ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ИСЧЕЗНОВЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ [1]

Ю. В. Чурин, М. Ю. Осипов [2]

1. Введение

В книге [1] дано определение исчезновения периодического решения для уравнения вида
$$\frac{dz}{dt} = z^n + p_1(t,\mu)z^n + \ldots + p_n(t,\mu) \tag{1}$$
(где $z \in \mathbb{C}$, p_k — периодична по t, μ — параметр), т. е. для уравнения в комплексной плоскости с комплексным полиномом в правой части, коэффициенты которого периодически (с периодом ω) зависят от времени t. Рассматриваются только такие периодические решения уравнения (1), период которых совпадает с периодом коэффициентов правой части.

Определение 1. (См. [1].) Говорят, что периодическое (с периодом ω) решение $z = \psi_\mu(t)$, непрерывно зависящее от μ, *исчезает на бесконечности* при $\mu \to 0$, если *а*) существует шар, в котором содержится хотя бы одна точка каждого решения, *б*) $\overline{\lim\limits_{\mu\to 0}} \max\limits_t |\psi(t,\mu)| = +\infty$.

В [2] уравнение (1) обобщается до уравнения
$$\frac{dx}{dt} = P(x) + X(x,t,\mu), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, 08-01-00346 и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2010-1.1-111-128-033.

с положительно-однородной (степени $n > 1$) невозмущенной правой частью $P(x)$ и возмущением, периодическим по t и растущим на бесконечности медленнее, чем $P(x)$:

$$|X(r\varphi, t, \mu)| \leqslant r^n o(r),$$

где $r = |x|$, $\varphi = x/|x|$. (Накладываются также дополнительные технические ограничения, но мы их здесь опускаем). Заметим, что в случае уравнения (1) роль $P(x)$ играет z^n, роль $X(x, t, \mu)$ — сумма $p_1(t, \mu)z^n + \ldots + p_n(t, \mu)$. Для уравнения (2) в [2] также изучается ситуация исчезновения периодических решений.

Периодические решения — сам факт их наличия, вопрос об их количестве, их поведение при различных деформациях — являются предметом интереса во многих исследованиях. Чаще всего отправной точкой таких исследований служит изучение различных конкретных случаев. Например, в [1] рассматривается пример системы (1), имеющей несколько периодических решений. В [2] рассматривается пример системы, близкой к (1) (отличающейся от нее только тем, что возмущение является вещественным, а не комплексным полиномом) и имеющей исчезающее периодическое решение. Особый интерес представляет геометрическая картина поведения решений систем дифференциальных уравнений. В следующих параграфах мы подробно разберем механизм построения примера работы [2] и построим по аналогичной схеме более сложный пример исчезновения периодических решений. Оказывается, отказ от требования совпадения периода решения с периодом правой части доставляет новый весьма любопытный пример исчезновения периодического решения, когда предельное множество исчезающего периодического решения становится несвязным.

2. Построение примера исчезновения периодического решения

В [2] представлен пример системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - y^2 + 1, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy + \mu x + (\mu^2 - 1)y\cos t \sin t, \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}, \qquad (3)$$

периодическое решение которой

$$x = \frac{(1-\mu^2)\cos t \sin t}{\cos^2 t + \mu^2 \sin^2 t}$$
$$y = \frac{\mu}{\cos^2 t + \mu^2 \sin^2 t}$$

исчезает при $\mu \to 0$, превращаясь в решение

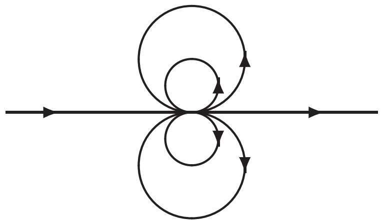
$$x = \operatorname{tg} t, \qquad y = 0$$

системы (3) при $\mu = 0$, определенное только на конечном промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$.

Систему (3) можно рассматривать как возмущение автономной системы

$$\frac{dz}{dt} = z^2, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

фазовый портрет которой



представляет собой фазовый портрет двух слившихся простых особых точек — центров.

Фазовый портрет рисуется на основе явного решения системы (4), являющейся системой уравнений с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{z^2} = dt, \qquad z \neq 0, \tag{5}$$

$$d\left(\frac{1}{z}\right) = -\,dt, \tag{6}$$

$$\frac{1}{z} = -t + C, \quad \mathbb{C} \ni C = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Таким образом, система имеет решение

а) $z(t) \equiv 0$,

б) $z(t) = \frac{1}{C-t}$.

Очевидно, при $\Im C \neq 0$ траектория является окружностью, касающейся оси x в нуле, как образ прямой $z(t) = C - t$ при отображении $z \mapsto 1/z$.

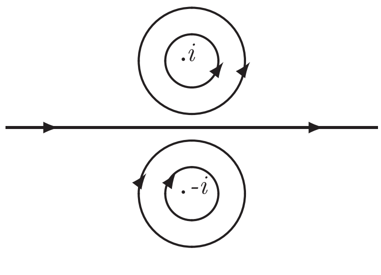
При этом если $\Im C > 0$, то окружность будет лежать в нижней полуплоскости, при $\Im C < 0$ — в верхней. При $\Im C = 0$ решение будет определено либо на полубесконечном интервале $(-\infty, C)$, либо на $(C, +\infty)$.

В первом случае траектория будет лежать на правой полуоси, исходя из нуля и достигая $+\infty$ при $t = C$. Во втором случае траектория будет лежать на левой полуоси, исходя из $-\infty$ при $t = C$ и "утопая"в нуле при $t \to +\infty$.

Будем вводить возмущение в уравнение $dz/dt = z^2$ поэтапно. Сначала рассмотрим возмущение системы (4), превращающее большинство решений в периодические, при этом разрушающее двойную особую точку в нуле и преобразующее ее в две простые особые точки: наиболее простым будет, по-видимому, добавка к векторному полю смещения на единицу вдоль выделенного (горизонтального) направления

$$\frac{dz}{dt} = z^2 + 1. \tag{8}$$

Фазовый портрет приобретет вид



где i, $-i$ — особые точки, а остальные траектории либо окружности, охватывающие одну из особых точек, либо прямая $\Im z = 0$.

В самом деле проинтегрируем это уравнение

$$\frac{dx}{z^2+1} = dt,$$

$$\frac{idz}{2(z+i)} - \frac{idz}{2(z-i)} = dt,$$

$$\frac{z+i}{z-i} = C\exp\{-2it\}, \quad \mathbb{C} \ni C = \mathrm{const} \neq 0,$$

$$z = i - \frac{2i}{1 + C\exp\{-2it\}}. \tag{9}$$

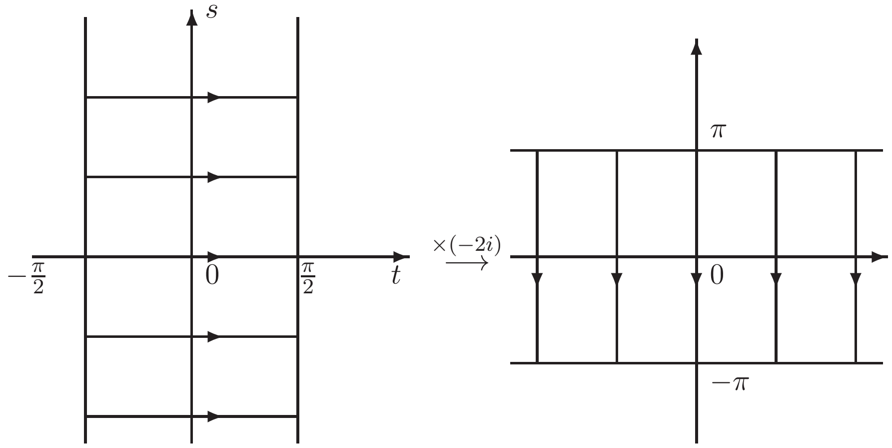
Константу интегрирования C можно представить в виде $C = \exp 2s$, причем без ограничения общности можно считать s вещественным (т.е. $C \in \mathbb{R}$ и $C > 0$). В некотором смысле нам повезло: именно для данной формулы удается рассматривать константу интегрирования C (точнее, s) и время t как координаты некоторой комплексной плоскости и, тем самым, интерпретировать формулу (8) как формулу, задающую конформное преобразование из плоскости $\tau = t + i\,s$ в плоскость z.

В выражении (9) z зависит от t периодически, поэтому можно ограничиться рассмотрением конформного отображения вертикальной полосы $\{\tau = t + is : -\pi/2 < t < \pi/2,\ s \in \mathbb{R}\}$. Траектории системы (8) получаются как образы горизонтальных отрезков данной полосы.

Итак, рассмотрим конформное преобразование

$$\frac{2i}{1 + \exp\{-2it\}}$$

Разобьем это преобразование на композицию преобразований:



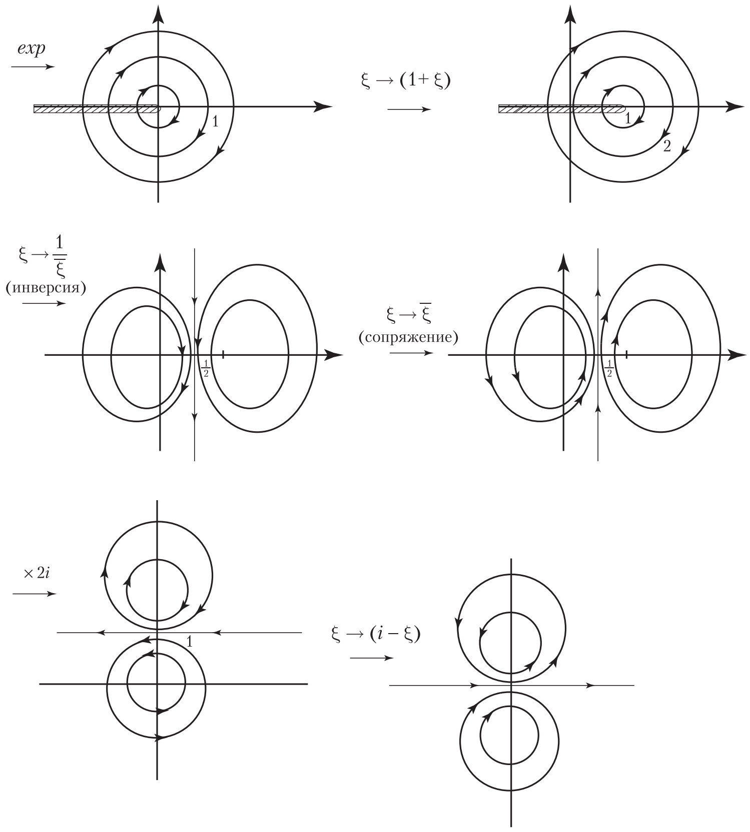
Умножение на $-2i$.

Две группы окружностей (решений, лежащих в верхней и нижней полуплоскостях) разделяются особым решением — своего рода сепаратрисой, — лежащим на горизонтальной прямой. Это решение получается как образ отрезка на плоскости τ, лежащим на горизонтальной прямой. Это решение получается как образ отрезка на плоскости τ, целиком лежащего на вещественной оси (т.е. $\tau = 0$) и выражается формулой

$$z(t) = i - \frac{2i}{1 + C\exp\{-2it\}}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

или, что то же,

$$z(t) = i - \frac{2i}{1 + C\exp\{-2it\}} = i - \frac{2i\exp\{it\}}{\exp\{it\} + \exp\{-it\}} = i - i\frac{\cos t + i\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t,$$



$$\frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

(Заметим — это единственная траектория, на которой знаменатель в формуле (7) может обращаться в ноль (точнее, стремиться к нулю)). Нетрудно видеть, что данная траекторяи уравнения (8) может рассматриваться как поточечный предел (для каждого t) периодических траекторий $z_s(t)$ у того же уравнения,

$$z_0(t) = \lim_{s \to +0} z_s(t) = \lim_{s \to +0} \left[i - \frac{2i}{1 + e^{-2i(t+is)}} \right].$$

Теперь, наконец, мы введем в уравнение (8) еще одно – неавтономное – возмущение. Воспользуемся тем обстоятельством. что мы ограничили себя изучением случая, когда периоды правой части неавтономного уравнения и его решения должны совпадать.

Сконструируем из автономного уравения новое неавтономное, которое имеет одно периодическое решение, совпадающее с периодическим решением исходного уравнения (8), для чего добавим к правой части уравнения (8) функцию, периодически зависящую от t и обращающуюся в ноль на интересующем нас решении. (Таковой может быть, например, интеграл системы $f(z,t,C) = 0$ — в старинном понимании этого термина — с фиксированной константой интегрирования).

Для того, чтобы строящийся нами пример совпал с примером 1 из [2], изменим обозначения и выпишем заново решение уравнения (8)

$$z(t) = i - \frac{2i}{1 + Ct^{-2it}}$$

в новых обозначениях: $C = (1+\mu)/(1-\mu)$. Догадаться до такого соответствия можно, сопоставив расстояния от нуля до ближайшей к нему точки траектории в наших обозначениях и обозначениях [2]. Стоит обратить внимание на то, что пока μ это не параметр уравнения. а константа интегрирования автономного уравнения (8):

$$z(t) = i - \frac{2i}{1 + \frac{1+\mu}{1-\mu}\, e^{-2it}} = \ \ldots = \frac{(1-\mu^2)\cos t \sin t + \mu i}{\cos^2 t + \mu^2 \sin^2 t}.$$

Таким образом, траектории уравнения (8) задаются выражениями

$$x = \xi_\mu(t) = \frac{(1-\mu^2)\cos t \sin t}{\cos^2 t + \mu^2 \sin^2 t},$$

$$y = \eta_\mu(t) = \frac{\mu}{\cos^2 t + \mu^2 \sin^2 t}.$$

Напомним, здесь μ — константа интегрирования, т.е. μ параметризует семейство траекторий *одного и того же уравнения* $dz/dt = z^2 + 1$.

Зафиксируем теперь μ и рассмотрим функцию на всей плоскости $z = x + iy$, периодически зависящую от t :

$$\eta_\mu(t)x - \xi_\mu(t)y, \quad x + iy \in \mathbb{C}.$$

Избавляемся от знаменателя $\cos^2 t + \mu^2 \sin^2 t$, умножая на него, и приходим к периодической по t функции

$$\mu x - (1-\mu^2)\cos t \sin t\, y, \tag{10}$$

не равной тождественно нулю, но, очевидно, обращающейся в ноль на траектории $\xi_\mu(t) + \eta_\mu(t)i$.

В силу того, что кривая $\xi_\mu(t) + \eta_\mu(t)i$ является решением (8) и функция (10) обращается в ноль вдоль нее, эта кривая является также решением системы (3).

Так как

$$\operatorname{tg} t + i0 = \lim_{s\to 0}\left(i - \frac{2i}{1 + e^{-2i(t+si)}}\right) = \lim_{s\to 0} z_s(t) = \lim_{\mu\to 0}(\xi_\mu(t) + \eta_\mu(t)i),$$

где $(1+\mu)/(1-\mu) = e^{2s}$, траектория $\xi_\mu(t) + \eta_\mu(t)i$ является исчезающей периодической траекторией системы (3).

3. Решения уравнения $dz/dt = z^n$

Для построения более сложного примера исчезающего решения получим сначала явную формулу для решений уравнения вида (1) с исключенным возмущением:

$$dz/dt = z^n$$

и нарисуем фазовый портрет этого уравнения.

Перейдем к полярной записи $z = re^{i\varphi}$. Тогда уравнение перепишется в виде:

$$\frac{dre^{i\varphi}}{dt} = r^n e^{in\varphi}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r^n \cos(n-1)\varphi \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = r^{n-1}\sin(n-1)\varphi, \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{ctg}(n-1)\varphi, \tag{11}$$

отметив, что нулями функции $\sin(n-1)\varphi$ являются числа $\varphi_m = \pi m/(n-1)$, $m \in \mathbb{Z}$, которые в дальнейшем мы будем именовать *исключительными направлениями* системы.

Из (11) следует, что $r(\varphi) = r_0 \sqrt[n-1]{\sin(n-1)\varphi}$. Подставив $r(\varphi)$ в уравнение

$$dt = \frac{d\varphi}{r^{n-1}\sin(n-1)\varphi},$$

получим зависимость t от φ:

$$t = \int \frac{d\varphi}{r_0^{n-1}\sin^2(n-1)\varphi} = \frac{1}{(n-1)r_0^{n-1}\operatorname{ctg}(n-1)\varphi}.$$

Отсюда, кстати, нетрудно видеть, что время, необходимое траектории для перемещения из окрестности одного исключительного направления в окрестность другого, например,

$$t_{\varphi=(\pi-\varepsilon)/(n-1)} - t_{\varphi=\varepsilon/(n-1)} = -\frac{1}{(n-1)r_0^{n-1}(\operatorname{ctg}(n-\varepsilon) - \operatorname{ctg}\varepsilon)},$$

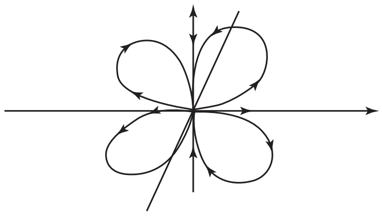
стремится к нулю при $r_0 \to +\infty$ как $\frac{1}{r_0^{n-1}}$, что согласуется с общей теорией [1, 2].

Окончательно,

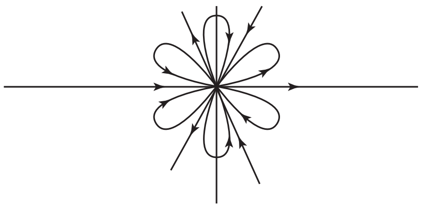
$$\varphi(t) = \operatorname{arcctg}(-r_0^{n-1}(n-1)t),$$

$$r(t) = r_0 \sqrt[n-1]{\sin((n-1)\operatorname{arcctg}(-r_0^{n-1}(n-1)t))}.$$

Теперь мы можем нарисовать фазовый портрет системы $dz/dt = z^n$ на примере $dz/dt = x^3$ и $dz/dt = z^4$:



Исключительныые направления: $\varphi = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$. В этом случае каждый из лепестков, в частности, имеет форму лемнискаты.



Исключительныые направления: $\varphi = 0$, $\pi/3$, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$, $5\pi/3$.

Обратим внимание на то, что, подобно случаю z^2, нет топологических препятствий к тому, чтобы большинство решений уравнения при специальном возмущении превратились в периодические.

4. Пример автономного уравнения с периодическими решениями для правой части $z^3 + \ldots$

Поставим теперь перед собой задачу — построить первую часть возмущения для уравнения $dz/dt = z^3$ подобно тому, как это было сделано для уравнения $dz/dt = z^2$, т. е. построить автономное возмущение

$$\frac{dz}{dt} = z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_3,$$

$$\frac{dz}{z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_3} = dt,$$

которое превращаетбольшинство решений в периодические.

Удобнее всего искать требуемый полином, подбирая не коэффициенты α_k, а параметры раложения рациональной функции в левой части на простейшие дроби:

$$\left(\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c} +\right) dz = dt, \tag{12}$$

т. е. будем подбирать параметры A, B, C и a, b, c. Предполагается, что корни a, b, c попарно различны — в ином предположении нельзя добиться того, чтобы большинство решений были бы периодическими, так как локально в кратной особой точке решение вело бы себя, как у уравнения $dz/dt = z^2$ или как у уравнения $dz/dt = z^3$, т. е. все траектории имели бы предельные значения (и, тем самым, не могли бы быть периодическими).

Приводя сумму простейших дробей к общему знаменателю, получаем

$$\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c} =$$

$$= \frac{A(z-b)(z-c) + B(z-a)(z-c) + C(z-a)(z-b)}{(z-a)(z-b)(z-c)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)z^2 - (A(b+c) + B(a+c) + C(a+b))z + (Abc + Bac + Cab)}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Прежде всего от параметров A, B, C, a, b, c требуется, чтобы представляемая с их помощью рациональная функция была обратной приведенному полиному, т. е. чтобы коэффициенты полинома в числителе при z^2, z, 1 были бы соответственно равны 0, 0, 1, или

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ A(b+c) + B(a+c) + C(a+b) = 0, \\ Abc + Bac + Cab = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Из первого уравнения следует, что $C = -(A + B)$. Отсюда и из второго уравнения следует, что

$$A(c-a) + B(c-b) = 0.$$

Таким образом, коэффициенты простейших дробей могут быть выписаны как

$$A = A,$$

$$B = A\frac{a-c}{c-b},$$

$$C = A\frac{b-a}{c-b}.$$

Выпишем теперь интеграл уравнения (12) и подставим в него найденные значения параметров

$$A\ln(z-a) + B\ln(z-b) + C\ln(z-c) = t + \mathrm{const},$$

$$A\ln(z-a) + A\left(\frac{a-c}{c-b}\right)\ln(z-b) + A\left(\frac{b-a}{c-b}\right)\ln(z-c) = t + \mathrm{const},$$

$$\ln(z-a) + \frac{a-c}{c-b}\ln(z-b) + \frac{b-a}{c-b}\ln(z-c) = \frac{t}{A} + \mathrm{const}. \tag{14}$$

Чтобы получить интегрируемое уравнение, необходимо наложить условие целочисленности на $(a-c)/(c-b)$ и $(b-a)/(c-b)$. Более того, чтобы получившийся интеграл был разрешим относительно z, желательно, чтобы оказавшаяся под логарифмом рациональная функция имела бы в числителе и знаменателе полиномы не выше второй степени. Ясно также, что в предположении попарного различия корней выполняются соотношения $(a-c)/(c-b) \neq 0$, $(b-a)/(c-b) \neq 0$. Все это означает необходимость выполнения одного из требований:

1. $\dfrac{a-c}{c-b} = -1,\ \ \dfrac{b-a}{c-b} = -1 \Rightarrow\ a = b,\ a = c \Rightarrow \qquad a = b = c$
2. $\dfrac{a-c}{c-b} = 1,\ \ \dfrac{b-a}{c-b} = -1 \Rightarrow\ c = \dfrac{a+b}{2},\ a = c \Rightarrow \qquad a = b = c$
3. $\dfrac{a-c}{c-b} = -1,\ \ \dfrac{b-a}{c-b} = 1 \Rightarrow\ a = b,\ b = \dfrac{a+c}{2} \Rightarrow \qquad a = b = c$
4. $\dfrac{a-c}{c-b} = 1,\ \ \dfrac{b-a}{c-b} = -2 \Rightarrow\ c = \dfrac{a+b}{2},\ c = \dfrac{a+b}{2}$
5. $\dfrac{a-c}{c-b} = -2,\ \ \dfrac{b-a}{c-b} = 1 \Rightarrow\ b = \dfrac{a+c}{2},\ b = \dfrac{a+c}{2}.$

Выполнение первых трех требований невозможно в предположении отсутствия кратных корней. Два последних – эквивалентны с точностью до переобозначения корней b и c. Будем считать, что

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Таким образом из (14) мы получаем

$$\ln \frac{(z-a)(z-b)}{\left(z-\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{t}{A} + \mathrm{const}$$

или

$$\frac{(z-a)(z-b)}{\left(z-\frac{a+b}{2}\right)^2} = De^{t/A}, \quad D = \mathrm{const}. \tag{15}$$

Из условия нормировки (последнее из условий (13)), а также из выражений для коэффициентов A, B, C получаем

$$Abc + Bac + Cab = 1,$$

$$Ab\frac{a+b}{2} + A\frac{a-\frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2}-b}\,a\,\frac{a+b}{2} + A\frac{b-a}{\frac{a+b}{2}-b}\,ab = 1,$$

$$b(a+b) + \frac{a-b}{a-b}\,a\,(a+b) + 4\frac{b-a}{a-b}\,ab = \frac{2}{A},$$

$$(a+b)^2 - 4ab = \frac{2}{A},$$

$$(a-b)^2 = \frac{2}{A}. \tag{16}$$

Поскольку мы хотим добиться того, чтобы большинство решений было периодическими, как вытекает из (15), A следует выбирать чисто мнимым. Таким образом, в силу (16) вектор $a-b$ должен лежать на одной из биссектрис координатных углов. Больше никаких ограничений на выбор параметров нет, и мы полагаем, что

1) $c = \frac{a+b}{2} = 0$ (поскольку на топологическую картину фазового портрета оказывает влияние только взаимное расположение корней);

2) a b $x = y$ $\Re a = \Re b$ (поскольку результирующие фазовые портреты в иных случаях будут симметричны друг другу);

3) $|a| = |b| = 1$ (поскольку фазовые портреты отличаются при разных нормировках только масштабом).

Тем самым мы приходим к значениям параметров

$$a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad b = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad c = 0,$$

$$A = -\frac{i}{2}, \quad B = -\frac{i}{2}, \quad C = i,$$

т. е. к уравнению

$$\left(-\frac{\frac{i}{2}}{z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \right) dz = dt$$

или

$$\frac{dz}{dt} = z(z^2 - i)$$

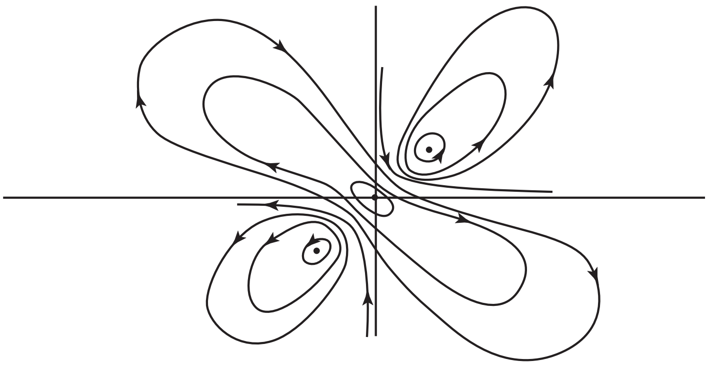
с интегралом

$$\frac{z^2 - i}{z^2} = De^{2it}$$

или

$$z^2(1 - De^{2it}) = i, \quad D = \text{const}, \tag{17}$$

и, как мы видим, фазовому портрету



ЛИТЕРАТУРА

1. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964. 320 с.

2. Чурин Ю. В. Об исчезновении периодических решений квазиоднородных систем, имеющих лишь простые исключительные множества // Дифференц. уравнения. 1975. Т. XI, № 4. С. 678–686.

Санкт-Петербургский государственный университет