ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

УДК 517.925

Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих шестимерные алгебры Ли операторов

А. А. Гайнетдинова

Уфимский государственный авиационный технический университет
Научно-исследовательская лаборатория
“Групповой анализ математических моделей естествознания, техники и технологий”

Аннотация

Предложена вариация алгоритма интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих алгебры Ли операторов. Алгоритм основан на представлении систем через инварианты и применении оператора инвариантного дифференцирования. Рассмотрены случаи, когда системы двух ОДУ третьего порядка и системы трех ОДУ второго порядка, допускающие шестимерные алгебры Ли, представимы через инварианты допускаемой алгебры. Приведены модификации алгоритма для применения к рассматриваемым системам ОДУ. Построены примеры использования данного алгоритма.

Ключевые слова: системы ОДУ, шестимерные алгебры Ли операторов, оператор инвариантного дифференцирования, инвариантное представление систем

Abstract

A variation of the algorithm for integrating systems of ordinary differential equations admitting Lie algebras of operators is suggested. The algorithm is based on the invariant representation of systems and the application of the operator of invariant differentiation. We consider cases when systems of two third-order ODEs and systems of three second-order ODEs that admit six-dimensional Lie algebras are represented invariants of an admitted Lie algebras. Modifications of the algorithm for application to the considered systems of ODEs are given. Examples of using this algorithm are constructed.

Keywords: systems of ODEs, six-dimensional Lie algebras of operators, operator of invariant differentiation, invariant representation of systems

1 Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) часто встречаются в прикладной математике для моделирования различных явлений и процессов макромира. Аналитическое решение таких систем бывает полезно для исследования корректности построенной модели и ее численного решения. Однако иногда получение аналитического решения представляет собой нетривиальную задачу. Групповой анализ дифференциальных уравнений предлагает широкий выбор инструментов для исследования и интегрирования ОДУ и их систем.

Наиболее изученными являются системы двух ОДУ второго порядка. В последнее время многие работы посвящены исследованию таких систем методами группового анализа (см., например, [1] - [5]). Предложенные в работах [1, 3, 4] алгоритмы интегрирования систем являются модификациями алгоритма последовательного понижения порядка. Важным моментом для применения алгоритма является разрешимость допускаемой алгебры Ли.

Алгоритм, предложенный в [5], также является модификацией алгоритма последовательного понижения порядка, но вопрос разрешимости допускаемой алгебры Ли не является принципиальным. Для алгоритма используется инвариантное представление систем, допускающих четырехмерные алгебры Ли операторов. Исследование матриц, составленных из координат базисных инфинитезимальных операторов и их продолжений на первые и вторые производные, показало, что все системы двух ОДУ второго порядка с четырьмя точечными симметриями можно разбить на 3 класса. Первый класс состоит из систем, допускающих алгебры Ли, имеющих два дифференциальных инварианта второго порядка и один дифференциальный инвариант первого порядка. Второй класс состоит из систем, допускающих алгебры Ли, имеющих два дифференциальных инварианта второго порядка и один алгебраический инвариант (инвариант нулевого порядка). В этих случаях при помощи оператора инвариантного дифференцирования (см. [6]) можно построить первый интеграл системы и проинтегрировать систему в квадратурах. Третий класс состоит из систем, не имеющих инвариантного представления. Это системы, одно из уравнений которых является особым многообразием, на котором меняется ранг матрицы, составленной из координат вторых продолжений инфинитезимальных операторов допускаемой алгебры. Показано, что для таких систем найдется такая невырожденная замена переменных, в которых уравнения системы разделяются и интегрируются в квадратурах.

Таким образом, предложенный в [5] алгоритм является наиболее удобным для интегрирования систем двух ОДУ второго порядка. Возникает вопрос об универсальности построенного алгоритма и его обобщении для интегрирования систем более высокого порядка.

Данная статья построена следующим образом. Вначале рассматривается вопрос о построении систем ОДУ, инвариантных относительно шестимерных алгебр Ли операторов. Далее проверяется предположение, что для систем ОДУ, допускающих шестимерные алгебры Ли операторов, алгоритм, предложенный в [5], может быть обобщен, а также рассматривается вопрос о построении оператора инвариантного дифференцирования конкретного вида. Построены примеры использования предложенного алгоритма.

2 Системы ОДУ, инвариантные относительно шестимерных групп преобразований

2.1 Системы двух ОДУ третьего порядка

Рассмотрим систему двух ОДУ третьего порядка вида

$$\begin{cases} \dddot{x} = f(t,x,y,\dot{x},\dot{y},\ddot{x},\ddot{y}), \\ \dddot{y} = g(t,x,y,\dot{x},\dot{y},\ddot{x},\ddot{y}), \end{cases} \tag{1}$$

которая допускает шестимерную алгебру Ли, образованную операторами

$$X_i = \tau_i(t,x,y)\frac{\partial}{\partial t} + \xi_i(t,x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y},\ \ i = 1,\dots,6. \tag{2}$$

Инвариантное представление системы (1) можно получить, найдя инварианты алгебры (2). Для этого нужно решить систему

$$X_{i,k}\left(I_k\right) = 0,\ \ i = 1,\dots,6,\ \ k = 0,1,2,3, \tag{3}$$

где $X_{i,k}$ — продолжение оператора X_i на производные k-го порядка, I_k — функция от независимой переменной t, зависимых переменных x, y и их производных до k-го порядка. Также введем в рассмотрение матрицы Λ_k, состоящие из координат инфинитезимальных операторов и их продолжений на k-ые производные, $k = 0, 1, 2, 3$.

Для каждой шестимерной алгебр Ли дифференциальных операторов в пространстве четырех переменных в зависимости от рангов матриц Λ_k, $k = 0, 1, 2, 3$, можно получить либо систему одного из видов, указанных в Таблице 1, либо систему, где хотя бы одно из уравнений имеет порядок ниже 3.

Таблица 1: Виды инвариантных систем двух ОДУ 3-го порядка

No.	Ранги матриц				Количество инвариантов				Инвариантная система
	Λ_0	Λ_1	Λ_2	Λ_3	I_0	I_1	I_2	I_3	
1	3	5	6	6	0	0	1	2	$I_{3,1} = F(I_2)$, $I_{3,2} = G(I_2)$
2	3	5	5	6	0	0	2	1	особый вид
3	3	4	6	6	0	1	0	2	$I_{3,1} = F(I_1)$, $I_{3,2} = G(I_1)$
4	3	4	5	6	0	1	1	1	особый вид
5	3	3	5	6	0	2	0	1	особый вид
6	2	4	6	6	1	0	0	2	$I_{3,1} = F(I_0)$, $I_{3,2} = G(I_0)$
7	2	4	5	6	1	0	1	1	особый вид
8	2	3	6	6	1	1	0	1	особый вид
9	1	3	6	6	2	0	0	1	особый вид

Примечание. I_0 – алгебраический инвариант; I_1 – дифференциальный инвариант первого порядка; I_2 – дифференциальный инвариант второго порядка; I_3 – дифференциальный инвариант третьего порядка.

Системы вида 1,3 и 6 из Таблицы 1 полностью представляются через инварианты. Остальные случаи возникают тогда, когда ранг матрицы Λ_3 меняется на каком-либо многообразии. Тогда одно из уравнений представимо через инварианты, а другим уравнением системы является многообразие, на котором меняется ранг матрицы Λ_3. В дальнейшем в данной работе будем рассматривать только случаи 1, 3 и 6.

2.2 Системы трех ОДУ второго порядка

Рассмотрим систему трех ОДУ второго порядка вида

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \ddot{y} = g(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \ddot{z} = h(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{cases} \tag{4}$$

которая допускает шестимерную алгебру Ли, образованную операторами

$$X_i = \tau_i(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial t} + \xi_i(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_i(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial y}, \ i = 1, \ldots, 6. \tag{5}$$

Аналогично предыдущему случаю инвариантное представление системы (4) можно получить, найдя инварианты алгебры (5). Для этого нужно решить систему (3) для случая операторов (5). Также введем в рассмотрение матрицы M_k, $k = 0, 1, 2$ состоящие из координат инфинитезимальных операторов и их продолжений на первые и вторые производные.

Для каждой шестимерной алгебр Ли дифференциальных операторов в пространстве трех переменных в зависимости от рангов матриц M_k можно получить либо систему одного из видов, указанных в Таблице 2, либо систему, где порядок хотя бы одного из уравнений уравнений порядка меньше, чем 2.

Таблица 2: Виды инвариантных систем трех ОДУ 2-го порядка

No.	Ранги матриц			Количество инвариантов			Инвариантная система
	M_0	M_1	M_2	I_0	I_1	I_2	
1	4	6	6	0	1	3	$I_{2,1} = F(I_1),\ I_{2,2} = G(I_1),\ I_{2,3} = H(I_1)$
2	4	5	6	0	2	2	особый вид
3	4	4	6	0	3	1	особый вид
4	3	6	6	1	0	3	$I_{2,1} = F(I_0),\ I_{2,2} = G(I_0),\ I_{2,3} = H(I_0)$
5	3	5	6	1	1	2	особый вид
6	3	4	6	1	2	1	особый вид
7	3	4	5	1	2	2	особый вид
8	2	5	6	2	0	2	особый вид
9	2	4	6	2	1	1	особый вид
10	1	4	6	3	0	1	особый вид

Примечание. I_0 – алгебраический инвариант; I_1 – дифференциальный инвариант первого порядка; I_2 – дифференциальный инвариант второго порядка.

Системы вида 1 и 4 из Таблицы 2 полностью представляются через инварианты. Остальные случаи возникают тогда, когда ранг матрицы M_2 меняется на каком-либо многообразии. Тогда одно или два уравнения представимы через инварианты, а оставшиеся уравнения системы возникают из многообразия, на котором меняется ранг матрицы M_2. В дальшейшем в данной работе будем рассматривать только случаи 1 и 4.

3 Интегрирование систем, допускающих шестимерные алгебры Ли

Важным понятием в интегрировании дифференциальных уравнений является понятие оператора инвариантного дифференцирования (см. [6]). Это оператор, который из инварианта k-го порядка порождает инвариант более высокого порядка. Если рассматривается случай обыкновенных дифференциальных уравнений, то этот оператор имеет вид

$$\lambda(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ldots) D_t,$$

где D_t — оператор полного дифференцирования, $\vec{x}$ – вектор зависимых переменных, $\dot{\vec{x}}$ – вектор первых производных и т.д. В [6] показано, что любой оператор λD_t, который коммутирует с каждым оператором $X_{i,k}$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ алгебры Ли группы G, т.е.

$$\left[X_{i,k}, \lambda D_t\right] = 0,$$

является оператором инвариантного дифференцирования. Следовательно, функцию λ оператора инвариантного дифференцирования можно найти из уравнений

$$X_{i,k}\left(\lambda\right) - \lambda D_t\left(\xi_i\right) = 0, \ \ i = 1, \ldots, 6, \tag{6}$$

где k — требуемый порядок производных. Т.е. в качестве λ можно взять любое частное решение системы уравнений (6).

3.1 Интегрирование систем двух ОДУ третьего порядка

Рассмотрим систему, допускающую алгебру Ли с басисными операторами, которые удовлетворяют случаю 1 из Таблицы 1. Тогда инвариантное представление системы имеет вид

$$I_{3,1} = F(I_2), \ I_{3,2} = G(I_2). \tag{7}$$

Применение оператора инвариантного дифференцирования к дифференциальному инварианту второго порядка дает равенство:

$$\lambda D_t(I_2) = \Omega\left(I_2, I_{3,1}, I_{3,2}\right).$$

Учитывая (7), получим

$$\lambda D_t(I_2)|_{(7)} = \Psi(I_2)$$

или

$$\frac{dI_2}{\Psi(I_2)} = \frac{dt}{\lambda}. \tag{8}$$

Очевидно, левая часть этого уравнения интегрируема в квадратурах при любой замене переменных. Построим такую функцию λ, что $\lambda = \frac{1}{D_t\Phi}$, где $\Phi = \Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ldots)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Тогда правая часть также будет интегрируема в квадратурах. Таким образом, мы понизили порядок системы и к получившимся уравнениям мы можем заново применить этот алгоритм.

Аналогичные рассуждения можно привести и для случаев 3 и 6 из Таблицы 1.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть система (1) допускает алгебру Ли с базисом, состоящим из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ \ X_2 = t\frac{\partial}{\partial t},\ \ X_3 = \frac{\partial}{\partial x},\ \ X_4 = x\frac{\partial}{\partial x},\ \ X_5 = \frac{\partial}{\partial y},\ \ X_6 = y\frac{\partial}{\partial y},$$

то ее инвариантное представление имеет вид (6), где

$$I_2 = \frac{\dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}\ddot{x}},\ \ I_{3,1} = \frac{\dot{x}\dddot{x}}{\ddot{x}^2},\ \ I_{3,2} = \frac{\dot{x}^2\dddot{y}}{\dot{y}\ddot{x}^2}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования возьмем в следующем виде:

$$\frac{\dot{x}}{\ddot{x}}D_t.$$

Уравнение (8) имеет вид

$$\frac{dI_2}{\Phi(I_2)} = \frac{\ddot{x}dt}{\dot{x}}.$$

Отсюда получим,

$$I_2 = \psi(C_1 + \ln\dot{x}).$$

Т.е. система сводится к следующей.

$$\begin{aligned}\tfrac{\dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}\ddot{x}} &= \psi(C_1 + \ln\dot{x}),\\ \tfrac{\dot{x}\dddot{x}}{\ddot{x}^2} &= \mu(C_1 + \ln\dot{x}).\end{aligned}$$

Эта система допускает операторы

$$\frac{\partial}{\partial t},\ \ \frac{\partial}{\partial x},\ \ \frac{\partial}{\partial y},\ \ t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x},\ \ y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Для инвариантного представления полученной системы будем использовать следующие инварианты алгебры:

$$\ln\dot{x},\ \ \frac{\ddot{y}}{\dot{y}\ddot{x}},\ \ \frac{\dddot{x}}{\ddot{x}^2}.$$

Для данной алгебры можно построить следующий оператор инвариантного дифференцирования:

$$-\frac{\ddot{x}}{\dddot{x}}D_t.$$

Повторяя процедуру, описанную выше, получим систему

$$\begin{aligned}\tfrac{\dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}\ddot{x}} &= \psi(C_1 + \ln\dot{x}),\\ \ln\ddot{x} &= \alpha(\ln\dot{x}, C_1, C_2).\end{aligned}$$

Т.е. получили систему двух ОДУ второго порядка. Она допускает операторы

$$\frac{\partial}{\partial t},\ \ \frac{\partial}{\partial x}\ \ \frac{\partial}{\partial y},\ \ y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Интегрирование таких систем рассмотрено в [5]. ■

Пример 2. Пусть система (1) допускает алгебру Ли с базисными операторами

$$\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{y^2}{2}\frac{\partial}{\partial y},$$

то ее инвариантное представление имеет вид

$$I_{3,1} = F(I_1),\ \ I_{3,2} = G(I_1), \tag{9}$$

где

$$I_1 = \dot{x},\ \ I_{3,1} = \frac{\dddot{x}}{\ddot{x}^2},\ \ I_{3,2} = \frac{2\dot{y}\dddot{y} - 3\ddot{y}^2}{2\dot{y}^2\ddot{x}^2}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования имеет вид

$$\frac{\ddot{x}}{\dddot{x}}D_t.$$

Из уравнения типа (8) получим

$$\frac{\ddot{x}}{\dddot{x}} D_t(\dot{x}) = F(\dot{x}).$$

И исходная система сведется к следующему виду

$$\begin{aligned} &\ln \ddot{x} = H(\dot{x}, C_1), \\ &\tfrac{2\dot{y}\dddot{y} - 3\ddot{y}^2}{2\dot{y}^2\ddot{x}^2} = G(\dot{x}). \end{aligned}$$

Система допускает 5 операторов:

$$\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{y^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования можно выбрать вида D_t и свести систему к виду

$$\begin{aligned} &\dot{x} = P(t, C_1, C_2), \\ &\tfrac{2\dot{y}\dddot{y} - 3\ddot{y}^2}{2\dot{y}^2} = Q(t, C_1, C_2). \end{aligned}$$

Эта система допускает 4 оператора:

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{y^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Повторив процедуру еще раз, мы получим

$$\begin{aligned} &x = U(t, C_1, C_2, C_3), \\ &\tfrac{2\dot{y}\dddot{y} - 3\ddot{y}^2}{2\dot{y}^2} = Q(t, C_1, C_2). \end{aligned}$$

Другими словами, мы свели задачу интегрирования системы двух ОДУ третьего порядка к задаче интегрирования одного уравнения третьего порядка

$$\frac{2\dot{y}\dddot{y} - 3\ddot{y}^2}{2\dot{y}^2} = Q(t, C_1, C_2),$$

допускающему трехмерную неразрешимую алгебру Ли операторов с базисом

$$\frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{y^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Это уравнение можно представить в виде системы уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &\dot{y} = v, \\ &\tfrac{\dot{v}}{v} = w, \\ &\dot{w} - \tfrac{1}{2}w = Q(t, C_1, C_2). \end{aligned}$$

Следовательно, система интегрируема в квадратурах. ■

Пример 3. Пусть система (1) допускает алгебру Ли с базисными операторами

$$\frac{\partial}{\partial t},\ x\frac{\partial}{\partial t},\ y\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ x\frac{\partial}{\partial x},\ y\frac{\partial}{\partial x},$$

то ее инвариантное представление имеет вид

$$I_{3,1} = F(I_0),\ I_{3,2} = G(I_0), \tag{10}$$

где

$$I_0 = y,\ I_{3,1} = \frac{\dddot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dddot{y}}{\dot{y}^3(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})},\ I_{3,2} = \frac{\dddot{x}\dot{y} - \dot{x}\dddot{y}}{\dot{y}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})} + \frac{3\ddot{y}}{\dot{y}^2}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования имеет вид

$$\frac{\dot{y}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{\dot{y}(\dddot{x}\dot{y} - \dot{x}\dddot{y}) - 3\ddot{y}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})}D_t.$$

Из уравнения типа (8) получим

$$\frac{\dot{y}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{\dot{y}(\dddot{x}\dot{y} - \dot{x}\dddot{y}) - 3\ddot{y}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})}D_t(I_0) = \frac{1}{G(I_0)}$$

Проинтегрировав это выражение, мы понизим порядок исходной системы, которая сведется к следующему виду

$$\begin{array}{l} \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{y}^3} = H(y, C_1), \\ \frac{\dddot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dddot{y}}{\dot{y}^3(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})} = F(y). \end{array}$$

Эта система допускает 5 операторов

$$\frac{\partial}{\partial t},\ x\frac{\partial}{\partial t},\ y\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Следовательно, данную процедуру можно повторить с оператором инвариантного дифференцирования

$$\frac{(\dot{t}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})^2}{\dot{y}(\dddot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dddot{y})}D_t$$

и получить систему вида

$$\begin{array}{l} \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{y}^3} = H(y, C_1), \\ \frac{\ddot{y}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} = K(y, C_1, C_2). \end{array}$$

Эта система допускает 4 оператора

$$\frac{\partial}{\partial t},\ y\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Интегрирование таких систем рассмотрено в [5]. ■

3.2 Интегрирование систем трех ОДУ второго порядка

Если система допускает шестимерную алгебру Ли, базисные операторы которой удовлетворяют случаю 1 из Таблицы 2, то ее инвариантное представление имеет вид

$$I_{2,1} = F(I_1),\ I_{2,2} = G(I_1),\ I_{2,3} = H(I_1). \tag{11}$$

Применение оператора инвариантного дифференцирования к дифференциальному инварианту первого порядка дает равенство:

$$\lambda D_t(I_1) = \Omega\left(I_1, I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}\right).$$

Учитывая (11), получим

$$\lambda D_t(I_1)|_{(11)} = \Psi(I_1),$$

или

$$\frac{dI_1}{\Psi(I_1)} = \frac{dt}{\lambda}. \tag{12}$$

Очевидно, левая часть этого уравнения интегрируема в квадратурах при любой замене переменных. Правая часть интегрируема в квадратурах, если $\lambda = \frac{1}{D_t\Phi}$, где $\Phi = \Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ldots)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Таким образом, можно найти первый интеграл системы.

Аналогичные рассуждения можно привести и для случая 4 из Таблицы 2.

Рассмотрим примеры.

Пример 4. Пусть система допускает шестимерную алгебру Ли, базисные операторы которой имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t},\ t\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z},\ z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ее инвариантное представление имеет вид (11), где

$$I_1 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},\ I_{2,1} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2},\ I_{2,2} = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2},\ I_{2,3} = \frac{\ddot{z}}{\dot{x}\dot{z}}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования для данной алгебры имеет вид

$$\frac{1}{\dot{x}}D_t.$$

Уравнение (12) запишется в виде

$$\frac{dI_1}{G\left(I_1\right) - I_1 F\left(I_1\right)} = \dot{x}dt,$$

откуда можно получить первый интеграл системы

$$I_1 = \varphi(x + C_1).$$

Исходную систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \tfrac{\dot y}{\dot x} &= \varphi(x + C_1), \\ \tfrac{\ddot x}{\dot x^2} &= F\left(\varphi(x + C_1)\right), \\ \tfrac{\ddot z}{\dot x \dot z} &= H\left(\varphi(x + C_1)\right). \end{aligned}$$

Очевидно, эта система интегрируется в квадратурах. ■

Пример 5. Если система допускает алгебру Ли с базисными операторами

$$\frac{\partial}{\partial t},\ t\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z},\ z\frac{\partial}{\partial z},$$

то ее инвариантное представление имеет вид

$$I_{2,1} = F(I_0),\ I_{2,2} = G(I_0),\ I_{2,3} = H(I_0), \tag{13}$$

где

$$I_0 = x,\ I_{2,1} = \frac{\ddot x}{\dot x^2},\ I_{2,2} = \frac{\ddot y}{\dot x \dot y},\ I_{2,3} = \frac{\ddot z}{\dot x \dot z}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования для данной алгебры имеет вид

$$-\frac{\dot x}{\ddot x} D_t.$$

Уравнение типа (12) даст следующее выражение:

$$-\frac{\dot x^2}{\ddot x} = -\frac{1}{F(x)}.$$

Проинтегрировав это выражение, перепишем систему в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot x &= \alpha(x, C_1), \\ \tfrac{\ddot y}{\dot y} &= \beta(x, C_1), \\ \tfrac{\ddot z}{\dot z} &= \gamma(x, C_1). \end{aligned}$$

Эта система допускает 5 операторов:

$$\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z},\ z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Следовательно, можно применить алгоритм повторно. Оператор инвариантного дифференцирования теперь примет вид

$$\frac{\dot{z}}{\ddot{z}} D_t.$$

Интегрируя полученное уравнение типа (12), сведем систему к следующей

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \alpha(x, C_1), \\ &\tfrac{\ddot{y}}{\dot{y}} = \beta(x, C_1), \\ &\dot{z} = \nu(x, C_1, C_2). \end{aligned}$$

Эта система допускает 4 оператора:

$$\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y},\ y\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}.$$

Повторяя процедуру, получим систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \alpha(x, C_1), \\ &\dot{y} = \mu(x, C_1, C_3), \\ &\dot{z} = \nu(x, C_1, C_2). \end{aligned}$$

Очевидно, система интегрируется в квадратурах. ■

Заключение

Построены системы двух ОДУ третьего порядка и трех ОДУ второго порядка, инвариантных относительно шестимерных алгебр Ли операторов. Обобщен алгоритм интегрирования, основанный на применении оператора инвариантного дифференцирования. Показано, что первый интеграл системы может быть получен, если оператор инвариантного дифференцирования имеет специальный вид. Построены примеры, демонстрирующие использование предложенного алгоритма.

В дальнейшем планируется развить теоретическое обоснование алгоритма и расширить его применение на системы с малым параметром, допускающие приближенные алгебры Ли операторов.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по государственному заданию No 1.3103.2017/4.6.

Список литературы

[1] **Wafo Soh C., Mahomed F. M.** Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations. Journal of Physics A: Mathematical and General. 2001. No 34. P. 2883–2911.

[2] **Гапонова О. В., Нестеренко М. О.** Системи ЗДР другого порядку, інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі. Збірник праць Інституту математики НАН Украіни, Киів. 2006. Т. 3. No 2. С. 71–91.

[3] **Ayub M., Khan M., Mahomed F. M.** Second-order systems of ODEs admitting three-dimensional Lie algebras and integrability. Journal of Applied Mathematics. 2013. No 2013. 147921.

[4] **Wafo Soh C., Mahomed F. M.** Reduction of order for systems of ordinary differential equations. Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2004. No 11:1. P. 13–20.

[5] **Gainetdinova A. A., Gazizov R. K.** Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras. Proc. R. Soc. A. 2017. T. 473. No 2197. 20160461.

[6] **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1978. 399 с.