

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
N 2, 2007

Электронный журнал,  
рег. N П2375 от 07.03.97  
ISSN 1817-2172

<http://www.neva.ru/journal>  
<http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/>  
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциально-разностные уравнения

## ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА ДВИЖЕНИЯ В ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ<sup>1</sup>

А.В. ЗАХАРОВ

Россия, 620075, Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, д. 145,  
ФГУП НПО Автоматики,  
e-mail: hazarov@etel.ru

Ю.Ф. ДОЛГИЙ

Россия, 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,  
Уральский государственный университет им. А.М. Горького,  
математико-механический факультет,  
e-mail: Yurii.Dolgi@usu.ru

### Аннотация.

Работа посвящена изучению движений в математической модели с запаздыванием, предложенной В.И. Зубовым. Он установил, что модель имеет конечное число круговых орбит. Авторы статьи показали, что данные круговые орбиты неустойчивы. В ходе исследований не были обнаружены ограниченные орбиты, отличные от круговых. Результаты численного моделирования подтверждают теоретические выводы.

## 1 Постановка задачи

Рассматривается математическая модель с запаздыванием

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_\tau), \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН №13 "Математические методы в нелинейной динамике" и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00399)

предложенная В.И. Зубовым [1]. Здесь  $t \in \mathbb{R}$ ;  $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ ;  $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t)/\sqrt{1-v^2(t)/c^2}$ ;  $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$ ;  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_\tau) = -\mu\mathbf{r}_\tau/r_\tau^3$ ;  $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{r}(t - \delta r(t)/c)$ ;  $r(t)$ ,  $v(t)$  — модули векторов  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  соответственно;  $m, c, \delta, \mu$  — положительные постоянные.

При  $\delta = 0$  математическая модель описывает движения заряженной частицы массы  $m$  вокруг неподвижного заряда. Тогда  $\mu = -ee' > 0$ ,  $e$  — заряд подвижной частицы,  $e'$  — заряд неподвижной частицы,  $c$  — скорость света,  $\mathbf{p}(t)$  — релятивистский импульс,  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  — кулоновская сила. В работе [2] показано, что в кулоновской задаче замена нерелятивистского импульса на релятивистский приводит к замене многообразия периодических движений на многообразии почти периодических движений.

В.И. Зубов показал, что введение запаздывания в кулоновскую модель приводит к появлению у динамической системы изолированных круговых орбит [1].

В данной работе для математической модели с запаздыванием (1) ставятся задачи: исследовать найденные В.И. Зубовым круговые орбиты на устойчивость и изучить возможность существования ограниченных орбит, отличных от круговых.

Отметим, что запаздывание в кулоновскую модель было введено В.И. Зубовым для учета конечности скорости взаимодействия частиц. Другие математические модели, использующие запаздывания для описания конечности скорости взаимодействия частиц, рассматривались в работах [3–10].

## 2 Преобразование математической модели

При помощи масштабирования перейдем к безразмерным величинам. Произведем в уравнении (1) замены переменных:

$$\begin{aligned} t &= Ps, & \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(Ps) = R\tilde{\mathbf{r}}(s), \\ \mathbf{r}_\tau(t) &= \mathbf{r}(Ps - \delta r(Ps)/c) = R\tilde{\mathbf{r}}(s - \delta R\tilde{r}(s)/(Pc)) = R\tilde{\mathbf{r}}_\tau(s), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $P, R$  — константы, подлежащие выбору специальным образом. Полагая  $R/(Pc) = h$ , имеем

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{\sqrt{1-h^2\tilde{v}^2}} \right) = -\frac{\mu P^2}{mR^3} \frac{\tilde{\mathbf{r}}_\tau}{\tilde{r}_\tau^3}, \quad (3)$$

где  $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{ds}$ ,  $\tilde{r}_\tau(s) = \tilde{r}(s - \delta h\tilde{r}(s))$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Полагая  $\frac{\mu P^2}{mR^3} = 1$ , находим  $P = \frac{\mu}{h^3mc^3}$ ,  $R = \frac{\mu}{h^2mc^2}$ .

Вводя обозначение  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}/r^3$ , преобразуем (3) к виду

$$\frac{\dot{\tilde{\mathbf{v}}}}{(1-h^2\tilde{v}^2)^{1/2}} + \frac{h^2\tilde{v}\dot{\tilde{\mathbf{v}}}}{(1-h^2\tilde{v}^2)^{3/2}} = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}_\tau) \quad (4)$$

и домножим обе части уравнения скалярно на  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Получим  $\tilde{v}\dot{\tilde{v}}(1/(1-h^2\tilde{v}^2)^{1/2} + h^2\tilde{v}^2/(1-h^2\tilde{v}^2)^{3/2}) = (\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}_\tau), \tilde{\mathbf{v}})$ . Отсюда имеем  $\tilde{v}\dot{\tilde{v}} = (1-h^2\tilde{v}^2)^{3/2}(\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}_\tau), \tilde{\mathbf{v}})$ . Подставляя это выражение в (4), находим

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \left( \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}_\tau) - h^2(\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}_\tau), \tilde{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{v}} \right) \sqrt{1-h^2\tilde{v}^2}. \quad (5)$$

Запишем векторное уравнение (5) в полярных координатах, учитывая, что  $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}, 0)^\top$ ,  $\tilde{\mathbf{v}} = (\dot{\tilde{r}}, \tilde{r}\dot{\tilde{\varphi}})^\top$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = (\ddot{\tilde{r}} - \tilde{r}\dot{\tilde{\varphi}}^2, 2\dot{\tilde{r}}\dot{\tilde{\varphi}} + \tilde{r}\ddot{\tilde{\varphi}})^\top$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_\tau = (\tilde{r}_\tau \cos \tilde{\tau}, -\tilde{r}_\tau \sin \tilde{\tau})^\top$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}_\tau) = -(\cos \tilde{\tau}/\tilde{r}_\tau^2,$

$-\sin \tilde{\tau}/\tilde{r}_\tau^2)^\top$ ,  $(\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}_\tau), \tilde{\mathbf{v}}) = -(\dot{\tilde{r}} \cos \tilde{\tau} - \tilde{r} \dot{\tilde{\varphi}} \sin \tilde{\tau})/\tilde{r}_\tau^2$ ,  $\tilde{v}^2 = \dot{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^2 \dot{\tilde{\varphi}}^2$ , где  $\tilde{\tau}(s) = \tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s - \delta h \tilde{r}(s))$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Получим систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{\tilde{r}} - \tilde{r} \dot{\tilde{\varphi}}^2 = -\frac{(1 - h^2 \dot{\tilde{r}}^2) \cos \tilde{\tau} + h^2 \tilde{r} \dot{\tilde{r}} \dot{\tilde{\varphi}} \sin \tilde{\tau}}{\tilde{r}_\tau^2} \sqrt{1 - h^2(\dot{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^2 \dot{\tilde{\varphi}}^2)}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{ds}(\tilde{r}^2 \dot{\tilde{\varphi}}) = -\frac{(-1 + h^2(\tilde{r} \dot{\tilde{\varphi}})^2) \sin \tilde{\tau} - h^2 \tilde{r} \dot{\tilde{r}} \dot{\tilde{\varphi}} \cos \tilde{\tau}}{\tilde{r}_\tau^2} \sqrt{1 - h^2(\dot{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^2 \dot{\tilde{\varphi}}^2)}. \quad (7)$$

Далее в работе рассматриваем движения, удовлетворяющие условию  $\dot{\tilde{\varphi}}(s) > 0$ ,  $s \geq 0$ . Таким образом, заменяя независимую переменную  $s$  на  $\varphi$ , мы приходим к исследованию траекторий системы (6), (7). Вводим обозначение  $\tilde{z} = \tilde{r}^2 \dot{\tilde{\varphi}}$  и производим замены:  $\tilde{\varphi}(s) = \varphi$ ,  $\tilde{r}(s) = r(\tilde{\varphi}(s)) = r(\varphi)$ ,  $\tilde{z}(s) = z(\tilde{\varphi}(s)) = z(\varphi)$ . Здесь угловая переменная  $\varphi$  выступает в роли независимой. Тогда имеем  $\tilde{\varphi}(s - \delta h \tilde{r}(s)) = \tilde{\varphi}(s(\varphi) - \delta h r(\varphi)) = \varphi_\tau(\varphi)$ ,  $\varphi_\tau < \varphi$ , где  $s(\varphi) = \int_0^\varphi r^2(\varphi)/z(\varphi) d\varphi$ ;  $\tilde{r}_\tau(s) = r(\tilde{\varphi}(s - \delta h r(\tilde{\varphi}(s)))) = r(\varphi - \tau(\varphi)) = r_\tau(\varphi)$ ,  $\tau(\varphi) = \varphi - \varphi_\tau(\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Найдем другое представление функции запаздывания  $\tau$ . В момент времени  $s - \delta h \tilde{r}(s)$  справедливо равенство  $s(\varphi) - \delta h r = \int_0^{\varphi_\tau} r^2(\varphi)/z(\varphi) d\varphi$ . Следовательно,  $\int_{\varphi_\tau}^\varphi r^2(\varphi_1)/z(\varphi_1) d\varphi_1 = \delta h r$ . Откуда,  $\int_{-\tau}^0 r^2(s + \varphi)/z(s + \varphi) ds = \delta h r(\varphi)$ . Таким образом, запаздывание  $\tau$  является решением найденного уравнения. Учитывая, что  $\dot{\tilde{r}} = r' \dot{\tilde{\varphi}} = r' z/r^2$ ,  $\dot{\tilde{z}} = z' \dot{\tilde{\varphi}} = z' z/r^2$ ,  $\ddot{\tilde{r}} = r''(z/r^2)^2 + r' \ddot{\tilde{\varphi}}$ ,  $\ddot{\tilde{\varphi}} = (z'/r^2 - 2zr'/r^3)z/r^2$ , находим

$$\begin{aligned} r'' \frac{z^2}{r^4} + r' \left( \frac{z'}{r^2} - \frac{2zr'}{r^3} \right) \frac{z}{r^2} - \frac{z^2}{r^3} &= \\ &= -\frac{(1 - h^2 r'^2 z^2/r^4) \cos \tau + h^2 r' z^2/r^3 \sin \tau}{r_\tau^2} \sqrt{1 - h^2 \left( \frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right) z^2}, \\ \frac{z' z}{r^3} &= \frac{(1 - h^2 z^2/r^2) \sin \tau + h^2 r' z^2/r^3 \cos \tau}{r_\tau^2} \sqrt{1 - h^2 \left( \frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right) z^2}. \end{aligned}$$

Домножая второе уравнение на  $r'/r$  и вычитая из первого, имеем

$$\begin{aligned} r'' \frac{z^2}{r^4} - 2 \frac{z^2 r'^2}{r^5} - \frac{z^2}{r^3} &= -\frac{r \cos \tau + r' \sin \tau}{r r_\tau^2} \sqrt{1 - h^2 \left( \frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right) z^2}, \\ z' &= \frac{h^2 r' z \cos \tau - r(-r^2/z + h^2 z) \sin \tau}{r_\tau^2} \sqrt{1 - h^2 \left( \frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right) z^2}. \end{aligned}$$

Сделаем замены  $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$ ,  $w(\varphi) = 1/z(\varphi)$  и положим  $u_\tau(\varphi) = u(\varphi - \tau)$ . Учитывая, что  $r' = -u'/u^2$ ,  $r'' = -u''/u^2 + 2u'^2/u^3$ ,  $z' = -w'/w^2$  находим

$$\left( -\frac{u''}{u^2} + 2 \frac{u'^2}{u^3} \right) \frac{u^4}{w^2} - 2 \frac{u'^2}{u^2 w^2} u^3 - \frac{u^3}{w^2} = -\frac{u \cos \tau - u' \sin \tau}{u w} u_\tau^2 \sqrt{w^2 - h^2(u'^2 + u^2)}.$$

В результате приходим к системе уравнений

$$u'' + u = \frac{u_\tau^2}{u^2} \left( \cos \tau - \frac{u'}{u} \sin \tau \right) w \sqrt{w^2 - h^2(u'^2 + u^2)}, \quad (8)$$

$$w' = \frac{u_\tau^2}{u^2} \left( h^2 u' \cos \tau - \frac{w^2 - h^2 u^2}{u} \sin \tau \right) \sqrt{w^2 - h^2(u'^2 + u^2)}, \quad (9)$$

$$\int_{-\tau(\varphi)}^0 \frac{w(s + \varphi)}{u^2(s + \varphi)} ds = \frac{\delta h}{u(\varphi)}. \quad (10)$$

### 3 Исследование устойчивости положений равновесия системы функционально-дифференциальных уравнений

Для нахождения положений равновесия  $u = u_0$ ,  $w = w_0$ ,  $\tau = \tau_0$  в (8)–(10) имеем систему уравнений  $u_0 = \cos \tau_0 w_0 \sqrt{w_0^2 - h^2 u_0^2}$ ,  $\sin \tau_0 = 0$ ,  $\tau_0 = \delta h u_0 / w_0$ , которая допускает решение только при значениях переменных  $u_0$ ,  $w_0$ , удовлетворяющих неравенству  $w_0 > h u_0$ . Это решение имеет вид  $u_0 = \frac{\tau_0^2}{\delta h^2 \sqrt{\delta^2 - \tau_0^2}}$ ,  $w_0 = \frac{\tau_0}{h \sqrt{\delta^2 - \tau_0^2}}$ ,  $\tau_0 = 2\pi n$  и существует при  $\delta > 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому при заданном значении параметра  $\delta > 2\pi$  существует только конечное число положений равновесия.

Исследуем на устойчивость произвольное положение равновесия. Полагаем  $u = u_0 + \bar{u}$ ,  $w = w_0 + \bar{w}$ ,  $\tau = \tau_0 + \bar{\tau}$ . Для (10) имеем

$$\int_{-\tau_0 - \bar{\tau}(\varphi)}^0 \frac{w_0 + \bar{w}(s + \varphi)}{(u_0 + \bar{u}(s + \varphi))^2} ds = \frac{\delta h}{u_0 + \bar{u}(\varphi)}. \quad (11)$$

В малой окрестности положения равновесия это уравнение разрешимо относительно  $\bar{\tau}$ . С учетом разложений  $w/u^2 = w_0(1 - 2\bar{u}/u_0 + \bar{w}/w_0)/u_0^2 + O(\bar{u}^2 + \bar{w}^2)$ ,  $1/u = (1 - \bar{u}/u_0)/u_0 + O(\bar{u}^2)$ , из (11) находим

$$\bar{\tau} = \int_{-\tau_0}^0 \left( \frac{2\bar{u}(s + \varphi)}{u_0} - \frac{\bar{w}(s + \varphi)}{w_0} \right) ds - \frac{\tau_0}{u_0} \bar{u} + O(\|\bar{u}\|_C^2 + \|\bar{w}\|_C^2),$$

где  $\|\bar{u}\|_C = \max_{\varphi \in [-\tau_0, 0]} |\bar{u}(\varphi)|$ ,  $\|\bar{w}\|_C = \max_{\varphi \in [-\tau_0, 0]} |\bar{w}(\varphi)|$ . При исключении  $\bar{\tau}$  из уравнений (8), (9) используем следующие асимптотические разложения:  $\cos \tau = 1 + O(\bar{\tau}^2)$ ,  $\sin \tau = \bar{\tau} + O(\bar{\tau}^3)$ ,  $u_\tau = u_0 + \bar{u}_{\tau_0} + O(\|\bar{u}\|_C^2 + \|\bar{w}\|_C^2)$ , где  $\bar{u}_{\tau_0} = \bar{u}(\varphi - \tau_0)$ ,  $\sqrt{w^2 - h^2(u'^2 + u^2)} = \sqrt{w_0^2 - h^2 u_0^2} + (-h^2 u_0 \bar{u} + w_0 \bar{w}) / \sqrt{w_0^2 - h^2 u_0^2} + O(\bar{u}^2 + \bar{u}'^2 + \bar{w}^2)$ ,  $1/u^2 = (1 - 2\bar{u}/u_0)/u_0^2 + O(\bar{u}^2)$ . В результате получим систему функционально-дифференциальных уравнений, система линейного приближения для которой имеет вид

$$\bar{u}'' + \bar{u} = -\frac{2 + h^2 w_0^2}{w_0} (w_0 \bar{u} - u_0 \bar{w}) + 2\bar{u}_{\tau_0}, \quad (12)$$

$$\bar{w}' = \frac{u_0 \tau_0}{w_0^3} \bar{u} + h^2 \frac{u_0}{w_0} \bar{u}' - \frac{u_0^2}{w_0^3} \int_{-\tau_0}^0 \left( \frac{2\bar{u}(s + \varphi)}{u_0} - \frac{\bar{w}(s + \varphi)}{w_0} \right) ds. \quad (13)$$

Система (12), (13) имеет решение  $\bar{u}(\varphi) = c_1 e^{\lambda\varphi}$ ,  $\bar{w}(\varphi) = c_2 e^{\lambda\varphi}$  для постоянных  $c_1$  и  $c_2$ , удовлетворяющих алгебраической системе линейных уравнений

$$\left( h^2 \frac{u_0}{w_0} \lambda - \frac{u_0}{w_0^3} \left( 2 \frac{1 - e^{-\lambda\tau_0}}{\lambda} - \tau_0 \right) \right) c_1 - \left( \lambda - \frac{u_0^2}{w_0^4} \frac{1 - e^{-\lambda\tau_0}}{\lambda} \right) c_2 = 0,$$

$$\frac{w_0}{u_0(2 + h^2 w_0^2)} (\lambda^2 + 3 + h^2 w_0^2 - 2e^{-\lambda\tau_0}) c_1 - c_2 = 0.$$

Выписываем характеристическое уравнение

$$D(\lambda, \delta) = \frac{w_0}{u_0(2 + h^2 w_0^2)} (\lambda^2 + 3 + h^2 w_0^2 - 2e^{-\lambda\tau_0}) \left( \lambda - \frac{u_0^2}{w_0^4} \frac{1 - e^{-\lambda\tau_0}}{\lambda} \right) -$$

$$- h^2 \frac{u_0}{w_0} \lambda + \frac{u_0}{w_0^3} \left( 2 \frac{1 - e^{-\lambda\tau_0}}{\lambda} - \tau_0 \right) = 0. \quad (14)$$

Функция  $D$  имеет по меньшей мере два положительных нуля. Действительно, имеем  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} D(\lambda, \delta) = \frac{u_0 \tau_0}{w_0^3(2 + h^2 w_0^2)} > 0$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} D(\lambda, \delta) = +\infty$ ,

$$D(1, \delta) = \frac{h(\delta^2 - \tau_0^2)}{\delta\tau_0} \left( \frac{\delta^2}{2\delta^2 - \tau_0^2} \left( 4 + \frac{\tau_0^2}{\delta^2 - \tau_0^2} - 2e^{-\tau_0} \right) \left( 1 - \frac{\delta^2 - \tau_0^2}{\delta^2} (1 - e^{-\tau_0}) \right) - \right.$$

$$\left. \frac{\tau_0^2}{\delta^2 - \tau_0^2} + 2(1 - e^{-\tau_0}) - \tau_0 \right) = - \frac{h(\delta^2 - \tau_0^2)}{\delta\tau_0} \times$$

$$\times \frac{2\delta^2(1 - (2 - \tau_0)e^{2\tau_0}) - \tau_0^2(2 - 3e^{\tau_0} + \tau_0 e^{2\tau_0})}{2\delta^2 - \tau_0^2} e^{-2\tau_0} < 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение (14) имеет не менее двух положительных корней. Из теоремы о неустойчивости по линейному приближению [11, 12] следует неустойчивость положений равновесия для системы функционально-дифференциальных уравнений (8)–(10), а также неустойчивость круговых периодических решений системы (1).

## 4 Существование периодических решений системы функционально-дифференциальных уравнений при малых значениях параметра $\delta$

Пользуясь свободой выбора параметра  $h$  при переходе к безразмерным переменным, полагаем в системе (8)–(10)  $h = 1$ . Тогда при  $\delta = 0$  получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'' + u = w \sqrt{w^2 - (u'^2 + u^2)}, \quad (15)$$

$$w' = u' \sqrt{w^2 - (u'^2 + u^2)}. \quad (16)$$

В силу этой системы имеем  $u'(u'' + u) = -w w'$ . Откуда получаем первый интеграл

$$u'^2 + u^2 = w^2 - c_1^2, \quad c_1 > 0. \quad (17)$$

Из (16) и (17) имеем  $w' = c_1 u'$ . Откуда находим еще один первый интеграл

$$w = c_2 + c_1 u. \quad (18)$$

Используя (17) и (18), из уравнения (15) получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка  $u'' + (1 - c_1^2)u = c_1 c_2$ . Периодическое решение этого уравнения с начальным условием  $u'(0) = 0$  имеет вид  $u(\varphi) = a \cos k\varphi + c_1 c_2 / k^2$ , где  $0 < k = \sqrt{1 - c_1^2} < 1$ , а период решения  $\omega(k) = 2\pi/k$ . С учетом начального условия  $u'(0) = 0$ , из интегралов (17) и (18) получаем квадратное уравнение для нахождения  $u(0)$ :  $k^2 u(0)^2 - 2c_1 c_2 u(0) + c_1^2 - c_2^2 = 0$ . Откуда  $u(0) = (c_1 c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - k^2 c_1^2}) / k^2$ , с условиями  $c_1 > c_2 > k c_1$ . Не ограничивая общность рассуждений, в формуле, определяющей  $u(0)$ , перед радикалом можно взять знак "+". Вводя обозначение  $\varepsilon = c_2 / c_1$ , получаем  $0 < k < \varepsilon < 1$  и решение системы (15), (16) принимает вид

$$u_0(\varphi, k, \varepsilon) = \frac{(1 - k^2)}{k^2} \left( \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}{\sqrt{1 - k^2}} \cos k\varphi + \varepsilon \right), \quad (19)$$

$$w_0(\varphi, k, \varepsilon) = \frac{(1 - k^2)}{k^2} \left( \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \cos k\varphi + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - k^2}} \right). \quad (20)$$

Найденное решение удовлетворяет неравенствам:  $u_{min} < u_0(\varphi, k, \varepsilon) < u_{max}$ ,  $w_{min} < w_0(\varphi, k, \varepsilon) < w_{max}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , где  $u_{min} = \frac{1 - k^2}{k^2} \left( \varepsilon - \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - k^2}{1 - k^2}} \right)$ ,  $u_{max} = \frac{1 - k^2}{k^2} \left( \varepsilon + \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - k^2}{1 - k^2}} \right)$ ,  $w_{min} = \frac{1 - k^2}{k^2} \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - k^2}} - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \right)$ ,  $w_{max} = \frac{1 - k^2}{k^2} \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - k^2}} + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \right)$ . Формулы (19), (20) согласуются с представлениями решений уравнения (1) при  $\delta = 0$ , приведенными в работе [2; с. 130].

Система (15), (16) обладает интегралом энергии

$$u = w / \sqrt{w^2 - (u'^2 + u^2)} - \varepsilon, \quad (21)$$

и интегралом площадей

$$1 / \sqrt{w^2 - (u'^2 + u^2)} = M. \quad (22)$$

Из (21) и (22) имеем  $u = Mw - \varepsilon$ . С учетом (18) находим  $c_1 = 1/M$ ,  $c_2 = \varepsilon/M$ ,  $k = \sqrt{1 - 1/M^2}$ , где  $M > 1$ . Постоянная  $\varepsilon$  называется постоянной энергии, а постоянная  $M$  – постоянной момента импульса движения.

Отметим, что найденное  $(2\pi/k)$ -периодическое решение имеет место при начальных условиях  $\{u_0 = u_0(0, k, \varepsilon), w_0 = w_0(0, k, \varepsilon)\}$ , удовлетворяющих неравенствам  $(1 + u_0) \times \sqrt{u_0 / (2 + u_0)} < w_0 < \sqrt{1 + u_0^2}$ . Тогда параметры  $\{k, \varepsilon\}$  определяются по формулам  $k = \sqrt{1 - (w_0^2 - u_0^2)}$ ,  $\varepsilon = w_0 / \sqrt{w_0^2 - u_0^2} - u_0$ .

Представим результат численного эксперимента нахождения решения системы (15)–(16) методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

Задавались значения параметров  $\{k, \varepsilon\}$  и в качестве начальных значений использовались  $u_0 = u_{max}$  и  $w_0 = w_{max}$ . Для решений  $\{u(\varphi), w(\varphi)\}$  системы (15), (16) находились функции  $r(\varphi) = u^{-1}(\varphi)$  и  $z(\varphi) = w^{-1}(\varphi)$ . На рисунке 1 изображены в полярных координатах ( $\varphi$  – полярный угол,  $r$  или  $z$  – радиальная координата) слева функция  $r = r(\varphi)$ , а

справа функция  $z = z(\varphi)$ .

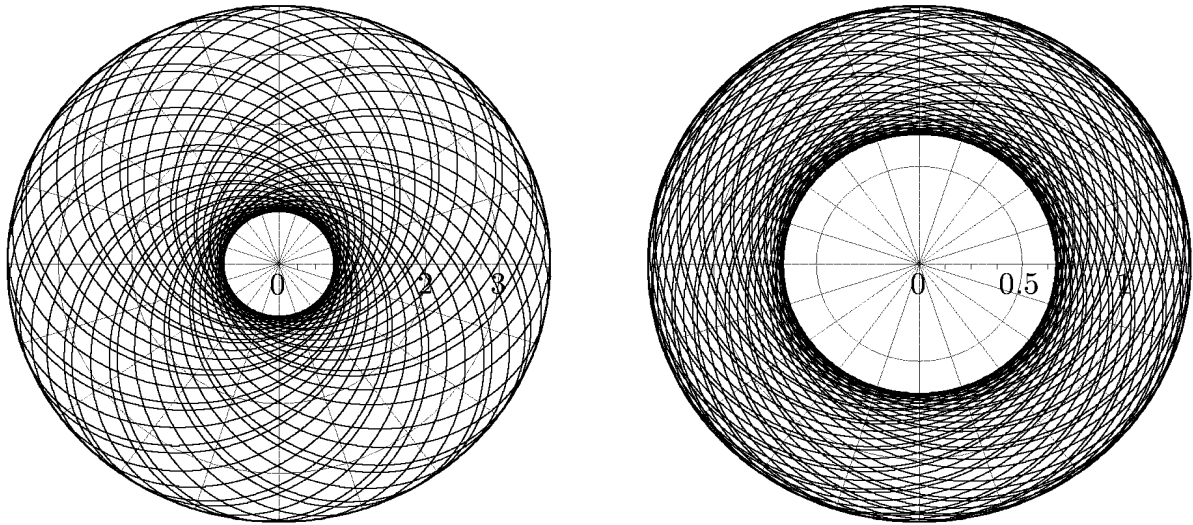


Рис. 1. Кривые  $r = r(\varphi)$  и  $z = z(\varphi)$  ( $k = \sqrt{2}/2$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $\varphi \in [0, 360]$ ).

Для фиксированного значения  $k_*$  ( $0 < k_* < 1$ ) рассмотрим периодическое решение  $\{u_*(\varphi) = u_0(\varphi, k_*, \varepsilon), w_*(\varphi) = w_0(\varphi, k_*, \varepsilon)\}$  с периодом  $\omega_* = \omega(k_*) = 2\pi/k_*$ . Требуется, при малых положительных значениях параметра  $\delta$ , найти  $\Omega_\delta$ -периодическое решение системы (8)–(10), допускающее асимптотики

$$\Omega_\delta = \omega_*(1 + O(\delta)), \quad u(\varphi, \delta) = u_*(\varphi) + O(\delta), \quad w(\varphi, \delta) = w_*(\varphi) + O(\delta).$$

При малых положительных  $\delta$  уравнение (10) разрешимо относительно  $\tau$ . С другой стороны, справедлива асимптотика  $\tilde{\tau}(s) = \tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s - \delta/u(\tilde{\varphi}(s))) = \delta \dot{\tilde{\varphi}}(s)/u(\tilde{\varphi}(s)) + O(\delta^2)$ . Поэтому  $\tau(\varphi) = \delta u(\varphi)/w(\varphi) + O(\delta^2)$  и  $u_\tau(\varphi) = u(\varphi - \delta u(\varphi)/w(\varphi)) + O(\delta^2)$ . Находим асимптотическое представление системы (8), (9):

$$u'' + u = \frac{u_\tau^2}{u^2} \left( \cos \frac{\delta u}{w} - \frac{u'}{u} \sin \frac{\delta u}{w} \right) w \sqrt{w^2 - (u'^2 + u^2)} + O(\delta^2),$$

$$w' = \frac{u_\tau^2}{u^2} \left( u' \cos \frac{\delta u}{w} - \frac{w^2 - u^2}{u} \sin \frac{\delta u}{w} \right) \sqrt{w^2 - (u'^2 + u^2)} + O(\delta^2).$$

Преобразуем это представление, производя замены переменных:  $\varphi = (1 + \delta \alpha)\theta$ ,  $u((1 + \delta \alpha)\theta) = u_*(\theta) + \delta \hat{u}(\theta)$ ,  $w((1 + \delta \alpha)\theta) = w_*(\theta) + \delta \hat{w}(\theta)$ . Получим новое представление системы:

$$\hat{u}'' + \hat{u} = U_1(\theta)\hat{u} + U_2(\theta)\hat{u}' + U_3(\theta)\hat{w} + f_1(\theta) + O(\delta), \quad (23)$$

$$\hat{w}' = W_1(\theta)\hat{u} + W_2(\theta)\hat{u}' + W_3(\theta)\hat{w} + f_2(\theta) + O(\delta), \quad (24)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:  $U_1(\theta) = -(\beta_* M_* \cos k_* \theta + \varepsilon)(\beta_* \cos k_* \theta + \varepsilon M_*)/(k_*^4 M_*^3)$ ,  $U_2(\theta) = \beta_* \sin k_* \theta (\beta_* \cos k_* \theta + \varepsilon M_*)/(k_*^3 M_*^2)$ ,  $U_3(\theta) = 1/M_* + (\beta_* \cos k_* \theta + \varepsilon M_*)^2/(k_*^4 M_*^3)$ ,  $W_1(\theta) = \beta_* \sin k_* \theta (\beta_* M_* \cos k_* \theta + \varepsilon)/(k_*^3 M_*^2)$ ,  $W_2(\theta) = 1/M_* - \beta_*^2/(k_*^2 M_*) \sin^2 k_* \theta$ ,  $W_3(\theta) = -\beta_* \sin k_* \theta (\beta_* \cos k_* \theta + \varepsilon M_*)/(k_*^3 M_*^2)$ . Функции  $f_1, f_2$  имеют представления  $f_1(\theta) = \alpha \tilde{f}_1(\theta) + \tilde{f}_1(\theta)$ ,  $f_2(\theta) = \alpha \tilde{f}_2(\theta) + \tilde{f}_2(\theta)$ , где  $\tilde{f}_1(\theta) = -2(\beta_*/M_*) \cos k_* \theta - \beta_*^2 \sin^2 k_* \theta (\beta_* \cos k_* \theta + \varepsilon M_*)/(k_*^4 M_*^3)$ ,  $\tilde{f}_1(\theta) = 3\beta_*/(k_* M_*^2) \sin k_* \theta$ ,  $\tilde{f}_2(\theta) = -\beta_*^3/(k_*^3 M_*^2) \sin^3 k_* \theta$ ,  $\tilde{f}_2(\theta) = -1/M_* (k_*^2 + 3\beta_*^2 \sin^2 k_* \theta)/(\beta_* \cos k_* \theta + \varepsilon M_*)$ . Здесь введены обозначения  $\beta_* = \sqrt{\varepsilon^2 - k_*^2}$ ,  $M_* = 1/\sqrt{1 - k_*^2}$ .

Переходим к задаче нахождения  $\omega_*$ -периодического решения  $\{\hat{u}(\theta, \delta), \hat{w}(\theta, \delta)\}$  системы с запаздыванием (23), (24). Для его существования необходимо, чтобы порождающая система

$$\hat{u}' + \hat{u} = U_1(\theta)\hat{u} + U_2(\theta)\hat{u}' + U_3(\theta)\hat{w} + f_1(\theta), \quad (25)$$

$$\hat{w}' = W_1(\theta)\hat{u} + W_2(\theta)\hat{u}' + W_3(\theta)\hat{w} + f_2(\theta) \quad (26)$$

имела  $\omega_*$ -периодическое решение. Однородная часть этой системы, записанная в векторной форме

$$\mathbf{x}' = A(\theta)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (u, u', w)^\top, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ U_1(\theta) - 1 & U_2(\theta) & U_3(\theta) \\ W_1(\theta) & W_2(\theta) & W_3(\theta) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

имеет три линейно независимых решения:

$$\mathbf{x}^1(\theta) = \tilde{\mathbf{x}}^1(\theta) - \frac{\omega'_*}{\omega_*}\theta \mathbf{x}^2(\theta), \quad \mathbf{x}^2(\theta) = \begin{pmatrix} u'_*(\theta) \\ u''_*(\theta) \\ w'_*(\theta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0(\theta, k_*, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial^2 u_0(\theta, k_*, \varepsilon)}{\partial \varepsilon \partial \theta} \\ \frac{\partial w_0(\theta, k_*, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix},$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}^1 = \left( \frac{\partial u_0(\omega(k)\theta/\omega_*, k, \varepsilon)}{\partial k}, \frac{\partial^2 u_0(\omega(k)\theta/\omega_*, k, \varepsilon)}{\partial k \partial \theta}, \frac{\partial w_0(\omega(k)\theta/\omega_*, k, \varepsilon)}{\partial k} \right)^\top \Big|_{k=k_*}$ ,  $\omega'_* = \omega'(k_*) = -2\pi/k_*^2$ . В результате вычислений находим

$$\mathbf{x}^1(\theta) = \begin{pmatrix} x_1^1(\theta) \\ x_2^1(\theta) \\ x_3^1(\theta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_* \sin k_* \theta}{k_* M_*} \\ -\frac{\beta_* \cos k_* \theta}{M_*} \\ -\frac{\beta_* \sin k_* \theta}{k_* M_*^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon M_* \cos k_* \theta + \beta_*}{\beta_* k_*^2 M_*^2} \\ -\frac{\varepsilon \sin k_* \theta}{\beta_* k_* M_*} \\ \frac{\varepsilon \cos k_* \theta + \beta_* M_*}{\beta_* k_*^2 M_*^2} \end{pmatrix},$$

где  $x_1^1(\theta) = -2\varepsilon/k_*^3 - (\beta_*^2 M_*^2 + \varepsilon^2)/(\beta_* k_*^3 M_*) \cos k_* \theta - \beta_*/(k_*^2 M_*) \theta \sin k_* \theta$ ,  $x_2^1(\theta) = (\beta_*^2 M_*^2 + k_*^2)/(\beta_* k_*^2 M_*) \sin k_* \theta - \beta_*/(k_* M_*) \theta \cos k_* \theta$ ,  $x_3^1(\theta) = -\varepsilon M_*(2 - k_*^2)/k_*^3 - (2\beta_*^2 M_*^2 + k_*^2)/(\beta_* k_*^3 M_*^2) \times \cos k_* \theta - \beta_*/(k_*^3 M_*^2) \theta \sin k_* \theta$ , и записываем фундаментальную матрицу решений  $\Phi(\theta) = \{\mathbf{x}^1(\theta), \mathbf{x}^2(\theta), \mathbf{x}^3(\theta)\}$ .

Фундаментальная матрица  $\Psi(\theta)$  сопряженной системы

$$\mathbf{y}' = -A^\top(\theta)\mathbf{y}$$

определяется формулой  $\Psi(\theta) = \Phi^{-1\top}(\theta)$ . Для обратной матрицы используется представление

$$\Phi^{-1}(\theta) = \frac{1}{\Delta(\theta)} \begin{pmatrix} B_{11}(\theta) & B_{21}(\theta) & B_{31}(\theta) \\ B_{12}(\theta) & B_{22}(\theta) & B_{32}(\theta) \\ B_{13}(\theta) & B_{23}(\theta) & B_{33}(\theta) \end{pmatrix},$$



в котором  $\Delta(\theta)$  – определитель матрицы  $\Phi(\theta)$ , а  $B_{ij}(\theta)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , – алгебраические дополнения ее элементов. Вычисляем алгебраические дополнения:  $B_{11}(\theta) = -(\beta_* M_* \cos k_* \theta + \varepsilon)/(k_*^2 M_*^3)$ ,  $B_{21}(\theta) = \beta_*/(k_* M_*^2) \sin k_* \theta$ ,  $B_{31}(\theta) = (\beta_* \cos k_* \theta + \varepsilon M_*)/(k_*^2 M_*^3)$ . Остальные алгебраические дополнения не вычисляются, так как не используются в дальнейших вычислениях. Определитель находим по формуле  $\Delta(\theta) = x_1^1(\theta)B_{11}(\theta) + x_2^1(\theta)B_{21}(\theta) + x_3^1(\theta)B_{31}(\theta)$ . Имеем  $\Delta(\theta) = -k_*/M_*$ . В результате находим периодическое решение сопряженной системы  $\psi(\theta) = \Delta^{-1}(\theta)(B_{11}(\theta), B_{21}(\theta), B_{31}(\theta))^T = -M_*/k_*(-(\beta_* M_* \cos k_* \theta + \varepsilon)/(k_*^2 M_*^3), \beta_*/(k_* M_*^2) \times \sin k_* \theta, (\beta_* \cos k_* \theta + \varepsilon M_*)/(k_*^2 M_*^3))^T$ .

Необходимое условие существования периодического решения порождающей системы (25), (26), записанной в векторной форме

$$\mathbf{x}' = A(\theta)\mathbf{x} + \mathbf{f}(\theta), \quad \mathbf{f}(\theta) = (0, f_1(\theta), f_2(\theta))^T, \quad (28)$$

имеет вид  $\int_0^{\omega_*} \psi^T(\theta) \mathbf{f}(\theta) d\theta = 0$ . В результате вычислений интеграла находим

$$-\frac{M_*}{k_*} \int_0^{\omega_*} \left( \frac{\beta_* \sin k_* \theta}{k_* M_*^2} \frac{3\beta_* \sin k_* \theta}{k_* M_*^2} - \frac{(\beta_* \cos k_* \theta + \varepsilon M_*)}{k_*^2 M_*^3} \frac{(k_*^2 + 3\beta_*^2 \sin^2 k_* \theta)}{M_* (\beta_* \cos k_* \theta + \varepsilon M_*)} \right) d\theta = \frac{2\pi(1-k_*^2)^{3/2}}{k_*^2} \neq 0.$$

Таким образом, условие существования периодического решения неоднородной системы уравнений (28) не выполняется ни при каких значениях параметра  $k_*$ . Следовательно, отсутствует и соответствующее ему почти периодическое решение системы (1).

## 5 Существование периодических решений системы функционально-дифференциальных уравнений при малых значениях параметра $h$

При  $h = 0$  имеет место тождество  $\tau(\varphi) \equiv 0$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , и система (8)–(10) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'' + u = w^2, \quad w' = 0,$$

которая имеет  $2\pi$ -периодическое решение, определяемое формулами

$$u_0(\varphi) = (u_0 - w_0^2) \cos \varphi + w_0^2, \quad w_0(\varphi) = w_0, \quad w_0 > \sqrt{u_0/2},$$

где  $u_0 = u_0(0)$ ,  $w_0 = w_0(0)$  – начальные значения. Требуется, при малых положительных значениях параметра  $h$ , найти  $\Omega_h$ -периодическое решение системы (8)–(10), допускающее асимптотики

$$\Omega_h = 2\pi(1 + O(h)), \quad u(\varphi, h) = u_0(\varphi) + O(h), \quad w(\varphi, h) = w_0(\varphi) + O(h).$$

При малых положительных  $h$  уравнение (10) разрешимо относительно  $\tau$ . С другой стороны, справедлива асимптотика  $\tilde{\tau}(s) = \tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}(s - \delta h/u(\tilde{\varphi}(s))) = \delta h \dot{\tilde{\varphi}}(s)/u(\tilde{\varphi}(s)) + O(h^2)$ . Поэтому  $\tau(\varphi) = \delta h u(\varphi)/w(\varphi) + O(h^2)$ ,  $u_\tau(\varphi) = u(\varphi - \delta h u(\varphi)/w(\varphi)) + O(h^2)$ . Из (8), (9)

получаем систему

$$u'' + u = \frac{u_\tau^2}{u^2} \left( \cos \frac{\delta hu}{w} - \frac{u'}{u} \sin \frac{\delta hu}{w} \right) w \sqrt{w^2 - h^2(u'^2 + u^2)} + O(h^2),$$

$$w' = \frac{u_\tau^2}{u^2} \left( h^2 u' \cos \frac{\delta hu}{w} - \frac{w^2 - h^2 u^2}{u} \sin \frac{\delta hu}{w} \right) \sqrt{w^2 - h^2(u'^2 + u^2)} + O(h^2).$$

Производя в ней замены переменных:  $\varphi = (1 + h\alpha)\theta$ ,  $u((1 + h\alpha)\theta) = u_0(\theta) + h\hat{u}(\theta)$ ,  $w((1 + h\alpha)\theta) = w_0(\theta) + h\hat{w}(\theta)$ , приходим к задаче нахождения  $2\pi$ -периодического решения  $\{\hat{u}(\theta, h), \hat{w}(\theta, h)\}$  системы с запаздыванием  $\hat{u}'' + \hat{u} = 2w_0\hat{w} - 2\alpha(u_0 - w_0^2) \cos \varphi + 3\delta w_0(u_0 - w_0^2) \sin \varphi + O(h)$ ,  $\hat{w}' = -\delta w_0^2 + O(h)$ . Ее порождающая система не имеет периодических решений. Поэтому искомые периодические решения у системы (8)–(10) отсутствуют, также как и соответствующие им почти периодические решения системы (1).

## 6 Численное исследование поведения решений

С помощью численных экспериментов исследуем поведение модели, описываемой в безразмерных величинах векторным уравнением с запаздыванием (5). Моделирование проведем в двух вариантах. В первом варианте выполняется условие  $\dot{\varphi}(s) > 0$ ,  $s \geq 0$ , и изучается поведение системы (8)–(10) с независимой угловой переменной  $\varphi$ . Во втором варианте, когда требуемое выше условие отсутствует, изучается поведение системы (6), (7) с независимой переменной времени  $s$ .

Нахождение решений систем дифференциальных уравнений с запаздыванием проводилось методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом интегрирования  $H$ . Для этого была написана специальная компьютерная программа, разработанная в среде Delphi 5. Останов счета производился по визуальной оценке полученного графика во избежание накопления вычислительной ошибки.

Случаи 1–5 представляют результаты исследования системы (8)–(10). Отметим, что переменная  $\tau$  находилась не как корень уравнения (10), но как решение полученного из него дифференциального уравнения

$$\tau' = 1 - \frac{u_\tau^2}{w_\tau u^2} (\delta hu' + w), \tag{29}$$

где  $w_\tau = w(\varphi - \tau)$ . С помощью аналитических формул задавались различные пары начальных функций  $\{u(\varphi), w(\varphi)\}$ ,  $\varphi \in [-\infty, 0]$ . Начальное значение  $\tau_0 = \tau(0)$  находилось как корень уравнения  $\int_{-\tau_0}^0 w(s + \varphi)/u^2(s + \varphi) ds = \delta h/u_0$ . Жирной серой кривой изображены начальные функции на отрезках  $[-\tau_0, 0]$ . Вычисления проводились для значений угловой переменной  $\varphi$  из промежутка  $[0, \varphi_*]$ . Для решений  $\{u(\varphi), w(\varphi)\}$  системы (8), (9), (29) находились функции  $r(\varphi) = u^{-1}(\varphi)$  и  $z(\varphi) = w^{-1}(\varphi)$ . На рисунках 2–7 изображены в полярных координатах ( $\varphi$  – полярный угол,  $r$  или  $z$  – радиальная координата) слева на рисунках (а) графики функций  $r = r(\varphi)$ , справа на рисунках (б) графики функций  $z = z(\varphi)$ . Снизу на рисунках (с) изображены графики функций  $\tau = \tau(\varphi)$  в декартовых координатах  $\varphi$  и  $\tau$ . В случаях 1–3, 5 в системе (8), (9), (29) положено  $h = 1$ , а в случае 4 положено  $\delta = 1$ .

С л у ч а й 1. Начальные функции:  $u(\varphi, k, \varepsilon) = (\varepsilon - \beta M \cos k\varphi)/(k^2 M^2)$ ,  $w(\varphi, k, \varepsilon) =$

$(\varepsilon M - \beta \cos k\varphi)/(k^2 M^2)$ , где  $\beta = \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}$ ,  $M = 1/\sqrt{1 - k^2}$ , с параметрами  $k = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.6$ . Тогда при различных значениях параметра  $\delta$  получаем результаты, изображенные на рис. 2–3.

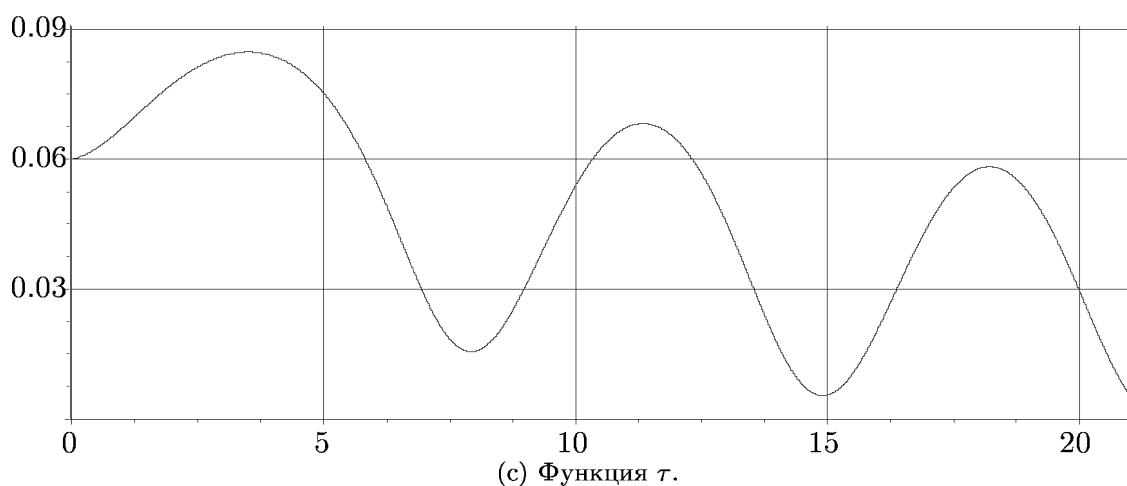
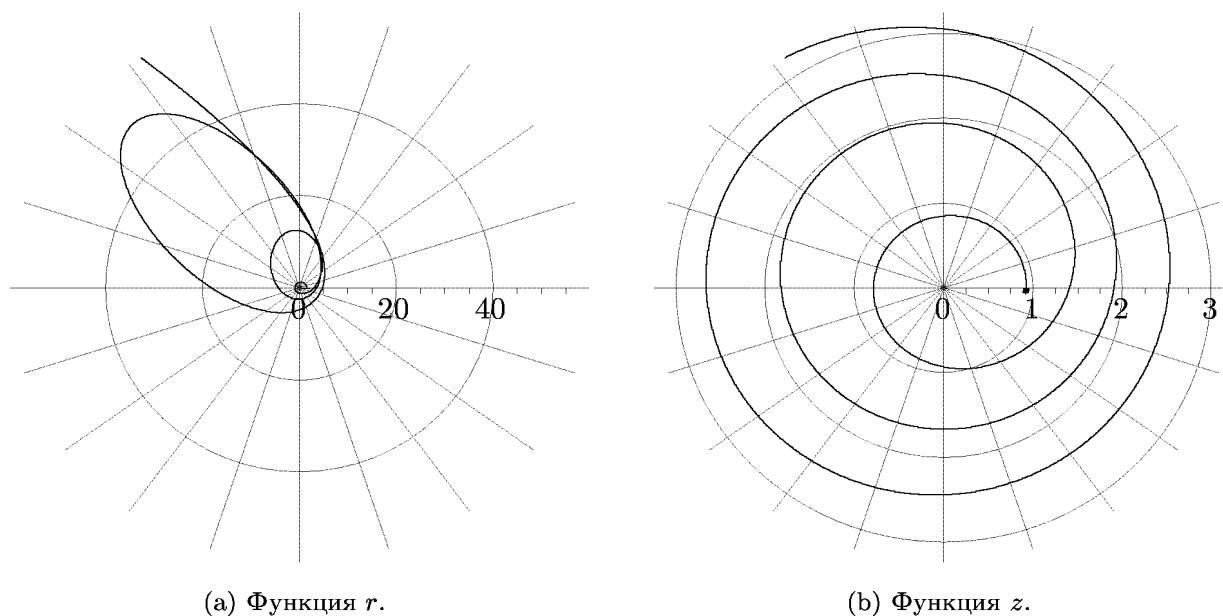


Рис. 2. Параметры:  $\delta = 0.1$ ,  $\varphi_* = 21$ ,  $\tau_0 = 0.0601$ ,  $H = 0.0001$ .

В качестве начальных функций взято периодическое решение невозмущенной системы, траектория которого целиком лежит в круговом кольце почти периодических решений этой системы. Эксперимент показал, что при малых значениях параметра  $\delta$  движение достаточно быстро выходит из этой области и стремительно удаляется от начала координат.

При этом функция запаздывания  $\tau$  с затухающими колебаниями приближается к нулю.

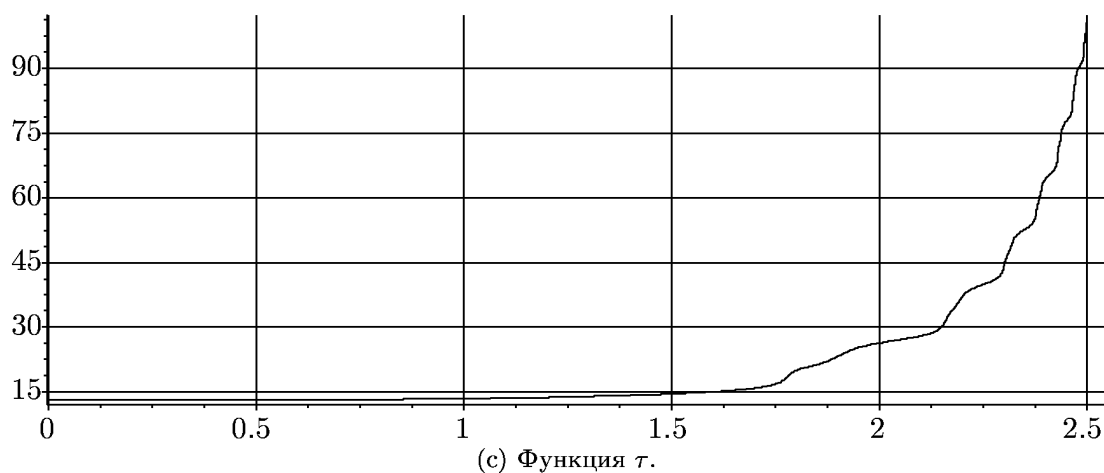
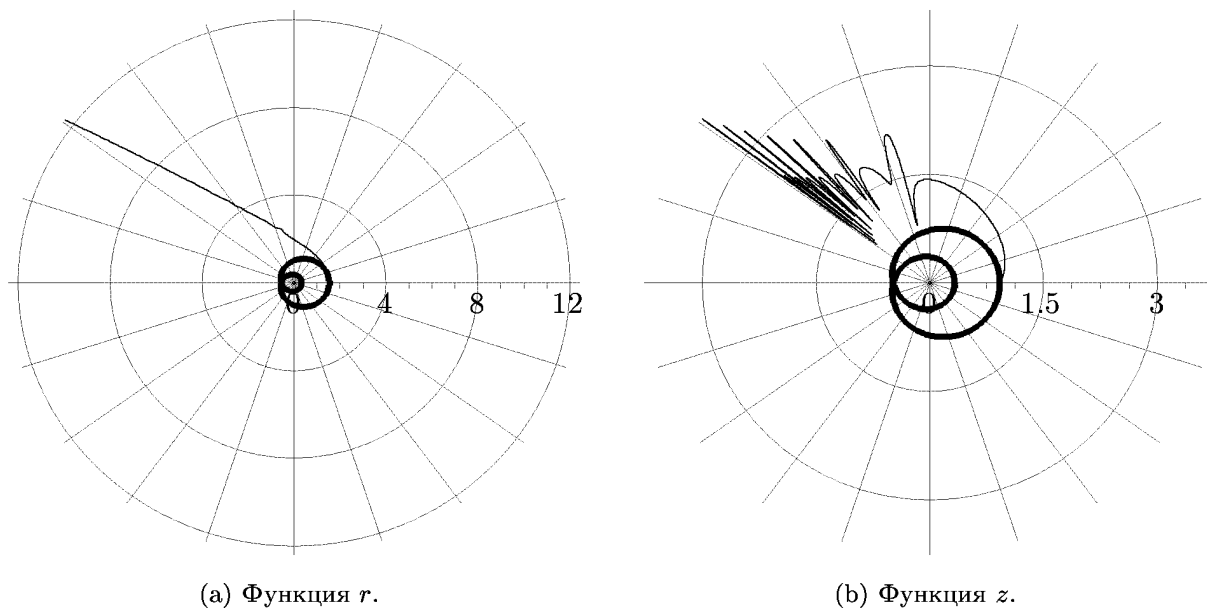


Рис. 3. Параметры:  $\delta = 8.9$ ,  $\varphi_* = 2.5$ ,  $\tau_0 = 13.13174$ ,  $H = 0.00001$ .

При больших значениях параметра  $\delta$  движение ещё быстрее выходит из кольцевой области и стремительно удаляется от начала координат, а функция запаздывания  $\tau$  стремительно возрастает.

С л у ч а й 2. Начальные функции:  $u(\varphi) = -0.1 \operatorname{arctg} \varphi + 0.5$ ,  $w(\varphi) = 2$ .

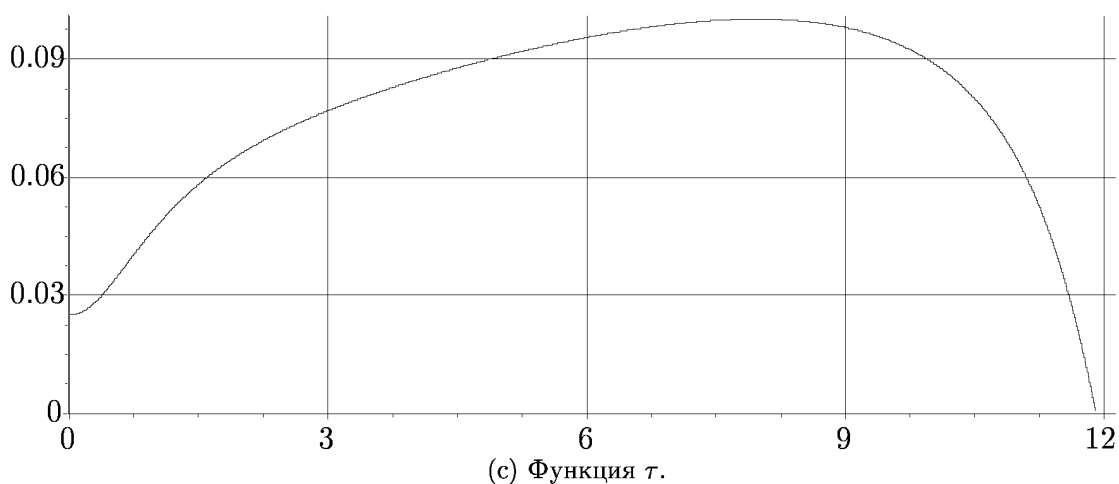
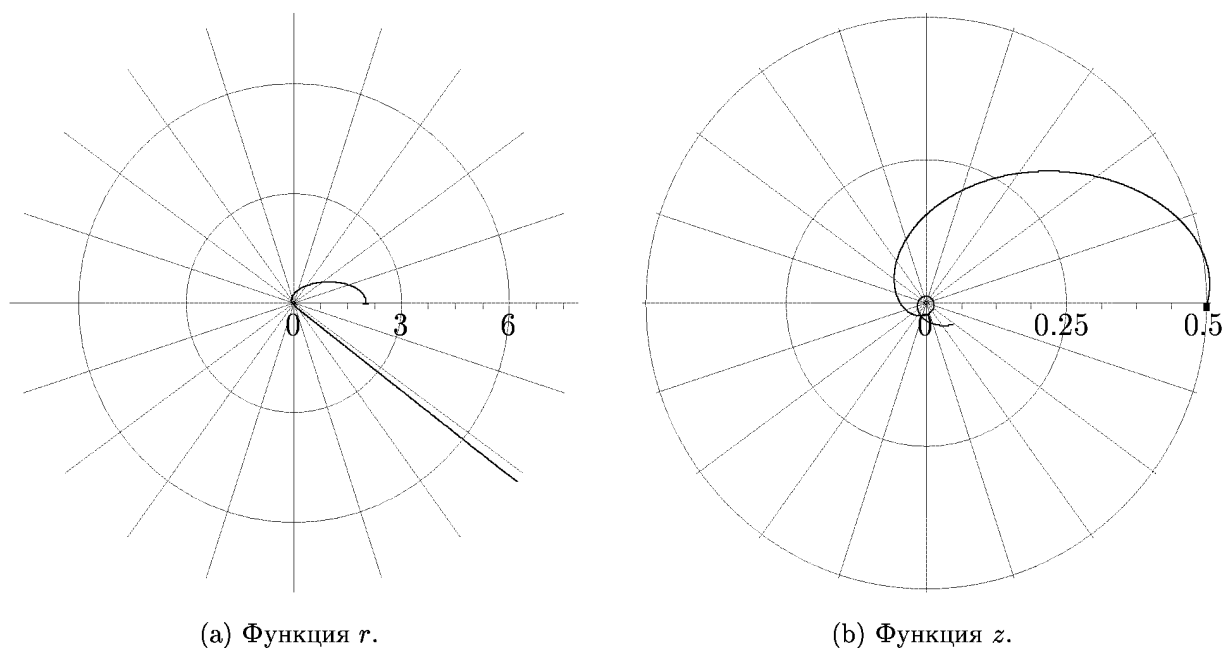


Рис. 4. Параметры:  $\delta = 0.1$ ,  $\varphi_* = 11.9$ ,  $\tau_0 = 0.0251$ ,  $H = 0.0001$ .

Эксперимент показал, что для данных начальных функций при малом значении параметра  $\delta$  движение, на начальном этапе счета приходящее в близкую область нуля, после стремительно удаляется от начала координат. Функция запаздывания в итоге стремится к нулю, что влечет за собой останов вычислений.

С л у ч а й 3. Начальные функции:  $u(\varphi) \approx u_0 = \frac{\tau_0^2}{\delta\sqrt{\delta^2 - \tau_0^2}}$ ,  $w(\varphi) \approx w_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{\delta^2 - \tau_0^2}}$ ,  
 где  $\tau_0 = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

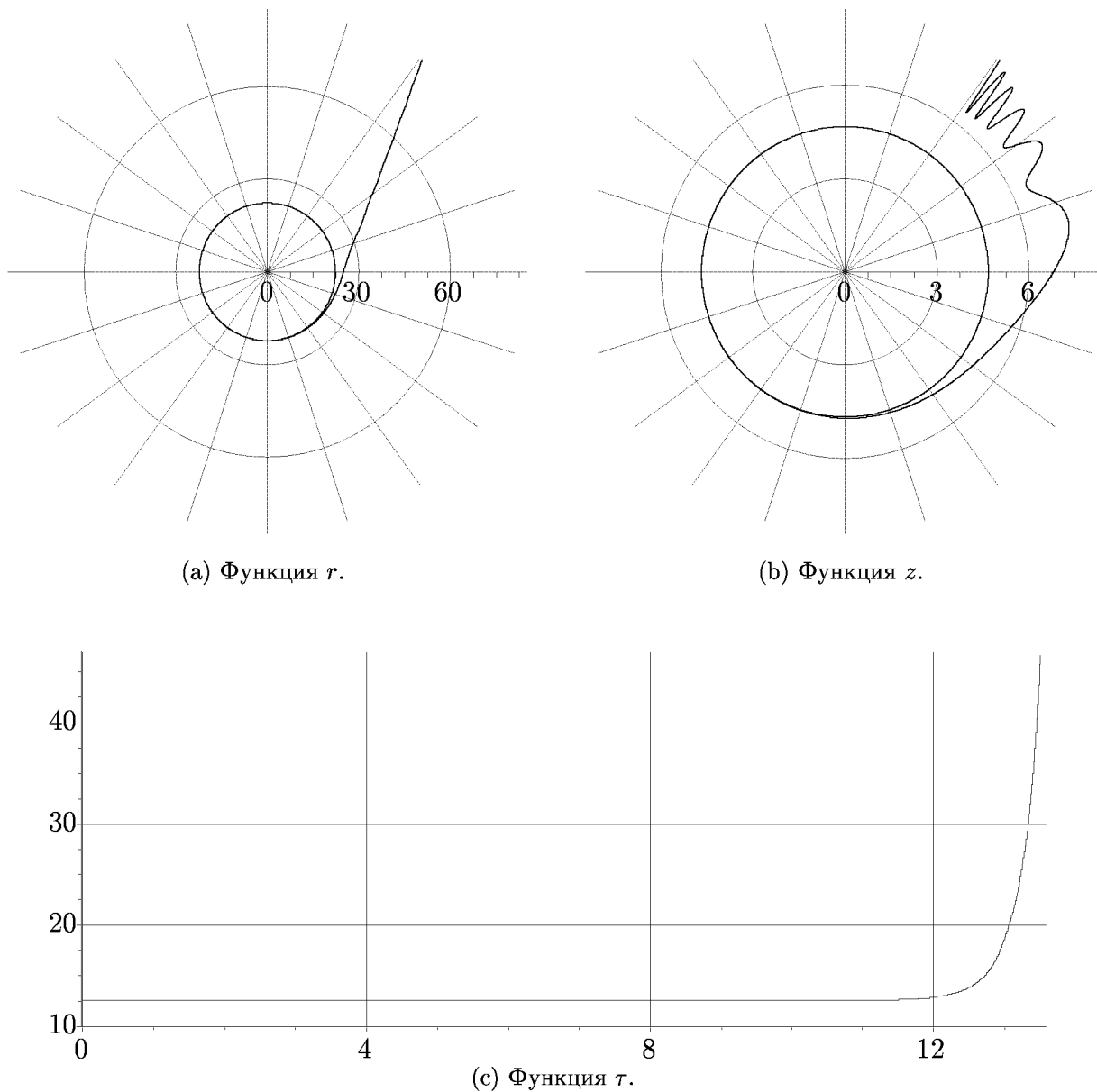


Рис. 5. Параметры:  $\delta = 60$ ,  $n = 2$ ,  $\varphi_* = 13.5$ ,  $H = 0.0001$ .

В качестве начальных функций взято положение равновесия системы (8), (9), (29). Обнаружено, что после относительно продолжительного по времени движения вблизи неустойчивого положения равновесия, траектория стремительно удаляется от начала координат.

Численные эксперименты показали, что для данных начальных функций поведение системы существенно зависит от величины шага интегрирования  $H$ . Это связано с выбором начальных функций вблизи неустойчивых положений равновесия.

С л у ч а й 4. Начальные функции:  $u(\varphi, k, \varepsilon) = (\varepsilon - \beta M \cos k\varphi)/(k^2 M^2)$ ,  $w(\varphi, k, \varepsilon) = (\varepsilon M - \beta \cos k\varphi)/(k^2 M^2)$  с параметрами  $k = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.15$ .

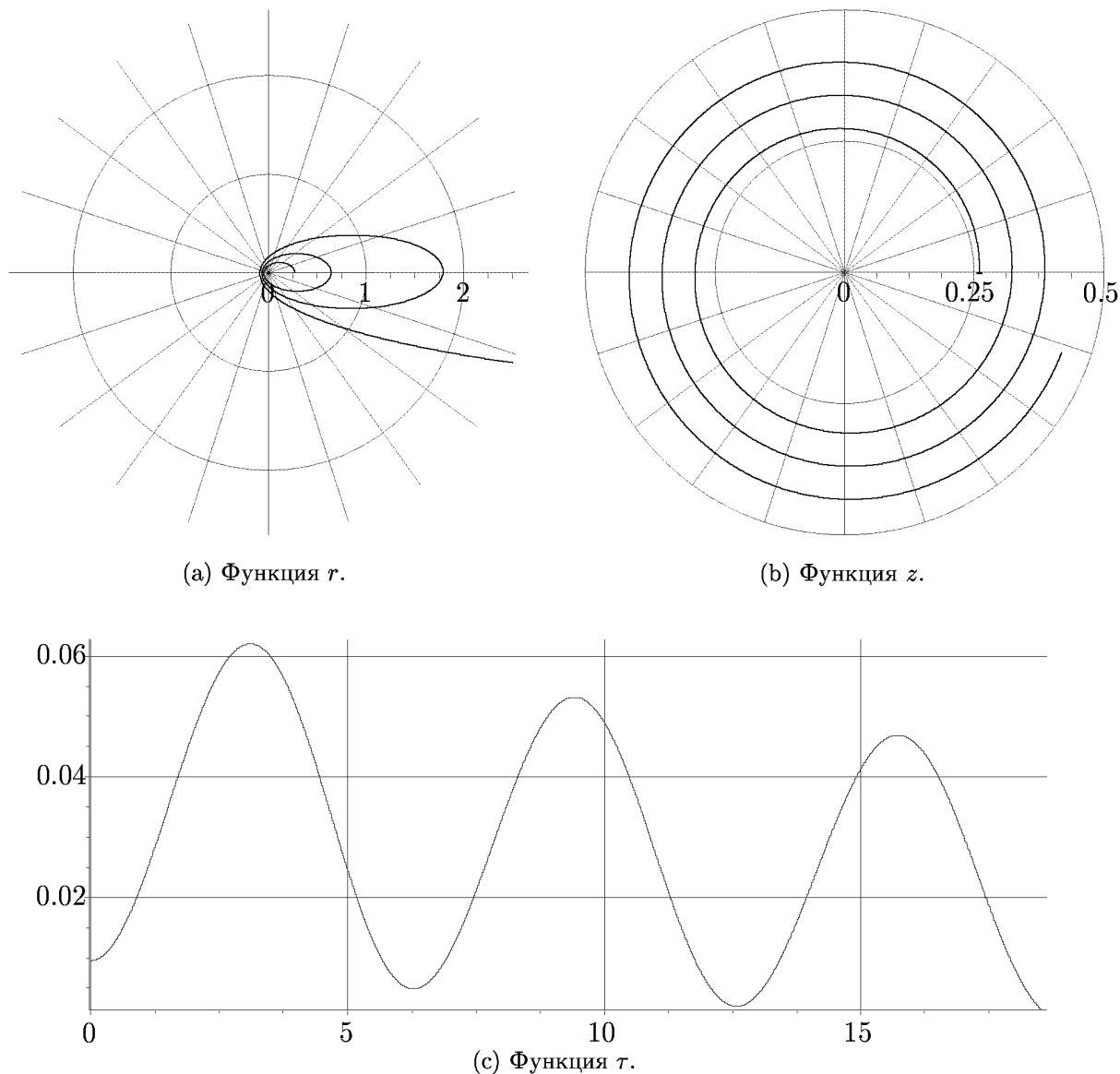


Рис. 6. Параметры:  $h = 0.01$ ,  $\varphi_* = 18.5$ ,  $\tau_0 = 0.00966$ ,  $H = 0.0001$ .

В качестве начальных функций взято периодическое решение невозмущенной системы, траектория которого целиком лежит в круговом кольце почти периодических решений этой системы. Эксперимент показал, что при малых значениях параметра  $h$  движение, сделав несколько витков вокруг начала координат, стремительно удаляется от начала координат. При этом функция запаздывания  $\tau$  с затухающими колебаниями стремится к нулю.

С л у ч а й 5. Начальные функции:  $u(\varphi) = u_0$ ,  $w(\varphi) = w_0$ .

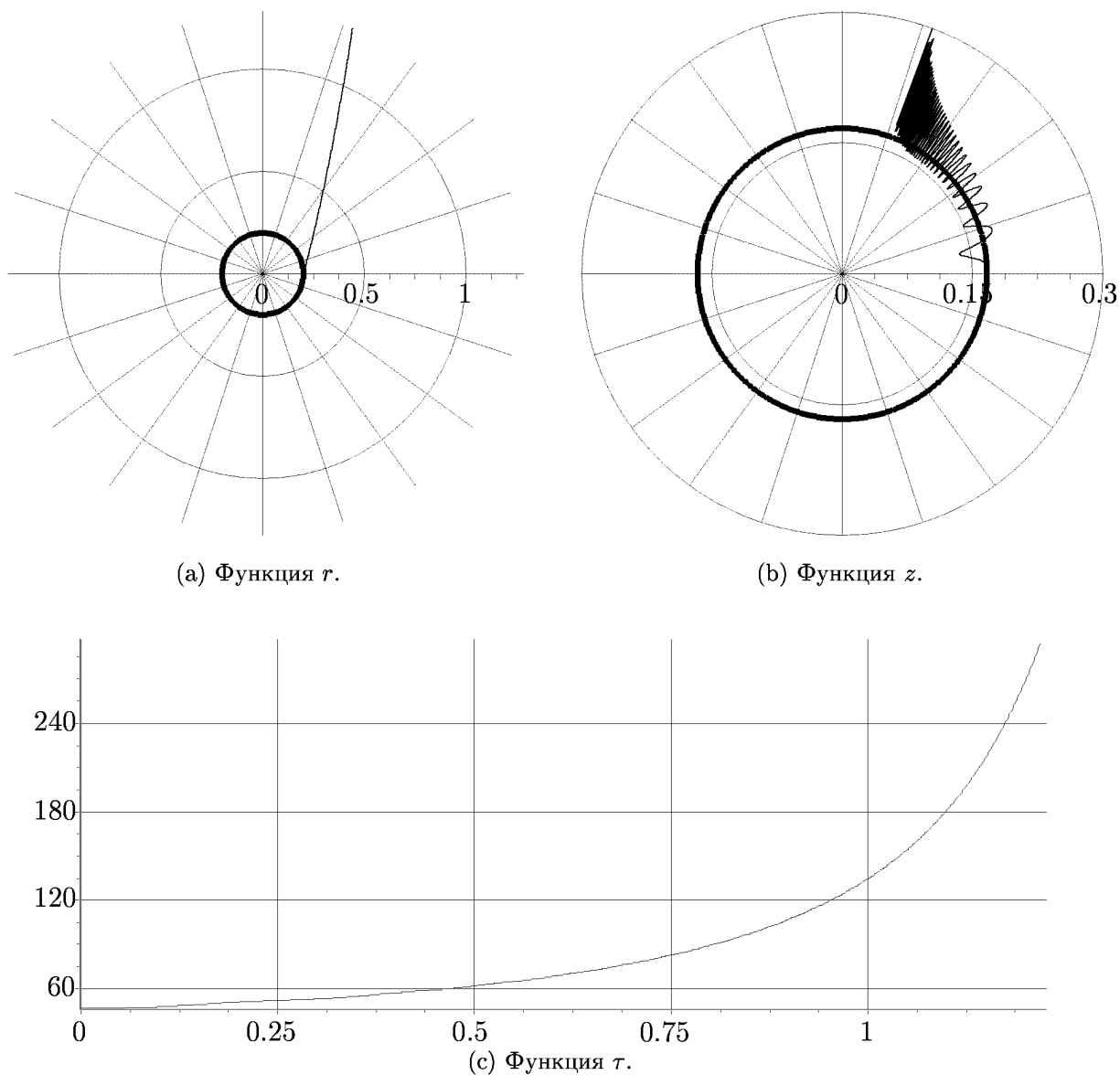


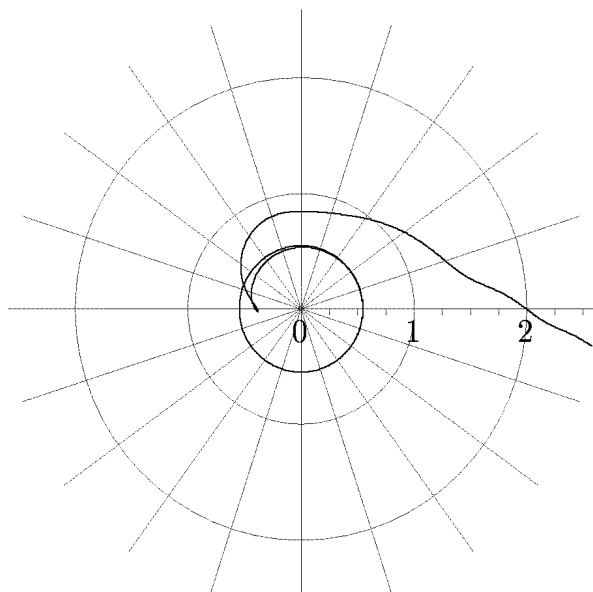
Рис. 7. Параметры:  $\delta = 56$ ,  $\varphi_* = 1.219$ ,  $u_0 = 5$ ,  $w_0 = 5$ ,  $\tau_0 = 46.6666$ ,  $H = 0.001$ .

В качестве начальных функций взяты произвольные круговые орбиты. Проведенный эксперимент показал, что движение быстро удаляется от начала координат. Функция  $z$  с течением времени принимает характер нарастающих гармонических колебаний, а функция  $\tau$  сильно возрастает.

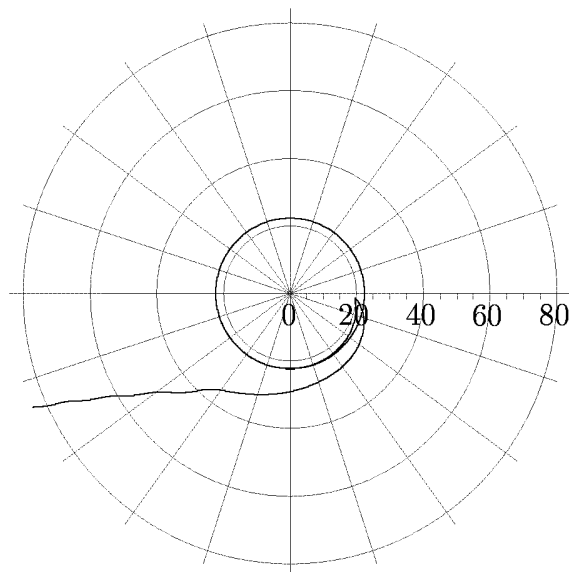


Случаи 6–7 представляют результаты исследования системы (6), (7). С помощью аналитических формул задавались различные пары начальных функций  $\{\tilde{r}(s), \tilde{\varphi}(s)\}$ ,  $s \in [-\infty, 0]$  (на рисунках не изображены). Вычисления проводились для значений переменной времени  $s$  из промежутка  $[0, s_*]$ . На рисунках 8–11 изображены в полярных координатах ( $\tilde{\varphi}$  – полярный угол,  $\tilde{r}$  – радиальная координата) интегральные кривые  $\tilde{r} = \tilde{r}(s)$ ,  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(s)$ ,  $s \in [0, s_*]$ , системы (6), (7).

С л у ч а й 6. Начальные функции:  $\tilde{r}(s) \approx 1/u_0$ ,  $\tilde{\varphi}(s) \approx \omega_0 s$ , где  $u_0 = \frac{\tau_0^2}{\delta \sqrt{\delta^2 - \tau_0^2}}$ ,  $\omega_0 = u_0^2/w_0$ ,  $w_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{\delta^2 - \tau_0^2}}$ ,  $\tau_0 = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда при различных значениях параметра  $\delta$  получаем результаты, изображенные на рис. 8–9.



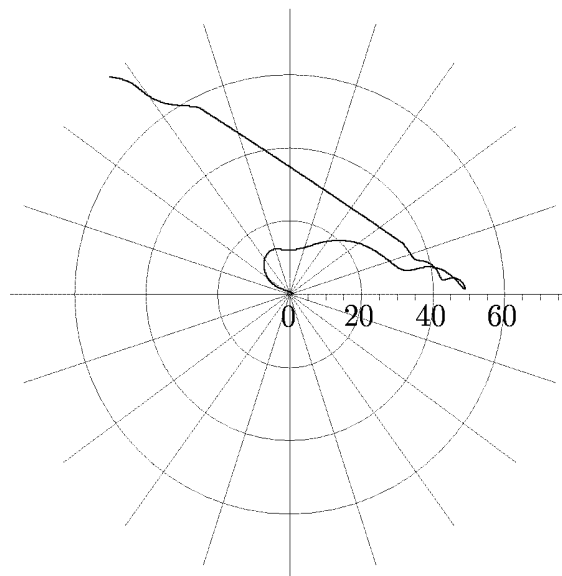
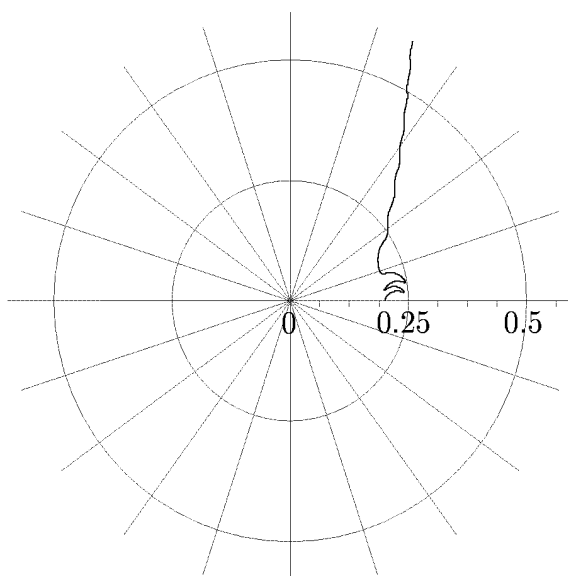
**Рис. 8.** Функция  $\tilde{r}$ . Параметры:  $\delta = 7$ ,  $n = 1$ ,  $s_* = 22$ ,  $H = 0.0001$ .



**Рис. 9.** Функция  $\tilde{r}$ . Параметры:  $\delta = 60$ ,  $n = 2$ ,  $s_* = 2000$ ,  $H = 0.001$ .

В качестве начальных функций взяты положения равновесия системы (6), (7). Эксперимент показал, что после довольно продолжительного движения вдоль круговой орбиты траектория стремительно удаляется от начала координат. Отметим, что на рисунке 9 представлен график решения системы (6), (7) для того же положения равновесия, что и в случае 3 для системы (8), (9), (29). Очевидно, что траектории на рисунках 3 и 9 существенно отличаются. Это связано с выбором начальных функций вблизи неустойчивого положения равновесия.

С л у ч а й 7. Начальные функции:  $\tilde{r}(s) = 1/u_0$ ,  $\tilde{\varphi}(s) = \omega_0 s$ , где  $\omega_0 = u_0^2/w_0$ . Тогда при различных значениях параметра  $\delta$  получаем результаты, изображенные на рис. 10–11.



**Рис. 10.** Функция  $\tilde{r}$ . Параметры:  $\delta = 60$ ,  $u_0 = 5$ ,  $w_0 = 14$ ,  $s_* = 1$ ,  $H = 0.001$ .

**Рис. 11.** Функция  $\tilde{r}$ . Параметры:  $\delta = 3$ ,  $u_0 = 1$ ,  $w_0 = 5$ ,  $s_* = 200$ ,  $H = 0.001$ .

В качестве начальных функций взяты произвольные круговые орбиты. Эксперименты показывают, что через некоторое время движение стремительно удаляется от начала координат.

В результате численных экспериментов в фазовом пространстве не было обнаружено притягивающих множеств. Проиллюстрирована неустойчивость периодических движений с круговыми орбитами. Таким образом, подтверждаются полученные теоретические результаты.

## Список литературы

- [1] Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 344 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. – М.: Наука, 1988. 512 с.
- [3] Ангелов В.Г. О трехмерной задаче двух тел классической электродинамики // Докл. Болг. АН. 1988. Т. 41. № 8. С. 17–20.
- [4] Жданов В.И. О двусторонних решениях уравнения движения заряженных частиц с запаздыванием // Изв. вузов. Матем. 1983. № 5. С. 20–25.
- [5] Шавахина Н.С. Система уравнений с отклоняющимся аргументом в релятивистской задаче двух тел // Гравитация и теория относительности. Казань. 1984. № 21. С. 140–164.
- [6] Bogdan V.M. Existence of solutions of differential equations of relativistic mechanics involving Lorentzian time delay // J. Math. Anal. and Appl. 1986. V. 118. № 2. P. 561–573.

- [7] Casal A. On a two-body problem of classical relativistic electrodynamics // *Rev. mat. hisp.-amer.* 1980. V. 40. № 1–2. P. 17–24.
- [8] Driver R.D. A "Backwards" two-body problem of classical relativistic electrodynamics // *Phys. Rev.* 1969. V. 178. № 5. P. 2051–2057.
- [9] Hoag J.T., Driver R.D. A delay-advanced model for the electrodynamics two-body problem // *Nonlinear Anal., Theory, Methods and Appl.* 1990. V. 15. № 2. P. 165–184.
- [10] Pisarenko V.G. Equations with deviating argument in the problem of many gravitated electricity charged bodies with delays of the forces of interaction // *Differential Equations with deviating argument.* Kiev. 1977. P. 255–269.
- [11] Шиманов С.Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени // *Прикл. матем. и механ.* 1960. Т. 24, вып. 1. С. 55–63.
- [12] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. 421 с.