ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2008
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных системах

УСТОЙЧИВОСТЬ В ЦЕЛОМ ДВУМЕРНОЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ГИСТЕРЕЗИСОМ[1]

С.М. Евдокимов[2]

В работе рассматривается система автоматического регулирования

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi\,[t, \sigma, \varphi_0]\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma = ay + bx$, нелинейность $\varphi\,[t, \sigma, \varphi_0]$ является релейной гистерезисной функцией с положительным гистерезисом (рис. 1).

$$\begin{cases} \varphi\,[t, \sigma, \varphi_0] = M, \ \text{ если } \ \sigma \geq -\delta, \\ \varphi\,[t, \sigma, \varphi_0] = -M, \ \text{ если } \ \sigma \leq \delta \ \ , \end{cases} \tag{2}$$

$M > 0$, $\delta > 0$, направление обхода петли гистерезиса на рисунке указано стрелками.

Предполагаем, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$, т.е. при $\varphi\,[t, \sigma, \varphi_0] \equiv 0$ система (1) является асимптотически устойчивой, и передаточная функция системы (1) является невырожденной.

Системы с релейно-гистерезисной нелинейностью такого вида возникают при исследовании большого числа прикладных задач и хорошо изучены (например, [1-8]). Н.А. Железцовым [1] методом точечных отображений изучена

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ-954.2008.1, Математико-механический факультет Санкт-Петербургского Государственного Университета).

система вида (1) при условии $\beta = 0$. В монографии В.И. Зубова [4] с использованием второго метода Ляпунова показано, что в системе (1) с нелинейностью такого вида существует предельный цикл при достаточно малых $\delta > 0$, но точные границы для δ не определяются. В работе А.М. Камачкина [5] доказано существование сшитого предельного цикла в системе при выполнении условия $Mb - \delta\beta > 0$. В работах [2, 7, 8] приведены частотные условия устойчивости в целом стационарного множества такой системы, которые являются только достаточными условиями.

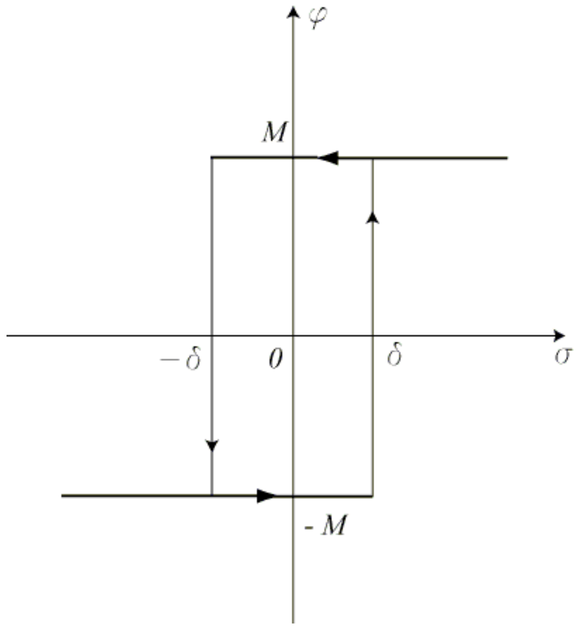

Рис.1.

В данной работе через коэффициенты системы даны необходимые и достаточные условия существования предельного цикла и устойчивости в целом стационарного множества систем вида (1) с нелинейностью (2). Результаты получены с помощью аналога метода точечных отображений, являются новыми, могут быть использованы в дальнейшем при решении ряда теоретических и практических задач.

Фазовая поверхность системы состоит из двух листов: $P_1 = \{(x, y) : \sigma \geq -\delta\}$ и $P_2 = \{(x, y) : \sigma \leq \delta\}$, перекрывающих друг друга в "зоне неоднозначности" $-\delta \leq \sigma \leq \delta$.

На листе P_1 $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0] \equiv M$ и система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta \left(x + M/\beta \right), \end{cases} \tag{3}$$

на листе P_2 $\quad \varphi\,[t,\sigma,\varphi_0] \equiv -M$ и система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta\,(x - M/\beta)\,. \end{cases} \tag{4}$$

Переход фазовой точки с листа P_1 на лист P_2 происходит по лучу $L_1 = \{(x,y) : \sigma = -\delta,\ \dot{\sigma}\,|_{\sigma \to -\delta+0} \leq 0\}$; переход с листа P_2 на лист P_1 - по лучу $L_2 = \{(x,y) : \sigma = \delta,\ \dot{\sigma}\,|_{\sigma \to \delta-0} \geq 0\}$ (рис. 1).

Решение системы (3) на листе P_1, достигающее в момент времени $t = \tau_1$ луча L_1 в некоторой точке $(x_1,\, y_1)$, продолжается при $t > \tau_1$ на лист P_2 и является решением системы (4) с начальными данными $(\tau_1,\ x_1,\, y_1)$.

Аналогично, решение (4) на листе P_2, достигающее в момент $t = \tau_2$ луча L_2 в точке $(x_2,\, y_2)$, продолжается при $t > \tau_2$ на P_1 и является решением системы (3) с начальными условиями $(\tau_2,\, x_2,\, y_2)$.

Не умаляя общности рассуждений можно считать, что $a \geq 0$. Для доказательства этого факта в системе достаточно сделать замену $x \to -x,\ \ y \to -y$ и заметить, что $\varphi\,(t,\sigma) = -\varphi\,(t,-\sigma)$.

Рассмотрим случай $a > 0$ (случай $a = 0$ рассматривается аналогично).

Если $\delta\beta - Mb \geq 0$, то стационарное множество Θ системы состоит из двух состояний равновесия: $\Theta = (-M/\beta,\ 0) \cup (M/\beta,\ 0)$. Если $\delta\beta - Mb < 0$, то состояний равновесия на фазовой поверхности нет.

Теоремы 1–4 дают через коэффициенты системы необходимые и достаточные условия существования предельного цикла и устойчивости в целом стационарного множества Θ системы (1) с нелинейностью вида (2).

Характеристическое уравнение положений равновесия $(\mp M/\beta,\ 0)$ систем (3) и (4) имеет вид: $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$, его корни: $\lambda_1 = -\alpha/2 - \sqrt{\alpha^2/4 - \beta}$, $\lambda_2 = -\alpha/2 + \sqrt{\alpha^2/4 - \beta}$.

Теорема 1. *Если* $\quad \delta\beta - Mb < 0 \quad (b > 0)$, *то в системе (1) существует предельный цикл, сшитый из кусков траекторий систем (3) и (4).*

Куски траекторий (3) и (4), образующие предельный цикл, сшиваются в точках с координатами $(\pm x_0,\ \pm y_0) = \left(\pm\frac{\delta}{am+b},\ \pm\frac{\delta m}{am+b}\right)$, *лежащих на лучах* L_2 *и* L_1, *где параметр* m *определяется из уравнения*

a). $\quad \left(\frac{M\lambda_1(am+b)+\delta\beta(m-\lambda_1)}{M\lambda_1(am+b)-\delta\beta(m-\lambda_1)}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}} =$

$$= \left(\frac{M\lambda_2\,(am+b) + \delta\beta\,(m-\lambda_2)}{M\lambda_2\,(am+b) - \delta\beta\,(m-\lambda_2)}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}, \tag{5}$$

если $\alpha^2 - 4\beta > 0$;

б). $\exp\left(\frac{2M\delta\beta m(am+b)}{(M\lambda(am+b))^2-(\delta\beta(m-\lambda))^2}\right) =$

$$= \left(\frac{M\lambda\left(am+b\right)+\delta\beta\left(m-\lambda\right)}{M\lambda\left(am+b\right)-\delta\beta\left(m-\lambda\right)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{6}$$

если $\alpha^2 - 4\beta = 0$;

в). $\frac{1}{2v}\ln\left(\frac{M^2(am+b)^2-2M\delta(am+b)(\beta+m\alpha/2)+\delta^2\beta\left(m^2+\alpha m+\beta\right)}{M^2(am+b)^2+2M\delta(am+b)(\beta+m\alpha/2)+\delta^2\beta(m^2+\alpha m+\beta)}\right) =$

$$= \frac{1}{w}arctg\left(\frac{2M\delta wm\left(am+b\right)}{M^2\left(am+b\right)^2-\delta^2\beta\left(m^2+\alpha m+\beta\right)}\right)+\frac{\pi r\left(m\right)}{w}, \tag{7}$$

где $\xi\left(m\right) = M^2\left(am+b\right)^2 - \delta^2\beta\left(m^2+\alpha m+\beta\right)$,

$r\left(m\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi\left(m\right) > 0, \\ 1, & \text{если } \xi\left(m\right) < 0, \end{cases}$ *если* $\alpha^2 - 4\beta < 0,\ \lambda_{1,\,2} = v \pm iw$.

Доказательство. Заметим, что система (4) получается из системы (3) заменой x, y на $-x$, $-y$, поэтому траектории системы (4) симметричны траекториям (3) относительно начала координат.

Рассмотрим различные случаи расположения траекторий системы (1) на листах фазового пространства.

1). Пусть $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $\lambda_2 > \lambda_1 > -b/a$.

В этом случае состояния равновесия систем (3) и (4) являются устойчивыми узлами.

Обозначим через $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ точку пересечения траектории $y = \lambda_2\left(x - M/\beta\right)$, $y > 0$, и луча L_2, через $(x_0,\ y_0)$ - некоторую точку, лежащую на луче L_2 ниже точки $(\tilde{x},\ \tilde{y})$. Если траектория системы (3), проходящая через точку $(x_0,\ y_0)$, пересекает луч L_1 в симметричной точке $(-x_0,\ -y_0)$, то система (1) имеет предельный цикл (рис.2).

Пусть $m = y_0/x_0$, тогда из условия $y_0 < \tilde{y}$ получим промежутки, в которых может изменяться параметр m:

$$\begin{cases} m \in \left(0,\ \frac{\lambda_2(\delta\beta-Mb)}{\delta\beta+a\lambda_2 M}\right), & \text{если} \quad \delta\beta + a\lambda_2 M > 0, \\ m \in \left(-\infty,\ \frac{\lambda_2(\delta\beta-Mb)}{\delta\beta+a\lambda_2 M}\right) \cup \left(0,\ +\infty\right), & \text{если} \quad \delta\beta + a\lambda_2 M < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Решение системы (3) имеет вид:

$$\begin{cases} x + M/\beta = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \tag{9}$$

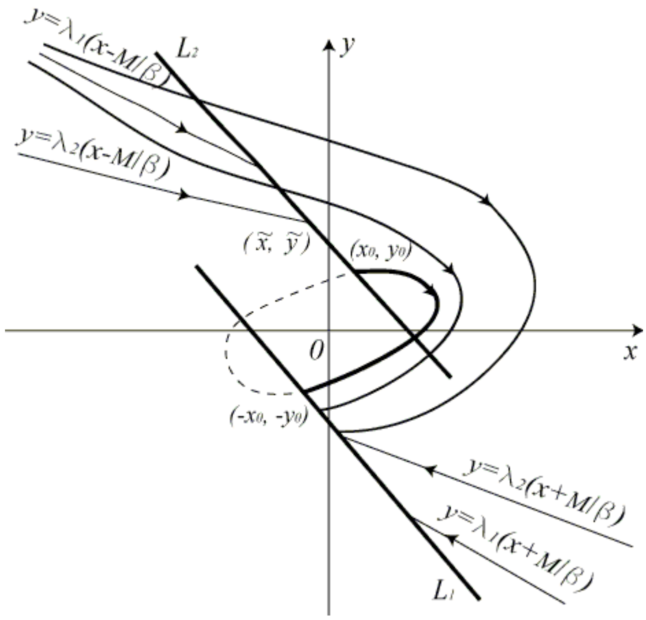

Рис. 2.

Пусть при $t = 0$ решение проходит через точку $(x_0,\ y_0)=\left(\frac{\delta}{am+b},\ \frac{\delta m}{am+b}\right)$, а при некотором $t = t_0 > 0$ - через точку $(-x_0,\ -y_0)$. Тогда

$$c_1 = -\frac{\delta\beta\,(m-\lambda_2) - M\lambda_2\,(am+b)}{\beta\,(\lambda_2-\lambda_1)\,(am+b)}, \quad c_2 = \frac{\delta\beta\,(m-\lambda_1) - M\lambda_1\,(am+b)}{\beta\,(\lambda_2-\lambda_1)\,(am+b)}, \tag{10}$$

и

$$\begin{cases} -\frac{\delta}{am+b} + \frac{M}{\beta} = c_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 e^{\lambda_2 t_0} \\ -\frac{\delta m}{am+b} = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t_0}. \end{cases} \tag{11}$$

Из уравнений (10) и (11) выразим $e^{\lambda_1 t_0}$ и $e^{\lambda_2 t_0}$ через параметр m:

$$e^{\lambda_1 t_0} = \frac{M\lambda_2\,(am+b) + \delta\beta\,(m-\lambda_2)}{M\lambda_2\,(am+b) - \delta\beta\,(m-\lambda_2)}, \quad e^{\lambda_2 t_0} = \frac{M\lambda_1\,(am+b) + \delta\beta\,(m-\lambda_1)}{M\lambda_1\,(am+b) - \delta\beta\,(m-\lambda_1)}. \tag{12}$$

Решение системы (11) $t_0 > 0$ найдется, т.е. предельный цикл существует, если найдется некоторое m, удовлетворяющее условиям (8), которое является решением уравнения (5).

Обозначим выражение в левой части равенства (5) через $\psi_1\,(m)$, а выражение в правой части - через $\psi_2\,(m)$.

Производные по m функций $\psi_1\,(m)$ и $\psi_2\,(m)$ положительны на промежутках, определенных условиями (8), следовательно, сами функции возрастают на этих промежутках. Кроме того,

$$\psi_1(0) > \psi_2(0), \quad \psi_1\left(\frac{\lambda_2(\delta\beta - Mb)}{\delta\beta + a\lambda_2 M}\right) = const, \quad \psi_2\left(\frac{\lambda_2(\delta\beta - Mb)}{\delta\beta + a\lambda_2 M}\right) = +\infty.$$

Поэтому в случае $\delta\beta + a\lambda_2 M > 0$ хотя бы одно решение уравнения (5) на промежутке $\left(0, \ \frac{\lambda_2(\delta\beta - Mb)}{\delta\beta + a\lambda_2 M}\right)$ существует.

В случае $\delta\beta + a\lambda_2 M < 0$ сравним значения $\psi_1(\infty)$ и $\psi_2(\infty)$:

$$\psi_1(m) \underset{m\to\pm\infty}{\to} \left(\frac{Ma + \delta\lambda_2}{Ma - \delta\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}} = q_1, \quad \psi_2(m) \underset{m\to\pm\infty}{\to} \left(\frac{Ma + \delta\lambda_1}{Ma - \delta\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = q_2.$$

Если $q_1 < q_2$, то функции $\psi_1(m)$ и $\psi_2(m)$ пересекаются при $m > 0$; если $q_1 < q_2$, то функции пересекаются при $m < \frac{\lambda_2(\delta\beta - Mb)}{\delta\beta + a\lambda_2 M}$. Значит, и в этом случае существует хотя бы одно решение (5), т.е. система (1) имеет предельный цикл, сшитый из кусков траекторий систем (3) и (4).

2). $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < -b/a$.

В этом случае состояния равновесия систем (3) и (4) также являются устойчивыми узлами, изменяется расположение траекторий вида $y = \lambda_{1,2}(x \pm M/\beta)$ на листах фазовой поверхности.

Обозначим через $(\tilde{x}, \ \tilde{y})$ координаты точки пересечения траектории $y = \lambda_1(x + M/\beta)$, $y > 0$, с лучом L_2, а через $(\bar{x}, \ \bar{y})$ - координаты точки пересечения траектории системы (4), проходящей через точку $(-\delta/b, \ 0)$, и луча L_2.

При $0 < y < \tilde{y}$ решения системы (3) пересекают луч L_2 “сверху вниз”, и предельный цикл может возникнуть только в области, ограниченной траекторией системы (3), проходящей через точку $(\delta/b, \ 0)$ в нижней полуплоскости, симметричной ей траекторией (4), проходящей через точку $(-\delta/b, \ 0)$, и кусками лучей L_1 и L_2 (рис. 3).

Отрезок на луче L_2, соединяющий точки $(\bar{x}, \ \bar{y})$ и $(\delta/b, \ 0)$, по траекториям системы (3) переводится в отрезок меньшей длины на луче L_1. Полученный отрезок по траекториям (4) переводится внутрь первого отрезка. Такое отображение является отображением сжатия и, следовательно, имеет неподвижную точку, которая соответствует предельному циклу системы (1).

3). $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $\lambda_1 < -b/a < \lambda_2$.

В этом случае при всех значениях $y > 0$ решения системы (3) пересекают L_2 “сверху вниз”, и аналогично предыдущему случаю, отрезок на луче L_2, соединяющий точки $(\bar{x}, \ \bar{y})$ и $(\delta/b, \ 0)$, по траекториям системы (3) переводится в отрезок меньшей длины на луче L_1, который по траекториям (4) переводится внутрь первого отрезка. Такое отображение имеет неподвижную точку, которая соответствует предельному циклу системы (1).

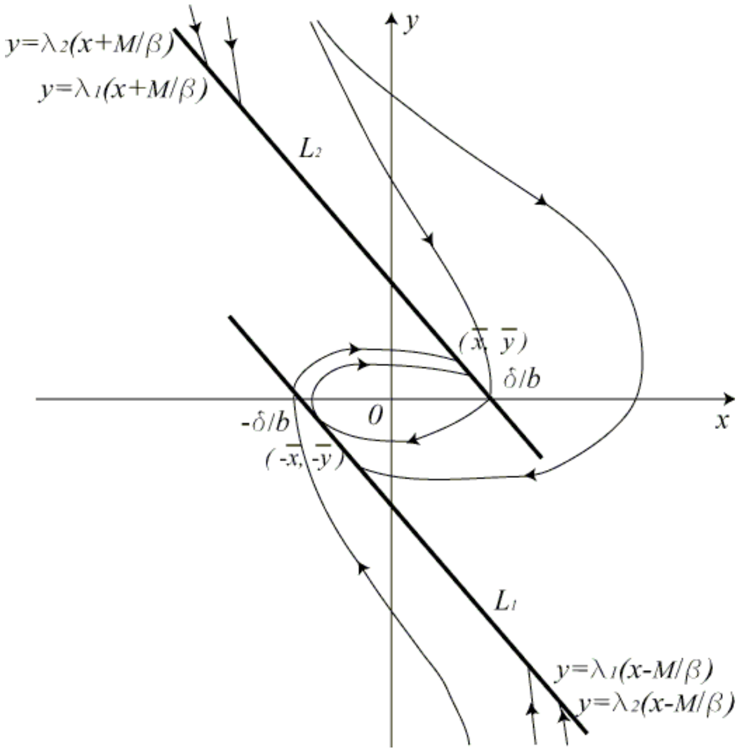

Рис. 3.

4). $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > -b/a$.

Состояния равновесия систем (3) и (4) в этом случае являются устойчивыми вырожденными узлами.

Рассуждения здесь аналогичны случаю **1**, изменяется вид общего решения систем (3) и (4), вычисления и функции $\psi_1(m)$, $\psi_2(m)$.

Решение системы (3) в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} x + M/\beta = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) \\ y = e^{\lambda t}(c_1\lambda + c_2 + c_2\lambda t). \end{cases} \tag{13}$$

Предельный цикл существует, если найдется m, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} m \in \left(0,\ \frac{\lambda(\delta\beta - Mb)}{\delta\beta + a\lambda M}\right), \quad \text{если} \quad \delta\beta + a\lambda M > 0, \\ m \in \left(-\infty,\ \frac{\lambda(\delta\beta - Mb)}{\delta\beta + a\lambda M}\right) \cup (0,\ +\infty), \quad \text{если} \quad \delta\beta + a\lambda M < 0, \end{cases} \tag{14}$$

которое является решением уравнения (6).

Аналогично случаю **1** доказывается, что существует хотя бы одно значение m, удовлетворяющее соотношениям (14), которое является решением уравнения (6), т.е. система (1) имеет предельный цикл.

5). $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < -b/a$.

Состояния равновесия систем (3) и (4) являются устойчивыми вырожденными узлами. Аналогично случаю **2** легко показать, что и в этом случае предельный цикл существует.

6). $\alpha^2 - 4\beta < 0$, $\lambda_{1,\,2} = v \pm iw$, $v = -\alpha/2$, $w = \sqrt{4\beta - \alpha^2}\Big/2$.

В этом случае состояния равновесия систем (3) и (4) являются устойчивыми фокусами. Рассуждения аналогичны случаям **1** и **4**, изменяется вид общего решения систем (3) и (4).

Решение системы (3) имеет вид

$$\begin{cases} x + M/\beta = e^{vt}\left(c_1 \cos wt + c_2 \sin wt\right) \\ y = e^{vt}\left((c_1 v + c_2 w)\cos wt + (c_2 v - c_1 w)\sin wt\right). \end{cases} \tag{15}$$

Предельный цикл существует, если при некотором m из промежутка

$$m \in (-\infty,\ \ \min\left(-b/a,\ -2\beta/\alpha\right)) \cup (0,\ +\infty) \tag{16}$$

существует решение уравнения (7).

Исследуя поведение функций $\psi_1(m)$, $\psi_2(m)$, стоящих в правой и левой частях равенства (7), не трудно показать, что при различных значениях параметров существует хотя бы один корень уравнения (7), удовлетворяющий соотношению (16), т.е. система (1) имеет предельный цикл и в этом случае.

Доказательство теоремы 1 закончено.

Рассмотрим теперь случай, когда особая точка системы (3) входит в область $\sigma \geq -\delta$, а особая точка системы (4) входит в область $\sigma \leq \delta$, т.е. случай $\delta\beta - Mb \geq 0$.

Теорема 2. *Пусть* $b > 0$, $\delta\beta - Mb > 0$. *Тогда*

1) если $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $\lambda_2 > -b/a$, *то стационарное множество* Θ *системы является устойчивым в целом;*

2) если $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $\lambda_2 < -b/a$, *то существует такое значение* δ^*, *что при* $\delta > \delta^*$ *множество* Θ *является устойчивым в целом, а при* $\delta \leq \delta^*$ *система имеет предельный цикл.*

Значение δ^* является решением уравнения

$$\left(\frac{\delta\beta + M\left(2a\lambda_1 + b\right)}{\delta\beta + M\left(2a\lambda_2 + b\right)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}} = -\frac{\delta\beta - Mb}{\delta\beta + M\left(2a\lambda_1 + b\right)}, \tag{17}$$

и $Mb/\beta < \delta^* < -M\left(2a\lambda_2 + b\right)/\beta$;

3) если $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > -b/a$, *то стационарное множество* Θ *системы является устойчивым в целом;*

4) если $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $\lambda < -b/a$, *то существует такое значение* δ^*, *что при* $\delta > \delta^*$ *множество* Θ *является устойчивым в целом, а при* $\delta \le \delta^*$ *система имеет предельный цикл.*

Значение δ^* является решением уравнения

$$\exp\left(-\frac{2Ma\lambda}{\delta\beta + M\left(2a\lambda + b\right)}\right) = -\frac{\delta\beta - Mb}{\delta\beta + M\left(2a\lambda + b\right)}, \tag{18}$$

и $Mb/\beta < \delta^* < -M\left(2a\lambda + b\right)/\beta$;

5) если $\alpha^2 - 4\beta < 0$, $\lambda_{1,2} = v \pm iw$, *то существует такое значение* δ^*, *что при* $\delta > \delta^*$ *множество* Θ *является устойчивым в целом, а при* $\delta \le \delta^*$ *система имеет предельный цикл.*

Значение δ^* является решением уравнения

$$\exp\left(\frac{v}{w}\left(arctg\left(\frac{-2Maw}{\delta\beta + M(2av+b)}\right) + \pi r\right)\right) =$$

$$= \frac{\delta\beta - Mb}{\sqrt{\left(\delta\beta + M\left(2av + b\right)\right)^2 + \left(2Maw\right)^2}} \tag{19}$$

где $r = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta\beta + M\left(2av + b\right) < 0, \\ 1, & \text{если } \delta\beta + M\left(2av + b\right) > 0. \end{cases}$

Доказательство.

1). Пусть $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $\lambda_2 > -b/a$.

Рассмотрим сначала случай $\lambda_2 > \lambda_1 > -b/a$.

Положения равновесия $(\pm M/\beta,\ 0)$ являются устойчивыми узлами и расположены в зоне неоднозначности $-\delta \le \sigma \le \delta$ (рис. 4).

Траектории системы (4), попадая на луч L_2, переходят в траектории системы (3), которые при возрастании времени стремятся к положению равновесия $(-M/\beta,\ 0)$, касаясь направления $y = \lambda_2\left(x + M/\beta\right)$. Траектории (4), не достигающие луча L_2, стремятся при $t \to +\infty$ к положению равновесия $(M/\beta,\ 0)$.

Траектории системы (3) ведут себя аналогично в силу симметричности траекториям (4) относительно начала координат.

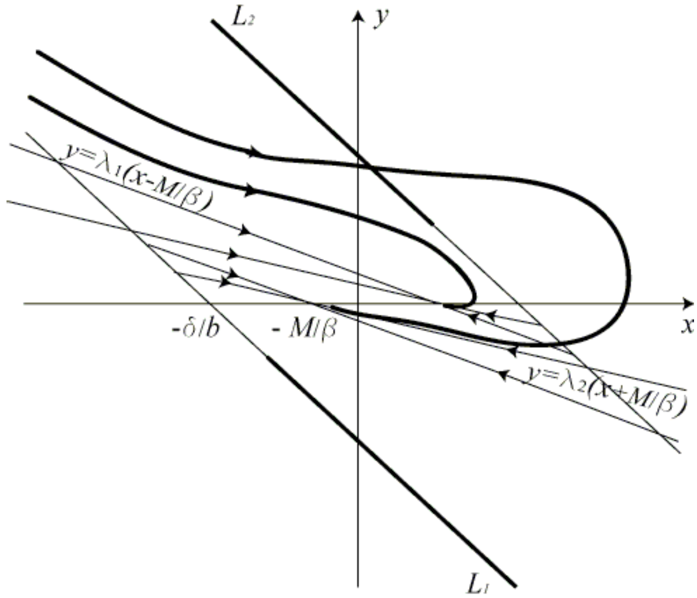

Рис. 4.

Предельных циклов при таком расположении траекторий нет.

Аналогично рассматривается случай $\lambda_1 < -b/a < \lambda_2$.

2). Пусть $\alpha^2 - 4\beta > 0, \;\; \lambda_1 < \lambda_2 < -b/a$.

Один из возможных случаев расположения траекторий системы (1) при таких значениях параметров показан на рис. 5, и в системе может возникнуть предельный цикл.

Обозначим через $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ точку пересечения траектории $y = \lambda_1 (x + M/\beta)$, $y > 0$, и прямой $ay + bx = \delta$, через $(\eta,\ \gamma)$ - координаты начала луча L_2.

В случае $\tilde{y} \le \gamma$ точка $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ лежит вне луча L_2 или совпадает с его началом. И все траектории системы (4), попадающие на луч L_2, переходят в траектории системы (3), которые при возрастании времени стремятся к положению равновесия $(-M/\beta,\ 0)$, касаясь направления $y = \lambda_1 (x + M/\beta)$. Поэтому предельных циклов система (1) не имеет.

Неравенство $\tilde{y} \le \gamma$ равносильно неравенству $\delta\beta + M\,(2a\lambda_2 + b) \ge 0$. Следовательно, при $\delta \ge -\frac{M(2a\lambda_2+b)}{\beta}$ предельных циклов нет, и стационарное множество системы (1) является устойчивым в целом.

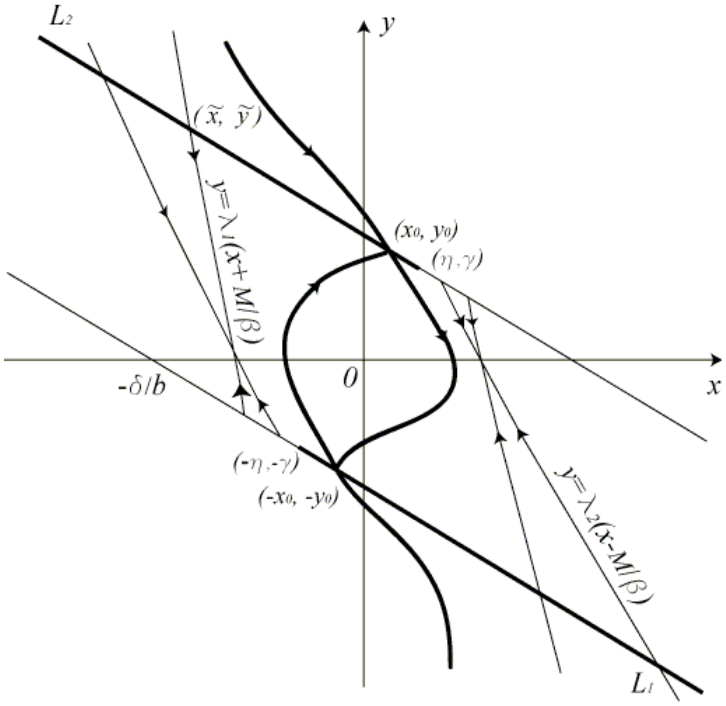

Рис. 5.

В случае $\tilde{y} > \gamma$ система (1) может иметь предельный цикл, если траектория системы (3), проходящая через некоторую точку $(x_0,\ y_0)$ на луче L_2, где $\gamma < y_0 \le \tilde{y}$, пересекает луч L_1 в симметричной точке $(-x_0,\ -y_0)$.

Решение системы (3) имеет вид (9). Легко показать, что любая траектория системы (3), проходящая через точку $(x,\, 0)$ при $x > -M/\beta$, является в полуплоскости $y < 0$ выпуклой вниз кривой и, значит, лежит выше любой своей касательной.

Рассмотрим решение (9), проходящее при $t = 0$ через начало луча L_2.

Пусть при $t = \bar{t}$ решение проходит через точку $(\bar{x}, \bar{y})$, в которой касательная к траектории параллельна прямой $ay + bx = -\delta$.

Для этого решения вычислим c_1 и c_2:

$$c_1 = \frac{\delta\beta + M(2a\lambda_1 + b)}{\lambda_1\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,(a\lambda_1 + b)}, \quad c_2 = -\frac{\delta\beta + M(2a\lambda_2 + b)}{\lambda_2\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,(a\lambda_2 + b)}. \tag{20}$$

Из условия параллельности $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\bar{t}} = \frac{c_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1\bar{t}} + c_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2\bar{t}}}{c_1\lambda_1 e^{\lambda_1\bar{t}} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2\bar{t}}} = -\frac{b}{a}$ находим:

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)\bar{t}} = \frac{\delta\beta + M(2a\lambda_1 + b)}{\delta\beta + M(2a\lambda_2 + b)}. \tag{21}$$

Подставляя в выражение $a\bar{y} + b\bar{x} = c_1(a\lambda_1 + b)e^{\lambda_1\bar{t}} + c_2(a\lambda_2 + b)e^{\lambda_2\bar{t}} - \frac{Mb}{\beta}$ из

(20), (21) найденные значения параметров c_1, c_2 и $\bar{t}$, получим:

$$a\bar{y}+b\bar{x}=-\left(\left(\frac{\delta\beta+M\left(2a\lambda_1+b\right)}{\delta\beta+M\left(2a\lambda_2+b\right)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}\cdot\left(-\frac{\delta\beta+M\left(2a\lambda_1+b\right)}{\beta}\right)+\frac{Mb}{\beta}\right).$$

Если $a\bar{y}+b\bar{x}>-\delta$, то есть выполнено неравенство

$$\left(\frac{\delta\beta+M\left(2a\lambda_1+b\right)}{\delta\beta+M\left(2a\lambda_2+b\right)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}<-\frac{\delta\beta-Mb}{\delta\beta+M\left(2a\lambda_1+b\right)}, \qquad (22)$$

то траектория системы (3), проходящая через точку $(\eta,\ \gamma)$, стремится при $t\to+\infty$ к состоянию равновесия $(-M/\beta,\ 0)$ не достигая прямой $ay+bx=-\delta$. Легко видеть, что в этом случае любая траектория (3), проходящая через точку $(x_0,\ y_0)$ на луче L_2, где $\gamma<y_0\leq\tilde{y}$, тоже стремится к положению равновесия не достигая луча L_1, и предельных циклов система не имеет (рис. 6).

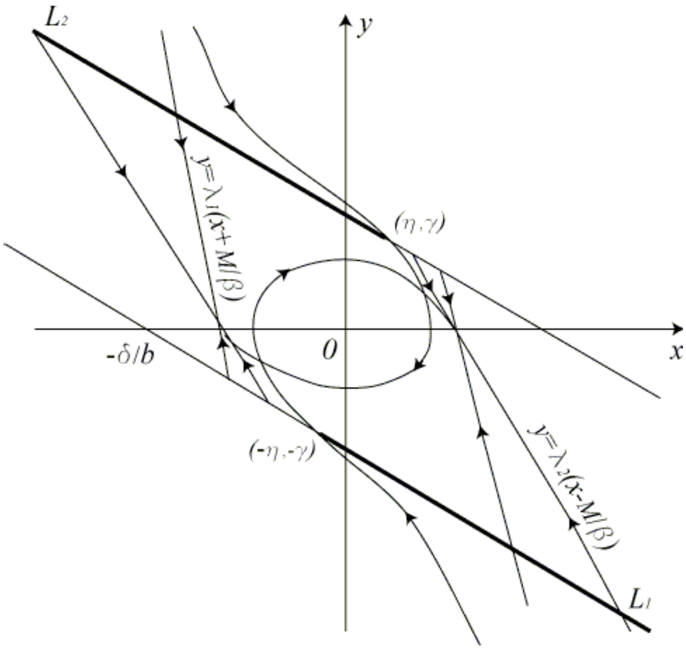

Рис. 6.

Если $a\bar{y}+b\bar{x}=-\delta$, то есть верно равенство (17), то траектория системы (3), проходящая через $(\eta,\ \gamma)$, касается прямой $ay+bx=-\delta$ в точке $(-\eta,\ -\gamma)$, которая является началом луча L_1. Данная траектория и симметричная ей траектория системы (4) образуют сшитый предельный цикл.

Если $a\bar{y}+b\bar{x}<-\delta$, то траектория системы (3), проходящая через точку $(\eta,\ \gamma)$, попадает на луч L_1 в некоторой точке $(-x,-y)$, где $-\gamma>-y\geq-\tilde{y}$.

Симметричная ей траектория системы (4) проходит через точку $(-\eta,\ -\gamma)$ и попадает на луч L_2 в точке (x, y).

Траектория системы (3), которая касается луча L_1 в точке $(-\eta,\ -\gamma)$, пересекает L_2 в некоторой точке (x', y'), где $\gamma < y' \leq \tilde{y}$.

Если (x', y') лежит на луче L_2 выше точки (x, y), то отрезок на луче L_2, соединяющий точки (x, y) и $(\eta,\ \gamma)$, по траекториям системы (3) при возрастании времени переводится в отрезок меньшей длины на луче L_1, а тот в свою очередь по траекториям (4) переводится внутрь первого отрезка. Такое отображение является отображением сжатия и, следовательно, имеет неподвижную точку, которая соответствует устойчивому предельному циклу системы (1) (рис.7).

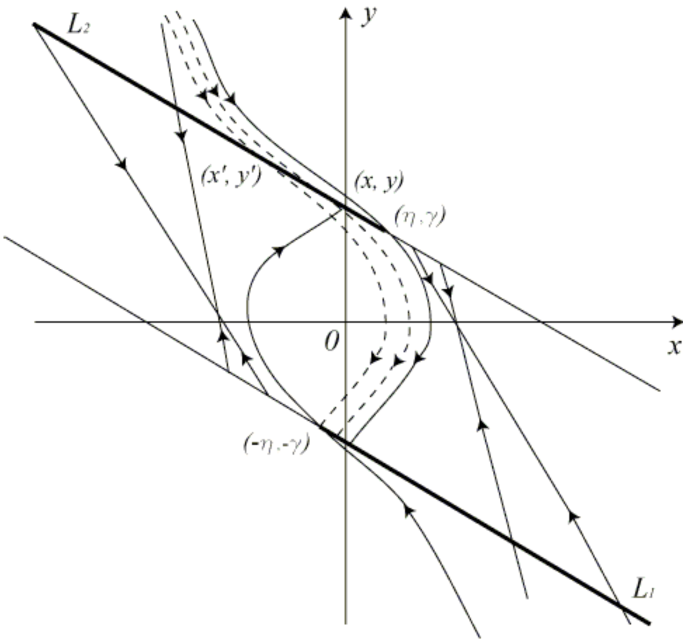

Рис. 7

Если (x', y') лежит на луче L_2 ниже точки (x, y), то отрезок на луче L_2, соединяющий точки (x, y) и $(\eta,\ \gamma)$, по траекториям системы (4) при убывании времени переводится в отрезок меньшей длины на луче L_1, а тот в свою очередь по траекториям (3) переводится внутрь первого отрезка. Такое отображение также имеет неподвижную точку, которая соответствует неустойчивому предельному циклу системы (1).

Покажем, что существует единственное $\delta = \delta^*$, которое удовлетворяет равенству (17).

Пусть $\psi_1(\delta) = \left(\frac{\delta\beta + M(2a\lambda_1 + b)}{\delta\beta + M(2a\lambda_2 + b)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}$, $\psi_2(\delta) = -\frac{\delta\beta - Mb}{\delta\beta + M(2a\lambda_1 + b)}$.

Легко показать, что при $\frac{Mb}{\beta} < \delta < -\frac{M(2a\lambda_2+b)}{\beta}$ функция $\psi_1(\delta)$ убывает, а функция $\psi_2(\delta)$ возрастает, $\psi_1\left(\frac{Mb}{\beta}\right) > \psi_2\left(\frac{Mb}{\beta}\right) = 0$,
$\psi_2\left(-\frac{M(2a\lambda_2+b)}{\beta}\right) > \psi_1\left(-\frac{M(2a\lambda_2+b)}{\beta}\right) = 0$. Следовательно, существует единственное δ, которое является решением уравнения (17) на указанном промежутке.

При $\delta > \delta^*$ выполнено условие (22), и траектории системы при $t \to +\infty$ стремятся к положениям равновесия $(\pm M/\beta,\ 0)$. При $\delta \leq \delta^*$ в системе существует предельный цикл.

3). $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > -b/a$.

Положения равновесия в этом случае являются вырожденными устойчивыми узлами. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям пункта **1**, легко показать, что предельных циклов при таком расположении траекторий нет.

4). $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < -b/a$.

Рассуждения здесь аналогичны случаю **2**, изменяется вид общего решения систем (3) и (4).

Пусть $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ - точка пересечения траектории $y = \lambda(x + M/\beta)$, $y > 0$, и прямой $ay + bx = \delta$.

В случае $\tilde{y} \leq \gamma$, т.е. при $\delta \geq -\frac{M(2a\lambda+b)}{\beta}$ предельных циклов система (1) не имеет.

В случае $\tilde{y} > \gamma$ система (1) может иметь предельный цикл, если траектория системы (3), проходящая через точку $(x_0,\ y_0)$ на луче L_2, где $\gamma < y_0 \leq \tilde{y}$, пересекает луч L_1 в симметричной точке $(-x_0,\ -y_0)$.

Решение системы (3) в этом случае имеет вид (13). Любая траектория системы (3), проходящая через точку $(x, 0)$, где $x > -M/\beta$, является в полуплоскости $y < 0$ выпуклой вниз.

Пусть решение (13), проходящее при $t = 0$ через начало луча L_2, при $t = \bar{t}$ проходит через точку $(\bar{x}, \bar{y})$, в которой касательная к траектории параллельна прямой $ay + bx = -\delta$.

Для этого решения

$$c_1 = \frac{(\delta\beta + Mb)(2a\lambda + b) + 2Ma^2\lambda^2}{\lambda^2 (a\lambda + b)^2}, \quad c_2 = -\frac{\delta\beta + M(2a\lambda + b)}{\lambda(a\lambda + b)}. \tag{23}$$

$$\bar{t} = -\frac{2Ma}{\delta\beta + M(2a\lambda + b)}, \tag{24}$$

$$a\bar{y}+b\bar{x}=\exp\left(-\frac{2Ma\lambda}{\delta\beta+M\left(2a\lambda+b\right)}\right)\cdot\frac{\delta\beta+M\left(2a\lambda+b\right)}{\beta}-\frac{Mb}{\beta}.$$

Если $a\bar{y}+b\bar{x}>-\delta$, то есть

$$\exp\left(-\frac{2Ma\lambda}{\delta\beta+M\left(2a\lambda+b\right)}\right)<-\frac{\delta\beta-Mb}{\delta\beta+M\left(2a\lambda+b\right)}, \tag{25}$$

то траектория, проходящая через точку $(\eta,\,\gamma)$, стремится при $t\to+\infty$ к состоянию равновесия $(-M/\beta,\;0)$ не достигая прямой $ay+bx=-\delta$, и предельных циклов в системе нет.

Если $a\bar{y}+b\bar{x}=-\delta$, то есть выполнено равенство (18), то траектория, проходящая через точку $(\eta,\,\gamma)$, касается прямой $ay+bx=-\delta$ в точке $(\bar{x},\bar{y})=(-\eta,\;-\gamma)$, которая является началом луча L_1. Данная траектория системы (3) и симметричная ей траектория системы (4) образуют предельный цикл.

Если $a\bar{y}+b\bar{x}<-\delta$, то рассуждениями, аналогичными рассуждениям в случае **2**, показываем, что в системе существует предельный цикл.

Аналогично доказываем, что и в этом случае существует единственное $\delta=\delta^*$, которое является решением уравнения (18). При $\delta>\delta^*$ выполнено условие (25), и траектории (1) при $t\to+\infty$ стремятся к положениям равновесия системы $(\pm M/\beta,\;0)$. При $\delta\le\delta^*$ в системе (1) существует предельный цикл.

5). $\alpha^2-4\beta<0,\quad\lambda_{1,2}=v\pm iw.$

Положения равновесия в этом случае являются устойчивыми фокусами. Рассуждения здесь аналогичны случаям **2** и **4**, изменяется вид общего решения систем (3) и (4), и изменяются вычисления.

Решение системы (3) в этом случае имеет вид (15). Для решения (15), проходящего при $t=0$ через начало луча L_2, а при $t=\bar{t}$ - через точку $(\bar{x},\bar{y})$, находим:

$$c_1=\frac{\left(\delta\beta+Mb\right)\left(2av+b\right)+2Ma^2\beta}{\beta\left(a^2\beta-\alpha ab+b^2\right)},$$

$$c_2=\frac{\delta\beta\left(aw^2-v\left(av+b\right)\right)-M\left(2av+b\right)\left(aw^2+v\left(av+b\right)\right)}{w\beta\left(a^2\beta-\alpha ab+b^2\right)}.$$

$$tgw\bar{t}=-\frac{2Maw}{\delta\beta+M(2av+b)}.$$

Следовательно, $\cos w\bar{t}=-\frac{\delta\beta+M(2av+b)}{\sqrt{\left(\delta\beta+M(2av+b)\right)^2+(2Maw)^2}}$,

$a\bar{y}+b\bar{x}=-e^{v\bar{t}}\cdot\frac{\sqrt{\left(\delta\beta+M(2av+b)\right)^2+(2Maw)^2}}{\beta}-\frac{Mb}{\beta}$, где

$$\bar{t} = \frac{1}{w}\left(arctg\left(-\frac{2Maw}{\delta\beta+M(2av+b)}\right)+\pi r\right),$$

$$r = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; \delta\beta + M\left(2av+b\right) < 0, \\ 1, & \text{если} \;\; \delta\beta + M\left(2av+b\right) > 0. \end{cases}$$

Если $a\bar{y} + b\bar{x} = -\delta$, то есть выполнено равенство (19), то траектория, проходящая через точку $(\eta,\ \gamma)$, касается прямой $ay+bx=-\delta$ в точке $(\bar{x},\bar{y}) = (-\eta,\ -\gamma)$. Данная траектория системы (3) и симметричная ей траектория системы (4) образуют предельный цикл.

Если $a\bar{y} + b\bar{x} < -\delta$, то в системе существует предельный цикл; если $a\bar{y} + b\bar{x} > -\delta$, то система не имеет предельных циклов и стационарное множество системы является устойчивым в целом.

Аналогично доказывается, что существует единственное $\delta = \delta^*$, которое удовлетворяет равенству (19). При $\delta > \delta^*$ траектории (1) при $t \to +\infty$ стремятся к положениям равновесия системы $(\pm M/\beta,\ 0)$. При $\delta \leq \delta^*$ в системе (1) существует предельный цикл.

Доказательство теоремы 2 закончено.

Теорема 3. *Пусть* $Mb - \delta\beta = 0$ $(b > 0)$. *Тогда*

1) если $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $\lambda_2 > -b/a$, *то существует замкнутый контур, "сшитый" из кусков траекторий и особых точек систем (3) и (4);*

2) если $\alpha^2 - 4\beta > 0$, $\lambda_2 < -b/a$, *то в системе существует предельный цикл;*

3) если $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > -b/a$, *то существует замкнутый контур, "сшитый" из кусков траекторий и особых точек систем (3) и (4);*

4) если $\alpha^2 - 4\beta = 0$, $\lambda < -b/a$, *то в системе существует предельный цикл;*

5) если $\alpha^2 - 4\beta < 0$, $\lambda_{1,2} = v \pm iw$, *то существует предельный цикл или замкнутый контур, "сшитый" из кусков траекторий и особых точек систем (3) и (4).*

Эту теорему легко доказать, изучив расположение траекторий системы (1) в каждом из перечисленных случаев. Здесь особая точка $(M/\beta,\ 0)$ системы (4) совпадает с точкой $(\delta/b,\ 0)$, которая является началом луча L_2. И особая точка $(-M/\beta,\ 0)$ системы (3) совпадает с началом луча L_1 - точкой $(-\delta/b,\ 0)$.

Заметим, что результаты теоремы 3 согласуются с результатами теорем 1 и 2.

Теорема 4. *Пусть* $b \leq 0$. *Тогда существует такое значение* δ^*, *что при* $\delta > \delta^*$ *стационарное множество* Θ *системы является устойчивым в целом, а при* $\delta \leq \delta^*$ *в системе существует предельный цикл. При этом*

1) если $\alpha^2 - 4\beta > 0$, *то* δ^* *является решением уравнения (17) и* $0 < \delta^* < -M\,(2a\lambda_2 + b)/\beta$;

2) если $\alpha^2 - 4\beta = 0$, *то* δ^* *является решением уравнения (18) и* $0 < \delta^* < -M\,(2a\lambda + b)/\beta$;

3) если $\alpha^2 - 4\beta < 0$, $\lambda_{1,2} = v \pm iw$, *то* δ^* *является решением уравнения (19).*

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2.

В случае $b < 0$ меняется наклон лучей L_1 и L_2. Особые точки систем (3) и (4) лежат в зоне неоднозначности $-\delta \leq \sigma \leq \delta$, если $\delta\beta + Mb \geq 0$, и вне этой области, если $\delta\beta + Mb < 0$.

В случае $b = 0$ лучи L_1 и L_2 параллельны оси $y = 0$, особые точки входят в зону неоднозначности.

В заключение покажем, что частотный критерий абсолютной устойчивости, полученный в работе [2], дает лишь достаточные условия устойчивости в целом стационарного множества $\theta = (-M/\beta; 0) \cup (M/\beta; 0)$ системы (1) с нелинейностью вида (2).

Согласно частотному критерию [2] множество θ является устойчивым в целом, если существуют такие числа $\tau \geq 0$ и $\delta > 0$, что выполнено неравенство

$$\pi(\omega,\ \tau) \geq \delta\,|W(i\omega)|^2 \tag{26}$$

для всех $\omega > 0$, где $\pi(\omega,\ \tau) = Re\left\{W(i\omega)\left(1 - \frac{\tau}{i\omega}\right)\right\}$, $W(p) = \frac{ap+b}{p^2+\alpha p+\beta}$ — передаточная функция системы (1).

В случае $b = 0$ неравенство (26) имеет вид

$$a(\alpha + \tau)\omega^2 - \tau a\beta \ \geq\ \delta\left(a^2\omega^2 + b^2\right). \tag{27}$$

Очевидно, что при любых значениях $\tau \geq 0$ и $\delta > 0$ неравенство (27) не может быть выполнено для всех $\omega > 0$, т.к. $\tau a\beta \geq 0$. Следовательно, в случае $b = 0$ частотный критерий не может быть применим к системе вида (1). Но по теореме 4 мы можем найти области в пространстве параметров, в которых множество θ является устойчивым в целом множеством системы (1).

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., ГИФМЛ, 1959, 916 с.

2. Барабанов Н.Е., Якубович В.А. Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью. // Автоматика и телемеханика. 1979, № 12, с. 5-11.

3. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., Наука, 1978, 400 с.

4. Зубов В.И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л., Судостроение, 1966, 352 с.

5. Камачкин А.М. Существование и единственность периодического решения релейной системы с гистерезисом. // Дифференциальные уравнения. 1972, т. VIII, № 8, с. 1505-1506.

6. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М., Наука, 1977, 565 с.

7. Якубович В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. // ДАН СССР. 1963, т. 149, № 2, с. 288-291.

8. Якубович В.А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями. // Автоматика и телемеханика. 1965, № 9, с. 753-763.