ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2015
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77–39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГЛОБАЛЬНО НЕПРОДОЛЖИМЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ [1]

Ю. В. Чурин [2]

Аннотация

Рассматривается неавтономная система обыкновенных дифференциальных уравнений.Правая часть системы вне некоторого шара фазового пространства близка к автономной однородной системе, не имеющей ограниченных решений и порождающей динамическую систему Морса-Смейла на сфере Пуанкаре. Изучается асимптотика решений, непродолжимых на всю прямую. Доказывается, что в этом случае норма решения неограниченно растет, а его проекция на единичную сферу стремится к одной из неблуждающих траекторий системы Морса-Смейла.

ключевые слова: неавтономные системы,продолжимость решений, системы Морса-Смейла, сфера Пуанкаре

Abstract

This paper explores non-autonomous systems of ordinary differential equations. Outside of some sphere in phase space the right side of the system is close to an autonomous homogeneous system which has no bounded solutions and generates a Morse-Smale dynamical system on the Poincare sphere. We study the asymptotic behavior of inextensible solutions and prove that in this case the solution norm increases with no limit, and its projection onto the unit sphere tends to a non-wandering orbit of the Morse-Smale system.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 13-01-00624.

keywords: non-autonomous systems,extendability of solutions, Morse-Smale systems, Poincare sphere

Интерес к проблеме асимптотического поведения решений возник после введенного В. А. Плиссом [1] понятия особого периодического решения, график которого является объединением графиков глобально непродолжимых решений. В данной статье изучается асимптотика решений неавтономной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывной правой частью и обладающей свойством единственности, близкой вне некоторого цилиндра $\|x\| > a$ к простой однородной системе

$$\frac{dx}{dt} = P(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{2}$$

$P \in C^1$, $P(\lambda x) = \lambda^m P(x)$ при $\lambda > 0$. Близость систем (1) и (2) определяется условием

$$\|X(t, x) - P(x)\| \cdot \|x\|^{-m} \Longrightarrow 0 \text{ равномерно по } t \in \mathbb{R} \text{ при } \|x\| \to +\infty. \tag{3}$$

Определение 1. Однородная система (2) называется *простой*, если

1) система

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = F(\varphi), \quad \varphi \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \tag{4}$$

(где $F(\varphi) = P(\varphi) - \langle \varphi, P(\varphi) \rangle \varphi$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$) является системой Морса-Смейла;

2) для любой неблуждающей траектории ξ системы (4) выполнено неравенство

$$\nu(\xi) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \langle \xi(\tau), P(\xi(\tau)) \rangle \neq 0.$$

(Здесь $\xi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ — движение по траектории ξ.) Следующее утверждение является обобщением одного из результатов, полученных в [2].

Теорема 1. *Если* $x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ *максимально продолженное решение системы* (1) *и* $\beta < +\infty$, *то* $\|x(t)\| \to +\infty$ *при* $t \to \beta$ *и у системы* (4) *существует неблуждающая траектория* ξ *такая, что расстояние* $dist\{x(t) \cdot \|x(t)\|^{-1}, \xi\} \to 0$ *при* $t \to \beta$.

Доказательство. Отметим сразу же, что согласно характеристическому свойству максимально продолженных решений из $\beta < +\infty$ следует, что $\|x(t)\| \to +\infty$ при $t \to \beta$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Считая $\delta \in (0, \varepsilon)$, заключим каждую неблуждающую траекторию ξ системы (4) в каноническую окрестность $\mathcal{O}(\xi) \subset \mathcal{N}_\delta(\xi) \subset S^{n-1}$, граница которой кусочно-гладкая и трансверсальная устойчивому $W^s(\xi)$ и неустойчивому $W^u(\xi)$ многообразиям траектории ξ. В частности, при δ достаточно малом граница трансверсальна векторному полю $F(\varphi)$, $\varphi \in S^{n-1}$. (См. [3], [4].) Так как система (4) является системой Морса–Смейла, то справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Любая траектория $\varphi(\tau)$ системы* (4)*, начинающаяся в множестве $K = S^{n-1} \setminus \cup\mathcal{O}(\xi)$, покидает это множество как при убывании, так и при возрастании τ.*

Лемма 2. *Существует число $d = d(\delta)$ такое, что если решение $\varphi(\tau)$ системы* (4) *лежит в K при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, то $\tau_2 - \tau_1 < d$.*

Лемма 3. *Если число δ достаточно мало, то из существования у системы* (4) *траектории $\varphi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ такой, что $\varphi(\tau) \in K$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, $\varphi(\tau_1) \in \overline{\mathcal{O}}(\xi_1)$ и $\varphi(\tau_2) \in \overline{\mathcal{O}}(\xi_2)$ следует наличие связи $\xi_1 \to \xi_2$ в диаграмме системы* (4)*. (Последнее означает, что $\xi_1 \neq \xi_2$ и $W^u(\xi_1) \cap W^s(\xi_2) \neq \emptyset$).*

Для изучения поведения интегральных кривых системы (1), перейдем к обобщенным сферическим координатам $r = \|x\|$, $\varphi = x \cdot \|x\|^{-1}$. В этих координатах система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r^m\{G(\varphi) + g(t, r, \varphi)\} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= r^{m-1}\{F(\varphi) + f(t, r, \varphi)\} \end{aligned} \tag{5}$$

где $G(\varphi) = \langle \varphi, P(\varphi) \rangle$, g и f — непрерывные функции в области $r > a$, и при этом из (3) следует

$$|g(t, r, \varphi)| + \|f(t, r, \varphi)\| \Longrightarrow 0 \text{ равномерно по } (t, \varphi) \in \mathbb{R} \times S^{n-1} \text{ при } r \to +\infty. \tag{6}$$

Изменяя режим скоростей, представим систему (5) в виде автономной системы

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= r^{1-m} \\ \frac{dr}{d\tau} &= r\{G(\varphi) + g(t, r, \varphi)\} \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= F(\varphi) + f(t, r, \varphi) \end{aligned} \tag{7}$$

Траектории решений системы (7) как раз и являются интегральными кривыми системы (1). В частности, из вида (7) следует, что условие теоремы 1 о существовании глобально непродолжимого решения у системы (1) может быть выполнено лишь в случае, если степень однородности m системы (2) больше единицы.

Так как, согласно условию, система (1) обладает свойством единственности, то и система (7) обладает этим свойством. Далее, через $\tilde{v}(\tau, v_0) = (\tilde{t}(\tau, v_0), \tilde{r}(\tau, v_0), \tilde{\varphi}(\tau, v_0))$ будем обозначать решение системы (7), удовлетворяющее начальному условию $\tilde{v}(0, v_0) = v_0 = (t_0, r_0, \varphi_0)$.

Считая в дальнейшем число δ малым настолько, чтобы были верными утверждения лемм 2 и 3, займемся изучением поведения траекторий системы (7) в множестве

$$H = \mathbb{R} \times \{r > \rho,\, \varphi \in K = S^{n-1} \setminus \cup \mathcal{O}(\xi)\},$$

где ρ достаточно большое число.

Пусть $v_0 \in \operatorname{int} H$ и $\tilde{v}(\tau, v_0) \in H$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. Тогда $\tilde{\varphi}(\tau, v_0) \in K$. Отсюда, учитывая (6) и лемму 2, из соображений непрерывности следует, что $\tau_2 - \tau_1 \leqslant 2d$. Из первого и второго уравнений системы (7) следует тогда, что существуют постоянные $h_1 > 1$ и $h_2 > 0$, не зависящие от выбора начальной точки v_0, такие, что при всех $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ выполняются неравенства

$$r_0 h_1^{-1} \leqslant \tilde{r}(\tau, v_0) \leqslant r_0 h_1, \tag{8}$$

$$|\tilde{t}(\tau, v_0) - t_0| \leqslant h_2 r_0^{1-m}. \tag{9}$$

Из оценок (8) и (9), учитывая характеристическое свойство максимально продолженных решений, следует что любое решение системы (7), начинающееся в $\operatorname{int} H$, покидает H как при возрастании τ, так и при убывании τ.

Пусть теперь τ_2 и τ_1 соответствующие моменты выхода решения $\tilde{v}(\tau, v_0)$ из H и при этом $r_0 > \rho h_1$. Тогда из оценки (8) следует, что у системы (4) существуют неблуждающие траектории ξ_1 и ξ_2, такие, что $\tilde{\varphi}(\tau_1, v_0) \in \overline{\mathcal{O}}(\xi_1)$ и $\tilde{\varphi}(\tau_2, v_0) \in \overline{\mathcal{O}}(\xi_2)$. Опять таки из (6), соображений непрерывности и леммы 3 следует тогда, что в диаграмме системы (4) существует связь $\xi_1 \to \xi_2$.

Проследим теперь, как ведет себя решение $x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ системы (1), фигурирующее в условии теоремы 1.

Так как $\|x(t)\| \to +\infty$ при $t \to \beta$, то существует $t_0 \in (\alpha, \beta)$ такое, что

$$\|x(t)\| > \rho h_1 \;\text{ при }\; \forall t \in [t_0, \beta).$$

Ясно, что $r(t) = \|x(t)\|$, $\varphi(t) = x(t) \cdot \|x(t)\|^{-1}$, $t \in [t_0, \beta)$, являются решением системы (5) и его график совпадает с траекторией движения $v(\tau) = \tilde{v}(\tau, v_0)$, $\tau \geqslant 0$, где $v_0 = (t_0, r_0, \varphi_0)$, $r_0 = \|x(t_0)\|$, $\varphi_0 = x(t_0) r_0^{-1}$.

Заметим, что точки кривой $\varphi(t)$, $t \in [t_0, \beta)$, лежат либо в $\cup\mathcal{O}(\xi)$, либо в $K = S^{n-1} \setminus \cup\mathcal{O}(\xi)$. При этом, как отмечено выше, целиком в K кривая остаться не может. Обозначим через $\mathcal{O}(\xi_1)$, $\mathcal{O}(\xi_2)$, ... цепочку канонических областей, в которые последовательно попадает точка $\varphi(t)$ при непрерывном возрастании t от t_0 до β.

Учитывая теперь отмеченную выше связь между интегральными кривыми системы (5) и траекториями (7), убеждением, что в диаграмме системы (4) имеются связи $\xi_1 \to \xi_2 \to \ldots$ Но, как известно [5], траектории в цепочке попарно различны и их конечное число. Обозначим последнюю траекторию цепочки через ξ. Из построения цепочки следует, что, начиная с некоторого момента $t^* \in [t_0, \beta)$, $\varphi(t) \in \mathcal{O}(\xi)$, т. е. $\operatorname{dist}(\varphi(t), \xi) < \varepsilon$. В силу произвольности выбора ε, это и означает, что $\operatorname{dist}\{x(t) \cdot \|x(t)\|^{-1}\} \to 0$ при $t \to \beta$.

Тот факт, что $\nu(\xi) > 0$, следует из того, что в случае $\nu(\xi) < 0$ норма $\|x(t)\| \not\to +\infty$ при $t \to \beta$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плисс В. А. О числе периодических решений уравнений с полиномиальной правой частью // Доклады АН СССР. 1959. Т. 127, № 5. С. 965–968.
2. Чурин Ю. В. Об исчезновении периодических решений квазиоднородных систем, имеющих лишь простые исключительные множества // Дифференц. уравнения. 1975. Т. XI, № 4. С. 678 -686.
3. Чурин Ю. В. Поведение решений квазиоднородной системы в окрестности простого исключительного направления // Нелинейные динамические системы. СПб.: Изд. С.-Петербургского ун-та. 1997. Вып. 1. С. 298–311.
4. Чурин Ю. В. Простые исключительные множества неавтономных квазиоднородных систем // Дифференц. уравнения. 1973. Т. IX, № 6. С. 1073–1084.
5. Пилюгин С. Ю. Введение в грубые системы дифференциальных уравнений. Л.: Изд. Ленингр. ун-та. 1988.