ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2014
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

О полиномиальных двоякопериодических дифференциальных уравнениях

Е. К. Ершов
Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет, Россия
ershov@ee13858.spb.edu

Аннотация

Рассматриваются дифференциальные уравнения первого порядка $\dfrac{d\theta}{d\varphi} = h(\varphi, \theta)$, правая часть которых 2π-периодична по обоим аргументам и является тригонометрическим многочленом по θ степени $n \geqslant 1$. Доказывается, что всякое такое уравнение с числом вращения p/q, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p и q взаимно просты, при $q \leqslant n$ может быть аппроксимировано грубым полиномиальным уравнением степени n. Показано также, что при $n = 1$ существование такой аппроксимации возможно только в случае $q = 1$.

Abstract

In the paper first order differential equations $\dfrac{d\theta}{d\varphi} = h(\varphi, \theta)$ are considered. It is assumed that the function h is 2π-periodic in both variables and is a trigonometric polynom in θ of degree $n \geqslant 1$. We prove that every such an equation with rotation number p/q, where $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p and q are relatively prime, can be approximated by a structurally stable polynomial equation of degree n provided $q \leqslant n$. It is also shown that in the case when $n = 1$ the existence of such an approximation implies $q = 1$.

В работе рассматриваются двоякопериодические дифференциальные уравнения вида

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = a_0(\varphi) + \sum_{k=1}^{n} [a_k(\varphi) \cos k\theta + b_k(\varphi) \sin k\theta] \equiv h(\varphi, \theta), \tag{1}$$

где $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_k(\varphi)$, $b_k(\varphi)$ – непрерывные, 2π-периодические функции. Если $a_n^2(\varphi) + a_n^2(\varphi) \not\equiv 0$, то уравнение (1) назовем полиномиальным степени n. Уравнение (1) определяет динамическую систему на двумерном торе $T^2 = \{(\varphi, \theta) \mod 2\pi\}$. Обозначим через μ число вращения Пуанкаре уравнения (1), т.е. не зависящий от θ_0 предел

$$\mu = \lim_{\varphi \to +\infty} \frac{\theta(\varphi, \theta_0)}{\varphi},$$

где $\theta(\varphi, \theta_0)$ – решение уравнения такое, что $\theta(0, \theta_0) = \theta_0$. Хорошо известно [1], что если число вращения рационально ($\mu = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, причем p и q взаимно просты), то уравнение (1) имеет решение $\theta(\varphi, \theta_0)$ такое, что $\theta(2\pi q, \theta_0) = \theta_0 + 2\pi p$. Такому решению на торе отвечает замкнутая интегральная кривая, делающая до замыкания q оборотов по долготе и p оборотов по широте тора. Наоборот, если уравнение имеет на торе замкнутую интегральную кривую, делающую до замыкания q оборотов по долготе и p оборотов по широте тора, то его число вращения $\mu = p/q$. Следующее определение хорошо известно.

Определение. Уравнение (1) называется грубым (структурно устойчивым), если существует число $\delta > 0$ такое, что для любой 2π-периодической, непрерывной по φ, θ и непрерывно дифференцируемой по θ функции $g(\varphi, \theta)$, $|g| < \delta$, $|\dfrac{\partial g}{\partial \theta}| < \delta$, существует гомеоморфизм тора на себя, переводящий интегральные кривые возмущенного уравнения

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = h(\varphi, \theta) + g(\varphi, \theta)$$

в интегральные кривые уравнения (1).

Известно [2], что для грубости двоякопериодического дифференциального уравнения необходимо и достаточно выполнения двух условий:

1) уравнение имеет рациональное число вращения $\mu = p/q$;

2) все замкнутые интегральные кривые уравнения гиперболические, т.е. для любого решения $\theta(\varphi, \theta_0)$ такого, что $\theta(2\pi q, \theta_0) = \theta_0 + 2\pi p$, выполняется

неравенство

$$\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}(2\pi q, \theta_0) \neq 1.$$

Обозначим через H^n пространство непрерывных, 2π-периодических вектор-функций $h = (a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ с метрикой

$$\mathrm{dist}(h_1, h_2) = \max_{\varphi\in\mathbb{R}} ||h_1(\varphi) - h_2(\varphi)||,$$

где $||.||$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^{2n+1}$. В дальнейшем будем отождествлять уравнение (1) с элементом h пространства H^n. Из результатов работы [1] следует, что число вращения уравнения (1) определяет на H^n непрерывную функцию $\mu : H^n \to \mathbb{R}$, где $\mu(h)$ – число вращения уравнения (1).

Для рационального числа r обозначим через $A^n_r = \mu^{-1}(r)$ – множество уравнений (1) с числом вращения r. Очевидно, что для любого рационального r множество A^n_r не пусто и замкнуто. Положим

$$A^n = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A^n_r.$$

Нетрудно проверить (см. [1]), что множество A^n плотно в пространстве H^n.

Рассмотрим вопрос о плотности в A^n грубых полиномиальных уравнений. Обозначим через B^n_r множество грубых уравнений с числом вращения r.

Теорема 1. Пусть число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, – рационально, прчем p и q взаимно просты. Тогда если $q \leqslant n$, то множество B^n_r плотно в A^n_r.

Доказательство. Пусть $h \in A^n_r$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдется уравнение

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = f(\varphi, \theta) \tag{2}$$

такое, что $f \in B^n_r$ и $\mathrm{dist}(h, f) < \varepsilon$. Обозначим через $F_h(\theta_0)$ функцию последования уравнения (1): $F_h(\theta_0) = \theta(2\pi q, \theta_0) - \theta_0 - 2\pi p$. Хорошо известно, что функция $F_h(\theta_0)$ является 2π-периодической: $F_h(\theta_0 + 2\pi) = F_h(\theta_0)$. Так как уравнение (1) имеет рациональное число вращения $r = p/q$, то функция F_h имеет по крайней мере один нуль. Из аналитичности правой части уравнения (1) по θ вытекает, что либо $F_h \equiv 0$, либо на промежутке $[0, 2\pi)$ функция F_h имеет конечное число нулей, причем каждый из них имеет конечную кратность.

Рассмотрим первую возможность. Покажем, что для любого числа $\delta > 0$ найдется уравнение

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = g(\varphi, \theta), \tag{3}$$

$g \in A_r^n$, $\operatorname{dist}(h, g) < \delta$ такое, что его функция последования F_g не равна нулю тождественно. Пусть $\theta(\varphi, \theta_*)$ – решение уравнения (1), отвечающее замкнутой интегральной кривой на торе. Рассмотрим функцию

$$d(\varphi, \theta) = \prod_{i=0}^{q-1} \sin \frac{\theta - \theta(\varphi, \theta_*)}{2},$$

квадрат которой $d^2(\varphi, \theta)$ имеет период 2π по φ и θ. Нетрудно видеть, что функция $d^2(\varphi, \theta)$ является тригонометрическим полиномом по θ степени не выше q. Положим

$$e(\varphi, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(d^2(\varphi, \theta)\right) = 2d(\varphi, \theta) \cdot \frac{\partial d}{\partial \theta}(\varphi, \theta).$$

Понятно, что функция $e(\varphi, \theta)$ также является тригонометрическим многочленом по θ степени не выше q и $e(\varphi, \theta(\varphi, \theta_*) \equiv 0$. Рассмотрим уравнение (3) с правой частью $g = h + ce$, где $c \neq 0$ – постоянная такая, что $\operatorname{dist}(h, g) < \delta$. Пусть $F_g(\theta_0)$ – функция последования уравнения (3). Очевидно, что $F_g(\theta_*) = 0$ и, следовательно, $g \in A_r^n$. Найдем характеристический показатель $\varkappa$ решения $\theta(\varphi, \theta_*)$ уравнения (3). По определению характеристического показателя имеем

$$\begin{aligned}
\varkappa &= \frac{1}{2\pi q} \int\limits_0^{2\pi q} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta}(\varphi, \theta(\varphi, \theta_*)) + c\frac{\partial e}{\partial \theta}(\varphi, \theta(\varphi, \theta_*))\right] d\varphi = \\
&= \frac{2c}{2\pi q} \int\limits_0^{2\pi q} \left[\frac{\partial e}{\partial \theta}(\varphi, \theta(\varphi, \theta_*))\right] d\varphi = \\
&= \frac{2c}{2\pi q} \int\limits_0^{2\pi q} \prod_{i=0}^{q-1} \sin^2 \frac{\theta(\varphi, \theta_*) - \theta(\varphi + 2\pi i, \theta_*)}{2} d\varphi.
\end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $\varkappa \neq 0$. Действительно, в противном случае при некотором целом j, $1 \leqslant j \leqslant q-1$, и целом k выполнялось бы равенство $\theta(\varphi + 2\pi j, \theta_*) = \theta(\varphi, \theta_*) + 2\pi k$ при всех φ, т.е. интегральная кривая на торе, отвечающая решению $\theta(\varphi, \theta_*)$ делает до своего замыкания j, $1 \leqslant j < q$, оборотов по долготе тора. Последнее противоречит тому, что числа p и q взаимно просты. Поскольку

$$\frac{dF_g}{d\theta_0}(\theta_*) = \exp(2\pi q\varkappa) - 1 \neq 0,$$

то θ_* является нулем функции F_g кратности 1 и, следовательно, $F_g(\theta_0) \not\equiv 0$. Поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $F_h(\theta_0) \not\equiv 0$. Пусть $\theta(\varphi, \theta_j)$, $j = 1, \ldots, s$, решения уравнения (1), отвечающие различным замкнутым на торе интегральным кривым. Без ограничения общности можно считать, что $\theta_j \in [0, 2\pi)$ при $j = 1, \ldots, s$. Любой нуль фукции F_h, располагающийся на промежутке $[0, 2\pi)$, имеет вид $\theta(2\pi k, \theta_j) \mod 2\pi$, $j = 1, \ldots, s$, $0 \leqslant k \leqslant q - 1$. Положим

$$O_j = \{\theta_j, \theta(2\pi, \theta_j), \ldots, \theta(2\pi(q-1), \theta_j) \mod 2\pi\}.$$

Обозначим через $\nu_j \geqslant 1$ кратность нуля θ_j функции последования F_h. Легко видеть, что все точки множества O_j имеют одну и туже кратность ν_j. Пусть l точек $\theta_1, \ldots, \theta_l$ имеют кратность 1, а $m = s - l$ точек $\theta_{l+1}, \ldots, \theta_s$ кратности большие 1. Если $l = s$, т.е. все замкнутые интегральные кривые гиперболические, то уравнение (1) грубое, поэтому в рассмотрении нуждается лишь случай $l < s$. Положим $\nu = \nu_{l+1} + \cdots + \nu_s$. Выберем окрестности U_j точек θ_j так, чтобы множества

$$V_j = \bigcup_{k=0}^{q-1} \theta(2\pi k, U_j) \mod 2\pi$$

не пересекались при различных j, $j = 1, \ldots, s$. Ясно, что $O_j \in V_j$.

Так как близость в метрике пространства H^n означает, в частности, близость функций последования уравнений вместе с их производными до порядка ν включительно, то существует такое $\delta_1 > 0$, что функция последования любого уравнения (2), $\mathrm{dist}(h, f) < \delta_1$, обладает следующими свойствами:

1) все нули F_f содержатся в $\bigcup\limits_{j=1}^{s} V_j$;

2) в каждой из окрестностей U_j, $j = 1, \ldots, l$ функция F_f имеет по одному нулю кратности 1;

3) в каждой из окрестностей U_j, $j = l + 1, \ldots, s$ функция F_f имеет не более ν_j нулей, причем их суммарная кратность не превосходит ν_j, так что суммарная кратность нулей F_f в $\bigcup\limits_{j=l+1}^{s} U_j$ не превосходит ν.

Аналогично изложенному выше построим полиномиальное уравнение степени n
$$\frac{d\theta}{d\varphi} = h_1(\varphi, \theta), \tag{4}$$
$h_1 \in A_r^n$, $\operatorname{dist}(h, h_1) < \min(\delta_1, \dfrac{\varepsilon}{\nu - 1})$, функция последования F_{h_1} которого имеет в окрестностях U_j, $j = 1, \ldots, l$, по одному простому нулю и еще один простой нуль $\tilde{\theta}_{l+1} \in U_{l+1}$. Суммарная кратность нулей F_{h_1}, не являющихся простыми, не превосходит $\nu - 1$. Если все нули F_{h_1} простые, то в качестве f возьмем h_1. В противном случае, возмущая h_1 аналогично изложенному выше, построим уравнение
$$\frac{d\theta}{d\varphi} = h_2(\varphi, \theta), \tag{5}$$
$h_2 \in A_r^n$, $\operatorname{dist}(h_1, h_2) < \min(\delta_2, \dfrac{\varepsilon}{\nu - 1})$, функция последования F_{h_2} которого имеет в окрестностях $\tilde{U}_j$, $j = 1, \ldots, l+1$, по одному простому нулю и еще один простой нуль в окрестности $\tilde{U}_{l+2}$, причем суммарная кратность нулей функции F_{h_2}, не являющихся простыми, не превосходит $\nu - 2$ и т.д. Через m $(m \leqslant \nu - 1)$ шагов построим грубое уравнение (2), где $f = h_m \in B_r^n$, при этом
$$\operatorname{dist}(h, f) = \operatorname{dist}(h, h_m) \leqslant \operatorname{dist}(h, h_1) + \cdots + \operatorname{dist}(h_{m-1}, h_m) < m\frac{\varepsilon}{\nu - 1} \leqslant \varepsilon.$$

Замечание 1. Результат, аналогичный теореме 1, для полиномиальных диффеоморфизмов окружности был получен в [3].

Замечание 2. Из доказательства теоремы видно, что любое уравнение (1), где $h \in A_r^n$, $r = p/q$, при $q < n$ может быть приближено грубым полиномиальным уравнением (2) степени n, причем h и f совпадают в членах порядка выше q, а при $q > n$ может быть приближено грубым полиномиальным уравнением степени q.

В связи со сделанным замечанием возникает вопрос: можно ли уравнение (1), $h \in A_r^n$, $r = p/q$, при $q > n$ приблизить грубым полиномиальным уравнением степени n? Следующая теорема показывает, что при $n = 1$ ответ на поставленный вопрос отрицательный.

Рассмотрим уравнение (1) при $n = 1$, т.е. уравнение вида
$$\frac{d\theta}{d\varphi} = a_0(\varphi) + a_1(\varphi)\cos\theta + b_1(\varphi)\sin\theta. \tag{6}$$

Теорема 2. Если число вращения уравнения (6) рационально $\mu = p/q$ $(p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ взаимно просты) и $q \geqslant 2$, то все интегральные кривые уравнения замкнуты на торе, в частности, не существует грубых уравнений (6) с таким числом вращения.

Доказательство. Обозначим через $F(\theta_0) = \theta(2\pi q, \theta_0) - \theta_0 - 2\pi p$ функцию последования уравнения (6). Теорема утверждает, что $F(\theta_0)$ тождественный нуль. Допустим, вопреки утверждению теоремы, что $F(\theta_0) \not\equiv 0$. Тогда суммарная кратность нулей функции $F(\theta_0)$, располагающихся на $[0, 2\pi)$ не менее $2q$. Действительно, если $F(\theta_0)$ принимает значения одного знака, то уравнение (6) имеет на торе полуустойчивую замкнутую интегральную кривую и, следовательно, $F(\theta_0)$ имеет на $[0, 2\pi)$ не менее q нулей кратности $\geqslant 2$. Если же $F(\theta_0)$ принимает значения разных знаков, то уравнение имеетна торе не менее двух различных замкнутых интегральных кривых. В этом случае $F(\theta_0)$ на $[0, 2\pi)$ имеет не менее $2q$ нулей кратности $\geqslant 1$.

Совершая в уравнении (6) замену переменных $\theta = \eta + \theta(\varphi, \theta_0)$, где $\theta(\varphi, \theta_0)$ – решение уравнения, отвечающее замкнутой интегральной кривой, получим $2\pi q$-периодическое по φ уравнение

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \alpha(\varphi)(\cos\eta - 1) + \beta(\varphi)\sin\eta, \tag{7}$$

имеющее в полосе $0 \leqslant \eta < 2\pi$ конечное число $2\pi q$-периодических решений, суммарная кратность которых $\geqslant 2q$. Так как $q \geqslant 2$, то это противоречит тому, что как показано в [4] уравнение (7) не может иметь в полосе $0 \leqslant \eta < 2\pi$ более двух периодических решений с учетом кратности.

Замечание 3. О.Г. Галкиным ([5], стр. 51, см. также [6]) для семейства уравнений вида

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = a + \varepsilon T(\varphi, \theta), \tag{8}$$

где a, ε – параметры, $T(\varphi, \theta)$ – тригонометрический многочлен по θ степени n, доказано, что ширина области резонанса (так называется множество тех (a, ε), для которых уравнение (8) имеет число вращения p/q при малых ε не превосходит $C\varepsilon^s$, где $s = -[-q/n]$, C – постоянная, не зависящая от ε. Из теоремы 2 вытекает, что при $n = 1$ этот результат допускает следующее уточнение: если $q \geqslant 2$, то ширина области резонанса p/q равна нулю.

Список литературы

[1] Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. - М. Л.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука". – 1964. – 368 с.

[2] Плисс В. А. О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе. - Вестник ЛГУ, сер. матем., 13, № 3. – 1960. 15–23.

[3] Ершов Е. К. О грубых полиномиальных диффеоморфизмах окружности. - Дифференциальные уравнения, 24, № 4. – 1988. 687–689.

[4] Ершов Е. К. О числе циклов некоторых дифференциальных уравнений на двумерном торе. - Дифференциальные уравнения, 27, № 12. – 1991. 2167–2169.

[5] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. I. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)". - М. – 1985. 7–149.

[6] Арнольд В. И. Замечание о теории возмущений для задач типа Матье. - Успехи мат. наук., 38, № 4, – 1983. 189–203.