ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2010
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений
Дифференциально-разностные уравнения

УДК 517.958+517.962.2

О связи непрерывной и дискретной моделей для линейных динамических систем

On a connection between continuous and discrete models of linear dynamical systems

Драница Ю.П.*, Драница А.Ю., Алексеевская О.В.****
*МГТУ г. Мурманск, **ЗАО "Ланит"г. Москва

Рассмотрена задача аппроксимации непрерывной модели по наблюденным дискретным данным в ее связи с преобразованием Лапласа и z-преобразованием. Получено, что установленная нами связь между обыкновенными дифференциальными и разностными уравнениями аналогична обратному согласованному z-преобразованию, при переходе от комплексной z-плоскости к s-плоскости.

Выполнен сравнительный анализ предложенной и классических методик перехода от непрерывной к дискретной модели (и наоборот).

The task of an approximation of a continuous model according to obtained discrete data in its connection with Laplas transformation and z-conversion has been considered.

We found that the connection between ordinary differential equations and difference equations has analogy with inverse agreed z-conversion when transferring from complex z-plane to s-plane.

A comparative analysis classical techniques and the offered method of the transition from continuous to discrete model (and vice versa) has been performed.

Ключевые слова: Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения, обыкновенные разностные уравнения, преобразование Лапласа, z-преобразование, передаточная функция (ПФ), непрерывная модель, дискретная модель, переход от непрерывной к дискретной модели.

Keywords: the ordinary linear differential equations, ordinary difference equations; Laplace transformation, z-transformation, transfer function (TF), continuous model, discrete model, transition from continuous to discrete model.

Введение

В работах [3, 7, 8] нами была поставлена и решена задача перехода от уравнения авторегрессии порядка l, которую будем обозначать АР(l), к обыкновенному разностному уравнению (ОРУ) и затем к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) – оба порядка l. Важность полученных результатов побудила нас рассмотреть согласованность разработанных преобразований с другими методами анализа данных, а именно: с позиций z-преобразования и преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа получило широкое распространение в технических приложениях при аппроксимации частотных характеристик линейных систем (ЛС), расчете параметров фильтров, исследовании устойчивости систем [15, 19] и т.д. В математике это преобразование используется для решении ОДУ так называемыми операционными методами, исследовании устойчивости получаемых решений, исследовании функций [13] и т.д. Z-преобразование является способом моделирования потока данных при использовании ЭВМ [12], так как только переход от непрерывных к дискретным и цифровым данным позволяет использовать их для обработки на цифровых устройствах.

Другой важной задачей использования этих преобразований является переход от непрерывных по своей природе дифференциальных или интегральных уравнений к их дискретным аналогам. Условно назовем эту задачу прямой, а аппроксимацию непрерывной модели по дискретным данным – обратной. Для решения этих задач в настоящее время имеется по крайней мере четыре алгоритма, имеющих те или иные достоинства и недостатки [10, 11, 15].

Отметим, что эти методики основаны на определенной факторизации корней непрерывной передаточной функции (НПФ) и ее дискретного аналога – дискретной передаточной функции (ДПФ), или на оценках производных разностями. Как правило, обилие методик решения любой задачи говорит о том, что качество их решения является не совсем удовлетворительным.

В работах [7, 8] нами поставлена и решена обратная задача, а именно: по наблюденным дискретным данным (1) выполнено восстановление ОДУ, связывающее измерения между собой. Однако предлагаемый подход порождает ряд вопросов, которые требуют некоторых пояснений, а именно: 1. адекватность полученного перехода; 2. связь предложенной методики с другими подходами, решающими аналогичную задачу; 3. возможность улучшения полученных результатов.

Первый вопрос относится к одному из основных при применении цифровых устройств для решения задач, поставленных для непрерывных по своей природе объектов. Эту задачу приходится решать уже на этапе представления в цифровом устройстве исходной информации. Проблема заключается в выборе такого периода дискретизации Δt непрерывной последовательности, который обеспечивал бы адекватность между этими двумя наборами данных. Здесь обычно опираются на теорему Котельникова, или теорему отсчетов [12], которая утверждает следующее: если непрерывный процесс $x(t)$ имеет ограниченный спектр $(-\omega_s \leq \omega \leq \omega_s)$, то функцию $x(t)$ можно полностью восстановить по ее отсчетам, заданным через интервал $\Delta t \leq \pi/\omega_s$.

Отметим, однако, что утверждение теоремы Котельникова действительно только в предельном случае, т.к. ограниченный спектр могут иметь только процессы бесконечной протяженности. Для реальных наблюдений ограниченной протяженности восстановить непрерывные данные по дискретным отсчетам принципиально можно только с той или иной погрешностью. Например, для удовлетворения требований теоремы Котельникова часто используют высокочастотную фильтрацию аналоговых данных перед выполнением операции дискретизации, т.е. сознательно прибегают к некоторой потере исходной информации, содержащейся в непрерывной последовательности.

Следующий этап перехода от непрерывной модели к цифровой заключается в переводе непрерывных по своей природе методов решения задачи, например, дифференциальных уравнений к их дискретному аналогу. Этот этап фактически заключается в замене производных дискретными аналогами, например, разностями, или замене НПД на ДПД. Эта замена неизбежно приводит к введению дополнительных погрешностей и расхождению между непрерывной и дискретной моделями.

Таким образом, переход от непрерывного моделирования к цифровому, т.е. решение прямой задачи, неизбежно приводит к расхождению между оригиналом (непрерывной моделью) и его дискретным аналогом (дискретной моделью). Следовательно, принципиально нельзя построить цифровую модель полностью адекватную непрерывной модели.

Из этого рассуждения, в частности, следует, что решение обратной задачи может сопровождаться еще большим расхождением между оцененной по дискретным данным ОДУ и его аналоговым прототипом. Действительно, при решении прямой задачи мы имеем значительно больше информации, чем при решении обратной. Прямая задача заключается в переводе заданного дифференциального уравнения из непрерывной области в дискретную, т.е. задача полностью определена. Изначально обратная задача является существенно недоопределенной, т.к. никакой информации, кроме дискретной выборки данных, у интерпретатора обычно не имеется. В результате, чтобы скомпенсировать недостаток информации, традиционно прибегают к некоторым априорным знаниям, которые по сути являются субъективными и для конкретной ситуации могут не выполняться.

Здесь следует пояснить, что мы понимаем под термином адекватность непрерывной и дискретной моделей. Существует несколько определений этого понятия. Мы будем рассматривать адекватность моделей на основе принципа эквивалентности систем. В [11] эквивалентными системами считаются такие, у которых равенство входных воздействий влечет за собой равенство ответных реакций. Подобные модели получили в геофизике название эффективных. Это означает, что внутренняя структура ЛС не важна, существенна только их реакция на внешние воздействия. Например, может не совпадать внутренняя компонентная структура оригинала и его модели. Эквивалентность по входу-выходу можно объяснить многовариантностью реакций системы на внешние сигналы.

Из приведенных рассуждений следует, что между непрерывной моделью и ее цифровым аналогом неизбежно имеется некоторое расхождение в получаемых решениях. Таков ответ на первый вопрос. Из него, в частности, следует постановка задачи оценки нижних границ ошибок моделирования при переходе от непрерывной модели к дискретной (и наоборот). В работах [7, 8] показано, что оценки параметров непрерывной модели по дискретным данным являются смещенными и это смещение зависит от частоты и коэффициента затухания процесса. Но эта методическая смещенность может быть выражена аналитически и, поэтому частично учтена.

Настоящая работа посвящена изучению связи предлагаемой нами оценки непрерывной модели по дискретным измерениям с оценкой, полученной традиционными методами. Другой задачей является сравнительный анализ обнаруженного классического аналога, решающего ту же задачу, что и предложенное нами преобразование.

1. Общая постановка проблемы

Пусть имеются измерения временной последовательности некоторых физических величин, выполненные в n точках, с постоянной дискретностью $\Delta \mathrm{t}$. Эти измерения образуют временной ряд

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Для упрощения дальнейших выкладок примем, что ряд (1) нормирован так, что его среднее значение равно нулю, а дисперсия равна единице. Будем считать, что эти данные являются одним из выходов некоторой гипотетической линейной системы.

Понятие ЛС нашло широкое применение в технических приложениях, таких как, например, электротехника, теория электрических цепей и т.п. Под линейной системой в этих науках понимается некоторое устройство [1, 14], для которого могут быть определены понятия входа (входного сигнала) и выхода (отклика). Например, это могут быть устройства следующего вида: усилитель электрического сигнала, радиостанция, радиоприемник и другие. Для устройств подобного типа понятия входа и выхода имеют конкретное материальное воплощение в виде клемм, зажимов и т.д., что позволяет, в частности, произвести непосредственные измерения входных и выходных сигналов.

Линейность базируется на постулатах пропорциональности и суперпозиции решений и позволяет достаточно просто связать входные и выходные сигналы ЛС в рамках теории ОДУ или ПФ. В технических приложениях наибольшее распространение получило описание ЛС на основе ПФ. Для простых технических систем ПФ легко оценивается экспериментально [1, 14]. В результате этой возможности возник так называемый принцип "черного" ящика, который предполагает проводить оценку внутренней структуры ЛС по сигналам ее входов и выходов.

Отметим, что принципы линейности хорошо выполняются для многих сложных природных объектов. Например, распространение звуковых волн малой интенсивности в геологической и водной средах, деформация физических тел при малых нагрузках (закон Гука), распространение оптических и радиоволн и т.д. являются линейными процессами. Однако для сложных систем неприемлем принцип "черного" ящика, т.к. постановка задач исследования сложных динамических систем принципиально иная, чем для простых систем [7, 8]. Поясним это на примере метода отраженных волн (МОВ), используемого в сейсморазведке [18, 20, 21].

Расположенный на (или вблизи) земной поверхности импульсный зондирующий источник (ЗИ) возбуждает сейсмические волны, которые рассеиваются на границах и неоднородностях среды. Группа, в количестве L сейсмоприемников, размещенных на (или вблизи) дневной поверхности регистрирует поле рассеянных волн. Выход этих сейсмоприемников и формирует сейсмограмму МОВ. Если переместить ЗИ в другую точку, получается новая сейсмограмма МОВ. Для S положений ЗИ мы будем иметь S разных сейсмограмм. Совокупность всех сейсмических записей, полученных от S источников, и составляет множество наблюдений МОВ. Информация (запись), полученная от одного сейсмоприемника, представляет один измерительный канал приемного устройства, а сейсмограмма в целом является L-канальной записью.

Для метода МОВ формулировка прямой задачи заключается в расчете сейсмического поля волн в любой точке пространства в любой момент времени по заданным характеристикам ЗИ и известным упругим свойствам среды. Обратная постановка заключается в расчете упругих свойств среды по зарегистрированным на земной поверхности данным.

Очевидно, что поставленная выше задача существенно отличается от задачи изучения простой технической ЛС. Действительно, распространение сейсмического возмущения осуществляется через среду, представляющую трехмерный континуум и, следовательно, процесс должен описываться волновым уравнением, т.е. ДУ в частных производных. Таким образом, задачи МОВ в общем виде описываются тремя пространственными и одной временной переменными, т.е. отображают многомерные процессы. Простейшие ЛС описываются ОДУ, т.е. являются отображением одномерных процессов. В этом основное и принципиальное отличие задач МОВ и задач изучения простейших ЛС.

Существует несколько способов решения волнового уравнения. Можно отметить метод, основанный на разностной аппроксимации волнового уравнения, на решении в форме интеграла Киргофа [18, 21]. Другим способом решения обратной задачи является геометрическая сейсмика, основанная на лучевом описании волновых полей. Понятия о лучах и фронтах упругих волн и закономерности их распространения в различных средах составляют содержание геометрической сейсмики [20]. С точки зрения физики распространения волн, лучи определяются как траектории (линии), вдоль которых распространяется энергия волны. В основу этих построений положены принципы Ферма, Гюйгенса и взаимности, а также законы отражения-преломления. В простых случаях этой информации достаточно для определения глубин залегания отражающих слоев и скоростей распространения звуковой волны в них. Отметим, что количественная оценка этой информации является основной задачей сейсморазведки.

Другая группа методов исследования, используемых в МОВ, основана на статистическом подходе. Отметим дискретную смешанную модель авторегрессии-скользящего среднего (АРСС) и фильтрацию данных так называемыми обратными фильтрами [16, 21]. Результатом обработки данных статистическими методами является оценка коэффициентов отражения (КО) разделяющих границ среды.

Однако, несмотря на разносторонний математический аппарат, используемый для решения задач МОВ и усилия математиков и геофизиков в течение нескольких десятилетий, разрешающая способность методов сейсморазведки для сложных геологических сред остается низкой. Так, например, моделирование основной задачи сейсморазведки показало [24], что ее разрешение лимитируется половиной длины волны ЗИ. Более того, трудности решения задачи рассеяния потока частиц пространственной структурой (во многом аналогичной обратной задаче МОВ) побудили авторов [2] отнести ее к нелинейной при интерференции измеряемого потока в точках наблюдения. На наш взгляд, интерференция сигнала (линейная процедура) не может обратить линейную задачу в нелинейную. Но интерференция переводит задачу из класса корректно поставленных в категорию некорректно поставленных. Очевидно, что эти затруднения объективны и требуют своего объяснения.

По своей природе обратные задачи МОВ при классическом подходе в большинстве случаев являются некорректно поставленными [22]. Поэтому получаемые решения требуют той или иной регуляризации, например, по Тихонову [23]. Фактически любая регуляризация заключается в сглаживании решения. И, если оцениваемый сигнал по статистике близок к белому шуму, сглаживание приводит к разрушению решения, или потере разрешающей способности оценки. Отметим, что под разрешающей способностью метода мы понимаем минимальное расстояние между двумя отражающими объектами, при котором они еще могут быть разделены между собой в процессе решения задачи.

Однако некорректность классических постановок имеет более глубокие причины. Методы решения задач классическими подходами по своей природе являются амплитудными. В амплитудных методах в основном используется значение (амплитуда) сигнала в точке и малой ее окрестности (для вычисления производных). Об этом говорит хотя бы тот факт, что все оценки решения и его погрешностей в классических методах выполняются с использованием только шага вычислительной сетки и значений оценок производных [9]. По нашим представлениям, более репрезентативным описанием информации является частотно-фазовый подход. Конечно, неявно частота сигнала в классических амплитудных методах учитывается в виде рекомендаций уменьшить шаг сетки при большой погрешности вычислений и других правил.

Анализ современных численных методов [18, 21] показывает, что здесь практически не применяется фаза сигнала. Отметим, что частота сигнала в этих постановках присутствует в связи с преобразованием Фурье. Преобразование Фурье широко используется при решении задач МОВ. Но, по нашему мнению, его применение является физически необоснованным для рассматриваемой задачи.

Действительно, из физической сущности задач МОВ следует, что сейсмограмма формируется за счет отражений ЗИ от локальных неоднородностей среды и последующей интерференции сигналов, т.е. является существенно локальным процессом. Математической моделью процесса формирования измеренных данных является свертка сигналов КО и ЗИ.

Рассмотрим некоторые данные длительностью T. Дискретное преобразование Фурье этих данных представляет взвешенную суперпозицию отрезков синусоид и косинусоид длительностью T. Частоты этих гармоник кратны периоду наблюдений T, что никак не связано с физической сущностью описываемого процесса. Веса гармоник разложения Фурье определяются по всей выборке данных, следовательно, математическая модель формирования потока данных предполагает, что значением функции в точке является взвешенная сумма гармоник, но не свертка. Из этого следует, что представление сигнала, согласно преобразованию Фурье, не соответствует фактическому процессу формирования измеренных данных в задачах МОВ. Другими словами, мы имеем формальное использование, хотя и корректного математического аппарата, но не учитывающего физику процесса.

Следующим недостатком классических решений задач МОВ, по нашему мнению, является широкое привлечение априорной информации для компенсации ограниченности примененной математической модели. В частности, для построения обратного фильтра требуется знание формы ЗИ. Однако, из-за сложной физики распространения звуковой волны через геологическую среду, форма ЗИ меняется во времени и пространстве и ее точная оценка не представляется возможной. Для компенсации отсутствия этой информации прибегают к априорным соображениям, например, считают, что ЗИ принадлежит к классу минимально-фазовых объектов. Хотя этот тезис имеет не больше оснований, чем любой другой, например, ЗИ является максимально-фазовым объектом.

При оценке КО на основе АРСС часто считают, что глубинная последовательность отражающих поверхностей (последовательность КО) представляет белый шум, или последовательность марковского типа. Однако натурные данные часто противоречат этим гипотезам. К еще большим предположениям прибегают при использовании волнового уравнения или лучевого метода. Например, часто моделируют геологическую среду в виде горизонтальных однородных слоев с постоянной скоростью звука в слое [18, 20, 21].

В классических подходах низкую разрешающую способность и неустойчивость решений объясняют наличием ошибок в измерениях, узким частотным диапазоном ЗИ, необходимостью обращать зашумленные матрицы большой размерности и другими причинами [18, 21]. Однако, по нашему мнению, основной причиной низкого разрешения задач локации, основанных на традиционных методах решения, является интерференция волн, отраженных от близко расположенных объектов. Интерференция волн при классической постановке задачи превращает ее в некорректно поставленную.

Анализ современных исследований показывает, что за последние 40 лет для решения задач сейсморазведки привлечено много достаточно новых методов, например, нейронное моделирование, кластерный анализ и классификация, методы оптимизации решений на основе некоторых критериев и другие [17]. Отметим, что в большинстве случаев эти новые подходы имеют чисто формальный характер и никак не отражают физических особенностей задач МОВ. Поэтому трудно ожидать принципиального прорыва в получаемых решениях. Интересно, что, как и 30 лет назад, обратная задача решается с использованием регуляризации по Тихонову и применением преобразования Фурье [17]. Из этого следует, что до сих пор постановка обратной задачи не переформулирована и новых подходов к ее решению не предложено. Следовательно, эта проблема является актуальной и в настоящее время.

В связи с этими затруднениями в работах [7, 8] сформулирован принципиально новый подход к процессу моделирования сложных ЛС, который на примере МОВ может быть представлен следующим образом. Будем рассматривать геологическую среду как некоторую ЛС. Входным возмущением этой ЛС является воздействие ЗИ, а выходом – сейсмоприемники. Отметим, что аналогичный подход использован в [1] при исследовании строительных конструкций спектральными методами. В данном случае постановка обратной задачи заключается в оценке траектории луча, связывающего вход и выход ЛС и оценке упругих свойств среды на точках луча. Будем предполагать, что вход и выходы ЛС связаны между собой линейным образом и описываются ОДУ.

Переформулировка задачи заключается в следующем. Будем исходить из лучевого подхода, а луч, соединяющий точку импульсного ЗИ с одним из сейсмоприемников, рассматриваем как некоторый канал связи. Будем предполагать, что сейсмоприемники являются ЛС. В этом случае свойства среды и сейсмоприемники преобразуют входной ЗИ в выходные сигналы, т.е. сейсмограмму МОВ. Как было показано выше, распространение возмущения через среду представляет линейный процесс. С учетом линейности сейсмоприемников, их выходной сигнал можно рассматривать как линейный динамический процесс, описываемый некоторым ОДУ. Такая модель позволяет уйти от разного рода геометрических построений, используемых в лучевом подходе и перейти к описанию выходного сигнала в терминах ОДУ. С другой стороны, выходной сигнал можно интерпретировать как свертку ЗИ с переменной во времени формой сигнала с КО. Это весь объем априорной информации, используемой в данной постановке.

Основным источником информации для моделирования и решения являются измеренные данные. Моделирование и решение выполняется в рамках теории ОДУ с изначальным предположением, что измеренные данные являются суперпозицией сигналов от разных отражающих объектов. При конструировании математической модели в максимальной степени учитывалась физика процесса.

В результате принятой концепции, задача преобразуется в корректно поставленную, с решением, не зависящим от конкретных свойств ЗИ и параметров сейсмоприемников. Отметим, что по мере развития волнового процесса во времени происходит уменьшение удельной волновой энергии фронта за счет геометрического расхождения процесса. Однако на решении уменьшение энергии зарегистрированного сигнала также не сказывается. Модельные расчеты показывают [7, 8], что разрешение метода лимитируется частотой дискретизации измеренного сигнала. Более того, излагаемая концепция позволяет переформулировать многие постановки задач обработки данных, основанных на линейном методе [6].

Для поставленной выше проблемы возникает постановка и необходимость решения трех взаимно связанных задач. Первая задача заключается в оценке коэффициентов ОДУ по измеренным данным. Постановка и решение этой задачи на основе регрессионного анализа осуществлена в работах [7, 8]. Аргументированность этого подхода с точки зрения принятой в настоящее время практики, излагается в настоящей работе. Вторая задача заключается в оценке входных сигналов по оцененной ОДУ и измеренным данным, т.е. в постановке и решении обратной задачи. Первоначально эта задача решалась в рамках разработки волоконно-оптических измерительных систем [4, 5] с учетом фазы и интерференции сигнала, затем задача была рассмотрена в более общем виде. Третья задача заключается в интерпретации результатов, полученных по разработанной методике. Остановимся на последнем вопросе более подробно.

Так как измерения могут осуществляться по s положениям ЗИ, каждое из которых дает l-канальную сейсмограмму, суммарным описанием объекта является некоторая система ОДУ, представляющая проекции сверток соответствующих сигналов под разными пространственными углами. Дополнительную информацию об исследуемом объекте можно извлечь по ОДУ при их аппроксимации по векторным данным. Однако решающее значение имеет повышение на несколько порядков разрешающей способности отдельных записей каналов [7, 8]. Отметим, что с точки зрения задачи локации интересным является только частное решение неоднородного ОДУ. Или, иначе, для решения задачи не требуется учета переходных процессов, т.е. не нужны начальные условия.

Рассмотренная выше интерпретация на примере задачи МОВ, принятой в сейсморазведке, является лишь частным случаем разработанной концепции. Для задач МОВ удалось конкретно указать источники входных сигналов. На самом деле в данной методике не требуется знание точки входа, т.к. не требуется задания начальных условий, которые обычно сопряжены с этой точкой ЛС. Но знание координат точки входа ЛС позволяет осуществить конструктивную интерпретацию результатов моделирования с позиций пользователя модели.

Однако в некоторых постановках, например, при томографии Земли по результатам обработки данных землетрясений, положение источника ЗИ неизвестно и может являться одним из искомых параметром задачи. Более сложная ситуация может возникнуть при изучении других процессов, например, экономических, т.к. здесь даже гипотетически невозможно представить входы системы. Поэтому рассмотрим постановку и решение задачи на примере обработки временных рядов, отображающих некоторые показатели экономической системы.

Согласно принятой концепции, любые полученные измерения интерпретируются как выходной сигнал одного из множества выходов ЛС. Для временных экономических рядов аналогом ЗИ является импульсная переходная характеристика (ИПХ) ЛС. ИПХ является реакцией ЛС на ударный импульс (функцию Дирака) [1, 14]. Функцию Дирака в данном случае можно интерпретировать как резкое изменение условий функционирования экономической системы, например, в результате кризиса. Измеренный сигнал является линейным преобразованием ИПХ в соответствие со структурными особенностями изучаемого объекта. В результате наблюденный выходной сигнал можно представить проекцией в данную точку пространства (или времени) наблюдений свертки двух функций: ИПХ и структурных особенностей объекта.

По результатам моделирования разработанный метод дает возможность оценить как ИПХ экономической системы, так и распределенных во времени возмущающих ее сигналов и их частотный состав. Полученные оценки интересны тем, что подобную информацию о ЛС можно получить только средствами моделирования. Вероятно для экономической системы линейная модель не является полностью адекватной, однако модельная информация представляется весьма интересной. В частности, оцененная ИПХ будет показывать адаптацию ЛС к кризисным явлениям, частоту и интенсивность других возбуждающих факторов.

Другой интересной областью применения разработанной концепции является метеорология и гидрология. Известно, что многие процессы в этих областях обладают определенной цикличностью. Разработанная методика позволяет на более аргументированном уровне раскрыть многие интересные механизмы этой цикличности. В частности, методика позволяет изучить тонкую структуру флуктуаций температуры, направления и скорости ветра и морских течений и других параметров окружающей среды. Выходные результаты моделирования будут аналогичны рассмотренному выше случаю.

Таким образом, исследованию могут подвергаться временные ряды любой природы. Интересные возможности появляются при разработке многоканального варианта методики. В этом случае ИПХ ЛС будет представлять матрицу, содержащую информацию, как по отдельным каналом, так и о взаимодействии каналов между собой. Следующим шагом в развитии методики является переход от одного измерения ко многим, т.е. переход от описания процесса в терминах ОДУ к ДУ в частных производных, например, переход к анализу двумерных изображений. Предварительный анализ этой задачи показывает, что для ее решения нет принципиальных проблем. Постановка и решение этой задачи позволяет говорить, например, о повышении на 1-2 порядка разрешающей способности оптического микроскопа.

Моделирование и обработка реальных данных показывает, что наблюдаемые (измеренные) сигналы содержат намного больше информации, чем могут выявить методы обработки, основанные на амплитудном подходе. Авторы убеждены, что фаза сигнала более информативна, чем его амплитуда. Здесь уместно такое сравнение: амплитудные методы — это обычная фотография, а фазовые методы — голография. Важным достоинством фазы является более высокая помехозащищенность по сравнению с амплитудой. Действительно, разного рода точечные помехи непосредственным образом сказываются на амплитуде сигнала и косвенно — на фазе, т.к. фаза не является точечным объектом, более того, в процессе оценки фазы белый шум может фильтроваться.

В настоящее время описание ЛС, в основном, выполняется с использованием аппарата ПФ, принятого в технических приложениях, а теория ОДУ практически не используется. Отметим, что с методической точки зрения аппарат ПФ является частным случаем теории ОДУ. Преимущество описания ЛС средствами ОДУ заключается в большей гибкости и возможностях, предоставляемых этим аппаратом. Например, подход на основе ОДУ позволяет выполнить оценки ошибок аппроксимации дискретными методами непрерывных по своей природе вычислительных схем. Отметим, что такая задача в методиках, использующих аппарат ПФ, даже не ставится.

Существенным недостатком методов анализа данных, основанных на применении ПФ, является рост технической сложности применения методики при увеличении мерности данных [1]. Не разрешимой, по нашему мнению, является, например, постановка задачи исследования ЛС с применением методики ПФ для систем со многими входами и выходами. Отметим, что постановка этой задачи в рамках теории ОДУ является естественной и никаких принципиальных сложностей не имеет. Сдерживает применение ОДУ для анализа сложных систем и процессов отсутствие аргументированной оценки его параметров по измеренным данным.

2. Аппроксимация измеренных данных ОДУ по авторегрессии

Для удобства сравнительного анализа приведем краткие сведения из работ [7, 8]. Определим на данных (1) авторегрессионную модель АР(l) порядка l с постоянными коэффициентами вида

$$x_t = \sum_{k=1}^{l} a_k x_{t-k\Delta t} + \epsilon_t, t = 0, 1, \ldots, n,$$

где aa_k – постоянные коэффициенты авторегрессии; l – лаг модели ; t – дискретный параметр времени; ϵ_t – погрешности в данных и ошибки моделирования. С другой стороны, это соотношение можно проинтерпретировать несколько иным образом [8]. Для этого перепишем уравнение авторегрессии в следующем виде

$$x_t - \sum_{k=1}^{l} a_k x_{t-k\Delta t} = \eta_t,\ t = 0, 1, \ldots, n,$$

где η_t – некоторая временная функция. Введем следующие обозначения: b_0=1 – коэффициент при первом члене левой части выражения, $b_i = -a_i$. Для сокращения записи уравнений примем временной период дискретизации равным единице Δt=1. Тогда предыдущее выражение можно переписать так

$$\sum_{k=0}^{l} b_k x_{t-k} = \eta_t,\ t = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Уравнение (2) теперь можно интерпретировать [13] как ОРУ l-ого порядка и однородной частью, равной

$$\sum_{k=0}^{l} b_k x_{t-k} = 0, t = 0, 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Однородное ОРУ (3) имеет характеристическое уравнение

$$b_0\lambda^l + b_1\lambda^{l\text{-}1} + \cdots + b_l = 0. \tag{4}$$

При действительных коэффициентах уравнения (2) корни полинома (4) могут быть или действительными, или комплексно сопряженными. Рассмотрим k-ый комплексно сопряженный корень $\lambda_k = a_k \pm ib_k$ этого уравнения, которому соответствует следующий модуль и аргумент

$$|\lambda_k| = \rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},\ arg(\lambda_k) = \hat{\omega}_k = \operatorname{arctg}(\pm b_k/a_k), \tag{5}$$

с решением вида [7, 8]

$$\rho_k^t(A_k cos(\hat{\omega}_k t) + B_k sin(\hat{\omega}_k t)),$$

где AA_k, BB_k – неизвестные константы. Для действительных корней $\hat{\omega}_k$=0 и решение упростится до выражения

$$A_k\rho_k^t.$$

На основании принципа суперпозиции линейных систем, общее решение однородного уравнения (3) будет иметь следующий вид

$$x_t = \sum_{i=1}^{j} A_i\rho_i^t + \sum_{i=j+1}^{l} \rho_i^t(A_i\cos(\hat{\omega}_i t) + B_i\sin(\hat{\omega}_i t)), \tag{6}$$

где j – число реальных корней. Отметим, что решение (6) устойчиво, если $\rho_i \leq 1$, для всех $i = 1, 2, ..., l$.

2.1. Переход к непрерывному времени

Будем рассматривать неоднородное ОРУ (2) как дискретный аналог неоднородного линейного ОДУ, описывающего некоторую линейную систему l-ого порядка с непрерывным выходом.

$$b_0x^{(l)}(t) + b_1x^{(l-1)}(t) + b_2x^{(l-2)}(t) + \cdots + b_{l-1}x(t) + b_l = f(t), \tag{7}$$

где $x(t)$, $f(t)$ – соответственно выходной и входной сигналы ЛС; $x^{(k)}$ – производная k-ого порядка. Рассмотрим однородную часть этого уравнения

$$b_0x^{(l)}(t) + b_1x^{(l-1)}(t) + b_2x^{(l-2)}(t) + \cdots + b_{l-1}x(t) + b_l = 0. \tag{8}$$

Очевидно, что характеристический полином этого уравнения совпадает с уравнением (4). Тогда, согласно общей теории [13], решение этого уравнения будет иметь вид

$$x_t = \sum_{i=1}^{j} A_i \exp(\alpha_i t) + \sum_{i=j+1}^{l} \exp(\alpha_i t)(A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)), \qquad (9)$$

где j – число реальных корней, t – уже непрерывный параметр времени. Неизвестные константы A_k, B_k должны быть определены из начальных или граничных условий. Параметры α_i в теории ОДУ получили название постоянных затухания. Совокупность затухающих экспонент и затухающих по экспоненте гармоник (6) и (9) составляет фундаментальную систему (ФСР) решений однородного ОРУ (3) и однородного ОДУ (8).

2.2. Декомпозиция линейной системы

Рассмотрим характеристическое уравнение (4) однородного ОДУ (8)

$$b_0\lambda^l + b_1\lambda^{l\text{-}1} + \dots + b_l = 0, \qquad (10)$$

которое является многочленом (полиномом) l-ого порядка. Согласно основной теоремы алгебры многочленов, полином (10) имеет ровно l корней, включая кратные. Для полинома имеют место следующие две важные теоремы [13]:

Т.1. Комплексные корни полинома с действительными коэффициентами появляются парами комплексных сопряженных чисел.

Т.2. Каждый многочлен l-ой степени относительно λ может быть единственным способом представлен в виде произведения постоянной и l линейных множителей вида $(\lambda - c_k)$, а именно:

$$b_0\lambda^l + b_1\lambda^{l\text{-}1} + \dots + b_l = b_0 \prod_{k=1}^{l} (\lambda - \lambda_k),$$

где λ_k – корни полинома (10). Каждая пара множителей $[\lambda - (\alpha_k - i\omega_k)]$ и $[\lambda - (\alpha_k + i\omega_k)]$, соответствующая паре комплексных сопряженных корней $\lambda_k = (\alpha_k + i\omega_k)$ и $\lambda_k = (\alpha_k - i\omega_k)$, может быть объединена в действительный квадратный многочлен $[(\lambda - \alpha_k)^2 - \omega_k^2]$, где i – мнимая единица.

Отметим, что по построению b_0=1, поэтому предыдущее выражение упрощается

$$\lambda^l + b_1\lambda^{l\text{-}1} + \dots + b_l = \prod_{k=1}^{l} (\lambda - \lambda_k). \qquad (11)$$

Итак, согласно выше приведенным теоремам, полином (10) имеет ровно l корней, которые могут быть или действительными, или комплексно сопряженными. Допустим, что полином имеет J действительных корней и $l_c = (l - J)/2$ пар комплексных сопряженных. Согласно общей теории [13], ОДУ (7) представляет суперпозицию J подсистем первого и l_c подсистем второго порядков, т.е. композицию $l_s = J + l_c$ элементарных подсистем.

Известно [13], что действительному корню соответствует ОДУ первого порядка, а комплексным сопряженным – ОДУ второго порядка. По принципу линейности исходное неоднородное ОДУ (7) можно представить в виде следующей композиции ОДУ первого и второго порядков

$$\sum_{k=1}^{j}(x_k^{'} - \alpha_k x_k) + \sum_{k=J+1}^{l_S}(x_k^{''} - 2\alpha_k x_k^{'} + (\alpha_k^2 + \omega_k^2)x_k) = f(t), \tag{12}$$

где $(\cdot)^{'}$, $(\cdot)^{''}$ – соответственно первая и вторая производные. Прямой подстановкой можно убедиться, что если все корни полинома (10) различны, то общее решение однородного уравнения (12) будет иметь следующий вид

$$x_t = \sum_{i=1}^{j} A_i \exp(\alpha_i t) + \sum_{i=1}^{l_c} \exp(\alpha_i t)(A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)), \tag{13}$$

где A_i, B_i – неопределенные коэффициенты. Таким образом, линейная система l-ого порядка разлагается на ряд элементарных подсистем 1-ого и 2-ого порядков.

2.3. Связь между ОРУ и ОДУ

Для установления связи между дискретной и непрерывной моделями временной последовательности рассмотрим k-ый корень характеристического уравнения (4), описываемый выражением (5). Учитывая очевидное тождество $y(x) = e^{ln(y(x))}$, введем следующие обозначения результатов цепочки преобразований

$$\begin{gathered} |\lambda_k| = \rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \exp(\ln \sqrt{a_k^2 + b_k^2}), \\ arg(\lambda_k) = \hat{\omega}_k = \mathrm{arctg}(\pm b_k / a_k),\ \hat{\alpha}_k = \ln(\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\ ). \end{gathered} \tag{14}$$

Введенные обозначения позволяют представить k-ый корень характеристического уравнения (4) в следующем виде

$$\rho_k = A_k \exp(\hat{\alpha}_k). \tag{15}$$

Подставляя выражение (15) в решение (6), получаем решение однородного ОРУ в следующем виде

$$x_t = \sum_{i=1}^{j} A_i \exp(\hat{\alpha}_i t) + \sum_{i=j+1}^{l} \exp(\hat{\alpha}_i t)(A_i \cos(\hat{\omega}_i t) + B_i \sin(\hat{\omega}_i t)), \tag{16}$$

где t – по-прежнему дискретный параметр времени. Выражение (16) по форме совпадает с решением однородного ОДУ (9). Таким образом, любому ОРУ l-ого порядка формально может быть сопоставлено ОДУ также l-ого порядка с решениями вида

$$x_t = \sum_{i=1}^{j} A_i \exp(\alpha_i t) + \sum_{i=j+1}^{l} \exp(\alpha_i t)(A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)), \tag{17}$$

где параметры α_i и ω_i введены для того, чтобы подчеркнуть непрерывность полученной модели.

Итак, чисто формально установлена связь между однородным ОРУ (3) и однородным ОДУ (8). Эти модели описывают две линейных системы с одинаковыми ИПХ и единственным отличием: выходной сигнал в первом случае дискретный, а во втором – непрерывный. Отметим, что дискретность выходного сигнала не является свойством линейной системы, а только отображает способ регистрации данных.

Преобразования (14, 15) позволяют непосредственно перейти от модели с дискретным выходом к модели с непрерывным выходом. Естественно, что этот переход является только некоторым приближением, т.к. процесс дискретизации должен определенным образом сказываться на оценках параметров линейной системы. Ниже рассматривается связь формул (14, 15) с позиций преобразования Лапласа и z-преобразования.

3. Общие теоретические сведения

Для удобства дальнейшего изложения материала опишем основные теоретические характеристики используемых в работе методов и подходов [1, 14, 19].

3.1. Линейные системы

Преобразование и обработка сигналов осуществляется в системах. Понятия сигнала и системы неразрывны, так как любой сигнал существует в какой-либо системе его обращения. Система обработки сигналов может быть реализована как в материальной форме (специальное устройство, измерительный прибор и т.п.), так и программно на ЭВМ или на любом другом вычислительном устройстве.

Под системой понимается физический объект, имеющий некоторые входы и выходы. На входы системы подаются некоторые внешние сигналы $\mathbf{X}(t)$, которые преобразуются, согласно внутренней структуры системы, и подаются на выходы $\mathbf{Y}(t)$. В самом общем виде входные и выходные сигналы могут иметь векторную природу. В этом случае говорят о системе со многими входами и выходами. О сигнале $\mathbf{Y}(t)$ иногда говорят как о реакции (отклике) ЛС на внешний сигнал $\mathbf{X}(t)$. Будем предполагать, что входы и выходы системы являются функциями времени t. Связь между входами и выходами системы может быть представлена с помощью некоторого операторного уравнения вида

$$Y(t) = h(X(t)), \tag{18}$$

где h – некоторая функция (оператор) системы, по которой входные сигналы преобразуются в выходные. Если оператор системы обладает линейными свойствами, т.е.

$$h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2), h(\alpha x) = \alpha h(x), \tag{19}$$

где α – любое конечное число, то говорят, что система линейна. В выражении (18) оператор h называется импульсной переходной характеристикой (ИПХ) или весовой функцией ЛС. Если первое свойство – так называемое свойство суперпозиции ЛС, то второе свойство (19) выражает принцип пропорциональности. По свойству суперпозиции реакция системы на суммарный входной сигнал равна сумме реакций на каждый отдельный сигнал суммы.

В общем случае условия линейности (19) могут быть записаны следующим образом

$$h(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha h(x_1) + \beta h(x_2), \tag{20}$$

С математической точки зрения равенства (19-20) означают, что ИПХ ЛС также является линейным оператором. Если ИПХ линейной системы не меняется во времени, то такие ЛС называются стационарными. В частности, стационарность означает, что временная задержка входного сигнала приводит к такой же задержке выходного сигнала. В этом случае

$$\text{если } y(t) = h(x(t)), \text{ то } y(t-\tau) = h(x(t-\tau)). \tag{21}$$

Оператор, обладающий свойствами (19-21), называется стационарным. Отметим, что предположение о линейности и стационарности исследуемых объектов сильно упрощает их математическое описание и исследование.

В теории линейных систем важным понятием является их устойчивость. Система считается устойчивой, если произвольный ограниченный сигнал на входе создает ограниченный выходной сигнал. Это условие может быть записано следующим образом: если $|x(t)|<$A, то $|y(t)|<$KA, где A и K — некоторые константы, независимые от входного сигнала. С точки зрения ОРУ или ОДУ устойчивые ЛС должны иметь корни характеристического уравнения (4) внутри единичного круга комплексной плоскости. С физической точки зрения это означает, что в таких ЛС наблюдаются процессы диссипации энергии.

Следующим фундаментальным требованием к физически реализуемой системе является принцип причинности. В соответствии с этим принципом сигнал на выходе системы не может предшествовать сигналу на ее входе. Это условие можно выразить математически так

$$\text{если } x(t) = 0, \text{при } t < 0, \text{ то } y(t) = 0, \text{при } t < 0. \tag{22}$$

Условие (22) часто называют условием каузальности. Говорят, что система или оператор, удовлетворяющие этому условию, являются каузальными или физически осуществимыми [15].

3.2. Взаимосвязь между входными и выходными сигналами

Рассмотрим связь между входными и выходными сигналами линейной системы во временной и частотной областях, в предположении, что система является линейной, каузальной и инвариантной во времени.

3.2.1. Соотношения во временной области

Предположим, что на вход системы воздействует единичный импульс, или дельта-функция Дирака $\delta(t)$ [1], который может рассматриваться как прямоугольный импульс бесконечно малой ширины dt и имеющий единичную площадь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{23}$$

В этом случае откликом системы на единичный импульс является ИПХ $h(t)$. В начальный момент система находится в состоянии покоя (это условие в дальнейшем будет всегда иметься в виду, если не оговорено особо). При наложении дополнительного условия каузальности необходимо, чтобы реакция системы $h(t)$ была равна нулю для $t < 0$.

При подаче на вход линейной системы произвольной функции $x(t)$, ее выходной сигнал в установившемся режиме будет определяться сверткой [13, 14]

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \tag{24}$$

Будем считать, что на входной сигнал наложено условие (21). Учитывая условия каузальности (22), интеграл (24) может быть переписан в следующих эквивалентных формах

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau. \tag{25}$$

Правая часть уравнения, называемая интегралом свертки или интегралом суперпозиции, характеризует систему (через причинную связь) с помощью интегрального оператора. Соотношение входа и выхода для любой линейной инвариантной во времени системы задается функцией $h(t)$. Поскольку эти три величины являются функциями времени, синтез системы с использованием уравнения (24, 25) называется синтезом во временной области.

3.2.2. Соотношения в частотной области

Линейная, инвариантная во времени система также может быть описана ее частотной характеристикой $H(\omega)$ [14, 15], которая еще называется функцией отклика или системной функцией и определяется как преобразование Фурье импульсной реакции системы

$$H(\omega) = F\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt, \tag{26}$$

где действительная переменная ω – круговая частота; j – принятое в технических приложениях обозначение мнимой единицы; $F\{\}$ – символическое обозначение прямого преобразования Фурье. Отметим, что круговая частота связана с частотой в Гц (f) соотношением $\omega = 2\pi f$. Обратное преобразование Фурье позволяет получить функцию $h(t)$ из $H(\omega)$

$$h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{27}$$

где $F^{-1}\{\}$ – символическое обозначение обратного преоразования Фурье. Применив прямое преобразование Фурье к обоим частям выражения (25), получим

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega). \tag{28}$$

Уравнение (28) является эквивалентом уравнения (25) в частотной области и устанавливает связь между участвующими в (25) тремя функциями через их спектры. Поэтому, если применим обратное преобразование Фурье к правой части уравнения (28), то получим выходной сигнал через временную функцию:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)d\omega. \tag{29}$$

Сравнивая уравнения (25) и (28), видим, что линейная, инвариантная во времени система одинаково хорошо описывается импульсной реакцией во временной области, или системной функцией – в частотной области. Во временной области результат фильтрации сигнала может быть вычислен непосредственно через интеграл свертки, а в частотной области – через прямое и обратное преобразования Фурье.

Другим способом описания поведения системы в частотной области является использование передаточной функции $H(s)$, которая получается преобразованием Лапласа ИПХ [14, 15]. Преобразованием Лапласа функции $x(t)$ называется следующая пара взаимно однозначных преобразований:

прямое преобразование

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \tag{30}$$

и обратное преобразование

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} X(s) e^{st} ds, \tag{31}$$

где $L\{x(t)\}$, $L^{-1}\{X(s)\}$ – символическое обозначение прямого и обратного преобразования Лапласа; $x(t)$ – оригинал – действительная или комплексная функция, непрерывная или кусочно-непрерывная, однозначная на любом конечном интервале в области определения, имеющая экспоненциальный порядок $O(e^{\lambda t})$ и ограниченную возможность возрастания

$$|x(t)| \leqslant Ae^{\lambda t} \tag{32}$$

$(A, \lambda$ не равны бесконечности); s – оператор Лапласа

$$s = \delta + j\omega \ , \tag{33}$$

где δ – абцисса s-области (коэффициент затухания).

$X(s)$ – L-изображение (L – образ) функции $x(t)$ – результат преобразования Лапласа.

Рис. 1. Плоскость комплексной частоты (s-плоскость).

Преобразование Лапласа справедливо только в области абсолютной сходимости интеграла (30)

$$\int_0^\infty |x(t)e^{-st}| dt < \infty, \tag{34}$$

определяемой абсциссой абсолютной сходимости δ_0. На комплексной s-плоскости это область, где $Re(s) = \delta < \delta_0$. При этом предполагается, что функция $x(t)$ определена для интервала $t \geqslant 0$, т. е. выполняется одностороннее преобразование Лапласа. Соответствующее преобразование для функций, определенных на всем интервале вещественной переменной t, называется двусторонним преобразованием Лапласа.

Заметим, что если интеграл Фурье функции $H(\omega)$ является функцией действительной угловой частоты ω, то преобразование Лапласа $H(s)$ является функцией комплексной переменной $s = \delta + j\omega$. Чтобы гарантировать необходимую сходимость интеграла (30) для временных функций, наиболее часто встречающихся при геофизических наблюдениях, обычно достаточно, чтобы действительная часть переменной s была отрицательной, т. е. соблюдалось условие $Re(s)\ \leq 0$. Как следует из уравнений (26-27) и (30-31), при $Re(s)=0$ трансформанты Фурье и Лапласа эквивалентны для всех каузальных систем.

На рис. 1 показана s-плоскость и схематично изображены типичные формы колебаний в зависимости от частоты ω и коэффициента затухания δ. Как видно из рис. 1, справа от мнимой $j\omega$-оси лежит область, где $\delta>0$ – область нарастающих колебаний тем больших, чем дальше вправо находится рассматриваемое значение s, т.е. неустойчивая область. И наоборот, слева от $j\omega$-оси лежит область где $\delta<0$ – область затухающих колебаний, т.е. устойчивая область. На мнимой оси $\delta=0$ получается область чисто гармонических колебаний постоянной амплитуды, причем колебания с -$j\omega$ отличаются от колебаний с $j\omega$ смещением по фазе на π, так как

$$sin(-\omega t) = -sin(\omega t) = sin(\omega t + \pi).$$

Линейная, инвариантная во времени система является устойчивой, если функция $H(s)$ не имеет полюсов в правой части плоскости s, включая ось $j\omega$. Отметим, что нуль функции $H(s)$ определяется равенством $H(s)=0$, а полюс – $H(s) = \infty$. Критерий устойчивости вытекает из соотношений, устанавливаемых через преобразование Лапласа. Весовая функция $h(t)$, быстро стремящаяся к нулю при $t \to \infty$, имеет трансформанту $L\{h(t)\}$, у которой все полюсы расположены слева от мнимой оси (рис. 1).

3.3. Дискретизация данных

Как правило, физические параметры являются непрерывными функциями времени, т.е. носят аналоговый характер. Из этого следует, что перед их обработкой на цифровых устройствах они должны быть преобразованы в цифровую форму, т.к. цифровые устройства могут работать только с конечной последовательностью чисел.

Процесс преобразования аналогового сигнала в последовательность числовых значений называется оцифровкой. Он состоит из двух самостоятельных операций: дискретизации и квантования [15]. При дискретизации выбираются моменты времени, в которых должны браться отсчеты сигнала, а квантованием осуществляется преобразование амплитуд непрерывного сигнала, измеренных в точках отсчета, в последовательность чисел.

Будем предполагать, что дискретизация ведется через равные интервалы времени, называемые интервалом, или шагом дискретизации Δt. Будем считать, что погрешности квантования достаточно малы и ими можно пренебречь. Принципиальная схема дискретизатора непрерывного сигнала изображена на рис. 2.

Рис 2. а – схема действия дискретизатора; б – непрерывный входной сигнал $x(t)$; идеальная функция дискретизации $\delta_{\Delta t}(t)$; и сигнал на выходе дискретизатора $x_s(t)$

Обозначим входной аналоговый сигнал $x(t)$, а сигнал на выходе устройства дискретизации $x_s(t)$. Пусть $\delta_{\Delta t}$ — идеальная функция дискретизации, представляющая собой бесконечную последовательность единичных импульсов

$$\delta_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

Сигнал на выходе устройства дискретизации

$$x_s(t) = x(t)\delta_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t). \tag{35}$$

где $x(n\Delta t)$ – амплитуда n-го отсчета сигнала. Уравнение (35) показывает, что функцию $x_s(t)$, получаемую в результате перемножения функции дискретизации с аналоговым входным сигналом, можно представить как результат амплитудно-импульсной модуляции (рис. 2).

Теоретически преобразование аналог-код может выполняться с достаточно высокой плотностью отсчетов, гарантирующей достижение хорошего подобия между цифровым сигналом и его аналоговым эквивалентом. Однако, с одной стороны, отсчеты сигналов в близко расположенных точках являются сильно коррелированными и несут избыточную информацию, что неоправданно увеличивает общий объем данных, затрудняет и удорожает вычисления. С другой стороны, взятие отсчетов через большие интервалы времени может привести к искажениям как низко-, так и высокочастотных составляющих в исходном сигнале. Очевидно, выбор интервала Δt должен быть разумным компромиссом между двумя противоречащими друг другу требованиями. В качестве решающего правила при выборе интервала дискретизации Δt служит теорема Котельникова [12].

Поскольку техническая реализация дискретного преобразователя не имеет прямого отношения к теме настоящей работы, ограничимся рассмотрением последствий этой операции. Если обрабатываемый сигнал имеет ограниченную полосу частот $\Omega \subseteq (-\omega_s, \omega_s)$, то интервал дискретизации должен удовлетворять условию $\Delta t \leq \pi/\omega_s$. Невыполнение этого условия приводит к трансформации высоких частот ($\omega > \omega_s$) в низкие – эффект наложения частот (или элясинг-эффект) [15]. Параметр π/ω_s называется круговой частотой наложения, или частотой Найквиста.

Если входной аналоговый сигнал на входе дискретизатора имеет непериодический спектр $X_s(\omega)$, то спектр соответствующего дискретного сигнала на выходе $X_d(\omega)$ устройства является периодической функцией частоты с периодом, равным ω_s

$$X_d(\omega) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_s(\omega + n\omega_s),$$

где a – коэффициент пропорциональности.

Для большинства регистрируемых сигналов требование ограниченности спектра является достаточно жестким. Поэтому при обработке аналоговых сигналов приходится встречаться с эляйсинг-эффектом [15]. Существует несколько способов его устранения. Простейшим из них является выбор Δt

достаточно малым, чтобы обрабатываемые сигналы имели довольно малую энергию за пределами соответствующей частоты Найквиста. Однако при малом Δt возрастает объем данных и повышается стоимость вычислений. Другой возможностью устранения эляйсинг-эффекта является предварительная фильтрация аналоговых сигналов с помощью анти-эляйсинговых фильтров.

Идеальный низкочастотный фильтр, включенный последовательно с устройством дискретизации, позволяет еще до момента дискретизации сигнала удалить из него все частотные составляющие, превышающие предписанный диапазон. При этом предполагается, что подавленные частотные составляющие несут лишь второстепенную информацию. Предварительно фильтрованные сигналы теперь могут рассматриваться как сигналы с ограниченным спектром.

3.4. Z-преобразование

Выходной сигнал устройства дискретизации можно рассматривать как последовательность чисел $x_n = x(n\Delta t)$, где n — целое число. Числа x_n генерируются при дискретизации непрерывного входного сигнала в моменты времени, разделенные интервалом Δt. Такое представление удобно использовать относительно сигналов, подлежащих обработке на ЭВМ [12, 15, 19]. Выполняя преобразование Фурье обеих частей уравнения (35), получаем :

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n exp(-j\omega n\Delta t). \tag{36}$$

Вводя новую переменную $z = exp(j\omega\Delta t)$, представим это выражение в форме:

$$X(z) = Z(x_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}. \tag{37}$$

В то время как $X_s(\omega)$ – функция вещественной угловой частоты, $X(z)$ есть функция комплексной переменной $z = exp(j\omega\Delta t)$. Для любой угловой частоты абсолютная величина $|z| = 1$. Уравнение (37) определяет z-преобразование при условии, что независимая переменная z лежит на единичной окружности. В случае изменения ω от $-\infty$ до ∞ комплексная переменная z вращается по единичной окружности в z-плоскости (рис. 3). При любом изменении ω на величину $\mp 2\pi/\Delta t$ в z-плоскости происходит циклическое повторение, которое должно рассматриваться как прямое следствие процесса дискретизации.

Рис. 3. Комплексная z-плоскость

.

Как следует из уравнения (37), результат z-преобразования последовательности отсчетов сигнала $x = (..., x_{-2}, x_1, x_0, x_1, x_2...)$ представляет собой многочлен по степеням z с коэффициентами, равными соответствующим значениям дискретных отсчетов сигнала. Таким образом, в соответствии с (37)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}. \tag{38}$$

Умножение z-трансформанты на множитель z^{-1} физически означает не что иное, как сдвиг членов последовательности на один интервал дискретизации в направлении возрастания времени. Иногда многочлен (38) может быть записан в конечной форме, а для некоторых наиболее распространенных функций z-трансформанты могут быть получены аналитически.

Ясно, что ряд (38) может удовлетворять условию сходимости только при $|z| \leq$1. Значения z, для которых $X(z) = \infty$, называются полюсами, а в случае $X(z) = 0$ – нулями функции $X(z)$. Для бесконечных причинных последовательностей преобразование сходится везде внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

По заданному или полученному в результате анализа какой-либо системы z-полиному однозначно восстанавливается соответствующая этому полиному функция путем идентификации коэффициентов при степенях z^k, которые соответствуют k-ым отсчетам временной функции.

Подстановка значения какой-либо частоты в $z = exp(j\omega\Delta t)$ отображается точкой на окружности. Частоте ω=0 соответствует точка $Re(z)$=1 и $Im(z)$=0 на правой стороне оси абсцисс. При повышении частоты точка смещается по окружности против часовой стрелки и занимает крайнее левое положение на частоте Найквиста $\omega_N = \pi/\Delta t$ ($Re(z)$ =-1, $Im(z)$=0). Отрицательные частоты спектра отображаются аналогично по часовой стрелке на нижней полуокружности. Точки N совпадают, а при дальнейшем повышении или понижении частоты значения начинают повторяться в полном соответствии с периодичностью спектра дискретной функции.

Проход по полной окружности соответствует одному периоду спектра, а любая гармоника спектра сигнала задается на плоскости двумя точками, симметричными относительно оси абсцисс. Отсюда следует также, что область сходимости устойчивых каузальных систем на z-плоскости представляет собой круг единичного радиуса (рис. 3).

Заметим, что наряду с уравнением (37) иногда используют другое определение z-преобразования последовательности x_n, выражаемое соотношением

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^n. \tag{39}$$

В литературе прикладного характера чаще используется первое представление. Переход от одной формы z-преобразования к другой выполняется просто заменой z на z^{-1}.

В большинстве случаев временная последовательность импульсов задается только для положительных значений n, и тогда преобразование называется односторонним. В противном случае оно является двусторонним.

Z-преобразование не ограничивается только единичной окружностью, как в уравнении (37), а может быть распространено на всю комплексную плоскость. Имея это в виду, рассмотрим аналоговый каузальный сигнал $x(t)$. Его дискретная форма определяется выражением (35). Вместо преобразования Фурье применим к обеим частям уравнения (35) преобразование Лапласа. Тогда

$$x_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n L\{\delta(t - n\Delta t)\}. \tag{40}$$

Учитывая, что $L\{\delta(t - n\Delta t)\}$=1, и применяя теорему запаздывания $L\{x(t - n\Delta t)\} = exp(-s\Delta t)L\{x(t)\}$ [15], находим:

$$x_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n exp(-sn\Delta t)\}, \tag{41}$$

Здесь s комплексная переменная $s = \delta + j\omega$. Используя подстановку

$$z = exp(s\Delta t)\}. \tag{42}$$

получаем:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}. \tag{43}$$

Операция (43) широко известна как z-преобразование, которое определено в области комплексной плоскости, где ряд (43) сходится. Сходимость ряда для одного какого-либо значения является достаточным условием того, что ряд x_n может быть подвергнут z-преобразованию, т. е. является z-трансформируемым.

Обратный переход от дискретной модели к непрерывной осуществляется с помощью многозначного обратного z-преобразования:

$$s = lnz = \frac{1}{\Delta t} ln|z| + \frac{j}{\Delta t} argz, \tag{44}$$

Подстановку $z = exp(s\Delta t)$ можно рассматривать как функцию отображения, используемую для переноса области s-плоскости в область z-плоскости. Для точек на мнимой оси s-плоскости δ=0 и абсолютное значение $|z|$=1. При этом предполагается, что часть мнимой оси s-плоскости, лежащей между ω=0 и $\omega = 2\pi/\Delta t = \omega_s$, отображается на единичную окружность z-плоскости. Остальные части мнимой оси просто накладываются друг на друга на единичной окружности.

Как следует из выражения (42), любая линия $\delta = const$ в s-плоскости отображается в z-плоскости как окружность с центром в начале координат и радиусом $exp(\delta\Delta t)$. Для любой точки в левой s-полуплоскости (δ<0) справедливы соотношения $exp(\delta\Delta t)$<1 и $|z|$<1. Следовательно, основная полоса s-плоскости $-\infty < \delta < 0$, $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$ отобразится в область внутри единичной окружности z-плоскости, образуя один лист поверхности Римана. Побочные полосы $-\infty < \delta < 0$, $\omega_s/2 < \omega < 3\omega_s/2$ (-$3\omega_s/2 < \omega < -\omega_s/2$) и т.д. в s-плоскости дают другие листы в z-плоскости с общей секущей линией на отрицательной части действительной оси, простирающейся от z=-1 до z=0 (рис. 4). Правая половина s-плоскости отображается в область вне единичной окружности z-плоскости.

По форме выражение (43) совпадает с соотношением (38) за исключением нижнего предела. Есть, однако, неявное, но более существенное различие между ними. Оно заключается в том, что в случае (43) модуль $exp(s\Delta t)$ может иметь любую величину и, следовательно, комплексная переменная s определена на всей комплексной плоскости, тогда как в случае (38) переменная z определена только на единичной окружности $|z| = 1$. В этом смысле преобразование (38) может рассматриваться как особый случай более общего z-преобразования, определенного уравнением (43).

Как следует из уравнения (43), z-преобразование функции $x(t)$ зависит от значений функции только в точках отсчета. Добавление любой другой функции времени, принимающей нулевые значения в точках отсчета и произвольные величины в промежутках между ними, не изменяет полученную ранее z-трансформанту. Следовательно, существует бесконечное множество функций $x(t)$ с идентичными z-трансформантами, т. е. z-преобразование не учитывает вариации аналоговой функции между точками отсчета.

Некаузальные временные последовательности $x(n\Delta t)$ имеют ненулевые значения как для положительных n, так и для отрицательных n. Напомним, что выражение (43) описывает каузальные временные последовательности. z-преобразование некаузальных функций дает двустороннюю z-трансформанту, формально идентичную уравнению (43).

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}. \tag{45}$$

Здесь предполагается, что бесконечный ряд (45) имеет радиус сходимости $R_1 < |z| < R_2$.

Рис 4. Отображение s плоскости в z плоскость

.

Полагая $\delta = 0$ и используя уравнение (43), получаем комплексный спектр как функцию вещественной переменной ω [12]:

$$X(z) = x_0 + x_1 exp(-j\omega\Delta t) + x_2 exp(-2j\omega\Delta t) + ... \quad (46)$$

Это важное свойство z-представлений может быть использовано, например, для графического представления $X(exp(-j\omega\Delta t))$.

4. Связь между непрерывной и дискретной моделями с точки зрения z-преобразования

Цифровая обработка сигналов оперирует с дискретными преобразованиями сигналов и обрабатывающих данные сигналы систем. В принципе, в своих основных положениях математический аппарат дискретных преобразований подобен преобразованиям аналоговых сигналов и систем. Однако дискретность данных требует учета этого фактора, и его игнорирование может приводить к существенным ошибкам. Кроме того, ряд методов дискретной математики не имеет аналогов в аналитической математике.

Используется несколько методов преобразования (т.е. дискретизации) существующего аналогового (непрерывного) дифференциального уравнения в эквивалентный ему цифровой или разностный вид. Наиболее распространенными методами дискретизации дифференциального уравнения с ПФ $H(s)$ являются следующие [10, 11, 15]:

- метод отображения дифференциалов;

- метод билинейного преобразования;

- метод согласованного z-преобразования.

- метод инвариантного преобразования импульсной характеристики;

В [10] проведено исследование указанных переходов для динамических объектов с разными ПФ и сделаны следующие выводы:

- первые два преобразования работоспособны при малых Δt, однако они не обеспечивают взаимно-однозначного соответствия между нулями и полюсами НПФ и ДПФ;

-

согласованное z-преобразование позволяет обеспечить взаимно-однозначное соответствие между нулями и полюсами НПФ и ДПФ, однако не позволяет определить механизм появления дополнительных нулей и полюсов в ДПФ.

Рассмотрим согласованное z-преобразование более подробно. Этот метод основан на непосредственном отображении полюсов и нулей из s-плоскости в полюса и нули на z-плоскости и наоборот. При таком отображении полюс (или нуль) в точке $s = -a$ отображается в полюс (или нуль) в точке $z = exp(-a\Delta t)$

плоскости z, где Δt – период дискретизации. Таким образом, при согласованном z-преобразовании отображающая замена будет иметь вид (рис. 5)

$$s + a \to 1 - z^{-1}e^{-a\Delta t}. \tag{47}$$

Если полюсы (или нули) комплексные, то это соотношение можно переписать следующим образом (так как они появляются сопряженными парами):

$$\begin{aligned}(s + a - jb)(s + a + jb) \to (1 - z^{-1}e^{-(a-jb)\Delta t})(1 - z^{-1}e^{-(a+jb)\Delta t}) \\ = 1 - 2z^{-1}e^{-a\Delta t}cos(b\Delta t) + z^{-2}e^{-2a\Delta t}.\end{aligned} \tag{48}$$

Рассмотрим однородное ОДУ второго порядка

$$x_k^{''} - 2\alpha_k x_k^{'} + (\alpha_k^2 + \omega_k^2)x_k = 0, \tag{49}$$

с решением

$$x_k(t) = \exp(\alpha_i t)(A_k\cos(\omega_k t) + B_k\sin(\omega_k t)). \tag{50}$$

Дискретный аналог уравнения (49), имеющий те же полюса, согласно выражению (48), есть

$$\begin{aligned}x_k(n\Delta t) - 2exp(\hat{\alpha}_k\Delta t)cos(\hat{\omega}_k\Delta t)x_k((n-1)\Delta t) + \\ exp(2\hat{\alpha}_k\Delta t)x_k((n-2)\Delta t) = 0,\end{aligned} \tag{51}$$

где $\hat{\alpha}_k$, $\hat{\omega}_k$ – оценки, выполненные по соотношениям (14, 15). Корни этого выражения есть

$$z = a_k \pm b_k = exp(\hat{\alpha}_k\Delta t)cos(\hat{\omega}_k\Delta t) \pm jexp(\hat{\alpha}_k\Delta t)sin(\hat{\omega}_k\Delta t). \tag{52}$$

Модуль и аргумент этой пары комплексно сопряженных корней соответственно равны

$$|z| = exp(\hat{\alpha}_k\Delta t);\ arg(z) = \hat{\omega}_k = Arctg(\frac{sin(\hat{\omega}_k\Delta t)}{cos(\hat{\omega}_k\Delta t)}). \tag{53}$$

Если принять постоянную дискретизации за единицу Δt=1, то преобразования (14, 15) при переходе от ОРУ к ОДУ совпадут с выражением (53), полученным согласно z-преобразованию. При дискретности $\Delta t \neq 1$ согласно соотношению (44) оценки коэффициентов затухания и частот будут иметь следующий вид

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{\hat{\alpha}_k}{\Delta t};\ \tilde{\omega}_k = \frac{\hat{\omega}_k}{\Delta t}, \tag{54}$$

и их подстановка в выражение (53) приведет к следующим очевидным равенствам

$$|z| = exp(\hat{\alpha}_k);\ arg(z) = \hat{\omega}_k = Arctg(\frac{sin(\hat{\omega}_k)}{cos(\hat{\omega}_k)}), \tag{55}$$

которые полностью соответствуют преобразованиям (14, 15), если принять, что $a_k = cos(\hat{\omega}_k)$, $b_k = sin(\hat{\omega}_k)$. Более того, становится очевидным, что преобразования (14, 15) являются просто обратным преобразованием (44), используемым при переходе из z в s плоскости. Таким образом, соотношения (14, 15) для ОРУ и ОДУ являются следствием преобразования Лапласа при переходе из z-плоскости в s-плоскость, что и доказывает правомерность установленных связей между авторегрессией, ОРУ и ОДУ.

Однако эта связь имеет более глубокое обоснование. Действительно, прямое соответствие нулей и полюсов непрерывной и дискретной моделей предполагает явное соответствие характеристических полиномов, или, что тоже самое, совпадение НПФ и ДПФ. Предлагаемый нами метод также основан на равенстве характеристических полиномов ОРУ и ОДУ. Следовательно, согласованное z-преобразование и результаты, основанные на регрессионном анализе, должны быть идентичны.

Метод исследования ЛС на основе НПФ и ДПФ не обладает средствами оценок погрешностей при переходе от непрерывной к дискретной модели (и наоборот). Эта методика возникла в некоторых технических приложениях и ориентирована на анализ простейших ЛС. Более того, по нашему мнению, этот подход лишен какого-либо потенциала для своего развития. Этот метод есть лишь частный случай теории ОДУ. Сдерживающими причинами практического использования ОДУ для исследования ЛС является, по нашему мнению, отсутствие теоретически аргументированных методов идентификации его параметров по натурным данным.

Рис 5. Переход из s плоскости в z плоскость (и наоборот)

Напротив, теория ОДУ является более гибким средством изучения ЛС и имеет достаточный потенциал своего развития. Этот подход в явном виде использует производные, т.е. динамический элемент процесса. В методах, основанных на ПФ, производные в явном виде не используются, т.е. метод по сути является статическим. Явное включение в модель динамического фактора позволяет выполнять оценки, недоступные статическим методам.

5. Заключение

Проведенное нами исследование позволяет сделать следующие выводы. Задача оценки ОДУ по ОРУ является обратной по отношению к согласованному z-преобразованию, которое используется при переходе от непрерывной к дискретной моделям. Если решать обратную задачу с позиций z-преоразований, то эти методы являются идентичными. Отличие этих методов заключается только в теоретической основе, на которую они опираются. Однако эта теоретическая основа начинает играть принципиальную роль при рассмотрении проблемы в более широком аспекте.

В работе [11] показано, что использование согласованного z-преобразования позволяет обеспечить взаимно-однозначное соответствие между конечными нулями и полюсами НПФ и ДПФ, однако не позволяет объяснить механизм появления дополнительных нулей и полюсов в ДПФ. Попытаемся объяснить почему появляются дополнительные нули и полюса в ДПФ на основе теории ОРУ с помощью следующих рассуждений.

Будем рассматривать модель ОРУ постепенно возрастающей сложности, где под сложностью модели понимается ее порядок. Любое увеличение сложности модели на два порядка приводит к появлению двух нулей (полюсов). Эти два нуля (полюса) могут относится к нулям (полюсам) непрерывной модели, либо нет. Истинный нуль (полюс) появляется в том случае, если: 1. примененная модель соответствует данным; 2. лаг модели меньше истинного. Все это имеет место в предельном случае для неограниченного по длине вектора данных.

В реальных условиях, при ограниченных выборках и произвольных данных, любые оценки параметров ОРУ являются приближенными. Большие проблемы возникают также при оценке истинного порядка модели. Для выяснения истинности нулей (полюсов) в работе [11] предлагается искусственно менять шаг дискретизации данных Δt, например, за счет их децимации. С уменьшением шага дискретизации истиные нули (полюса) сначала имеют тенденцию к перемещению в s-плоскости, затем, по достижению оптимального значения шага Δt занимают фиксированное значение. Ложные нули (полюса) фиксированного положения на s-плоскости не принимают.

Рассмотренная выше процедура уменьшения шага дискретизации для проверки истинности нулей (полюсов) может быть реализована средствами ОРУ в виде следующей схемы. Будем постепенно увеличивать порядок ОРУ и фиксировать полученные нули (полюса) в s-плоскости. Отметим, что увеличение порядка ОРУ приводит к повышению разрешающей способности модели. А это, с точки зрения ДПФ, означает уменьшение шага дискретизации Δt. В этом случае истинные нули (полюса) при некотором порядке модели зафиксируются на s-плоскости. Порядок модели, при котором происходит стабилизация нулей (полюсов), сигнализирует также о достижении истинного порядка модели.

Список литературы

[1] Бендат Дж., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа. М.: Мир, 1983.

[2] Вапник В.Н., Глазкова Т.Г. и др. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей. М.: Наука, 1984.

[3] Драница Ю.П. Моделирование одномерных динамических процессов с целью предварительной обработки результатов. //Вестник МГТУ. Тр. Мурм. гос. технич. ун-та. Т. 4, № 1, 2001.

[4] Драница Ю.П., Жеребцов В. Д., Слипченко В. А. Частотно-временной метод обработки фазовых измерений в геофизике. //Журнал "Измерительная техника", N6, 2001.

[5] Драница Ю.П., Жеребцов В. Д. и др. Использование волоконно-оптических технологий в геофизике. // Журнал "Геофизика", № 6, 2002.

[6] Драница Ю.П., Драница А.Ю. Некоторые аспекты интерпретации экспериментальных данных на основе теории линейных динамических систем. // Вестник МГТУ. Тр. Мурм. гос. технич. ун-та. Т.12, № 1, 2009.

[7] Драница Ю.П., Драница А.Ю. Некоторые постановки задач на основе динамического моделирования. // Вестник МГТУ. Тр. Мурм. гос. технич. ун-та. Т.12, № 2, 2009.

[8] Драница Ю.П., Драница А.Ю. Некоторые постановки задач интерпретации временных последовательностей на основе линейного моделирования. //электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления № 4, 2009.

[9] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

[10] Карташов В.Я., Новосельцева М.А., Пяткова Г.А. Выбор периода дискретизации при контроле непрерывных динамических систем. // Вестник КемГУ. Кемерово, вып. № 4, 2000.

[11] Карташов В.Я. Эквивалентность дискретных моделей — реальность? // Промышленные АСУ и контроллеры, № 08, 2006.

[12] Козлов Е.А., Гогоненков Г.Н., Лернер Б.Л., и др. Цифровая обработка сейсмических данных. М.: Недра, 1973.

[13] Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1977.

[14] Краус М., Вошни Э. Измерительные информационные системы. М.: Мир, 1975.

[15] Кулханек О. Введение в цифровую фильтрацию в геофизике. М.: Недра, 1981.

[16] Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. М.: Недра, 1986.

[17] Приезжев И.И. Информационные технологии комплексной интерпретации геофизических данных для геологического моделирования: Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук, М.:РГГУ, 2010.

[18] Робинсон Э.А. Миграция сейсмических данных как ВКБ-аппроксимация. Анализ и выделение сейсмических сигналов / Под ред. Ч. Чжаня, М.: Мир, 1986.

[19] Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьева Е.Б. Основы цифровой обработки сигналов. СПб.: "БХВ-Петербург 2005.

[20] Сейсморазведка: Справочник геофизика: в 2 кн. /Под ред. В.П. Номоконова. Кн.1. М.: Недра, 1990.

[21] Сильвиа М.Т. Деконволюция и теория обратных задач рассеяния сейсмических волн. //Сборн. Анализ и выделение сейсмических сигналов / Под ред. Ч. Чжаня, М.: Мир, 1986.

[22] Теребиж В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач. М.: Физматлит, 2005.

[23] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука,1990.

[24] Троян В.Н, Соколов Ю.М. Методы аппроксимации геофизических данных на ЭВМ. Л.: Из-во Ленингр.Университета, 1989.