ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРА АВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ С ИСЧЕЗАЮЩИМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ [1]

Ю. В. Чурин, М. Ю. Осипов [2]

В данной работе мы будем строить примеры исчезающих периодических решений уравнений с периодической правой частью, продолжая исследования работ [1–3].

1. Построение примера автономного уравнения с периодическими решениями для правой части $z^n + \ldots$

Сопоставляя фазовые портреты невозмущенного $dz/dt = z^3$ и возмущенного $dz/dt = z(z^2 - i)$ уравнений, мы можем заметить, что кратная особая точка расщепляется на три, одна из которых остается в нуле, а две остальные расходятся по осевым линиям двух одинаково ориентированных лепестков, где $\sin 2\varphi = 1$.

Глядя на фазовый портрет невозмущенного уравнения более высокой степени $dz/dt = z^n$, обратим внимание на то, что осевые линии одинаково ориентированных лепестков (начиная с первого против хода часовой стрелки лепестка, если отсчитывать от оси абсцисс) лежат на лучах $\sin(n-1)\varphi = 1$, т. е. на лучах, где лежат корни $(n-1)$-й степени из i.

Можно предположить, что в случае, когда особая точка расщепляется таким образом, что одна простая особая точка остается в нуле, а остальные расходятся по корням $(n-1)$-й степени из i, уравнение остается интегрируемым и его решения (по крайней мере лежащие вблизи этих $(n-1)$ точек) становятся периодическими.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, 08-01-00346 и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2010-1.1-111-128-033.

Убедимся в этом. Уравнение с указанными особыми точками является обобщением уравнения (17) работы [3]:

$$\frac{dz}{dt} = z(z^{n-1} - i) \tag{1}$$

Постараемся проинтегрировать это уравнение, переписывая его в виде

$$\frac{dz}{z(z^{n-1} - i)} = dt \tag{2}$$

и разлагая левую часть последнего на простейшие дроби. Так как все корни полинома в знаменателе простые, это разложение имеет вид

$$\frac{A}{z} + \frac{B_1}{z - b_1} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{z - b_{n-1}}, \quad b_1^{n-1} = b_2^{n-1} = \ldots = b_{n-1}^{n-1} = i.$$

Из соображений симметрии все B_k должны совпадать между собой (далее мы в этом убедимся). Обозначая их общее значение через B и приводя предыдущее выражение к общему знаменателю, получим

$$\frac{A\prod\limits_{k=1}^{n-1}(z - b_k) + Bz\sum\limits_{k=1}^{n-1}(z - b_1)\ \ldots\ (\widehat{z - b_k})\ \ldots\ (z - b_{n-1})}{z(z^{n-1} - i)}. \tag{3}$$

Для приведения подобных членов в числителе воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Если $b_1, \ldots, b_m$ – m попарно различных корней m-й степени из одного и того же числа w, то*

$$\sum_{k=1}^{m}(z - b_1)\ldots(\widehat{z - b_k})\ \ldots\ (z - b_m) = mz^{m-1}$$

Доказательство. В самом деле, справедливо равенство полиномов

$$(z - b_1)\ \ldots\ (z - b_k)\ \ldots\ (z - b_m) = z^m - w$$

Дифференцируя его, доказываем требуемое.

Преобразуем выражение (3):

$$\frac{A(z^{n-1} - i) + (n-1)z^{n-1}B}{z(z^{n-1} - i)}$$

Отсюда следует, что сумма простейших дробей даст требуемую функцию (см. уравнение (2)) при условии

$$\begin{aligned} -Ai &= 1, & A &= i, \\ A + (n-1)B &= 0 & B &= -\frac{i}{n-1}. \end{aligned}$$

(Тем самым, кстати, доказано, что коэффициенты B_k в разложении на простейшие дроби действительно могут быть взяты одинаковыми).

Теперь мы можем проинтегрировать уравнение (2)

$$\left(\frac{i}{z} - \frac{i}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{z-b_k}\right)dz = dt$$

$$\left(\frac{n-1}{z} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{z-b_k}\right)dz = -i(n-1)dt$$

$$(n-1)\ln z - \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}(z-b_k)\right) = -i(n-1)t + \mathrm{const}$$

$$\ln\frac{z^{n-1}}{z^{n-1}-i} = -i(n-1)t + \mathrm{const}$$

$$\frac{z^{n-1}}{z^{n-1}-i} = \frac{1}{D}e^{-i(n-1)t} \quad (D = \mathrm{const})$$

$$z^{n-1}De^{i(n-1)t} = z^{n-1} - i.$$

Наконец, получаем интеграл уравнения (1) в виде

$$z^{n-1}(1 - De^{i(n-1)t}) = i \quad (D = \mathrm{const}) \tag{4}$$

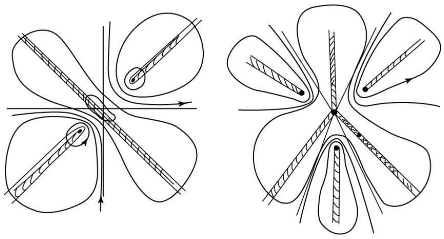
Чтобы изобразить траектории уравнения (1), поступим аналогично тому, как поступали в случае уравнения $dz/dt = z^2 + 1$ (см. (8) в работе [3]): определим s формулой $D = e^{-(n-1)s}$ и рассмотрим конформное преобразование

$$\tau = t + is \mapsto z = \sqrt[n-1]{\frac{i}{1 - e^{i(n-1)(t+is)}}}$$

сначала из полосы $\{\tau = (t+is) : 0 < t < \dfrac{2\pi}{n-1},\ s \in \mathbb{R}\}$.

Как видим, полоса $0 < t < \dfrac{2\pi}{n-1}$ переходит в сектор с углом развертки $-\dfrac{\pi}{2(n-1)} < \varphi < \dfrac{3\pi}{2(n-1)}$. Теперь можно повторить построение отображения для полосы $\dfrac{2\pi}{n-1} < t < \dfrac{4\pi}{n-1}$, выбирая на этот раз другую ветвь $\sqrt[n-1]{\zeta}$, а именно ветвь, отображающую плоскость с разрезом вдоль мнимой оси от нуля до $-\infty$ в сектор $\dfrac{3\pi}{2(n-1)} < \varphi < \dfrac{7\pi}{2(n-1)}$. Повторяя эту процедуру $(n-1)$ раз, мы отобразим полосу $0 < t < 2\pi$ (с вертикальными разрезами внутри нее при $t = \dfrac{2\pi}{n-1}k$ $(k = 1, \dots, n-2)$) почти во всю плоскость.

Нарисуем, как выглядит составной образ полосы $0 < t < 2\pi$ в случае $n = 3$ и $n = 4$.



Легко видеть, что при $s > 0$ образ открытого отрезка $t + is$ $(0 < t < 2\pi, s = \text{const})$ продолжается до замыкания, образуя замкнутую кривую в виде $(n-1)$-листника, охватывающего ноль. Таким образом, мы получаем периодическую траекторию с периодом 2π. При $s < 0$ образ каждого из отрезков

$$\left(\frac{2\pi(k-1)}{n-1} < t < \frac{2\pi k}{n-1},\ s = \text{const}\right),$$

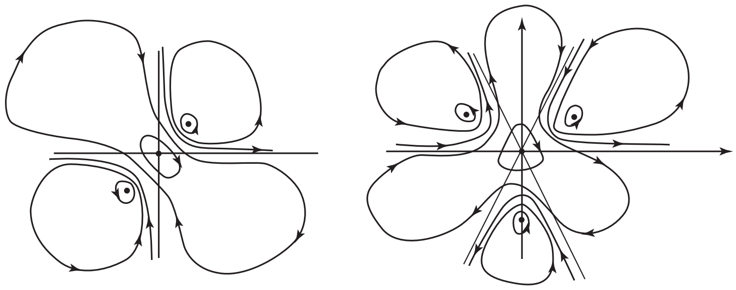
замыкается, охватывая k-й корень $(n-1)$-й степени из i и образуя, следовательно, периодическую траекторию с периодом $2\pi/(n-1)$. При $s = 0$ отображение никакого из открытых отрезков

$$\left(\frac{2\pi(k-1)}{n-1} < t < \frac{2\pi k}{n-1},\ s = 0\right)$$

не может быть продолжено так, чтобы оно было определено на крайних точках отрезка. Образом этих открытых отрезков являются гиперболообразные кривые, имеющие асимптотами при $t \to \dfrac{2\pi(k-1)}{n-1}+$ и $t \to \dfrac{2\pi k}{n-1}-$ соответственно неустойчивое и устойчивое исключительные направления невозмущенного уравнения $dz/dt = z^n$.

Каждая из этих $(n-1)$-ой кривой является предельным множеством при $s \to 0-$ семейства периодических решений с периодом $2\pi/(n-1)$, охватывающих соответствующий корень из i. Кроме того, каждая из этих кривых является компонентой связности несвязного предельного множества при $s \to 0+$ семейства периодических решений с периодом 2π, охватывающих ноль.

Теперь можно забыть о конформных отображениях и окончательно нарисовать траектории системы на примере $n = 3$ и $n = 4$.



2. Пример неавтономного уравнения с исчезающими периодическими решениями для правой части $z^n + \ldots$

Нам осталось построить неавтономное возмущение, зависящее от параметра μ, которое бы при каждом значении параметра обращалось в ноль на соответствующем периодическом решении (своем для каждого μ) автономного возмущенного уравнения так, чтобы при $\mu \to 0$ это периодическое решение стремилось бы к своему предельному множеству.

Такое возмущение можно сконструировать из интеграла (4), рассмотрев уравнение

$$\frac{dz}{dt} = z(z^{n-1} - i) + z^{n-1}(1 - (1+\mu)e^{i(n-1)t} - i). \qquad (5)$$

Как видим, в данном уравнении возмущение имеет степень полинома, меньшую n, правая часть этого уравнения периодически с периодом $2\pi/(n-1)$ зависит от t, т. е. данное уравнение укладывается в класс уравнений, изученных в работе [3] (см. там уравнение (1)).

При $\mu > 0$ (что соответствует $s < 0$, так как $\mu = e^{-(n-1)s} - 1)$) уравнение (5) имеет, по меньшей мере, $(n-1)$ периодическое решение периода $2\pi/(n-1)$ вида $z(t) = \sqrt[n-1]{\dfrac{i}{1-(1+\mu)e^{i(n-1)t}}}$ – для одной из ветвей корня $\sqrt[n-1]{\zeta}$.

При $\mu < 0$ (что соответствует $s > 0$) это уравнение имеет, по крайней мере, одно периодическое решение периода 2π, т. е. несовпадающее с периодом $2\pi/(n-1)$ возмущения уравнения (такие решения обычно не рассматриваются!), составленное из аккуратно сшиваемых ветвей $z(t) = \sqrt[n-1]{\dfrac{i}{1-(1+\mu)e^{i(n-1)t}}}$.

Предельным множеством какого-либо исчезающего периодического решения в случае $\mu > 0$ будет множество, задаваемое соответствующей отдельной ветвью

$$\sqrt[n-1]{\frac{i}{1-e^{i(n-1)t}}}.$$

В случае $\mu < 0$ предельным множеством одного исчезающего периодического решения будет объединение всех ветвей

$$\sqrt[n-1]{\frac{i}{1-e^{i(n-1)t}}}\,.$$

Санкт-Петербургский государственный университет

Литература

1. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964. 320 с.

2. Чурин Ю. В. Об исчезновении периодических решений квазиоднородных систем, имеющих лишь простые исключительные множества // Дифференц. уравнения. 1975. Т. XI, № 4. С. 678–686.

3. Осипов М. Ю., Чурин Ю. В. Об одном примере исчезновения периодических решений уравнения с периодической правой частью // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. № 2. С. 66–78.