*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172*

*http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru*

Методика преподавания

УДК 372.851

К вопросу об обучении решению вероятностных задач

Я. В. Делюкова

Дальневосточный федеральный университет Школа педагогики,
г. Уссурийск

e-mail: yanadelyukova@mail.ru

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы, касающиеся методики изучения вероятностей случайных событий в школьном курсе математики. Мы акцентируем внимание на методике решения задач, основанной на классическом определения вероятности и на геометрическом подходе к определению вероятности.

Ключевые слова: вероятностно-статистическая линия; вычисление вероятности; геометрические вероятности

Abstract

The article deals with the methods of studying the probability of random events in the school course of mathematics. We focus on the method based on classical definition of probability and the geometric approach to the definition of probability.

Keywords: probabilistic-statistical line; calculation of probabilities; geometric probability.

Вот уже более 10 лет темы вероятностно-статистической линии изучаются в школьном курсе математики как обязательные. Этот факт стал возможен благодаря положительному экспериментальному опыту внедрения стохастики в отечественную школу и активному обсуждению этого вопроса в педагогической среде.

В пользу включения вероятностно-статистической линии в школьный курс приводятся следующие доводы:

– изучать теорию вероятностей невозможно без обращения к личному опыту школьников, а поэтому изучение стохастической линии способствует проявлению интереса к математике;

–

знание основ теории вероятностей и статистики способствуют адекватному восприятию экономической, социальной информации в быстроменяющемся современном мире;

– Е. А. Бунимович, опираясь на исследования психологов, а также опыт своей работы, приводит данные о том, что наиболее благоприятным для формирования первоначальных вероятностных представлений является возраст, который примерно соответствует V–VII классам российской школы [1];

– универсальность вероятностных законов – изучение теории вероятностей способствует формированию естественнонаучных представлений об окружающем мире, что сказывается на развитии личности школьника, независимо от того, чем он будет заниматься в будущем;

– многолетний положительный опыт других стран, где преподавание основ теории вероятностей, статистики, комбинаторики ведётся с начальной школы.

Конечно, и до 2004 года элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей изучались на факультативных, кружковых занятиях со школьниками, но это были необязательные занятия, а их содержание определялось интересами и предпочтениями учителя. Е. А. Бунимович, отмечает что "несмотря на то, что Россия до последнего времени оставалась практически единственной развитой страной мира, в школьном курсе которой отсутствует вероятностно-статистическая линия, все эти годы продолжалась экспериментальная работа ученых, методистов, педагогов по преподаванию основ вероятности и статистики в школе" [3]. Результат этой работы заключается в том, что на сегодняшний день все допущенные к использованию учебники математики содержат вероятностно-статистическую линию. Изучение комбинаторики, статистики и теории вероятностей начинается в 5 или в 7 классе в зависимости от системы изложения, принятой в учебнике, по которому ведётся преподавание. Обучение стохастике условно можно разбить на три этапа – это пропедевтический (приходится на 5 – 6 классы, ученики знакомятся с приёмами работы с информацией, представленной в форме таблиц и диаграмм, решают несложные комбинаторные задачи), 7 – 9 (на этот этап приходится основной блок вероятностно-статистических знаний) и 10 – 11 классы (на этом этапе происходит систематизация пройденного материала, изучаются теоремы сложения и умножения вероятностей). Задачи с вероятностным содержанием представлены в заданиях ОГЭ, ЕГЭ, математических олимпиад.

Задачи вероятностно-статистической линии в заданиях ЕГЭ по своему содержанию – это задачи на применение определений вероятности (классического или геометрического), задачи на определение вероятности пересечения событий (зависимых или независимых), задачи на вычисление вероятностей объединения событий (совместных или несовместных). Задачи на нахождение вероятностей в заданиях ОГЭ – это, как правило, задачи на непосредственное применение классического определения вероятности (на наш взгляд эти задачи являются чрезмерно простыми для учеников 9-х классов).

В условии любой задачи на вычисления вероятности по классической схеме всегда подразумевается некоторый эксперимент, который надо осмыслить, продумать варианты его осуществления, а уже после этого можно приступать к подсчёту элементарных исходов эксперимента, следя за тем, чтобы исходы были равновозможными. Далее следует подсчитать число тех исходов, при которых произойдёт интересующее событие, и вычислить его вероятность. Игнорирование одного из этапов решения задачи, из-за нехватки времени или по другим причинам, приводит к тому, что школьники попросту манипулируют числовыми данными задачи, подставляя их в формулу, исходя из соображений, что ответ не должен превосходить единицы, а сталкиваясь с более сложными задачами, не справляются с ними, теряя интерес.

Школьникам 10–11 классов – участникам летней физико-математической школы при Дальневосточном федеральном университете в городе Уссурийске – была предложена следующая задача.

Задача. На соревнованиях выступают команды – по одной из каждой из заявленных школ. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность, что команда школы номер 15 будет выступать после команды школы 44, команда школы 12 будет выступать после команды школы номер 15, но перед командой школы номер 1?

Мнения школьников разделились. Часть школьников посчитала, что для решения задачи не достаточно данных, так как в условии не сказано, сколько школ приняли участия в соревнованиях. Некоторые школьники сравнительно быстро назвали верный ответ – вероятность интересующего события $P = 1/24 \approx 0,04$. Однако, при этом полагалось, что кроме команд названных школ, других участников можно вообще не принимать в расчёт. Таким образом, четыре команды можно переставлять между собой 24 способами, и только один способ благоприятен. Такие рассуждения не согласуются с классическим определением вероятности, и, строго говоря, их нельзя считать правильными. Испытание состоит в том, что случайным образом определяется порядок выступления несколько команд (обозначим их число k, $k \geqslant 4$), число всевозможных элементарных исходов испытания $k!$ ($k! \neq 24$ при $k \neq 4$), а число благоприятных исходов вовсе не равно одному.

Интересно отметить, что в другой раз, в другой группе школьников, учащиеся самостоятельно пришли к заключению, что ответ действительно не зависит от числа представленных команд, в ходе решения аналогичной задачи.

Задача. На полке в случайном порядке расставлено k книг, среди которых четыре тома произведений одного автора. Найти вероятность, что эти тома расположены в порядке возрастания их номеров слева на право (но не обязательно рядом).

Здесь проводились вполне строгие рассуждения. Событие A, вероятность которого требуется вычислить состоит в том, что четыре тома будут расположены в порядке убывания номеров (но не обязательно друг за другом). Для подсчёта числа благоприятных исходов предлагалось сначала поставить на полку четыре тома в указанном порядке, после этого расположить оставшиеся $(k-4)$ книги. Первую из оставшихся книг можно расположить 5 способами, вторую – $6, \ldots,$ $(k-4)$-ю – k способами, далее было найдено $m = 5 \times 6 \times \ \ldots \ \times (k-4)$, и, наконец, $P(A) = 1/24$.

Проводя занятия со школьниками, участниками летней физико-математической школы, мы обнаружили, что сам вопрос об опыте (эксперименте, испытании), проведение которого предполагается в условиях задачи, часто вызывает недоуменнее у учащихся ("какой опыт?"), но если нет опыта, то как подсчитать число исходов опыта? Нередко учащиеся путаются в терминологии, не делая различий между понятиями "испытание" и "случайное событие".

При формировании представлений о вероятности случайного события в классической схеме важно, чтобы учащимися было достигнуто понимание следующих сторон определения:

– Число всех равновозможных исходов опыта n зависит от того, какая модель опыта, о котором идёт речь в задаче, будет построена при её решении, разным моделям одного опыта отвечают различные значения n.

– Благоприятные исходы выбираются из построенного множества равновозможных исходов, число благоприятных исходов m изменяется с изменением n.

– Вероятность рассматриваемого случайного события не меняется в зависимости от того как построена модель опыта.

– Определяя вероятность, мы определяем количественное выражение возможности наступления случайного события.

Рассмотрим с этой точки зрения следующую задачу.

Задача. В классе 20 учеников. С помощью жребия надо выбрать трёх учеников, которым достанутся билеты в театр. Анатолий хотел бы пойти в театр, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что Анатолий пойдёт в театр?

Решая задачу, можно считать, что Анатолий случайным образом выбирает одну карточку из двадцати с виду одинаковых, три из которых помечены. Тогда $n = 20$, при этом $m = 3$, вероятность события $P(A) = 0,15$.

Можно считать, что опыт осуществляется иначе. Например, имеются 20 карточек с фамилиями учеников, случайным образом извлекаются 3 карточки с фамилиями участников жеребьёвки, которые пройдут в театр. Тогда каждый элементарный исход – это сочетание из 20 по 3. Всего равновозможных исходов $n = \mathrm{C}_{20}^{3} \neq 20$, из них рассматриваемому событию благоприятствуют $m = \mathrm{C}_{19}^{2} \neq 3$. Значения n, m изменились, вероятность, разумеется, не изменилась. Здесь школьникам, часто, приходится преодолевать сложившийся к этому времени стереотип, что все величины должны определяться однозначно условиями задачи.

Первый способ решения не связан с комбинаторными формулами и с этой точки зрения представляется менее трудоёмким. Школьникам, зачастую кажется, что проводить подобные рассуждения излишне, так как ответ почти очевиден, опуская их, они сводят решение задачи к формальной подстановке данных в формулу. Такое неосмысленное применение формулы вычисления вероятности приведет к неверному ответу (13/76), при решении, например, следующей задачи.

Задача. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на пары с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 76 теннисистов, среди которых 13 участников из России, в том числе Роман Иссаев. Найдите вероятность, что в первом туре Роман будет играть с каким-нибудь теннисистом из России [5, с. 22].

Задача учителя – помочь ученику отыскать наиболее рациональный способ решения задачи, но всякое решение должно быть математически обосновано, понятно ученику. Осознав все тонкости классического определения вероятности, его глубину, овладев умением строить вероятностную модель по условиям задачи, ученик успешно справится и с более сложными и интересными заданиями. Формальный подход к решению задач на вычисление вероятностей, комбинаторных задач губит саму идею включения вероятностно-статистической линии в школьный курс математики, основная цель которой заложить основы вероятностной интуиции, статистического мышления.

Вероятностно-статистическая линия представлена в школьных учебниках таким образом, что сначала излагается статистический подход к понятию вероятности, основанный на здравом смысле и жизненном опыте, затем изучается классическая вероятностная схема, и кратко, на примерах, описан геометрический подход к определению вероятности. На наш взгляд, геометрическому определению вероятности отведено незаслуженно мало места в курсе школьной математики. Отметим некоторые положительные моменты использования этого определения.

Во-первых, задачи на геометрические вероятности, позволяют установить связь между темами вероятностно-статистической линии и темами курса геометрии. На курсах повышения квалификации учителей математики не раз приходилось слышать мнение учителей о том, что темы вероятностно-статистической линии представлены несколько обособленно от других тем и учителям приходится изыскивать возможность связать другие темы алгебры и геометрии с элементами теории вероятностей и комбинаторики.

Во-вторых, это определение даёт геометрическую интерпретацию самого понятия “вероятность”.

В-третьих, можно привести большое число разнообразных задач, не имеющих никакого отношения к геометрии, которые решаются только с использованием геометрических вероятностей.

Геометрический подход к определению вероятности наряду с толкованием вероятности как частоты события способствует пониманию удивительной связи математики с процессами, происходящими в окружающем мире.

Приведём
здесь только несколько примеров задач на применение геометрического определения вероятности, решая которые можно организовать повторение свойств изученных функций, свойств модуля, графического способа решения неравенств с двумя неизвестными, формул для вычисления площадей, построение графиков функций.

Задача. К празднику Винни-Пух получил 1000 грамм мёда, Кролик – 300 грамм, а Пятачок – 100 грамм мёда. В некоторый случайный момент времени Винни-Пух обнаружил, что его мёд закончился, и предложил друзьям игру. Если в этот момент у Пятачка мёда больше чем у Кролика, то выигрывает Пятачок, если у Кролика меда больше чем три раза по столько, сколько у Пятачка, то выигрывает Кролик. Во всех остальных случаях выигрывает Винни-Пух. Какова вероятность, что выиграет Винни-Пух?

Задача [2, с. 99]. Коля и Оля договорились встретиться в Центральном парке. Пришедший первым ждет другого в течение 30 минут, после чего уходит. Какова вероятность, что они встретятся?

Эту классическую задачу о встречи уместно дополнить следующей задачей.

Задача. В условиях эксперимента, описанного в предыдущей задаче найти вероятность того, что Коля ждал Олю обусловленное время, но встреча не состоялась. Найти вероятность того, что Оле не пришлось ждать Колю. Найти вероятность, что встреча состоялась, но при этом Коле пришлось ждать Олю не больше четверти часа.

Задача. Значения k и b равновозможны в квадрате $|k| \leqslant 2$, $|b| \leqslant 2$. Найти вероятность, что абсцисса точки пересечения прямой $y = kx + b$ с осью Ox больше 1?

Задача. Значения b и c равновозможны в квадрате $|b| \leqslant 1$, $|c| \leqslant 1$. Найти вероятность, что квадратный трёхчлен $x^2 + 2bx + c$ не имеет корней. Найти вероятность того, что корни квадратного трёхчлена $x^2 + 2bx + c$ неположительны.

Демонстрация прикладного значения вероятностно-статистического материала, его связи с другими темами школьной математики способствует восприятию этого, сравнительно нового для российской школы, материала как составной части школьной математики, а не изолированного, навязанного извне фрагмента.

В заключение отметим, что накопленный опыт преподавания элементов теории вероятностей, комбинаторики свидетельствует о доступности этого материала и интересе, который он вызывает у школьников. Изучение материала вероятностно-статистической линии способствует формированию соответствующего словаря ученика, развитию коммуникативных способностей, развитию умений анализировать ситуацию, принимать обоснованное решение в условиях многовариантности выбора.

Вероятностно-статистическая линия школьного курса математики подготавливает школьников к восприятию курса теории вероятностей и математической статистики высшей школы.

Список литературы

[1] Бунимович Е. А. Вероятно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики // Математика в школе, 2002 № 4. – С. 52–58.

[2] Бунимович Е. А., Булычев В. А. Вероятность и статистика. 5–9 кл.: Пособие для общеобразоват. учеб. заведений. – М.: Дрофа, 2002. – 160 с.

[3] Бунимович Е. А. Теория и практика преподавания вероятности и статистики в российской школе [Электронный ресурс] // Математика: электрон. журнал. – Режим доступа: http://mat.1september.ru/view_article.php?ID=200901401

[4] Подготовка к ЕГЭ–2014 / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2013. – 64 с.