ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2019
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных системах

Устойчивость и стабилизация нелинейных непрерывных и дискретных неопределённых систем с помощью модального подхода

Зубер И.Е., Гелиг А.Х.
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: Zuber.Yanikum@gmail.com
agelig@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается система дифференциальных уравнений, элементы матрицы которой являются функциями от состояния системы и времени, возмущенными неопределенными функционалами.

С помощью спектрального разложения матрицы системы и квадратичной функции Ляпунова с единичной матрицей получены достаточные условия глобальной экспоненциальной устойчивости. Такая же система рассматривается при наличии скалярного управления, в предположении, что вектор распределения управления зависит от состояния системы.

При условии равномерной управляемости с помощью модального подхода синтезировано управление, при котором замкнутая система становится глобально экспоненциально устойчивой. Аналогичные результаты получены для дискретной нелинейной неопределенной системы такой же структуры.

Ключевые слова: непрерывные нелинейные неопределённые дифференциальные системы, глобальная экспоненциальная устойчивость, стабилизация, дискретные нелинейные неопределённые системы

Abstract

In this paper we consider the system of differential equations for which the elements of object matrix are functions of the system state and time. These functions are perturbed by uncertain functionals.

Using the spectral decomposition of the object matrix and the Lyapunov quadratic function with unit matrix we obtain the sufficient conditions of global exponential stability of the system considered.

The similar system is studied in the case of scalar control, on the assumption that the distribution vector depends on the state. Using the modal approach in the condition of the uniform controllability we perform the synthesis of scalar control which provides the global exponential stability of closed loop system.

Analogous results are obtained for discrete nonlinear uncertain systems with the same structure.

Keywords: continuous nonlinear differential uncertain systems, global exponential stability, stabilization, discrete nonlinear uncertain systems

1 Введение

Для исследования устойчивости и стабилизации нелинейных систем известно несколько подходов. Первый [1, 2] применим к достаточно гладким системам и основан на построении нелинейного преобразования, приводящего систему к некоторому каноническому виду. Второй [3], основанный на втором методе Ляпунова и частотной теореме В.А.Якубовича, не требует гладкости и применим к системам с разрывными нелинейностями. В данной статье для исследования устойчивости и стабилизации нелинейных неопределённых систем предложен модальный подход, основанный на спектральном разложении [4] нелинейной матрицы системы.

2 Непрерывные системы

2.1 Устойчивость нелинейных неопределённых непрерывных систем

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A(x) + F(\cdot))x, t \geq t_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $A(x) \in R^{n\times n}$–непрерывная матричная функция. Предполагается, что собственные числа $\lambda_i(x)$ матрицы $A(x)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{array}{l} \lambda_i(x) \neq \lambda_j(x) \text{ при } i \neq j, \lambda_i(x) = \lambda_1(x) + \delta_i(x)(i \in \overline{2,n}) \\ \mu^2(x) < -2(1+\lambda_1(x)), \end{array} \qquad (2)$$

где $\mu(x) = \max\limits_{i\in\overline{2,n}} |\delta_i(x)|$.

В системе (1) $F(\cdot) \in R^{n\times n}$ – неопределённая матрица, элементы которой являются неупреждающими функционалами произвольной природы, например, функциями от $x(t-\tau)$, $\int\limits_0^t |x(\lambda)|^2 d\lambda$. Предполагается, что для системы (1) справедлива теорема существования решения и продолжимости на $(t_0, +\infty)$ любого решения, остающегося в ограниченной области. Кроме того, предполагается существование положительного φ, при котором выполнено неравенство

$$F(\cdot) + F^T(\cdot) \leq \varphi I, \qquad (3)$$

где I – единичная матрица.

Для исследования устойчивости системы (1) рассмотрим спектральное разложение матрицы $A(x,t)$

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) d_i(x) g_i^T(x), \qquad (4)$$

где $d_i(x)$–собственные векторы матрицы $A(x)$, а $g_i(x)$–собственные векторы матрицы $A^T(x)$. При этом

$$(d_i(x), g_j(x)) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j. \end{cases} \qquad (5)$$

Возьмём функцию Ляпунова

$$V(x) = x^T I x. \qquad (6)$$

Очевидно, что её производная в силу системы (1) имеет следующий вид

$$\dot{V} = x^T L(x) x + x^T (F(\cdot) + F^T(\cdot)) x, \qquad (7)$$

где $L(x) = A^T(x) + A(x)$. Рассмотрим матрицу

$$Q(x) = P(x) L(x) P(x), \qquad (8)$$

где
$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x) d_i^T(x). \tag{9}$$
Матрица $P(x)$ неособая ввиду линейной независимости векторов $d_i(x)$. Действительно, если бы существовал такой вектор $m(x) \neq 0$, что $P(x)m(x) = 0$, то $P(x)m(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x)\gamma_i(x)$, где $\gamma_i(x) = d_i^T(x)m(x)$, что противоречит линейной независимости векторов $d_i(x)$. В силу (8),(9) имеет место представление
$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x) d_i^T(x) \Big[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) g_j(x) d_j^T(x) +$$
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) d_k(x) g_k^T(x) \Big] \sum_{r=1}^{n} d_r(x) d_r^T(x).$$
Ввиду свойства (5) справедливо равенство
$$Q(x) = M(x)P(x) + P(x)M(x), \tag{10}$$
где $M(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(x) d_i(x) d_i^T(x)$. Ввиду условия (2)
$$M(x) = \lambda_1(x) d_1(x) d_1^T(x) + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_1(x) + \delta_i(x)) d_i(x) d_i^T(x).$$
Поэтому
$$M(x) = \lambda_1(x) P(x) + \sum_{i=2}^{n} \delta_i(x) d_i(x) d_i^T(x),$$
и ввиду (10) $Q(x)$ принимает следующий вид
$$Q(x) = 2\lambda_1(x) P^2(x) + \sum_{i=2}^{n} \delta_i(x) d_i(x) d_i^T(x) P(x) + P(x) \sum_{i=2}^{n} \delta_i(x) d_i(x) d_i^T(x).$$
Поскольку для любых матриц S_1, S_2 соответствующих размерностей справедливо неравенство
$$S_1^T S_2 + S_2^T S_1 \leq S_1^T S_1 + S_2^T S_2,$$
то для $Q(x)$ получаем оценку
$$Q(x) \leq 2\lambda_1(x) P^2(x) + (\sum_{i=2}^{n} \delta_i(x) d_i(x) d_i^T(x))^2 + P^2(x).$$

Отсюда следует соотношение

$$Q(x) \leq (2\lambda_1(x) + \mu^2(x) + 1)P^2(x).$$

Умножив это неравенство слева и справа на $P^{-1}(x)$, получаем оценку

$$L(x) \leq (2\lambda_1(x) + \mu^2(x) + 1)I,$$

из которой ввиду (3), (7) следует неравенство

$$\dot{V} \leq (2\lambda_1(x) + \mu^2(x) + \varphi)I.$$

Положив

$$\lambda_1(x) < -0.5(\mu^2(x) + 1 + \varphi), \tag{11}$$

приходим к оценке $\dot{V} < -V$, из которой следует глобальная экспоненциальная устойчивость. Сформулируем результат.

Теорема 1 *Если выполнены условия* (2), (3), (11), *то система* (1) *глобально экспоненциально устойчива.*

2.2 Стабилизация нелинейных непрерывных неопределённых систем

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A(x) + F(\cdot))x + b(x)u, t \geq t_0, \tag{12}$$

где $b(x) \in R^{n\times 1}$ – непрерывный вектор, $A(x)$ и $F(\cdot)$ такие же как в системе (1), а управление u имеет вид

$$u = s^T(x)x. \tag{13}$$

Ставится задача определения вектора $s(x) \in R^n$, при котором замкнутая система (12),(13) становится глобально экспоненциально устойчивой. Предполагается, что пара $(A(x), b(x))$ равномерно управляема, т.е. справедливо соотношение

$$det(b(x), A(x)b(x), \ldots, A^{n-1}(x)b(x)) \neq 0 \tag{14}$$

при всех $x \in R^n$. Предполагается, что существуют различные не принадлежащие спектру матрицы $A(x)$ отрицательные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющие неравенству

$$\lambda_1 < -0.5(\mu^2 + 1 + \varphi), \tag{15}$$

где $\mu = \max_{i \in \overline{2,n}} |\lambda_1 - \lambda_i|$. Определим $s(x)$ из системы алгебраических уравнений

$$s^T(x)(A(x) - \lambda_k I)^{-1} b(x) = -1, k \in \overline{1,n} \tag{16}$$

Разрешимость этой системы обеспечивается предположением (15) [3]. Убедимся, что λ_k является собственным числом матрицы $A(x) + b(x)s^T(x)$, то есть имеет место равенство

$$det(A(x) + b(x)s^T(x) - \lambda_k I) = 0. \tag{17}$$

Рассмотрим тождество

$$A(x) - \lambda_k I + b(x)s^T(x) = M(x)(A(x) - \lambda_k I),$$

где $M(x) = b(x)s^T(x)(A(x) - \lambda_k I)^{-1} + I$. Поскольку по предположению $det(A(x) - \lambda_k I) \neq 0$, то достаточно убедиться в справедливости равенства $detM(x) = 0$. Поскольку $M(x)b(x) = 0$, то $detM(x) = 0$ и равенство (17) доказано. На основании теоремы 1 замкнутая система (12), (13) глобально экспоненциально устойчива. Сформулируем результат.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия* (4),(14), *и спектр матрицы* $A(x)$ *отделим от чисел* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *удовлетворяющих неравенству* (15). *Если вектор* $s(x)$ *определён из системы* (16), *то замкнутая система* (12),(13) *глобально экспоненциально устойчива.*

3 Дискретные системы

3.1 Устойчивость нелинейных дискретных неопределённых систем

Рассмотрим систему

$$x_{k+1} = (A(x_k)x_k + F_k), k \geq k_0, \tag{18}$$

где $A(x_k) \in R^{n \times n}$, $F_k \in R^{n \times n}$ – неопределённое возмущение.

Предполагается, что собственные числа $\lambda_j(x_k)$ матрицы $A(x_k)$ при всех $x_k \in R^n$ обладают свойством

$$\begin{gathered} \lambda_i(x_k) = \lambda_1(x_k) + \delta_i(x_k), i \in \overline{2,n}, \quad |\lambda_i(x_k)|_{i \in \overline{1,n}} < 1 \\ \delta_j(x_k) \neq \delta_i(x_k) \text{ при } i \neq j, \quad \sup_{x_k} |\delta_i(x_k)| = \delta. \end{gathered} \tag{19}$$

Определение 1 *Система* (18) *глобально экспоненциально устойчива, если её решение при всех $k > 0$ удовлетворяет оценке*

$$|x_k|^2 < q^k|x_0|^2, \text{ где } 0 < q < 1. \tag{20}$$

Для исследования устойчивости системы (18) рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_k = x_k^T I x_k.$$

Очевидно, что в силу системы (18)

$$V_{k+1} - V_k = x_k^T(A_k^T A_k - I + F_k^T A_k + A_k^T F_k + F_k^T F_k)x_k,$$

где $A_k = A(x_k)$. Поскольку

$$F_k^T A_k + A_k^T F_k \le A_k^T A_k + F_k^T F_k,$$

то

$$V_{k+1} - V_k \le x_k^T M_k x_k, \tag{21}$$

где

$$M_k = L_k + 2F_k^T F_k, \quad L_k = 2A_k^T A_k - I. \tag{22}$$

Предположим, что возмущение F_k удовлетворяет оценке

$$2F_k F_k^T < \varkappa I, \varkappa > 0. \tag{23}$$

Тогда из (21),(22),(23) следует неравенство

$$V_{k+1} \le x_k^T(L_k + (\varkappa + 1)I)x_k.$$

Поэтому $V_{k+1} < qV_k$, если

$$L_k < -\nu I, \tag{24}$$

где $\nu = \varkappa + 1 - q$. Спектральное разложение матрицы A_k имеет следующий вид

$$A(x_k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x_k) d_j(x_k) g_j^*(x_k), \tag{25}$$

где

$$d_i^*(x_k) g_j(x_k) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \ne j. \end{cases} \tag{26}$$

В дальнейшем для краткости аргумент x_k будем опускать. Ввиду (19),(25) справедливо равенство

$$A_k = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} d_i g_i^* + \sum_{i=1}^{n} \delta_i d_i g_i^*, \text{ где } \delta_1 = 0.$$

Поэтому согласно (22) имеет место представление

$$L_k = 2(\overline{\lambda}_1 \sum_{i=1}^{n} g_i d_i^* + \sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i g_i d_i^*)(\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} d_i g_i^* + \sum_{i=1}^{n} \delta_i d_i g_i^*) - I. \qquad (27)$$

Рассмотрим матрицы $P_k = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x_k) d_i^*(x_k)$ и $Q_k = P_k^* L_k P_k$. Ввиду (27) матрица Q_k имеет следующий вид

$$Q_k = 2 \sum_{l=1}^{n} d_l d_l^* [\overline{\lambda}_1 \sum_{i=1}^{n} g_i d_i^* + \sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i g_i d_i^*][\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} d_j g_j^* + \sum_{j=1}^{n} \delta_j d_j g_j^*] \sum_{r=1}^{n} d_r d_r^* - P_k^2.$$

Согласно свойству (26)

$$Q_k = 2[|\lambda_1|^2 P_k^2 + \lambda_1 \sum_{l=1}^{n} \overline{\delta}_l d_l d_l^* P_k + \overline{\lambda}_1 P_k \sum_{j=1}^{n} \delta_j d_j d_j^* + \sum_{l=1}^{n} \overline{\delta}_l d_l d_l^* \sum_{j=1}^{n} \delta_j d_j d_j^*] - P_k^2.$$

Отсюда следует представление

$$L_k = 2[|\lambda_1|^2 I + Z_1 + Z_2 + Z_3] - I, \qquad (28)$$

где
$Z_1 = \lambda_1 P_k^{-1} \sum\limits_{l=1}^{n} \overline{\delta}_l d_l d_l^*$, $Z_2 = \overline{\lambda}_1 \sum\limits_{j=1}^{n} \delta_j d_j d_j^* P_k^{-1}$, $Z_3 = P_k^{-1} \sum\limits_{l=1}^{n} \overline{\delta}_l d_l d_l^* \sum\limits_{j=1}^{n} \delta_j d_j d_j^* P_k^{-1}$.
Обозначим через $||M||$ спектральную норму матрицы M. Тогда в силу (19) справедливы оценки $||Z_1|| \le |\lambda_1|\delta$, $||Z_2|| \le |\lambda_1|\delta$, $||Z_3|| \le \delta^2$ и, следовательно, ввиду (28)

$$L_k \le 2(|\lambda_1|^2 + 2|\lambda_1|\delta + \delta^2 - 1)I.$$

Поэтому оценка (24) будет выполнена при условии

$$2(|\lambda_1|^2 + 2|\lambda_1|\delta + \delta^2) < q - \varkappa + 1. \qquad (29)$$

Если $\varkappa < 1 + q$, то неравенство (29) выполняется при достаточно малых $|\lambda_1|$ и δ. Сформулируем результат.

Теорема 3 *Если спектр матрицы* $A(x_k)$ *обладает свойствами* (19),(29), *возмущение* F_k *удовлетворяет оценке* (23), *где* $\varkappa < 1 + q$, *то система* (18) *глобально экспоненциально устойчива.*

3.2 Стабилизация нелинейных дискретных неопределённых систем

Рассмотрим систему

$$x_{k+1} = (A(x_k)x_k + F_k) + b(x_k)u_k \tag{30}$$

$$u_k = s^T(x_k)x_k, \tag{31}$$

где $A(x_k) \in R^{n\times n}$, $b(x_k) \in R^{n\times 1}$, $s(x_k) \in R^{n\times 1}$, а неопределённая матрица F_k удовлетворяет условию (23). Матрицы $A(x_k)$ и $b(x_k)$ известны. Требуется построить вектор $s(x_k)$, при котором замкнутая система (30),(31) глобально экспоненциально устойчива. Предполагается, что спектр матриц $A(x_k)$ при всех x_k не пересекается с отрезком $[-1, 1]$, и пара $(A(x_k), b(x_k))$ равномерно управляема, то есть

$$det(b(x_k), A(x_k)b(x_k), \ldots, A^{n-1}(x_k)b(x_k)) \neq 0.$$

при всех x_k. Выберем вещественные λ_i $(i \in \overline{1, n})$, удовлетворяющие условиям (19) и определим $s(x_k)$ из системы

$$s^T(x_k)(A(x_k) - \lambda_i I)^{-1}b(x_k) = -1, i \in \overline{1, n}. \tag{32}$$

Тогда согласно доказанному в разделе 3.1 числа λ_i будут собственными числами матрицы $A(x_k)+b(x_k)s^T(x_k)$, и в силу теоремы 3 приходим к следующему результату.

Теорема 4 *Предположим, что спектр матрицы $A(x_k)$ не пересекается с отрезком $[-1, 1]$, пара $(A(x_k), b(x_k))$ равномерно управляема, и вектор $s(x_k)$ определён системой (32). Тогда система (30),(31) глобально экспоненциально устойчива.*

4 Заключение

Изложенные в статье результаты содержат достаточные модальные условия глобальной экспоненциальной устойчивости нелинейных непрерывных и дискретных неопределённых систем и явный вид стабилизирующего управления для этих систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(грант 17.01.00102a).

Список литературы

[1] *Isidori A.* Nonlinear Control Systems // London : Springer. 1993.

[2] *Zak S.H.* Systems and Control // Oxford Univ. Press. 2002.

[3] *Yakubovich V.A., Leonov G.A., Gelig A.Kh.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with discontinuous Nonlinearities // World Scientific. London. 2004.

[4] *Yakubovich V.A., Starzhinski V.M.* Linear Differential Equations with Periodic Coefficients // Vol 1., Vol 2., 839 pp. 1975. New York-Toronto. Jerusalem-London.