравнений системы, получаем уравнение регулятора:

$$\begin{cases} x'_{1,t} = x_2 \\ x'_{2,t} = \dfrac{-l_0\Big(\psi'_{x_1}x_2 + \psi'_{x_3}x_4 + \psi'_{x_4}(A\cos x_3/l_0 + B) + \psi/T\Big)}{\psi'_{x_2}l_0 - \psi'_{x_4}\cos x_3} \\ x'_{3,t} = x_4 \\ x'_{4,t}\ \dfrac{\cos x_3\Big(\psi'_{x_1}x_2 + \psi'_{x_3}x_4 + \psi'_{x_4}(A\cos x_3/l_0 + B)l_0/\cos x_3 + \psi/T\Big)}{\psi'_{x_2}l_0 - \psi'_{x_4}\cos x_3} \end{cases}.$$

При этом закон управления тележкой задается формулой

$$u = \mu x_2 - \frac{(M+m)l_0 - ml\cos^2 x_3}{\psi'_{x_2}l_0 - \psi'_{x_4}\cos x_3}\left(\psi'_{x_1}x_2 + \psi'_{x_3}x_4 + \psi'_{x_2}A + \psi'_{x_4}B + \frac{1}{T}\psi\right).$$

Так как

$$\frac{A\cos x_3}{l_0} + B = \frac{mll_0x_4^2\sin x_3 - m\,l\,g\cos x_3\sin x_3}{(M+m)l_0 - ml\cos^2 x_3}\cdot\frac{\cos x_3}{l_0} +$$

$$+\frac{-ml\,x_4^2\cos x_3\sin x_3 + (M+m)g\sin x_3}{(M+m)l_0 - ml\cos^2 x_3} = \frac{g\sin x_3}{l_0},$$

то уравнение регулятора упрощается до такого

$$\begin{cases} x'_{1,t} = x_2 \\ x'_{2,t} = \dfrac{-l_0 x_2 \psi'_{x_1} - l_0 x_4 \psi'_{x_3} - g\sin x_3 \psi'_{x_4} - l_0/T\,\psi}{\psi'_{x_2} l_0 - \psi'_{x_4}\cos x_3} = \tilde f_2 \\ x'_{3,t} = x_4 \\ x'_{4,t} = \dfrac{x_2\cos x_3 \psi'_{x_1} + x_4\cos x_3 \psi'_{x_3} + g\sin x_3 \psi'_{x_2} + 1/T\cos x_3 \psi}{\psi'_{x_2} l_0 - \psi'_{x_4}\cos x_3} = \tilde f_4 \end{cases}. \quad (11)$$

п.5. Потребуем в этом пункте, чтобы проектируемый регулятор имел только состояния равновесия $S(x_1,0,2\pi k,0),\ x_1\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}$ в предположении неравенства нулю знаменателя:

$$\forall x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\ \ \psi'_{x_2}(x)l_0 - \psi'_{x_4}(x)\cos x_3 \neq 0. \quad (12)$$

Это требование равносильно тому, что система

$$\begin{cases} g\sin x_3 \psi'_{x_4}(x_1,0,x_3,0) + \dfrac{l_0}{T}\psi(x_1,0,x_3,0) = 0 \\ g\sin x_3 \psi'_{x_2}(x_1,0,x_3,0) + \dfrac{1}{T}\cos x_3 \psi(x_1,0,x_3,0) = 0 \end{cases}.$$

имеет только решения $S(x_1,0,2\pi k,0),\ x_1\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}$. При $x_3=\pi k$ последнее равносильно требованиям $\psi(x_1,0,2\pi k,0)=0,\ \psi(x_1,0,2\pi k+\pi,0)\neq 0$.

Пусть $x_3 \neq \pi k$. Если при этом значении уравнения последней системы обращаются в нуль, то умножая первое из них на $\cos x_3$, а второе на l_0, и вычитая из первого второе, получим

$$g\sin x_3\left(\psi'_{x_2}(x_1,0,x_3,0)l_0 - \psi'_{x_4}(x_1,0,x_3,0)\cos x_3\right) = 0,$$

что невозможно в силу (12).

Таким образом, при условиях $\psi(x_1,0,2\pi k,0)=0,\ \psi(x_1,0,2\pi k+\pi,0)\neq 0$ и (12) регулятор имеет только состояния равновесия $S(x_1,0,2\pi k,0),\ x_1\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}$.

Вычислим собственные числа матрицы Якоби этого состояния. Пусть для определенности $\psi'_{x_2}(x_1,0,2\pi k,0)\neq 0$. Тогда по доказанной теореме характеристический многочлен матрицы Якоби правой части в состоянии равновесия $(x_1,0,2\pi k,0)$ факторизуется следующим образом

$$p(\lambda) = \frac{1}{\psi'_{x_2}(x_1,0,2\pi k,0)}\left(\lambda + \frac{1}{T}\right)\cdot \left.\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \psi'_{x_1} & \psi'_{x_2} & \psi'_{x_3} & \psi'_{x_4} \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -\tilde f'_{4x_1} & -\tilde f'_{4x_2} & -\tilde f'_{4x_3} & \lambda - \tilde f'_{4x_4} \end{vmatrix}\right|_{(x_1,0,2\pi k,0)} =$$

$$=\frac{1}{\psi'_{x_2}}\left(\lambda+\frac{1}{T}\right)\cdot\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ \psi'_{x_1} & \psi'_{x_2} & \psi'_{x_3} & \psi'_{x_4}\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \dfrac{-g\psi'_{x_2}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}} & \lambda-\dfrac{\psi'_{x_3}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\psi'_{x_2}}\left(\lambda+\frac{1}{T}\right)\cdot\left(\lambda\begin{vmatrix}\psi'_{x_2} & \psi'_{x_3} & \psi'_{x_4}\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & \dfrac{-g\psi'_{x_2}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}} & \lambda-\dfrac{\psi'_{x_3}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\psi'_{x_1} & \psi'_{x_3} & \psi'_{x_4}\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & \dfrac{-g\psi'_{x_2}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}} & \lambda-\dfrac{\psi'_{x_3}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}}\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{\psi'_{x_2}}\left(\lambda+\frac{1}{T}\right)\cdot\begin{vmatrix}\lambda\psi'_{x_2}+\psi'_{x_1} & \psi'_{x_3} & \psi'_{x_4}\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & \dfrac{-g\psi'_{x_2}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}} & \lambda-\dfrac{\psi'_{x_3}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\lambda+\frac{1}{T}\right)\cdot\left(\lambda+\frac{\psi'_{x_1}}{\psi'_{x_2}}\right)\left(\lambda^2-\frac{\psi'_{x_3}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}}\lambda-\frac{g\psi'_{x_2}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}}\right).$$

Предполагая для определенности $\psi'_{x2}(x)l_0-\psi'_{x4}(x)\cos x_3>0$, получаем такое условие отрицательности вещественной части нулей квадратного трехчлена: $\psi'_{x_1}(x_1,0,2\pi k,0)<0,\ \psi'_{x_2}(x_1,0,2\pi k,0)<0,\ \psi'_{x_3}(x_1,0,2\pi k,0)<0$.

Найдем соответствующую агрегированную переменную в случае $\forall\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\ \psi'_{x2}l_0-\psi'_{x4}\cos x_3\equiv 1.$ (13)

Имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных. Его частным решением является, например, функция $\dfrac{1}{l_0}x_2\sin^2 x_3-x_4\cos x_3$.

Решая однородное уравнение $\psi'_{x2}l_0-\psi'_{x4}\cos x_3=0$, получаем общее решение [9] в виде $\psi(x_1,x_2,x_3,x_4)=f\left(x_1,\ x_3,\ l_0x_4+x_2\cos x_3\right)$, где $f(x_1,x_3,y)$ - произвольная функция. Тогда общее решение уравнения (13)

$$\psi(x_1,x_2,x_3,x_4)=f\left(x_1,\ x_3,\ l_0x_4+x_2\cos x_3\right)+\frac{1}{l_0}x_2\sin^2 x_3-x_4\cos x_3.$$

Удовлетворим ψ выше перечисленным требованиям:

$\psi(x_1,0,2\pi k,0)=f\left(x_1,2\pi k,0\right)=0$. $\psi(x_1,0,2\pi k+\pi,0)=f\left(x_1,2\pi k+\pi,0\right)\neq 0$.

$\psi'_{x_1}(x_1,0,2\pi k,0)=f'_{x_1}(x_1,2\pi k,0)<0,\ \psi'_{x_2}(x_1,0,2\pi k,0)=f'_y(x_1,2\pi k,0)<0$,

$\psi'_{x_3}(x_1,0,2\pi k,0)=f'_{x_3}(x_1,2\pi k,0)<0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Естественно было бы предположить, что функция ψ, а значит и f будут 2π-периодическими по переменной x_3. Тогда условия $\psi(x_1,0,2\pi k,0)\equiv 0$, $\psi'_{x_1}(x_1,0,2\pi k,0)<0$ несовместны, если $\psi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ аналитическая.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению нельзя применять, так как состояния равновесия $S(x_1,0,2\pi k,0)$, $x_1\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$, не являются изолированными.

п.6. Остановимся на рассмотренном [5] случае, когда агрегированная переменная не зависит от x_1: $\psi=\psi(x_2,x_3,x_4)$. То есть управление определяется только текущими скоростью тележки, углом и скоростью отклонения маятника. В этом случае система (11) расщепляется на две подсистемы - трехмерную

$$\begin{cases} x'_{2,t}=\dfrac{-\psi'_{x_3}l_0x_4-\psi'_{x_4}g\sin x_3-l_0\psi/T}{\psi'_{x_2}l_0-\psi'_{x_4}\cos x_3} \\ x'_{3,t}=x_4 \\ x'_{4,t}=\dfrac{\psi'_{x_3}\cos x_3x_4+\psi'_{x_2}g\sin x_3+\cos x_3\psi/T}{\psi'_{x_2}l_0-\psi'_{x_4}\cos x_3} \end{cases} \qquad (14)$$

и интегрируемую в квадратурах одномерную $x'_{1,t}=x_2$. В работе [5] мы сделали ошибку, не заметив возможность знаменателя обращаться в ноль. Здесь мы её исправим.

Сначала найдем условия на ψ, при которых система (14) имеет только состояния равновесия $(0,\pi k,0)$ и знаменатель

$$\forall x=(x_2,x_3,x_4)\ \ \psi'_{x_2}(x)l_0-\psi'_{x_4}(x)\cos x_3\neq 0, \qquad (15)$$

Первое требование равносильно тому, что система

$$\begin{cases} g\sin x_3\psi'_{x_4}(x_2,x_3,0)+\dfrac{l_0}{T}\psi(x_2,x_3,0)=0 \\ g\sin x_3\psi'_{x_2}(x_2,x_3,0)+\dfrac{1}{T}\cos x_3\psi(x_2,x_3,0)=0 \end{cases}$$

имеет только решения $(0,\pi k,0)$. В случае $x_3=\pi k$ отсюда необходимо

$$\psi(x_2,\pi k,0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_2=0. \qquad (16)$$

В случае $x_3\neq\pi k$ система решений не имеет в силу условия (15).

При условии (16) вычислим характеристический многочлен матрицы Якоби регулятора в точке $S(0,\pi k,0)$, $k\in\mathbb{Z}$, считая, например $\psi'_{x_4}(0,\pi k,0)\neq 0$. По пункту 4

$$p(\lambda)=\frac{1}{\psi'_{x_4}}\left(\lambda+\frac{1}{T}\right)\cdot\begin{vmatrix}\lambda+\dfrac{l_0\psi'_{x_2}}{T(l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4})} & \dfrac{(-1)^k gT\psi'_{x_4}+l_0\psi'_{x_3}}{T(l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4})} & \dfrac{l_0T\psi'_{x_3}+l_0\psi'_{x_4}}{T(l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4})}\\ 0 & \lambda & -1\\ \psi'_{x_2} & \psi'_{x_3} & \psi'_{x_4}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\lambda+\frac{1}{T}\right)\cdot\left(\lambda^2-\frac{\psi'_{x_3}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}}\lambda-\frac{(-1)^k g\psi'_{x_2}}{l_0\psi'_{x_2}-\psi'_{x_4}}\right).$$

Считая для определенности $\psi'_{x_2}(x)l_0-\psi'_{x_4}(x)\cos x_3>0$, получаем условия устойчивости состояний равновесия $(0,2\pi k,0)$:

$\psi'_{x_2}(0,2\pi k,0)<0,\ \psi'_{x_3}(0,2\pi k,0)<0$. (17)

При этом состояния равновесия $(0,2\pi k+\pi,0)$ являются седлами.

Конкретизируем требование к знаменателю:

$\forall\left(x_2,x_3,x_4\right)\ \psi'_{x2}l_0-\psi'_{x4}\cos x_3\equiv 1.$ (18)

Для агрегированной переменной с этим условием уравнение регулятора (14) можно записать в виде

$$\begin{cases}x'_{2,t}=-\psi'_{x3}l_0x_4-\psi'_{x4}g\sin x_3-\dfrac{l_0}{T}\psi\\ x'_{3,t}=x_4\\ x'_{4,t}=\dfrac{1}{l_0}\left(g\sin x_3-\cos x_3\cdot x'_{2,t}\right)\end{cases},\qquad (19)$$

удобном для создания S-модели.

Решим линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных (18). Частным решением является, например, функция $\frac{1}{l_0}x_2\sin^2 x_3-x_4\cos x_3$. Общее решение однородного уравнении $\psi'_{x2}l_0-\psi'_{x4}\cos x_3=0$ имеет вид $\psi(x_2,x_3,x_4)=f\left(x_3,\ l_0x_4+x_2\cos x_3\right)$, где $f(x,y)$ - произвольная функция. Тогда общее решение уравнения (18)

$$\psi(x_2,x_3,x_4)=f\left(x_3,\ l_0x_4+x_2\cos x_3\right)+\frac{1}{l_0}x_2\sin^2 x_3-x_4\cos x_3.\qquad (20)$$

Положим, например, $\psi(x_2,x_3,x_4):=(1-2\cos x_3)(l_0x_4+x_2\cos x_3)-\sin x_3+\frac{1}{l_0}x_2\sin^2 x_3-x_4\cos x_3$,

и проверим выше перечисленные требования.

$\psi(x_2,\pi k,0)=((-1)^k-2)x_2=0\ \Leftrightarrow\ x_2=0,\quad \psi'_{x2}(0,2\pi k,0)=-1<0,\quad \psi'_{x_3}(0,2\pi k,0)=-1<0$.

Из последних неравенств следует, что состояния равновесия регулятора (19) $S(0,2\pi k,0),\ k\in\mathbb{Z}$, являются устойчивыми узлами, а состояния равновесия

$S(0,2\pi k+\pi,0)$, $k\in\mathbb{Z}$ - седлами. Других состояний равновесия у него нет.
В данном случае устойчивость регулятора в смысле Колесникова не обеспечивает устойчивость в целом. Это показывают численные эксперименты на S-модели системы (19) в пакете Matlab-Simulink при значениях параметров $T=l_0=2$.

При начальном состоянии вида $(0,0,x_3^0,0)$ максимальное отклонение, при котором регулятор приводит маятник в вертикальное положение, равно $x_3^0=47{,}403^o$. При этом положение тележки стабилизируется в точке $x_1=24{,}5$ (Рис.1), а значение агрегированной переменной на этой траектории в момент $t=25$ равно $\psi=-2{,}74\cdot10^{-6}$.

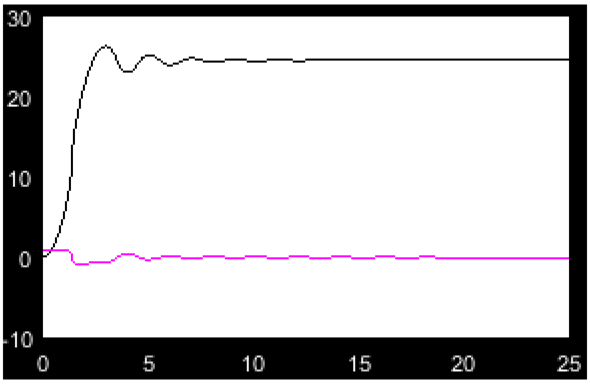

Рис.1 График $x_1(t), x_3(t)$ при $x_0=(0,0,47.403^o,0)$

Однако уже при начальном отклонении $x_3^0=47{,}404^o$ скорость тележки линейно возрастает, ее положение при $t=25$ равно $x_1=-1{,}7\cdot10^5$, хотя значение агрегированной переменной на этой траектории сохраняет тот же порядок стремления к нулю. При этом маятник стабилизируется в окрестности угла $106{,}9^o$.
ЗАМЕЧАНИЕ 1 При любом начальном отклонении маятника от верхнего положения $|x_3^0|<180^o$ агрегированная переменная на соответствующей траектории стремится к нулю.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 Если уменьшить допустимое начальное отклонение, то, например, все начальные условия $x_3^0=0.82(=47^o)$, $|x_2^0|\le1$, $|x_4^0|\le0{,}02$ лежат в области притяжения состояния равновесия $(0,0,0)$ системы (14), а соответствующая фазовая переменная $x_1(t)$ стремится к конечному значению.

п.7. Найдем условия, при которых система (14) имеет только состояния равновесия $(0,2\pi k,0)$ в предположении (18). Это будет тогда и только тогда, когда $\psi(x_2,\pi k,0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x_2=0)\wedge(k=2l)$. Тот же характеристический многочлен матрицы Якоби регулятора в точке $S(0,2\pi k,0)$, $k\in\mathbb{Z}$, даёт аналогичное условие устойчивости $\psi'_{x_2}(0,2\pi k,0)<0$, $\quad\psi'_{x_3}(0,2\pi k,0)<0$.

Общий вид решения уравнения (18) в частных производных будет тот же (20). Выберем $\psi(x_2,x_3,x_4):=-\sin x_3-\left((l_0x_4+x_2\cos x_3)^2+(l_0x_4+x_2\cos x_3)+1\right)+$

$$+\left((l_0x_4+x_2\cos x_3)^2-(l_0x_4+x_2\cos x_3)+1\right)\cos x_3+\frac{1}{l_0}x_2\sin^2 x_3-x_4\cos x_3,$$

и проверим выше перечисленные требования.

$\psi(x_2, 2\pi k, 0) = -2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$; $\forall x_2 \;\; \psi(x_2, 2\pi k + \pi, 0) = -2(x_2^2 + 1) \neq 0$.

Кроме того $\psi'_{x_2}(0, 2\pi k, 0) = -2 < 0$, $\psi'_{x_3}(0, 2\pi k, 0) = -1 < 0$.

Из последних неравенств следует, что состояния равновесия системы (14) $S(0, 2\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, являются устойчивыми узлами. Здесь также устойчивость регулятора в смысле Колесникова не обеспечивает устойчивость в целом.

Для соответствующей S-модели системы (19) при значениях параметров $T = l_0 = 2$ получены такие результаты. При начальном состоянии вида $(0, x_3^0, 0)$ максимальное отклонение, при котором регулятор приводит маятник в вертикальное положение, равно $x_3^0 = 1{,}101\,(= 63{,}08^o)$. При этом положение тележки стабилизируется в точке $x_1 = 3{,}07$ (Рис.2), а значение агрегированной переменной на этой траектории в момент $t = 25$ равно $\psi = -5{,}36 \cdot 10^{-6}$.

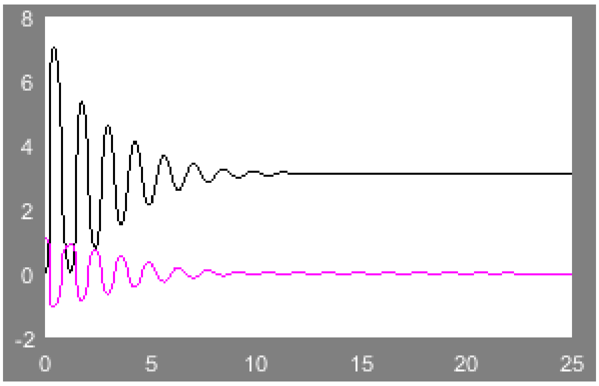

Рис.2 График $x_1(t), x_3(t)$ при $x^0 = (0, 0, 63.08^o, 0)$

Однако при начальном отклонении маятника, большем указанного угла на 0,001 численный расчет прерывается в самом начале моделирования ввиду резкого кратковременного всплеска линейной скорости тележки и угловой скорости маятника.

В случае начального отклонения меньшего 63^o появляется свобода в выборе начальных линейной и угловой скоростей. Например, все начальные условия $x_3^0 = 1{,}047 (= 60^o)$, $|x_2^0| \leq 1$, $|x_4^0| \leq 0{,}3$ лежат в области притяжения состояния равновесия $(0,0,0)$ системы (14).

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Можно изменить требование (18) на такое

$$\forall (x_2, x_3, x_4) \;\; \psi'_{x_2} l_0 - \psi'_{x_4} \cos x_3 \equiv \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Эксперименты с S-моделью показывают, что начальное максимально допустимое отклонение, при котором соответствующий регулятор приводит маятник в вертикальное положение, достигается при $\varepsilon = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 В отличии от статьи [10] мы ограничились исследованием одноуровневого управления маятником, не рассматривая отдельно режим малых и средних ($|x_3^0| \leq 26^0$) и режим больших отклонений ($|x_3^0| < 180^0$). В рассматриваемой постановке задачи управление не зависит от текущего положения тележки, а конечное её положение для нас не важно (лишь бы оно стабилизировалось). Нам не понадобилась линеаризация системы управления, и мы обошлись введением одной агрегированной переменной. Пока неясно, можно ли на этом пути решить задачу управления при больших отклонениях маятника.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Леви-Чивита Т., Амальди У. *Курс теоретической механики. Том 2. Часть 2.* Издательство иностранной литературы. Москва, 1951, 556 с.

[2] Галиуллин А. С. *Методы решения обратных задач динамики*. Наука. Гл. редакция физ.-мат. литературы. Москва, 1986, 224 с.

[3] *Современная прикладная теория управления. Ч.2. Синергетический подход в теории управления.* Под ред. А. А. Колесникова. Издательство ТРТУ. Таганрог, 2000, 559 с.

[4] Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. *Прикладная математика и механика*. Том 16. Вып. 6, 1952, 659-670.

[5] Братищев А. В. Факторизация характеристического многочлена состояния равновесия автономной системы, имеющей притягивающее инвариантное многообразие. *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* № 4, 2018, 1-17.

[6] Колесников А.А. *Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза.* Издательство URSS, Москва, 2005, 240 с.

[7] Квакернаак Х., Сиван Р. *Линейные оптимальные системы управления.* Издательство «Мир». Москва, 1975, 656 с.

[8] Зубов В.И. *Устойчивость движения*. Издательство Высшая школа. Москва. 1973, 272 с.

[9] Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* Т.4. Часть 2. Изд.6. М.: Наука, 1981. 552 с.

[10] Колесников Ал. А. Синергетический синтез нелинейных регуляторов Механических колебательных систем. *Синергетика и проблемы теории управления.* Под ред. А. А. Колесникова. ФИЗМАТЛИТ. Москва, 2004, 289-308.