ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2019
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ «ПРОСТОЙ» ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Елисеев А.Г., Ратникова Т.А.

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

eliseevag@mpei.ru, ratnikovata@mpei.ru

Аннотация

В статье на основе метода регуляризации С.А. Ломова построено асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши в случае нарушения условий стабильности спектра предельного оператора. В частности, рассмотрена задача с «простой» точкой поворота, т.е. одно собственное значение в начальный момент времени имеет нуль произвольного дробного порядка (предельный оператор дискретно необратим). Данная работа является развитием идей, описанных в работах С.А. Ломова и А.Г. Елисеева. Дробная точка поворота порядка в простейшем частном случае рассматривалась методом пограничных функций К.Г. Кожобековым и Д.А. Турсуновым. Задачи с дробной точкой поворота с точки зрения метода регуляризации ранее не рассматривались. В работе восполняется этот пробел. В ней на основе разрабатываемой авторами теории нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач развивается алгоритм метода регуляризации, проводится обоснование этого алгоритма и строится асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача Коши, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

Abstract

Basing on the S. A. Lomov regularization method an asymptotic solution for a singularly perturbed Cauchy problem for the case when the stability conditions for the spectrum of the limit operator are violated is constructed. In particular, the problem with a “simple” pivot point when one eigenvalue at the initial moment of time has zero of arbitrary fractional order (the limit operator is discretely irreversible) is considered. This work is the development of the ideas described in the works of S.A. Lomov and A.G. Eliseev. Fractional pivot point in the simplest particular case was studied by the boundary function method by K.G. Kozhobekov and D.A. Tursunov. These problems have not been previously considered from the point of view of the regularization method. In the present paper on the basis of the theory of normal and unique solvability of iterative tasks elaborated by the authors, an algorithm for the regularization method is designed and substantiated, and an asymptotic solution of any order with respect to a small parameter is constructed.

Keywords: singularly perturbed Cauchy problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.

Введение

В данной работе методом регуляризации С.А. Ломова [1] строится асимптотическое решение задачи Коши в случае рациональной «простой» точки поворота. Метод регуляризации позволяет построить равномерное на всем отрезке $[0, T]$ асимптотическое решение, а при дополнительных условиях на параметры сингулярно возмущенной задачи и ее правую часть —- точное решение. Идея данной работы восходит к работе [2], в которой разработаны методы решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае «простой» точки поворота предельного оператора с натуральным показателем.

Поясним термин «простая» точка поворота. Пусть дана задача Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon u' = A(t)u + h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0 \end{cases} \tag{1}$$

и выполнены условия:

1) $h(t) \in C^\infty([0, T], R^n)$;

2) $A(t) \in C^\infty([0, T], L(R^n, R^n))$;

3) спектр оператора $A(t)$ удовлетворяет условиям:

а) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t) \quad \forall i \neq j,\ i, j = \overline{1, n}$;

б) $\lambda_i(t) \neq 0,\ i = \overline{2, n}$;

c) условие «простой» точки поворота с натуральным показателем: $\lambda_1(t)$ имеет нуль k-порядка, т.е. $\forall t \in [0,T]$ $\lambda_1(t) = t^k a(t)$, где $a(t) \neq 0$.

Следует отметить, что термин «простая» точка поворота был предложен автором метода регуляризации С.А. Ломовым при написании статьи [2].

1. Формализм метода регуляризации

Точка $\varepsilon = 0$ для задачи (1) является особой в том смысле, что классические теоремы существования решения задачи Коши не имеют места. Поэтому в решении этой задачи возникают существенно особые сингулярности. При выполнении условия стабильности для спектра $A(t)$ существенно особые сингулярности описываются с помощью экспонент вида:

$$e^{\varphi_i(t)/\varepsilon}, \quad \varphi_i(t) = \int\limits_0^t \lambda_i(s)ds, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\varphi_i(t)$ — гладкая (в общем случае комплексная) функция действительного переменного t. Для решения линейных однородных уравнений такие сингулярности были описаны еще Луивиллем [3].

Если же условия стабильности нарушены хотя бы для одной точки спектра оператора $A(t)$ (условие 3(c)), то кроме экспоненциально существенно особых сингулярностей в решении неоднородного уравнения возникают еще и сингулярности вида:

$$\sigma_i = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \int\limits_0^t e^{-\varphi_1(s)/\varepsilon} s^i ds, \quad i = \overline{0, k-1},$$

которые при $\varepsilon \to 0$ имеют степенной характер убывания при соответствующих ограничениях на $\lambda_1(t)$, при этом предполагается, что остальные точки спектра не обращаются в нуль при $t = 0$ (условие 3(а,б)).

Сингулярно возмущенные задачи возникают обычно в случаях, когда область определения исходного оператора, зависящего от ε при $\varepsilon \neq 0$, не совпадает с областью определения предельного оператора при $\varepsilon = 0$. При изучении задач с «простой» точкой поворота возникают дополнительные условия, когда область значений исходного оператора не совпадает с областью значений предельного оператора.

Для того, чтобы выявить особенности построения решения в случае рациональной точки поворота, и не усложнять изложение материала дополнительными вычислениями при наличии стабильной части спектра, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon u' + t^{m/n}u = h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \end{cases} \tag{2}$$

и выполнены условия:

1) $h(t) \in C^\infty([0,T], R)$;

2) $m, n \in \mathbb{N}$.

Заменой переменной $\tau = t^{1/n}$ задача (2) сводится к задаче:

$$\begin{cases} \varepsilon u'(\tau,\varepsilon) + \tau^p u(\tau,\varepsilon) = \tau^{n-1}h(\tau^n), \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \quad \text{где } m+n-1 = p, \end{cases} \tag{3}$$

методы решения которой изложены в работе [2].

В данной задаче на структуру решения (3) сильно влияет правая часть уравнения (так как она не принадлежит области значений предельного оператора).

Основные сингулярности данной задачи [2] имеют вид:

$$e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon}; \quad \sigma_i = e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon} \int\limits_0^\tau e^{\varphi(s)/\varepsilon} s^i ds, \quad i = \overline{0, p-1},$$

где $\varphi(\tau) = \tau^{p+1}/(p+1)$.

Согласно методу регуляризации в случае «простой» точки поворота решение ищется в виде:

$$u(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k u_k = e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon}x(\tau,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{p-1} y^i(\tau,\varepsilon)\sigma_i + z(\tau,\varepsilon), \tag{4}$$

где $x(\tau,\varepsilon)$, $y^i(\tau,\varepsilon)$, $z(\tau,\varepsilon)$, $i = \overline{0, p-1}$ — гладкие по τ функции, степенным образом зависящие от ε.

Подставляя (4) в задачу (3) и выделяя слагаемые при одинаковых сингулярностях, получим задачу:

$$\begin{cases} (x(\tau,\varepsilon))' = 0, \\ (y^i(\tau,\varepsilon))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z(\tau,\varepsilon) = \tau^{n-1} h(\tau^n) - \\ \qquad -\varepsilon \left[y^0(\tau,\varepsilon) + \tau y^1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \tau^{p-1} y^{p-1}(\tau,\varepsilon) \right] - \varepsilon z'(\tau,\varepsilon), \\ x(0,\varepsilon) + z(0,\varepsilon) = u^0. \end{cases} \tag{5}$$

Функции $y^i(\tau,\varepsilon)$ не участвуют в начальном условии системы (5), так как $\sigma_i(0,\varepsilon) = 0$.

Задача (5) является регулярной по степеням ε, поэтому, разлагая функции x, y^i, z в ряды по степеням ε:

$$\begin{cases} x = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau), \\ y^i = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k y^i_k(\tau), \quad i = \overline{0, p-1}, \\ z = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau) \end{cases} \tag{6}$$

и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим серию итерационных задач:

$$\begin{cases} x_k'(\tau) = 0, \\ (y^i_k(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_k(\tau) = -z'_{k-1}(\tau) - \sum\limits_{i=0}^{p-1} \tau^i y^i_{k-1}(\tau) + \delta^k_0 \tau^{n-1} h(\tau^n), \\ x_k(0) + z_k(0) = \delta^k_0 u^0, \quad k = \overline{-1, \infty}, \end{cases} \tag{7}$$

где δ^k_0 — символ Кронекера.

Отрицательная степень по ε возникает из-за того, что $\tau^{n-1}h(\tau^n)$ не принадлежит области значений предельного оператора.

Для решения итерационных задач (7) сформулируем теорему о точечной разрешимости уравнения

$$\tau^p z(\tau) = \tau^{n-s} h(\tau^n),$$

где s — любое натуральное фиксированное число, $0 \le s \le n-1$.

Теорема 1 *Пусть дано уравнение*

$$\tau^p z(\tau) = \tau^{n-s} h(\tau^n), \quad m + n - 1 = p \tag{8}$$

и выполнены условия 1) и 2) задачи (2)*. Тогда уравнение* (8) *разрешимо в классе гладких функций тогда и только тогда, когда*

$$h^k(0) = 0, \quad k = \overline{0, \left[\frac{m+s-1}{n}\right]}.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть уравнение (8) разрешимо. Тогда

$$z(\tau) = \tau^{n-s-p} h(\tau^n). \tag{9}$$

Разложим $h(\tau^n)$ по формуле Маклорена

$$z(\tau) = \sum_{k=0}^{N} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \tau^{(k+1)n-p-s} + o(\tau^{(N+1)n-p-s}).$$

Из гладкости решения (9) с необходимостью следует, что

$$(N+1)n - s \le p < (N+2)n - s.$$

Учитывая, что $p = m + n - 1$, получим $N - \dfrac{s-1}{n} \le \dfrac{m}{n} < (N+1) - \dfrac{s-1}{n}$.
Отсюда $N = \left[\dfrac{m+s-1}{n}\right]$ и $h^k(0) = 0$, $k = \overline{0, N}$.

Достаточность очевидна.

Решение (8) при выполнении условий теоремы запишется в виде:

$$z(\tau) = \tau^{n-\nu} h_1(\tau^n), \tag{10}$$

где $0 \le \nu \le n-1$, $h_1(0) \ne 0$.

Теорема доказана.

Замечание 1 *При решении итерационных задач при определении частного решения* $z_k(\tau)$ *приходится дифференцировать выражение* $\tau^{n-\nu} h_1(\tau^n)$*:*

$$\frac{d}{d\tau} \tau^{n-\nu} h_1(\tau^n) = (n-\nu)\tau^{n-\nu-1} h_1(\tau^n) + n\tau^{2n-\nu-1} h_1(\tau^n) = \tau^{n-\nu-1} h_2(\tau^n).$$

Таким образом, через $(n-1)$ *шагов получим:*

$$\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \tau^{n-1} h(\tau^n) = h_1(\tau^n).$$

Рассмотрим систему (7) при $k = -1$:

$$\begin{cases} x'_{-1}(\tau) = 0, \\ (y^i_{-1}(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_{-1}(\tau) = 0, \\ x_{-1}(0) + z_{-1}(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Решение системы (8) запишется в виде:

$$\begin{cases} x_{-1}(\tau) = x_{-1}(0) = 0, \\ y^i_{-1}(\tau) = y^i_{-1}(0), \quad i = \overline{0, p-1}, \\ z_{-1}(\tau) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

На данном итерационном шаге ($k = -1$) $y^i_{-1}(0)$ — произвольные числа, которые определяются из условия точечной разрешимости при $k = 0$:

$$\begin{cases} x'_0(\tau) = 0, \\ (y^i_0(\tau))' = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ \tau^p z_0(\tau) = -z'_{-1}(\tau) - \sum\limits_{i=0}^{p-1} \tau^i y^i_{-1}(0) + \tau^{n-1} h(\tau^n), \\ x_0(0) + z_0(0) = u^0. \end{cases} \tag{13}$$

Решение задачи (13) запишется как $x_0(\tau) = x_0(0)$, $y^i_0(\tau) = y^i_0(0)$, $i = \overline{0, p-1}$, которые определяются из условия разрешимости уравнения

$$\tau^p z_0(\tau) = \tau^{n-1} h(\tau^n) - \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i y^i_{-1}(0) \tag{14}$$

и начальных условий.

На основании теоремы разрешимости следует, что $y^i_{-1}(0) = \dfrac{h^j(0)}{j!}$, где

$$\operatorname{ord}(\tau^i) = \operatorname{ord}(\tau^{n(j+1)-1}), \quad i = \overline{0, p-1}, \quad j = \overline{0, N}, \quad N = \left[\frac{m}{n}\right]. \tag{$*$}$$

$\operatorname{ord}(\tau^i) = i$ означает степень τ^i.

Остальные $y^i_{-1}(0) = 0$. Решение $z_0(\tau)$ запишется в виде:

$$z_0(\tau) = \tau^{n(N+2)-p-1} h_0(\tau^n) = \tau^s h_0(\tau^n), \quad \text{где } s \text{ — целое число}, s \in [0, n-1]. \tag{15}$$

$x_0(0)$ определяется из начальных условий $x_0(0)+z_0(0)=u^0$. Тогда

$$x_0(0)=\left[\begin{array}{l} u^0,\ \text{если}\ z_0(0)=0,\\ u^0-z_0(0),\ \text{если}\ z_0(0)\neq 0.\end{array}\right.$$

Таким образом, решение на «-1» шаге определено:

$$u_{-1}(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{h^j(0)}{j!}\sigma_i,$$

где суммирование ведется по слагаемым, удовлетворяющих условию:

$$\mathrm{ord}\,(\tau^i)=\mathrm{ord}\,(\tau^{n(j+1)-1}).$$

Чтобы определить $y_0^i(\tau)$, рассмотрим итерационную систему на шаге $k=1$:

$$\begin{cases} x_1'(\tau)=0,\\ (y_1^i(\tau))'=0,\quad i=\overline{0,p-1},\\ \tau^p z_1(\tau)=-z_0'(\tau)-\sum\limits_{i=0}^{p-1}\tau^i y_0^i(0),\\ x_0(0)+z_0(0)=0.\end{cases}\tag{16}$$

Рассмотрим уравнение относительно $z_1(\tau)$. Согласно замечанию:

$$\tau^p z_1(\tau)=-\tau^{s-1}h_0(\tau^n)-\sum_{i=0}^{p-1}\tau^i y_0^i(0),$$

где $h_0(\tau^n)$ — некоторая гладкая функция, $h_0(0)\neq 0$.

На основании теоремы разрешимости имеем: $y_0^i(0)=\dfrac{h_0^{(j)}(0)}{j!}$, для которых

$$\mathrm{ord}\,(\tau^i)=\mathrm{ord}\,(nj+s-1),\quad i=\overline{0,p-1},\quad j=\overline{0,N},\quad \text{где}\ \ N=\left[\frac{m-s}{n}\right].\tag{**}$$

Отсюда $z_1(\tau)=\tau^{n-q}h_1(\tau^n)$, $0\leq q\leq n-1$ и $x_0(0)=\left[\begin{array}{l} 0,\ \text{если}\ z_1(0)=0,\\ -z_1(0),\ \text{если}\ z_1(0)\neq 0.\end{array}\right.$

Следовательно, на нулевом итерационном шаге полностью находится главный член асимптотики:

$$u_{\text{гл}}(\tau,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{p-1}\frac{h^j(0)}{j!}\sigma_i+x_0(0)e^{-\varphi(\tau)/\varepsilon}+\sum_{i=0}^{p-1}y_0^i(0)\sigma_i,\tag{17}$$

где в первом слагаемом суммирование ведется по условию (*), в третьем слагаемом суммирование ведется по условию (**).

Аналогично можно найти любой член асимптотического решения.

2. Оценка асимптотического члена

Пусть

$$u(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{N}\varepsilon^k u_k(\tau,\varepsilon)+\varepsilon^{N+1}R_N(\tau,\varepsilon), \tag{18}$$

где $u_k(\tau,\varepsilon)$ — решения итерационных задач. Подставим уравнение (18) в задачу (3). Тогда получим задачу Коши:

$$\begin{cases}\varepsilon R_n'(\tau,\varepsilon)+\tau^p R_n(\tau,\varepsilon)=H(\tau),\\ R_n(0,\varepsilon)=0\end{cases} \tag{19}$$

(здесь $H(\tau)=\tau^p z_{N+1}+z_N'+\sum\limits_{i=0}^{p-1}\tau^i y_N^i(0)$ удовлетворяет условию точечной разрешимости). Тогда, оценивая $R_n(\tau,\varepsilon)$ по норме $C[0,T]$, получим оценку $||R_n(\tau,\varepsilon)||\leq C$.

Теорема 2 *Пусть задана задача* (3) *и выполнены условия 1) и 2). $C>0$ — константа, не зависящая от ε. Тогда верна оценка*

$$\left\|u(\tau,\varepsilon)-\sum_{k=-1}^{N}\varepsilon^k u_k(\tau,\varepsilon)\right\|\leq C\varepsilon^{N+1}.$$

Теорема 3 *Пусть выполнены условия теоремы 2 и дополнительные условия точечной разрешимости $h^i(0)=0$, $i=\overline{0,k}$, $k=\left[\dfrac{m}{n}\right]$. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u(\tau,\varepsilon)=u_0(\tau),\forall\tau\in[\delta,T],\delta>0$$

где $u_0(\tau)=\frac{\tau^{n-1}h(\tau^{n-1})}{\tau^p}=\tau^{n-s}h_1(\tau^n)$.

Здесь $h_1(0)\neq 0$, $0\leq s\leq n-1$ или в терминах исходной задачи $u_0(t)=t^{(1-s/n)}h_1(t)$.

3. Примеры

В заключении приведем два примера.

1) $\begin{cases} \varepsilon u' + t^{3/2} u = h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \quad t \in [0,T]. \end{cases}$

Регуляризирующие функции в данном случае будут:

$$e^{-2t^{5/2}/5\varepsilon}; \quad \sigma_i = e^{-2t^{5/2}/5\varepsilon} \int\limits_0^t e^{2s^{5/2}/5\varepsilon} s^{\frac{i-1}{2}} ds, \quad i = \overline{0,3}.$$

Главный член асимптотики решения задачи запишется в виде:

$$u(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(h(0)\sigma_1 + \dot{h}(0)\sigma_3) + u^0 e^{-2t^{5/2}/5\varepsilon} - \frac{1}{4}\ddot{h}(0)\sigma_0 - \frac{1}{4}\dddot{h}(0)\sigma_2 + \frac{h(t) - h(0) - t\dot{h}(0)}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

2) $\begin{cases} \varepsilon u' + t^{1/2} u = h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \quad t \in [0,T]. \end{cases}$

Регуляризирующие функции в данном случае будут:

$$e^{-2t^{3/2}/3\varepsilon}; \quad \sigma_i = e^{-2t^{3/2}/3\varepsilon} \int\limits_0^t e^{2s^{3/2}/3\varepsilon} s^{\frac{i-1}{2}} ds, \quad i = 0,1.$$

Главный член асимптотики решения задачи запишется в виде:

$$u(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} h(0)\sigma_1 + u^0 e^{-2t^{3/2}/3\varepsilon} - \frac{\dot{h}(0)}{2}\sigma_0 + \frac{h(t) - h(0)}{\sqrt{t}}.$$

Список литературы

[1] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

[2] Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора. — Математический сборник, 1986, т. 131, № 173, с. 544–557.

[3] Lioville J. Second memoire sur le development des fonctions en series dont divers termes sont assujettis, a une meme equation. — J. Math. Pure Appl., 1837, vol. 2, c. 16–35.

[4] Турсунов Д. А., Кожобеков К. Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота. — Известия Иркутского гос. университета, 2017, т. 21, с. 108–121.