

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
№ 2, 2018  
Электронный журнал,  
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010  
ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>  
e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Компьютерное моделирование динамических и  
управляемых систем

## Бифуркационный анализ некоторых решений нелинейных параметрических задач

Чемкаева Д.В.

Российский государственный педагогический университет

им. А. И. Герцена

e-mail: dariachemkaeva@yahoo.com

### Аннотация

В работе исследуется количество положительных решений автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром и с однородными граничными условиями. Рассматривается случай общего положения, когда функция, входящая в уравнение, является многочленом нечетной степени и имеет произвольное число корней. В качестве инструмента, позволяющего найти количество таких решений, используется теорема Кормана–Ли–Оянга, определяющая точки бифуркации краевой задачи. Исследование подтверждается построением бифуркационных диаграмм с помощью компьютерного моделирования.

**Ключевые слова:** бифуркационные диаграммы, точное количество решений, нелинейная краевая задача, теорема Кормана–Ли–Оянга.

### Abstract

This study deals with the number of positive solutions of an autonomous ordinary differential equation of the second order with parameter and with homogeneous boundary conditions. The nonlinear function in the equation is a polynomial of odd degree. We investigate the number of positive solutions to the problem depending on parameter. To find the number of such solutions we use the Korman–Li–Oyang theorem, which determines the bifurcation points of boundary value problem. Examples and bifurcation diagrams confirm the research.

**Keywords:** bifurcation diagrams, exact number of solutions, nonlinear boundary value problem, Korman–Li–Oyang Theorem.

### 1. Введение

Рассмотрим смешанную краевую задачу, зависящую от параметра  $\lambda$  :

$$y''_{xx} + \lambda f(x, y(x)) = 0, \text{ где } x \in (a, b),$$

$$y(a) = y(b) = 0.$$

Параметр  $\lambda$  считаем положительным. Будем искать решения в виде  $y = y(x, \lambda)$ .

Данная смешанная краевая задача описывает многие физические процессы, например, горение газов и изменение динамики численности популяций. Нелинейность функции  $f(y)$  в задачах теории горения обозначает промежуточные устойчивые состояния распределения температуры  $y$ , а бифуркационный параметр  $\lambda$  определяет количество невыгоревшего вещества.

В популяционной динамике за  $y$  принимается плотность популяции гусеницы листовертки–почковода елового (*Choristoneura hebenstreitella*), где  $f(y) = yg(y)$  – темп роста популяции. Данная задача является одномерным стационарным случаем известной проблемы популяции в математической биологии, разработанной Д. Людвигом для контроля вспышек рождаемости и смертности вредителя. Бифуркационный параметр  $\lambda$  показывает сохранение популяции при различной степени эндемической плотности [1].

Исследуем случай автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда  $f = f(y)$  [2]. Будем искать только множество положительных решений, удовлетворяющих краевым условиям. Поскольку  $f(y)$  не зависит от аргумента  $x$ , то длина и позиция интервала  $(a, b)$  не имеют значения. Рассмотрим задачу при  $x \in (-1, 1)$  :

$$y''_{xx} + \lambda f(y(x)) = 0, \text{ где } x \in (-1, 1), \quad (1)$$

$$y(-1) = y(1) = 0. \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение (1) с граничными условиями (2) имеет множество нулей решений, зависящих от бифуркационного параметра  $\lambda > 0$ . В данном случае качественное изменение поведения системы происходит при изменении количества положительных решений дифференциального уравнения. Рассмотрим случай, когда количество нулей решений четное.

Лемма 1. Пусть  $\delta \in (-1, 1)$  – любая критическая точка  $y(x)$ , следовательно  $y'(\delta) = 0$ . Тогда  $y(x)$  симметрична относительно  $\delta$ .

Доказательство. Пусть  $p(x) \equiv p(2\delta - x)$ . Тогда  $p(x)$  также удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (2). Следовательно  $p(\delta) = y(\delta)$  и  $p'(\delta) = y'(\delta) = 0$ . Но поскольку решение задачи Коши единственно, получаем противоречие, и  $y(x)$  симметрична относительно  $\delta$ , что и требовалось доказать.

Пусть решения задачи (1)–(2), согласно лемме 1, симметричны относительно  $x = 0$ , следовательно (1)–(2) можно привести к виду:

$$y''_{xx} + \lambda f(y) = 0, \text{ где } x \in (0, 1), \lambda > 0, \quad (3)$$

$$y'_x(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (4)$$

Решим задачу (3)–(4), используя замену  $y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$ , где

$y' = z(y)$  :

$$\frac{dz}{dy} z = \lambda f(y), \Rightarrow \int z dz = \lambda \int f(y) dy, \Rightarrow$$

$$\frac{z^2}{2} = \lambda \int f(y) dy + C_1, \Rightarrow z^2 = 2\lambda \int f(y) dy + C_1,$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная.

Возвращаясь к  $y'(x)$ , получим первый интеграл уравнения (3):

$$y' = \pm \sqrt{2\lambda \int f(y) dy + C_1}.$$

Используя первое граничное условие  $y'_x(0) = 0$ , найдем произвольную постоянную  $C_1$ :

$$0 = \pm \sqrt{2\lambda \int f(y) dy + C_1} \Rightarrow C_1 = 0.$$

Теперь определим общее решение задачи (3)–(4):

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\int f(y) dy}} = \pm \sqrt{2\lambda} \int dx, \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{\int f(y) dy}} = \pm \sqrt{2\lambda} (x + C_2).$$

Удовлетворяя второму граничному условию  $y(1) = 0$ , получим решение задачи Коши:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\int f(y) dy}} = \pm \sqrt{2\lambda} (x + 1).$$

Введем обозначение  $y(0) = a$ ,  $a > 0$ . Данный параметр является наибольшим значением решения краевой задачи и единственным образом определяет пару  $(\lambda, y(x))$  [3]. Покажем, что задав  $a$ , можно однозначно определить соответствующее ему значение  $\lambda$  и решение задачи  $y = y(x)$ .

Пусть  $t = \sqrt{\lambda} x$ . Для функции  $y = y(t)$  рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$y''_t + f(y) = 0, \tag{5}$$

$$y'_t(0) = 0, \quad y(0) = a. \tag{6}$$

Пусть для задачи (5)–(6) выполняются условия теоремы существования и единственности решения. Задав  $y(0) = a$ , численно определим значение новой координаты  $t_0$ , в которой искомая функция обращается нуль, т.е.  $y(t_0) = 0$ . Возвращаясь к исходной переменной  $x$  и учитывая второе граничное условие (6),

найдем величину параметра по формуле  $\lambda = t_0^2$ . Полученное численное решение вспомогательной задачи (5)–(6) будет являться решением исходной смешанной краевой задачи (3)–(4) при  $\lambda = t_0^2$ .

Решив задачу (5)–(6), выразим параметр  $\lambda$  через  $a$  по формуле:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{F(a) - F(t)}} \right)^2. \quad (7)$$

Функция  $\lambda = \lambda(a)$  называется бифуркационной кривой; ее экстремумы являются точками бифуркации. График функции  $\lambda = \lambda(a)$  называется бифуркационной диаграммой, показывающей смену возможных динамических режимов системы при изменении значения бифуркационного параметра  $\lambda$ .

Справедлива следующая теорема:

*Теорема Кормана–Ли–Оянга [3].* Решение задачи (1)–(2), где  $y(0) = a$ , единственно тогда и только тогда, когда:

$$G(a) \equiv \sqrt{F(a)} \int_0^a \frac{f(a) - f(\tau)}{[F(a) - F(\tau)]^{3/2}} - 2 = 0, \quad (8)$$

где  $F(y) = \int_0^y f(y) dy$ .

Условие (8) является необходимым для определения промежутков, где находятся точки бифуркации, а также самих точек бифуркации.

### 2.1. Случай $f(y) > 0$

Сначала рассмотрим простейший случай, когда  $f(y) > 0$  для всех  $y$ . Классическим примером такой задачи является уравнение равновесного теплового баланса в модели Франка–Каменецкого, определяющее основную модель самовозгорания. Для неоднородной температурной экзотермической реакционной системы, отвечающей закону Аррениуса, теплота реакции уравнения теплового баланса может быть описана простым нелинейным членом. Тогда для данного случая краевая задача записывается следующим образом:

$$y'' + \frac{k}{x} y' + \lambda e^y = 0, \quad (9)$$

$$y'_x(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (10)$$

В этом уравнении предэкспоненциальным множителем  $\lambda$  является параметр Франк–Каменецкого [4].

*Пример 1.* Положим  $f(y) = e^y$ .

Для плоской задачи теории горения в (9) следует положить  $k = 0$ . Здесь нелинейная функция  $f(y) = e^y$ , тогда  $F(\tau) = e^\tau - 1$ . Будем искать решения в виде  $y = y(x, \lambda)$ .

Построим график функции  $G(a)$  (8) (Рис.1) из теоремы Кормана–Ли–Оянга. Здесь и далее графики построены с помощью численного объявления функции и команды Plot системы Wolfram Mathematica. Из графического представления следует, что существует только одна точка бифуркации, где кривая пересекает ось  $Ox$ .

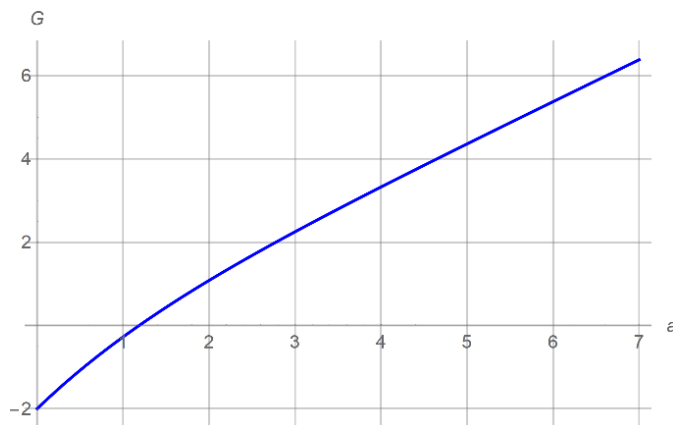


Рис. 1. График функции  $G(a)$  для примера 1.

При этом бифуркационная кривая  $\lambda = \lambda(a)$ , определяемая по формуле (7), будет иметь вид:

$$\lambda(a) = 2e^{-a} \operatorname{arcth}(e^{-a/2} \sqrt{e^a - 1})^2.$$

Экстремумы кривой  $\lambda = \lambda(a)$ , также как и нули функции  $G(a)$ , определяют точки бифуркации. Решая уравнение  $\lambda(a) = 0$ , получаем, что

$a \approx 1.18684$ , где  $\lambda_0 = 0.87846$ . Указанное критическое значение  $\lambda$  в задачах самовозгорания соответствует тепловому взрыву; при бóльших значениях  $\lambda$  рассматриваемая задача не имеет решений.

Бифуркационная диаграмма  $\lambda = \lambda(a)$ , соответствующая данной задаче, представлена на Рис. 2.

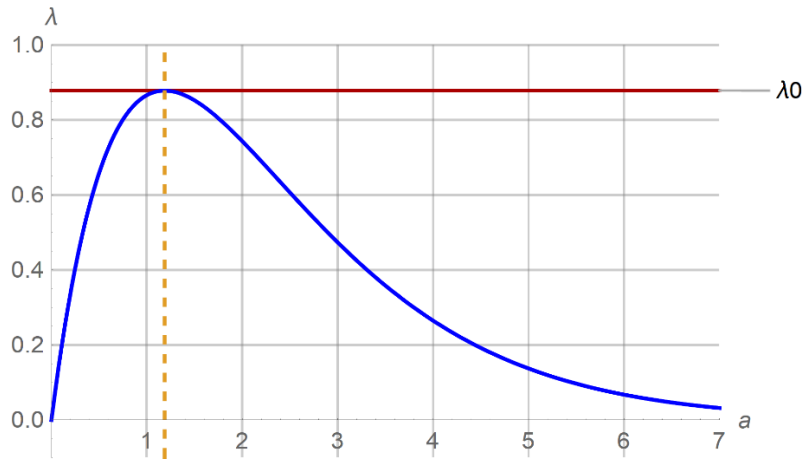


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для задачи из примера 1.

Легко видеть, что при  $\lambda > 0.87846$  – решений нет, при  $\lambda = 0.87846$  – уравнение имеет ровно одно решение, при  $0 < \lambda < 0.87846$  – два решения (Рис.3).

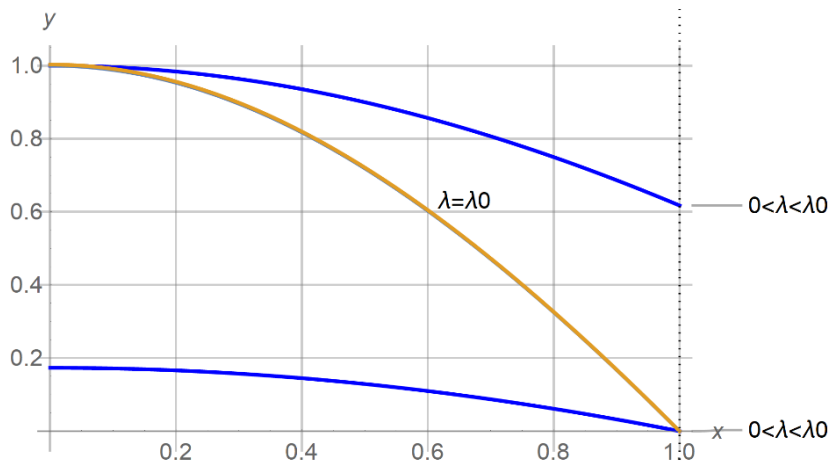


Рис.3. Множество решений задачи из примера 1.

*Пример 2.* Если рассмотреть смешанную краевую задачу:

$$y''_{xx} + \lambda e^y = 0,$$

$$y'_x(0) = 0, \quad y(1) = \beta,$$

которая отличается от задачи из примера 1 более общим вторым граничным условием, то соответствующая бифуркационная кривая будет имеет вид:

$$\lambda(a) = 2e^{-a} \operatorname{arcth}(e^{-a/2} \sqrt{e^a - e^\beta})^2.$$

Отсюда в частном случае при  $\beta = 0$  получаем бифуркационную диаграмму для плоской задачи теории горения (пример 1).

На Рис. 4 изображены бифуркационные кривые для данной задачи при  $\beta = -1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\beta = 1$ .

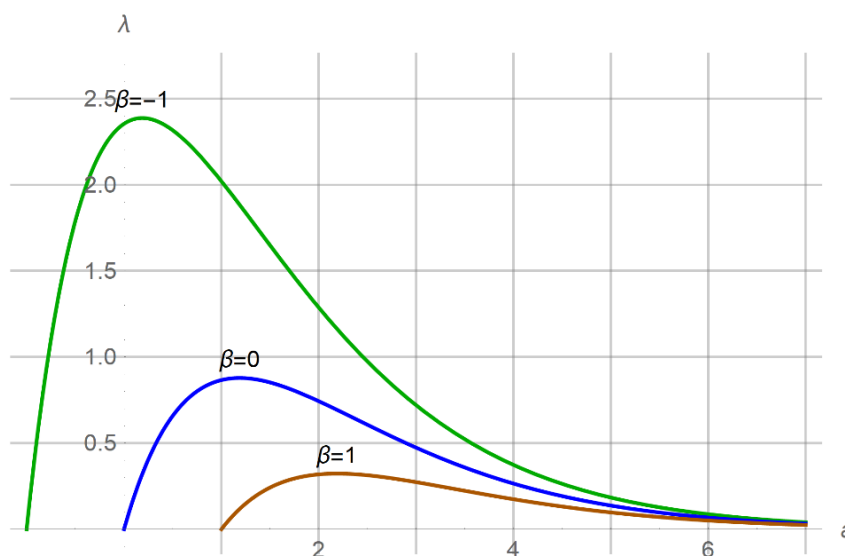


Рис.4. Бифуркационные кривые для задачи из примера 2 при  $\beta = -1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\beta = 1$ .

Задачи, где  $f(y) = e^y$ , имеют единственную точку бифуркации  $\lambda_0$  такую, что при  $\lambda > \lambda_0$  – задача не имеет решений, при  $\lambda = \lambda_0$  – задача имеет ровно одно решение, при  $0 < \lambda < \lambda_0$  – задача имеет ровно два решения.

## 2.2 Общий случай

Теперь будем исследовать случай общего положения, допуская, что функция  $f(y)$  является многочленом, а следовательно может менять знак. Данная задача возникает при изучении стационарных решений реакционно–диффузной модели.

Положим

$$f(y) = (y - a_1)(y - a_2)(y - a_3) \dots (y - a_{2n-2})(a_{2n-1} - y), \quad (11)$$



где  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2n-2} < a_{2n-1}$  – изолированные нули функции  $f(y)$ , т.е.  $f(a_i) = 0$ . Очевидно, что задача (1)–(2) имеет тривиальные решения

$$y = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (12)$$

Функция (11) – это многочлен нечетной степени, следовательно, он имеет нечетное количество нулей. Если функция (11) имеет отрицательный «прогиб» на  $(a_1, a_2)$ , то на  $(a_2, a_3)$  функция имеет положительный «прогиб», т.е. функция  $f(y)$  имеет  $n$  пар прогибов. Другими словами,  $f(y) > 0$  на  $(a_{2n-2}, a_{2n-1})$  и  $f(y) < 0$  на  $(a_{2n-3}, a_{2n-2})$ , где  $n = 2 \dots k, k \geq 2$ .

Пусть функция  $f(y)$  удовлетворяет условиям  $F(a_1) < F(a_2) < \dots < F(a_{2n-2}) < F(a_{2n-1})$ . Известно [3], что каждая ветвь решений имеет наибольшие значения внутри промежутка, где функция положительна; т. е. чтобы такие решения существовали, например, в  $(a_2, a_3)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\int_{a_1}^{a_3} f(y) dy > 0$ . Графики функций  $f(y)$  и  $F(y)$  представлены на

Рис.5.

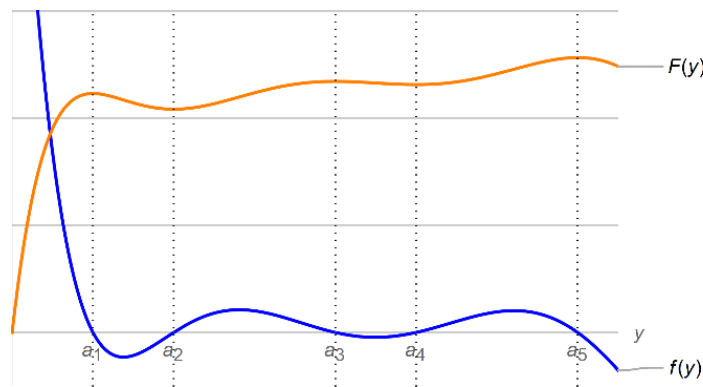


Рис. 5. Графики функций  $f(y)$  и  $F(y)$ .

На Рис. 6 изображен график функции  $G(a)$  (8) в плоскости  $(a; G(a))$  для  $f(y)$ , определяемой по формуле (11). Функция  $G(a)$  существует и имеет нули только в промежутках  $(a_2, a_3)$ ,  $(a_4, a_5)$ ,  $(a_6, a_7)$ , ...,  $(a_{2n-2}, a_{2n-1})$ , где  $f(y) > 0$ , следовательно только в этих промежутках содержатся бифуркационные точки.

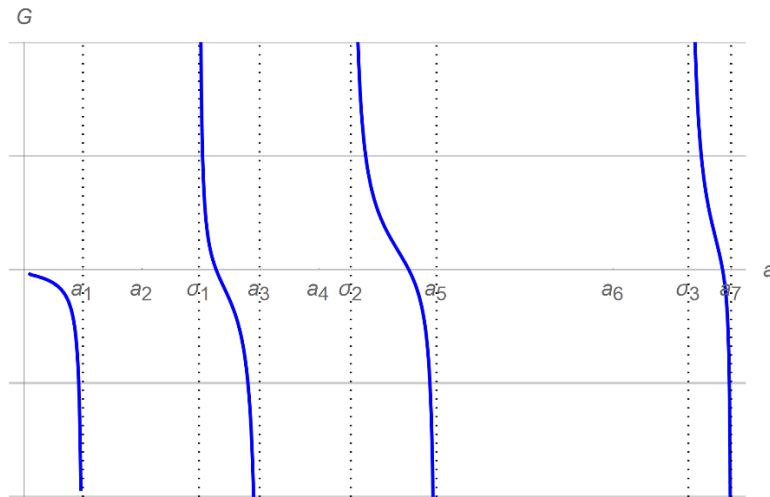


Рис. 6. График функции  $G(a)$ , где  $f(y)$  – многочлен нечетной степени.

Как следует из Рис. 6,  $G(a)$ , определяемая по формуле (8), имеет следующие асимптотики:

1.  $\lim_{a \rightarrow a_{2n-1}^-} G(a) = -\infty$ , то есть в окрестности точки  $a_{2n-1}$  не существует точек

бифуркации, где  $n = 2, k, k \geq 2$ .

2. Пусть существует точка  $\sigma_{n-1} \in (a_{2n-2}, a_{2n-1})$ , удовлетворяющая условию

$\int_{a_{2n-3}}^{\sigma_{n-1}} f(s) ds = 0$ , тогда  $\lim_{a \rightarrow \sigma_{n-1}^+} G(a) = +\infty$ , то есть в окрестности точки  $\sigma_{n-1}$  не

существует точек бифуркации, где  $n = 2, \dots, k, k \geq 2$ .

Исследование для многочлена третьей степени представлено в [5]. Авторы показали существование критического значения параметра  $\lambda = \lambda_0$  такого, что задача (1)–(2), где  $f(y) = (y - a_1)(y - a_2)(a_3 - y)$ , при  $0 < \lambda < \lambda_0$  имеет ровно одно решение, при  $\lambda = \lambda_0$  ровно два решения и при  $\lambda > \lambda_0$  ровно три решения.

Теперь рассмотрим многочлены пятой и седьмой степеней.

*Пример 3.* Положим  $f(y) = (y - 1)(y - 2)(y - 4)(y - 5)(7 - y)$ .

Данный пример рассмотрен в работе [6]. Авторы строят бифуркационную диаграмму для такой задачи и определяют количество ее решений.

Построим графики функций  $f(y)$  и  $F(y)$  (Рис.7), а также  $G(a)$  (Рис.8),

чтобы показать их поведение. Из графика функции  $G(a)$  следует, что существует две точки бифуркации на промежутках  $(a_2, a_3)$  и  $(a_4, a_5)$ , где  $f(y) > 0$  (промежутки (2, 4) и (5, 7)). Построим бифуркационную кривую (7) для заданного примера (Рис. 9).

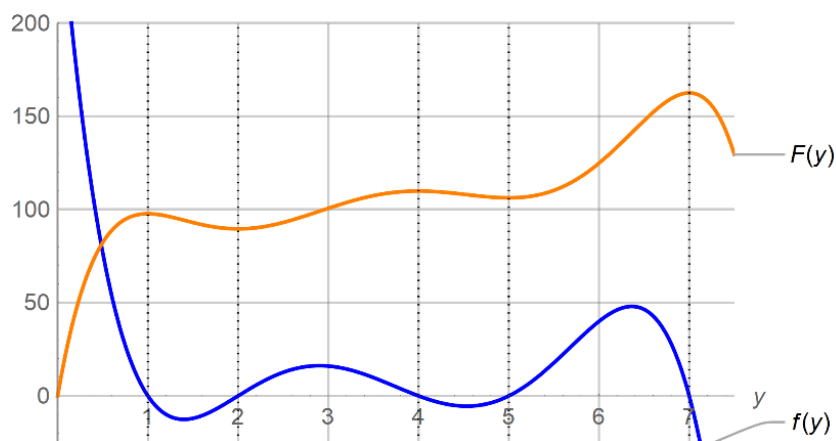


Рис.7. Графики функций  $f(y)$  и  $F(y)$  для примера 3.

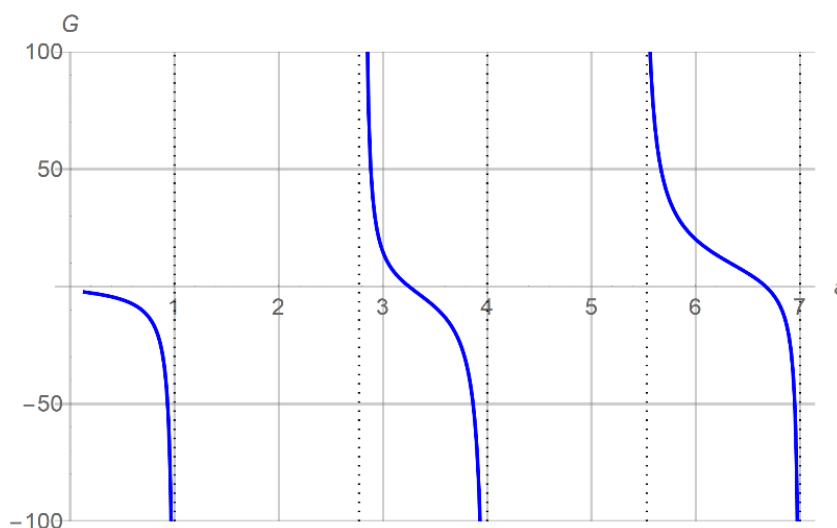


Рис.8. График функции  $G(a)$  для примера 3.

Из бифуркационной диаграммы следует, что при определенных значениях  $\lambda$  уравнение имеет либо одно решение, либо два решения, либо три решения, либо четыре решения, либо пять решений. Используя точные команды NMinimize и FindRoot системы Wolfram Mathematica определим точки бифуркации:  $a_1 = 3.2417$ ,  $a_2 = 6.5866$ , где  $\lambda_0 = 0.56973$  и  $\lambda_1 = 0.6321$  – значения  $\lambda$ , отсортированные по возрастанию.

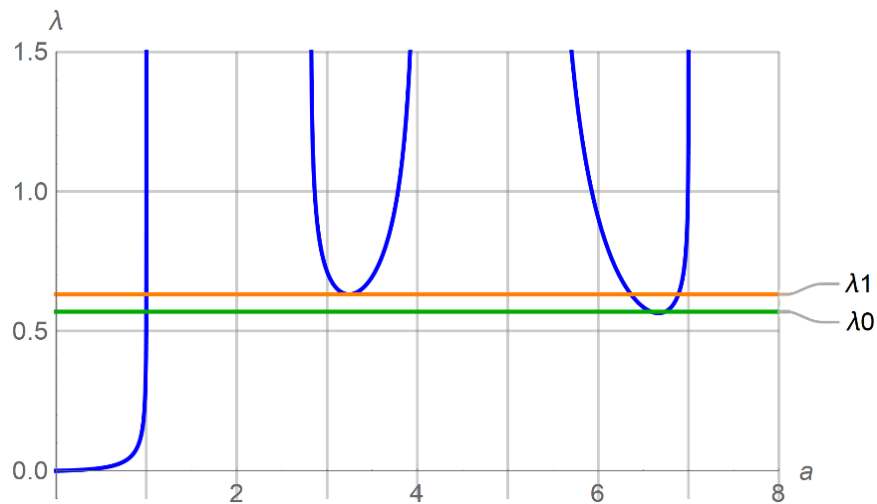


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма для задачи из примера 3.

Итак, существуют  $0 < \lambda_0 < \lambda_1$  такие, что для  $\lambda < \lambda_0$  имеется одно решение, для  $\lambda = \lambda_0$  – два решения, для  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$  – три решения, для  $\lambda = \lambda_1$  – четыре решения и для  $\lambda > \lambda_1$  – пять решений задачи (1)–(2), где  $f(y) = (y-1)(y-2)(y-4)(y-5)(7-y)$ .

*Пример 4.* Положим  $f(y) = (y-1)(y-2)(y-4)(y-5)(y-7)(y-8)(10-y)$ .

Снова построим графики функций  $f(y)$  и  $F(y)$  (Рис.10) и  $G(a)$  (Рис.11), чтобы показать их поведение. Из графика функции  $G(a)$  следует, что существует три точки бифуркации на промежутках  $(a_2, a_3)$ ,  $(a_4, a_5)$  и  $(a_6, a_7)$ . Это промежутки  $(2, 4)$ ,  $(5, 7)$  и  $(8, 10)$ , где  $f(y) > 0$ . Бифуркационная диаграмма (7) для данного примера представлена на Рис.12.

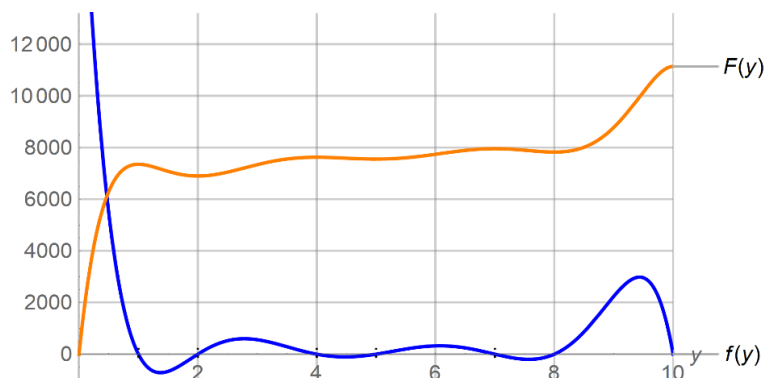


Рис.10. Графики функций  $f(y)$  и  $F(y)$  для примера 4.

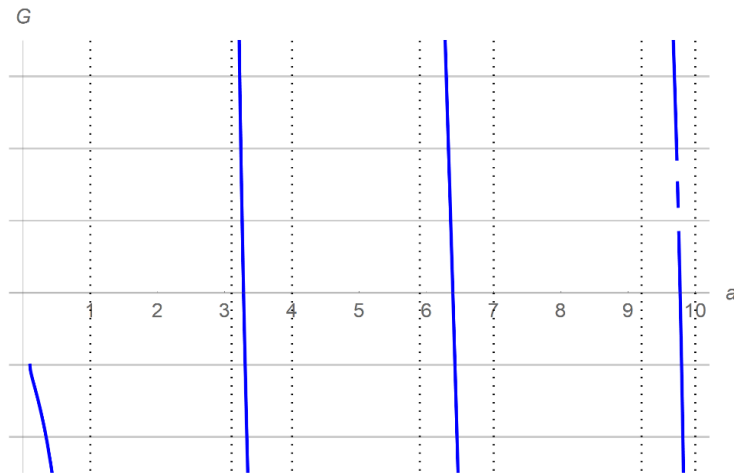


Рис.11. График функции  $G(a)$  для примера 4.

С помощью численных методов `NMinimize` и `FindRoot` системы Wolfram Mathematica 11.0 определим точки бифуркации:  $a_1 = 3,27276$ ,  $a_2 = 6.38791$ ,  $a_3 = 9.6693$ , где отсортированными по возрастанию значениями  $\lambda$  являются:  $\lambda_0 = 0.0181$ ,  $\lambda_1 = 0.0194$ ,  $\lambda_2 = 0.0633$ .

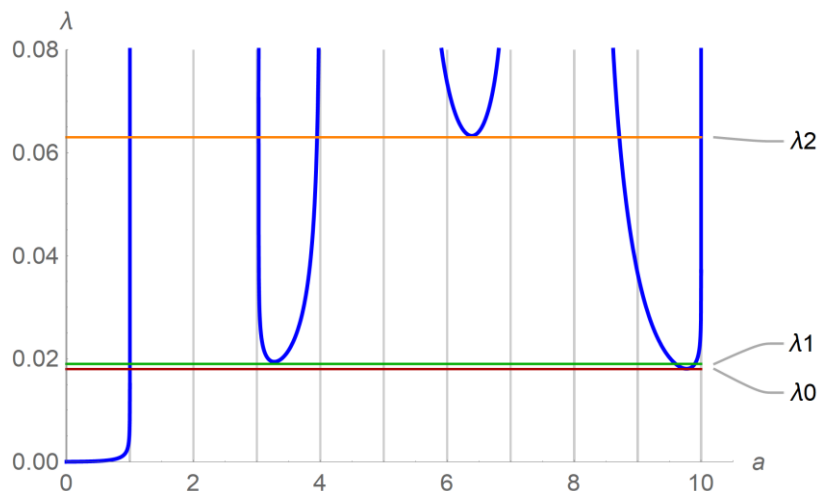


Рис.12. Бифуркационная диаграмма для задачи из примера 4.

Вследствие этого существуют  $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$  такие, что для  $\lambda < \lambda_0$  задача (1)–(2) имеет ровно одно решение, для  $\lambda = \lambda_0$  – ровно два решения, для  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$  – ровно три решения, для  $\lambda = \lambda_1$  – ровно четыре решения, для  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$  – ровно пять решений,  $\lambda = \lambda_2$  существует ровно шесть решений и для  $\lambda > \lambda_2$  существует ровно семь решений, где  $f(y) = (y - 1)(y - 2)(y - 4)(y - 5)(y - 7)(y - 8)(10 - y)$ .

В ходе исследования было выявлено, что задача (1)–(2), где  $f(y)$  – многочлен нечетной степени вида (11) и  $F(a_1) < F(a_2) < \dots < F(a_{2n-2}) < F(a_{2n-1})$ , имеет  $\lambda_i$  ( $i = 0 \dots n$ ) бифуркационных параметров таких, что для  $\lambda < \lambda_0$  задача имеет ровно одно решение, для  $\lambda = \lambda_0$  – ровно два решения, для  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$  – ровно три решения и т.д. Такие  $\lambda_i$  будут находиться только в промежутках, где  $f(y) > 0$ . Максимальное количество положительных решений всегда зависит от степени многочлена и равняется  $\lambda_n$ .

### Заключение

В ходе работы было получено общее решение нелинейной краевой задачи с параметром, а также выведена формула для бифуркационной кривой  $\lambda(a)$ .

Данное исследование дополняет результаты, полученные в работе [6], где авторы определяют точность построения бифуркационных диаграмм для краевой задачи с нелинейной функцией в виде многочлена. Исследование функции  $G(a)$  из теоремы Кормана–Ли–Оянга показало, что  $G(a)$  имеет нули только в промежутках  $(a_2, a_3), (a_4, a_5), (a_6, a_7), \dots, (a_{2n-2}, a_{2n-1})$ , где  $f(y) > 0$ , и следовательно, только в этих промежутках содержатся бифуркационные точки. Определение данных промежутков помогает сократить время численных расчетов.

Нечетная степень многочлена  $f(y)$  точно определяет количество положительных решений задачи (1)–(2). Бифуркационный подход к решению краевой задачи помогает найти значения критического параметра  $\lambda_i$  ( $i = 0 \dots n$ ) и выявить зависимость количества решений задачи в положительной области от них.

В работе также показано применение вычислительных методов численного интегрирования (NIntegrate), нахождения минимума и максимума функции (NMinimize, NMazimize), визуализации графиков функций  $G(a)$  и  $\lambda(a)$  в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 11.0.

## Список литературы

- [1] Ludwig D., Aronson D.G., Weinberger H.F. Spatial patterning of the spruce budworm. *J. Math. Biol.*, 1979; (8): 217–258.
- [2] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- [3] Korman P., Li Y., Ouyang T. Computing the location and the direction of bifurcation. *Math. Research Letters*, 2005; (12): 933–944.
- [4] Harley Ch., Momoniat E. Alternate Derivation of the Critical Value of the Frank–Kamenetskii Parameter in Cylindrical Geometry. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2008. – 15. 69–76.
- [5] Korman P., Li Y., Ouyang T. Exact multiplicity results for boundary value problems with nonlinearities generalizing cubic. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1996. – 126 (3). 599–616.
- [6] Korman P., Li Y., Ouyang T. Verification of bifurcation diagrams for polynomial-like equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008: 187–193.