*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2008
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172*

*http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru*

АВТОНОМНОСТЬ И ЦИЛИНДРИЧНОСТЬ $\mathbb{R}$-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

В.Н. Горбузов*, А.Ф. Проневич**

Беларусь, 230023, Гродно, ул. Ожешко, 22,
Гродненский государственный университет имени Я. Купалы,
e-mail: gorbuzov@grsu.by*
e-mail: pronevich@tut.by**

Аннотация.

Для системы уравнений в полных дифференциалах получены необходимые условия и критерии существования автономных и цилиндричных по части переменных $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов, частных интегралов и последних множителей.

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$dw = X_1(z, w)dz + X_2(z, w)d\,\overline{z}\,, \tag{1}$$

где w и z — точки пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ соответственно, векторы-столбцы $dw = \operatorname{colon}(dw_1, \ldots, dw_n)$, $dz = \operatorname{colon}(dz_1, \ldots, dz_m)$, $d\,\overline{z} = \operatorname{colon}(d\,\overline{z}_1, \ldots, d\,\overline{z}_m)$,

$\overline{z}_j$ комплексно сопряжено к z_j, а элементами матриц $X_1(z,w) = \|X_{\xi j}(z,w)\|$ и $X_2(z,w) = \|X_{\xi,m+j}(z,w)\|$ являются $\mathbb{R}$-дифференцируемые [1, с. 33; 2, с. 22] на области $G \subset \mathbb{C}^{m+n}$ функции $X_{\xi l}\colon G \to \mathbb{C}$, $\xi = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $l = \overline{1,2m}$.

В случае одного комплексного переменного $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $w\colon V \to \mathbb{C}$ при условии $\partial_{\overline{z}}\, w(z) = 0\ \forall z \in V$ является голоморфной на области $V \subset \mathbb{C}$, а при $\partial_z w(z) = 0\ \forall z \in V$ — антиголоморфной [1, с. 42]. Если $(p(x,y) - iq(x,y))\partial_{\overline{z}} \operatorname{Re} w(z) + i\partial_{\overline{z}} \operatorname{Im} w(z) = 0\ \forall (x,y) \in V$, а функция p — определённоположительна, то w является (p,q)-аналитической [3] на области V. Если $\partial_{\overline{z}} w(z) + A(z)w(z) + B(z)\overline{w}(z) = C(z)\ \forall z \in V$, то w — обобщённая аналитическая функция [4] на области V.

В многомерном случае для вполне разрешимой [5] дифференциальной системы (1) с $\mathbb{R}$-голоморфной правой частью доказано [6] существование и единственность $\mathbb{R}$-голоморфного решения (аналог теоремы Коши), а для вполне разрешимого уравнения в полных дифференциалах проведена классификация $\mathbb{R}$-особых точек решений и получены достаточные условия отсутствия подвижных неалгебраических $\mathbb{R}$-особых точек (аналог теорем Фукса и Пенлеве) [7]. Разработан спектральный метод построения интегрального базиса $\mathbb{R}$-линейных многомерных дифференциальных систем [8; 9].

Ставится задача существования $\mathbb{R}$-дифференцируемых интегралов и последних множителей у дифференциальной системы (1).

Основываясь на подходах [10, с. 29; 11, с. 341; 12; 13, с. 161], будем использовать следующие понятия. $\mathbb{R}$-дифференцируемая на области $G' \subset G$ функция: а) $F\colon G' \to \mathbb{C}$; б) $f\colon G' \to \mathbb{C}$; в) $\mu\colon G' \to \mathbb{C}$ является: а) первым интегралом; б) частным интегралом; в) последним множителем системы в полных дифференциалах (1), если и только если производные Ли:

а) $\mathfrak{X}_l\, F(z,w) = 0\ \ \forall (z,w) \in G',\ \ l = \overline{1,2m}$;

б) $\mathfrak{X}_l\, f(z,w) = \Phi_l(f; z,w)\ \ \forall (z,w) \in G'$, где $\Phi_l(0; z,w) \equiv 0,\ \ l = \overline{1,2m}$;

в) $\mathfrak{X}_l\, \mu(z,w) = \,-\,\mu(z,w) \operatorname{div} \mathfrak{X}_l(z,w)\ \ \forall (z,w) \in G',\ \ l = \overline{1,2m}$,

где линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(z,w) = \partial_{z_j} + \sum_{\xi=1}^{n} \bigl(X_{\xi j}(z,w)\, \partial_{w_\xi} + \overline{X}_{\xi,m+j}(z,w)\, \partial_{\overline{w}_\xi}\bigr)\ \forall (z,w) \in G,\ \ j = \overline{1,m},$$

$$\mathfrak{X}_{m+j}(z,w) = \partial_{\overline{z}_j} + \sum_{\xi=1}^{n} \bigl(X_{\xi,m+j}(z,w)\partial_{w_\xi} + \overline{X}_{\xi j}(z,w)\partial_{\overline{w}_\xi}\bigr)\ \forall (z,w) \in G,\ \ j = \overline{1,m}.$$

$\mathbb{R}$-дифференцируемый первый интеграл F (частный интеграл f и последний множитель μ) системы (1) назовём [14 – 16] (s_1, s_2)-неавтономным, если функция $\widetilde{F}$ ($\widetilde{f}$ и $\widetilde{\mu}$), полученная из F (f и μ) посредством соответствия $z_j \mapsto x_j$, $\overline{z}_j \mapsto y_j$ $(j = \overline{1, m})$, $w_\xi \mapsto u_\xi$, $\overline{w}_\xi \mapsto v_\xi$ $(\xi = \overline{1, n})$, зависит от $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ и только от s_1 $(0 \leqslant s_1 \leqslant m)$ переменных $x_1, \ldots, x_m$ и s_2 $(0 \leqslant s_2 \leqslant m)$ переменных $y_1, \ldots, y_m$. Если функция $\widetilde{F}$ ($\widetilde{f}$ и $\widetilde{\mu}$) зависит от $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и только от k_1 $(0 \leqslant k_1 \leqslant n)$ переменных $u_1, \ldots, u_n$ и k_2 $(0 \leqslant k_2 \leqslant n)$ переменных $v_1, \ldots, v_n$, то F (f и μ) назовём $(n - k_1, n - k_2)$-цилиндричным. Иначе говоря, первый интеграл F (частный интеграл f и последний множитель μ), антиголоморфный по $m - s_1$ и голоморфный по $m - s_2$ независимым переменным является (s_1, s_2)-неавтономным; а антиголоморфный по $n - k_1$ и голоморфный по $n - k_2$ зависимым переменным является $(n - k_1, n - k_2)$-цилиндричным.

$\mathbb{R}$-дифференцируемые частные интегралы

Предположим, что система (1) имеет (s_1, s_2)-неавтономный $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' частный интеграл

$$f\colon (z, w) \to f({}^s z, {}^k w) \quad \forall (z, w) \in G', \tag{2}$$

где для удобства записи принято сокращение $s = (s_1, s_2)$, $k = (n - k_1, n - k_2)$. Не умаляя общности, будем считать, что функция f является антиголоморфной по независимым $z_{s_1+1}, \ldots, z_m$ и зависимым $w_{k_1+1}, \ldots, w_n$ переменным и голоморфной по независимым $z_{j_{s_2+1}}, \ldots, z_{j_m}$, $j_\beta \in \{1, \ldots, m\}$, $\beta = \overline{s_2 + 1, m}$, и зависимым $w_{\zeta_{k_2+1}}, \ldots, w_{\zeta_n}, \zeta_\delta \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta = \overline{k_2 + 1, n}$, переменным. Тогда, по критерию существования частного интеграла, справедливы тождества

$$\mathfrak{X}_{lsk}\, f({}^s z, {}^k w) = \Phi_l(f; z, w) \quad \forall (z, w) \in G', \quad l = \overline{1, 2m}, \tag{3}$$

где линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{X}_{\theta sk}(z, w) = \partial_{z_\theta} + \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi\theta}(z, w)\partial_{w_\xi} + \sum_{\tau=1}^{k_2} \overline{X}_{\zeta_\tau, m+\theta}(z, w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}} \quad \forall (z, w) \in G,$$

$$\mathfrak{X}_{\eta sk}(z, w) = \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi\eta}(z, w)\partial_{w_\xi} + \sum_{\tau=1}^{k_2} \overline{X}_{\zeta_\tau, m+\eta}(z, w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}} \quad \forall (z, w) \in G,$$

$$\mathfrak{X}_{m+j_g,sk}(z,w)=\partial_{\overline{z}_{j_g}}+\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi,m+j_g}(z,w)\partial_{w_\xi}+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau j_g}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}\ \forall (z,w)\in G,$$

$$\mathfrak{X}_{m+j_\nu,sk}(z,w)=\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi,m+j_\nu}(z,w)\partial_{w_\xi}+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau j_\nu}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}\ \forall (z,w)\in G,$$

$$\theta=\overline{1,s_1},\quad \eta=\overline{s_1+1,m},\quad g=\overline{1,s_2},\quad \nu=\overline{s_2+1,m},$$

индексы $\zeta_\tau\in\{1,\ldots,n\},\tau=\overline{1,k_2}$, $j_g\in\{1,\ldots,m\},g=\overline{1,s_2}$, $j_\nu\in\{1,\ldots,m\}$, $\nu=\overline{s_2+1,m}$ (при этом, если множество $J_g=\{j_g\colon g=\overline{1,s_2}\}$, а множество $J_\nu=\{j_\nu\colon \nu=\overline{s_2+1,m}\}$, то $J_g\cap J_\nu=\emptyset$, а $\operatorname{Card} J_g\cup J_\nu=m$).

Пусть выполняются тождества (3). Тогда в каждой из совокупностей

$$\begin{gathered}\bigl\{1,X_{1\theta}(z,w),\ldots,X_{k_1\theta}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1,m+\theta}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},m+\theta}(z,w)\bigr\},\\ \bigl\{X_{1\eta}(z,w),\ldots,X_{k_1\eta}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1,m+\eta}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},m+\eta}(z,w)\bigr\},\\ \bigl\{1,X_{1,m+j_g}(z,w),\ldots,X_{k_1,m+j_g}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1 j_g}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},j_g}(z,w)\bigr\},\\ \bigl\{X_{1,m+j_\nu}(z,w),\ldots,X_{k_1,m+j_\nu}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1 j_\nu}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},j_\nu}(z,w)\bigr\},\\ \theta=\overline{1,s_1},\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \ g=\overline{1,s_2},\ \ \nu=\overline{s_2+1,m},\end{gathered}\tag{4}$$

функции на интегральном многообразии

$$f({}^s z,{}^k w)=0\tag{5}$$

при всяких фиксированных значениях переменных z_j, $j=\overline{1,m}$, $j\neq\alpha$, и w являются линейно связанными [17, с. 105] с помощью антиголоморфных функций по переменной z_α на области G; при фиксированных значениях переменных z_j, $j=\overline{1,m}$, $j\neq j_\beta$, и w линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной z_{j_β} на области G; при фиксированных значениях переменных z и w_p, $p=\overline{1,n}$, $p\neq\gamma$ линейно связаны с помощью антиголоморфных функций по переменной w_γ на области G; при фиксированных значениях переменных z и w_p, $p=\overline{1,n}$, $p\neq\zeta_\delta$ линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной w_{ζ_δ} на области G. Это имеет место при каждом фиксированном $\alpha=\overline{s_1+1,m}$, j_β, $\beta=\overline{s_2+1,m}$,

$\gamma = \overline{k_1+1, n},\ \zeta_\delta,\ \delta = \overline{k_2+1, n}$. Поэтому вронскианы по $z_\alpha,\ \overline{z}_{j_\beta},\ w_\gamma$ и $\overline{w}_{\zeta_\delta}$ каждой из совокупностей (4) тождественно равны нулю на интегральном многообразии (5), т.е. верна система тождеств

$$
\begin{aligned}
&W_\chi\big(1, {}^\lambda X^\theta(z,w)\big) = \Psi_{\theta\chi}(f;z,w) \quad \forall (z,w)\in G, \quad \theta=\overline{1,s_1},\\
&W_\chi\big({}^\lambda X^\eta(z,w)\big) = \Psi_{\eta\chi}(f;z,w) \quad \forall (z,w)\in G, \quad \eta=\overline{s_1+1,m},\\
&W_\chi\big(1, {}^\lambda X^{m+j_g}(z,w)\big) = \Psi_{m+j_g,\chi}(f;z,w) \quad \forall (z,w)\in G, \quad g=\overline{1,s_2},\\
&W_\chi\big({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z,w)\big) = \Psi_{m+j_\nu,\chi}(f;z,w) \quad \forall (z,w)\in G, \quad \nu=\overline{s_2+1,m},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где число $\lambda = k_1 + k_2$, вектор-функции на области G

$$
{}^\lambda X^j \colon (z,w) \to \big(X_{1j},\dots,X_{k_1 j}, \overline{X}_{\zeta_1, m+j},\dots,\overline{X}_{\zeta_{k_2}, m+j}\big)(z,w)\ (j=\overline{1,m}\,),
$$

$$
{}^\lambda X^{m+j} \colon (z,w) \to \big(X_{1,m+j},\dots,X_{k_1,m+j}, \overline{X}_{\zeta_1 j},\dots,\overline{X}_{\zeta_{k_2} j}\big)(z,w)\ (j=\overline{1,m}\,),
$$

скалярные функции $\Psi_{l\chi}\colon G \to \mathbb{C}$ такие, что $\Psi_{l\chi}(0;z,w) \equiv 0$, $l=\overline{1,2m}$, а W_χ — вронскиан по переменной χ, которая принимает значения $z_\alpha,\ \overline{z}_{j_\beta},\ w_\gamma$ и $\overline{w}_{\zeta_\delta}$ ($\alpha=\overline{s_1+1,m},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\ \delta=\overline{k_2+1,n}\,$).

Таким образом, имеют место

Теорема 1. *Для того, чтобы система* (1) *имела* (s_1,s_2)*-неавтономный* $(n-k_1, n-k_2)$*-цилиндричный* $\mathbb{R}$*-дифференцируемый частный интеграл* (2), *необходимо выполнение системы тождеств* (6).

Следствие 1. *Система тождеств* (6) *при* $s_2=0,\ k_2=0$ *является необходимым условием наличия* $(s_1,0)$*-неавтономного* $(n-k_1,n)$*-цилиндричного голоморфного частного интеграла* (2) *у дифференциальной системы* (1).

Следствие 2. *Система тождеств* (6) *при* $s_1=0,\ k_1=0$ *является необходимым условием наличия* $(0,s_2)$*-неавтономного* $(n,n-k_2)$*-цилиндричного антиголоморфного частного интеграла* (2) *у системы* (1).

Следствие 3. *Для того, чтобы у системы* (1) *существовал автономный* $(n-k_1,n-k_2)$*-цилиндричный* $\mathbb{R}$*-дифференцируемый на области* Ω' *пространства* $\mathbb{C}^n$ *частный интеграл* $f\colon w \to f({}^k w)$ $\forall w \in \Omega'$ *необходимо выполнение системы тождеств* (6) *при* $s_1=0,\ s_2=0$.

Пусть $\mathbb{R}$-дифференцируемые на области G, достаточное число раз, функции $X_{\xi l}\colon G \to \mathbb{C},\ \xi=\overline{1,n},\ l=\overline{1,2m}$, удовлетворяют условиям (6). Составим функциональную систему

$$\psi_{\theta s_1} + {}^{\lambda}\varphi\big[{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = H_{\theta}(f;z,w),$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial_{\chi}^{p}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = \partial_{\chi}^{p}\,H_{\theta}(f;z,w), \ \ p=\overline{1,\lambda}, \quad \theta=\overline{1,s_1},$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = H_{\eta}(f;z,w), \tag{7}$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial_{\chi}^{p}\,{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = \partial_{\chi}^{p}\,H_{\eta}(f;z,w), \ \ p=\overline{1,\lambda-1}, \quad \eta=\overline{s_1+1,m},$$

$$\psi_{g s_2} + {}^{\lambda}\varphi\big[{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\big]^T = H_{m+j_g}(f;z,w),$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial_{\chi}^{p}\,{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\big]^T = \partial_{\chi}^{p}\,H_{m+j_g}(f;z,w), \ \ p=\overline{1,\lambda}, \quad g=\overline{1,s_2},$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^T = H_{m+j_\nu}(f;z,w),$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial_{\chi}^{p}\,{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^T = \partial_{\chi}^{p}\,H_{m+j_\nu}(f;z,w), \ \ p=\overline{1,\lambda-1}, \quad \nu=\overline{s_2+1,m},$$

где функции $H_l\colon G\to\mathbb{C}$ таковы, что $H_l(0;z,w)\equiv 0$, $l=\overline{1,2m}$, T — знак транспонирования, функции $\psi_{\theta s_1}$, $\theta=\overline{1,s_1}$, и $\psi_{g s_2}$, $g=\overline{1,s_2}$, являются координатами векторных функций ${}^{s_1}\psi$ и ${}^{s_2}\psi$ соответственно, а векторная функция ${}^{\lambda}\varphi=({}^{k_1}\varphi,{}^{k_2}\varphi)$ на области G имеет координатные функции

$${}^{k_1}\varphi\colon (z,w)\to(\varphi_{1k_1},\dots,\varphi_{k_1k_1})({}^{s}z,{}^{k}w), \quad {}^{k_2}\varphi\colon (z,w)\to(\varphi_{1k_2},\dots,\varphi_{k_2k_2})({}^{s}z,{}^{k}w).$$

Введём в рассмотрение уравнение Пфаффа

$${}^{s_1}\psi({}^{s}z,{}^{k}w)d\,{}^{s_1}z + {}^{s_2}\psi({}^{s}z,{}^{k}w)d\,\overline{{}^{s_2}z} + {}^{k_1}\varphi({}^{s}z,{}^{k}w)d\,{}^{k_1}w + {}^{k_2}\varphi({}^{s}z,{}^{k}w)d\,\overline{{}^{k_2}w} = 0, \tag{8}$$

где векторы-столбцы $d\,{}^{s_1}z=\mathrm{colon}(dz_1,\dots,dz_{s_1})$, $d\,\overline{{}^{s_2}z}=\mathrm{colon}\big(d\,\overline{z}_{j_1},\dots,d\,\overline{z}_{j_{s_2}}\big)$, $d\,{}^{k_1}w=\mathrm{colon}(dw_1,\dots,dw_{k_1})$, $d\,\overline{{}^{k_2}w}=\mathrm{colon}\big(d\,\overline{w}_{\zeta_1},\dots,d\,\overline{w}_{\zeta_{k_2}}\big)$ и докажем критерий существования частного интеграла вида (2) у системы (1).

Теорема 2. *Для того, чтобы система* (1) *имела* $\mathbb{R}$*-дифференцируемый на области* G' *частный интеграл* (2), *необходимо и достаточно существования функций* ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$, ${}^{\lambda}\varphi$ *и* H_l, $l=\overline{1,2m}$, *удовлетворяющих системе* (7), *таких, что уравнение Пфаффа* (8) *имеет интегрирующий множитель, после умножения на который получаем точное уравнение Пфаффа с общим интегралом* (2) *на области* G^r, $r=\widetilde{s}+\widetilde{k}$, *являющейся естественной проекцией* G' *на подпространство* $O^{\widetilde{s}}z^{\widetilde{k}}w$, *где* $\widetilde{s}$ *и* $\widetilde{k}$ *— число независимых и зависимых переменных, от которых зависит функция* (2).

Доказательство. Необходимость. Пусть у системы (1) существует частный интеграл (2). Тогда выполняются тождества (3). Дифференцируя их λ раз по χ при $\theta = \overline{1, s_1}$, $g = \overline{1, s_2}$, и $\lambda - 1$ раз по χ при $\eta = \overline{s_1 + 1, m}$, $\nu = \overline{s_2 + 1, m}$, убеждаемся, что векторные функции

$$^{s_1}\psi\colon (z,w) \to \partial_{^{s_1}z} f(^s z, {}^k w), \quad {}^{s_2}\psi\colon (z,w) \to \partial_{\overline{^{s_2}z}} f(^s z, {}^k w) \ \ \forall (z,w) \in G',$$

$$^{k_1}\varphi\colon (z,w) \to \partial_{^{k_1}w} f(^s z, {}^k w), \quad {}^{k_2}\varphi\colon (z,w) \to \partial_{\overline{^{k_2}w}} f(^s z, {}^k w) \ \ \forall (z,w) \in G',$$

являются решением функциональной системы (7) при

$$H_l(f; z, w) = \Phi_l(f; z, w) \ \ \forall (z,w) \in G', \quad l = \overline{1, 2m},$$

где операторы $\partial_{^{s_1}z} = (\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_{s_1}})$, $\partial_{\overline{^{s_2}z}} = \big(\partial_{\overline{z}_{j_1}}, \ldots, \partial_{\overline{z}_{j_{s_2}}}\big)$, $\partial_{^{k_1}w} = (\partial_{w_1}, \ldots, \partial_{w_{k_1}})$, $\partial_{\overline{^{k_2}w}} = \big(\partial_{\overline{w}_{\zeta_1}}, \ldots, \partial_{\overline{w}_{\zeta_{k_2}}}\big)$. Отсюда следует, что функция (2) есть общий интеграл на области G^r уравнения Пфаффа (8).

Достаточность. Пусть ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$ и ${}^{\lambda}\varphi$ — решение системы (7), а уравнение Пфаффа (8), составленное на его основании, имеет при условии (5) интегрирующий множитель $\mu\colon (^s z, {}^k w) \to \mu(^s z, {}^k w)$ и соответствующий этому множителю общий интеграл (2). Тогда на G^r выполняется система тождеств

$$\begin{aligned} &\partial_{^{s_1}z} f(^s z, {}^k w) = \mu(^s z, {}^k w)\, {}^{s_1}\psi(^s z, {}^k w), \quad \partial_{\overline{^{s_2}z}} f(^s z, {}^k w) = \mu(^s z, {}^k w)\, {}^{s_2}\psi(^s z, {}^k w), \\ &\partial_{^{k_1}w} f(^s z, {}^k w) = \mu(^s z, {}^k w)\, {}^{k_1}\varphi(^s z, {}^k w), \quad \partial_{\overline{^{k_2}w}} f(^s z, {}^k w) = \mu(^s z, {}^k w)\, {}^{k_2}\varphi(^s z, {}^k w). \end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда в силу (7) получаем, что справедлива система тождеств (3), для которой $\Phi_l(f; z, w) = \mu(^s z, {}^k w) H_l(f; z, w)\ \forall (z,w) \in G'$, $l = \overline{1, 2m}$, а значит, (2) есть частный интеграл дифференциальной системы (1). ■

Теорема 3. *Пусть h систем (7) имеет q не являющихся линейно связанными на области G' решений*

$$\begin{gathered} {}^{s_1}\psi^{\varepsilon}\colon (z,w) \to {}^{s_1}\psi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w), \quad {}^{s_2}\psi^{\varepsilon}\colon (z,w) \to {}^{s_2}\psi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w), \\ {}^{\lambda}\varphi^{\varepsilon}\colon (z,w) \to {}^{\lambda}\varphi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w) \ \ \forall (z,w) \in G', \quad \varepsilon = \overline{1, q}, \end{gathered} \tag{10}$$

а построенные на их основании уравнения Пфаффа

$${}^{s_1}\psi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w)\, d^{s_1}z + {}^{s_2}\psi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w)\, d\,\overline{^{s_2}z} + {}^{k_1}\varphi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w)\, d^{k_1}w + {}^{k_2}\varphi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w)\, d\,\overline{^{k_2}w} = 0 \tag{11}$$

имеют соответственно $\mathbb{R}$-дифференцируемые общие интегралы

$$f_\varepsilon\colon ({}^s z, {}^k w) \to f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) \ \ \forall ({}^s z, {}^k w) \in G^r, \quad \varepsilon = \overline{1, q}.$$

Тогда эти общие интегралы функционально независимы на области G^r.

Доказательство. В силу тождеств (9) при $f = f_\varepsilon$, $\varepsilon = \overline{1, q}$, получаем, что

$$\partial_{{}^{s_1}z}\, f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w)\, {}^{s_1}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w), \ \ \partial_{\overline{{}^{s_2}z}}\, f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w)\, {}^{s_2}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),$$

$$\partial_{{}^{k_1}w}\, f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w)\, {}^{k_1}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w), \ \ \partial_{\overline{{}^{k_2}w}}\, f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w)\, {}^{k_2}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w)$$

$$\forall ({}^s z, {}^k w) \in G^r, \ \ \varepsilon = \overline{1, q}.$$

Поэтому матрица Якоби

$$J(f_\varepsilon({}^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = \left\| {}^{s_1}\Psi({}^s z, {}^k w)\, {}^{s_2}\Psi({}^s z, {}^k w)\, {}^{k_1}\Phi({}^s z, {}^k w)\, {}^{k_2}\Phi({}^s z, {}^k w) \right\| \ \ \forall ({}^s z, {}^k w) \in G^r,$$

где матрица $\left\| {}^{s_1}\Psi\ {}^{s_2}\Psi\ {}^{k_1}\Phi\ {}^{k_2}\Phi \right\|$ составлена из $(q \times s_1)$-матрицы ${}^{s_1}\Psi = \left\| \mu_\varepsilon \psi_{\varepsilon\theta s_1} \right\|$, $(q \times s_2)$-матрицы ${}^{s_2}\Psi = \left\| \mu_\varepsilon\, \psi_{\varepsilon g s_2} \right\|$, $(q \times k_1)$-матрицы ${}^{k_1}\Phi = \left\| \mu_\varepsilon\, \varphi_{\varepsilon\xi k_1} \right\|$ и $(q \times k_2)$-матрицы ${}^{k_2}\Phi = \left\| \mu_\varepsilon \varphi_{\varepsilon\tau k_2} \right\|$. Так как решения (10) не являются линейно связанными, то $\operatorname{rank} J(f_\varepsilon({}^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = q$ почти везде на области G^r, за исключением, быть может, множества r-мерной меры нуль.

Таким образом, общие интегралы уравнений Пфаффа (11) являются функционально независимыми на области G^r. ■

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dw_1 &= (w_1^2 + w_2\, \overline{w}_2)\, dz + (w_1 w_2 + w_2\, \overline{w}_2 + (2 + \overline{z}\,)\, \overline{w}_2^{\,2}\,)\, d\,\overline{z}\,, \\ dw_2 &= (w_2\, \overline{w}_1 - (1 + z) w_2^2\,)\, dz + \overline{w}_1 (w_2 + \overline{w}_2)\, d\,\overline{z} \end{aligned} \tag{12}$$

такова, что вронскианы по переменным z, $\overline{z}$, w_2 и $\overline{w}_1$ совокупностей

$$\left\{ w_1^2 + w_2\, \overline{w}_2,\ w_1(w_2 + \overline{w}_2) \right\}$$

и

$$\left\{ w_1 w_2 + w_2\, \overline{w}_2 + (2 + \overline{z}\,)\, \overline{w}_2^{\,2},\ w_1\, \overline{w}_2 - (1 + \overline{z}\,)\, \overline{w}_2^{\,2} \right\}$$

обращаются в нуль на интегральном многообразии $w_1 + \overline{w}_2 = 0$.

Следовательно, выполняются необходимые условия существования у системы (12) автономного (1,1)-цилиндричного частного интеграла (теорема 1).

Из системы (7) для дифференциальной системы (12) при

$$H_1\colon (z,w_1,w_2)\to(w_1+\overline{w}_2)(w_1+w_2), \quad H_2\colon (z,w_1,w_2)\to(w_1+\overline{w}_2)(w_2+\overline{w}_2)$$

находим решение $\varphi_1\colon (z,w_1,w_2)\to 1$, $\varphi_2\colon (z,w_1,w_2)\to 1$ $\forall (z,w_1,w_2)\in\mathbb{C}^3$. Составленное на основании этого решения уравнение Пфаффа (теорема 2)

$$dw_1 + d\,\overline{w}_2 = 0$$

имеет интегрирующий множитель $\mu\colon (w_1,w_2)\to 1$ и общий интеграл

$$f\colon (w_1,w_2)\to w_1+\overline{w}_2 \quad \forall (w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2. \tag{13}$$

Таким образом, функция (13) является автономным (1,1)-цилиндричным частным интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (12).

$\mathbb{R}$-дифференцируемые первые интегралы

Пусть система (1) имеет (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' первый интеграл

$$F\colon (z,w)\to F({}^s z,{}^k w) \ \ \forall (z,w)\in G'. \tag{14}$$

Тогда, согласно критерию существования первого интеграла, справедлива система тождеств $\mathfrak{X}_{lsk}F({}^s z,{}^k w)=0$ $\forall (z,w)\in G'$, $l=\overline{1,2m}$. Это означает, что вронскианы каждой из совокупностей (4) тождественно равны нулю на G, т.е. выполняется система тождеств (6) на области G при $\Psi_{l\chi}=0$, $l=\overline{1,2m}$; обозначим её $(\widetilde{6})$. Тем самым, доказаны

Теорема 4. *Для того, чтобы система* (1) *имела* (s_1,s_2)*-неавтономный* $(n-k_1,n-k_2)$*-цилиндричный* $\mathbb{R}$*-дифференцируемый первый интеграл* (14), *необходимо выполнение системы тождеств* $(\widetilde{6})$.

Следствие 4. *Система тождеств* $(\widetilde{6})$ *при* $s_2=0$, $k_2=0$ *является необходимым условием наличия* $(s_1,0)$*-неавтономного* $(n-k_1,n)$*-цилиндричного голоморфного первого интеграла* (14) *у дифференциальной системы* (1).

Следствие 5. *Система тождеств* $(\widetilde{6})$ *при* $s_1=0$, $k_1=0$ *является необходимым условием наличия* $(0,s_2)$*-неавтономного* $(n,n-k_2)$*-цилиндричного антиголоморфного первого интеграла* (14) *у системы* (1).

Следствие 6. *Для того, чтобы у системы* (1) *существовал автономный* $(n-k_1,n-k_2)$*-цилиндричный* $\mathbb{R}$*-дифференцируемый на области* Ω' *пространства* $\mathbb{C}^n$ *первый интеграл* $F\colon w\to F({}^k w)$ $\forall w\in\Omega'$ *необходимо выполнение системы тождеств* $(\widetilde{6})$ *при* $s_1=0$, $s_2=0$.

Пусть $\mathbb{R}$-дифференцируемые функции $X_{\xi l}\colon G \to \mathbb{C},\ \xi = \overline{1,n},\ l = \overline{1,2m}$, удовлетворяют условиям $(\widetilde{6})$. Составим функциональную систему (7), формально заменив H_l, $l = \overline{1,2m}$, нулём; обозначим такую систему $(\widetilde{7})$.

Теорема 5. *Для того, чтобы система* (1) *имела* $\mathbb{R}$*-дифференцируемый первый интеграл* (14)*, необходимо и достаточно существования функций* ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$ *и* ${}^{\lambda}\varphi$, *удовлетворяющих системе* $(\widetilde{7})$, *таких, что функция* (14) *является общим интегралом уравнения Пфаффа* (8).

Доказательство теоремы 5 основано на тех же принципах, что и доказательство теоремы 2. Аналогично теореме 3 доказывается

Теорема 6. *Пусть у системы* $(\widetilde{7})$ *существуют* q *не являющихся линейно связанными на области* G' *решений* (10), *для которых соответствующие уравнения Пфаффа* (11) *имеют общие* $\mathbb{R}$*-дифференцируемые интегралы*

$$F_\varepsilon\colon ({}^{s}z, {}^{k}w) \to F_\varepsilon({}^{s}z, {}^{k}w) \quad \forall ({}^{s}z, {}^{k}w) \in G^r, \quad \varepsilon = \overline{1,q}.$$

Тогда эти общие интегралы функционально независимыми на области G^r.

Для системы уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dw_1 &= \frac{2}{\overline{z}}\, w_2\, dz - \Big(\frac{1}{\overline{z}}\, w_1 + 2w_2^2 + 2z\, w_2\, \overline{w}_1\Big) d\,\overline{z}\,, \\ dw_2 &= -\,dz + \overline{z}\,(w_2 + z\,\overline{w}_1)\, d\,\overline{z} \end{aligned} \tag{15}$$

выполняются необходимые условия (теорема 4) существования (1,0)-неавтономного (2,0)-цилиндричного первого интеграла, так как вронскианы по переменным $\overline{z}$, w_1 и w_2 совокупностей

$$\Big\{1,\ -\frac{1}{z}\,\overline{w}_1 - 2\,\overline{w}_2^{\,2} - 2\,\overline{z}\,w_1\,\overline{w}_2,\ z(\,\overline{z}\,w_1 + \overline{w}_2)\Big\} \quad \text{и} \quad \Big\{\,\frac{2\,\overline{w}_2}{z}\,,\ -1\Big\}$$

равны нулю на любой области G из множества $\{(z, w_1, w_2)\colon z \neq 0\}$.

Из функциональной системы $(\widetilde{7})$ для дифференциальной системы (15)

$$\psi_1 - \Big(\frac{1}{z}\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}_2^{\,2} + 2\,\overline{z}\,w_1\,\overline{w}_2\Big)\varphi_1 + z(\,\overline{w}_2 + \overline{z}\,w_1)\varphi_2 = 0,$$

$$-\,2w_1\,\overline{w}_2\,\varphi_1 + zw_1\,\varphi_2 = 0, \quad -\,2\,\overline{z}\,\overline{w}_2\,\varphi_1 + z\,\overline{z}\,\varphi_2 = 0, \quad \frac{2}{z}\,\overline{w}_2\,\varphi_1 - \varphi_2 = 0$$

находим решение $\psi_1\colon (z, w_1, w_2) \to \overline{w}_1$, $\varphi_1\colon (z, w_1, w_2) \to z$, $\varphi_2\colon (z, w_1, w_2) \to 2\overline{w}_2$ $\forall (z, w_1, w_2) \in G$. Построенное на его основании уравнение Пфаффа

$$\overline{w}_1\, dz + z\, d\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}_2\, d\,\overline{w}_2 = 0$$

имеет общий интеграл (теорема 5)

$$F\colon (z, w_1, w_2) \to z\,\overline{w}_1 + \overline{w}_2^{\,2} \quad \forall (z, w_1, w_2) \in G. \tag{16}$$

Так как скобки Пуассона

$$\big[\mathfrak{X}_1(z, w_1, w_2), \mathfrak{X}_2(z, w_1, w_2)\big] = \big(1 + 2z\,\overline{w}_2(\,\overline{z}\, w_1 + \overline{w}_2\,)\big)\big(2w_2\,\partial_{w_1} - \overline{z}\,\partial_{w_2}\big) -$$

$$- \big(1 + 2\,\overline{z}\, w_2(w_2 + z\,\overline{w}_1)\big)\big(2\,\overline{w}_2\,\partial_{\overline{w}_1} - z\,\partial_{\overline{w}_2}\big) \quad \forall (z, w_1, w_2) \in G$$

не равны нуль-оператору на области $G,$ то система уравнений в полных дифференциалах (15) не является вполне разрешимой, а её интегральный базис состоит не более, чем из одного первого интеграла.

Таким образом, (1,0)-неавтономный (2,0)-цилиндричный первый интеграл (16) образует интегральный базис системы (15) на любой области G из множества $\{(z, w_1, w_2)\colon\, z \neq 0\}$ пространства $\mathbb{C}^3$.

$\mathbb{R}$-дифференцируемые последние множители

Допустим теперь, что система (1) имеет $\mathbb{R}$-дифференцируемый (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный последний множитель

$$\mu\colon (z, w) \to \mu({}^{s}z, {}^{k}w) \quad \forall (z, w) \in G'. \tag{17}$$

Тогда, согласно критерию существования последнего множителя, справедлива система тождеств

$$\mathfrak{X}_{lsk}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) + \mu({}^{s}z, {}^{k}w)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{X}_l(z, w) = 0 \ \ \forall (z, w) \in G', \quad l = \overline{1, 2m}. \tag{18}$$

Отсюда методом, аналогичным использованному при доказательстве теоремы 1, устанавливаем, что выполняется система

$$\begin{gathered}
W_\chi\big(1, {}^{\lambda}X^{\theta}(z, w), \mathrm{div}\,\mathfrak{X}_\theta(z, w)\big) = 0 \ \ \forall (z, w) \in G', \quad \theta = \overline{1, s_1}, \\
W_\chi\big(1, {}^{\lambda}X^{\eta}(z, w), \mathrm{div}\,\mathfrak{X}_\eta(z, w)\big) = 0 \ \ \forall (z, w) \in G', \quad \eta = \overline{s_1 + 1, m}, \\
W_\chi\big(1, {}^{\lambda}X^{m+j_g}(z, w), \mathrm{div}\,\mathfrak{X}_{m+j_g}(z, w)\big) = 0 \ \ \forall (z, w) \in G', \quad g = \overline{1, s_2}, \\
W_\chi\big({}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z, w), \mathrm{div}\,\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z, w)\big) = 0 \ \ \forall (z, w) \in G', \quad \nu = \overline{s_2 + 1, m}.
\end{gathered} \tag{19}$$

Поэтому имеют место

Теорема 7. *Для того, чтобы системы* (1) *имела* (s_1,s_2)*-неавтономный* $(n-k_1,n-k_2)$*-цилиндричный* $\mathbb{R}$*-дифференцируемый последний множитель* (17)*, необходимо выполнение системы тождеств* (19).

Следствие 7. *Система тождеств* (19) *при* $s_2=0,\ k_2=0$ *является необходимым условием наличия* $(s_1,0)$*-неавтономного* $(n-k_1,n)$*-цилиндричного голоморфного последнего множителя* (17) *у системы* (1).

Следствие 8. *Система тождеств* (19) *при* $s_1=0,\ k_1=0$ *является необходимым условием наличия* $(0,s_2)$*-неавтономного* $(n,n-k_2)$*-цилиндричного антиголоморфного последнего множителя* (17) *у системы* (1).

Следствие 9. *Для того, чтобы у системы* (1) *существовал автономный* $(n-k_1,n-k_2)$*-цилиндричный* $\mathbb{R}$*-дифференцируемый на области* Ω' *пространства* $\mathbb{C}^n$ *последний множитель* $\mu\colon w\to\mu({}^k w)\ \forall w\in\Omega'$ *необходимо выполнение системы тождеств* (19) *при* $s_1=0,\ s_2=0$.

Пусть $\mathbb{R}$-дифференцируемые функции $X_{\xi l}\colon G\to\mathbb{C},\ \xi=\overline{1,n},\ l=\overline{1,2m}$, удовлетворяют условиям (19). Составим функциональную систему (7), формально считая $H_l(z,w)=\,-\operatorname{div}\mathfrak{X}_l(z,w),\ l=\overline{1,2m}$; обозначим её $(\,\widehat{7}\,)$.

Теорема 8. *Для того, чтобы система* (1) *имела последний множитель* (17)*, необходимо и достаточно существования функций* ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$ *и* ${}^{\lambda}\varphi$, *удовлетворяющих системе* $(\,\widehat{7}\,)$, *таких, что составленное на их основании уравнение Пфаффа* (8) *является точным на области* G^r. *При этом последний множитель* (17) *системы* (1) *представим в виде*

$$\mu\colon (z,w)\to\exp g({}^s z,{}^k w)\quad \forall (z,w)\in G', \tag{20}$$

где функция

$$g\colon ({}^s z,{}^k w)\to \int {}^{s_1}\psi({}^s z,{}^k w)d\,{}^{s_1}z+{}^{s_2}\psi({}^s z,{}^k w)d\,\overline{{}^{s_2}z}+{}^{k_1}\varphi({}^s z,{}^k w)d\,{}^{k_1}w+{}^{k_2}\varphi({}^s z,{}^k w)d\,\overline{{}^{k_2}w}.$$

Доказательство. Необходимость. Если у система (1) существует $\mathbb{R}$-дифференцируемый последний множитель (17), то верна система тождеств (18). Выполним почленное деление тождеств (18) на $\mu({}^s z,{}^k w)$, а затем процесс дифференцирования, описанный при доказательстве теоремы 2, полученных тождеств по χ. В результате убеждаемся, что векторные функции

$${}^{s_1}\psi\colon ({}^s z,{}^k w)\to\partial_{{}^{s_1}z}\ln\mu({}^s z,{}^k w),\quad {}^{s_2}\psi\colon ({}^s z,{}^k w)\to\partial_{\overline{{}^{s_2}z}}\ln\mu({}^s z,{}^k w),$$

$${}^{k_1}\varphi\colon ({}^s z,{}^k w)\to\partial_{{}^{k_1}w}\ln\mu({}^s z,{}^k w),\quad {}^{k_2}\varphi\colon ({}^s z,{}^k w)\to\partial_{\overline{{}^{k_2}w}}\ln\mu({}^s z,{}^k w)\ \ \forall ({}^s z,{}^k w)\in G^r$$

являются решением системы ($\widehat{7}$). Уравнение Пфаффа (8) является точным, а последний множитель системы (1) строится по формуле (20).

Достаточность. Пусть ${}^{s_1}\psi,\ {}^{s_2}\psi,\ {}^{\lambda}\varphi$ — решение системы ($\widehat{7}$), а уравнение Пфаффа (8), составленное на его основании, является точным на области G^r. Тогда справедливы тождества

$$\partial_{{}^{s_1}z}\, g({}^{s}z, {}^{k}w) \,=\, {}^{s_1}\psi({}^{s}z, {}^{k}w), \quad \partial_{\overline{{}^{s_2}z}}\, g({}^{s}z, {}^{k}w) \,=\, {}^{s_2}\psi({}^{s}z, {}^{k}w) \quad \forall ({}^{s}z, {}^{k}w) \in G^r,$$

$$\partial_{{}^{k_1}w}\, g({}^{s}z, {}^{k}w) \,=\, {}^{k_1}\varphi({}^{s}z, {}^{k}w), \quad \partial_{\overline{{}^{k_2}w}}\, g({}^{s}z, {}^{k}w) \,=\, {}^{k_2}\varphi({}^{s}z, {}^{k}w) \quad \forall ({}^{s}z, {}^{k}w) \in G^r.$$

Отсюда в силу ($\widehat{7}$) получаем, что имеет место система тождеств (18). Следовательно, функция (20) будет последним множителем системы (1). ■

Подобно теореме 3 доказывается

Теорема 9. *Пусть у системы* ($\widehat{7}$) *существуют* q *не являющихся линейно связанными на области* G' *решений* (10), *для которых соответствующие уравнения Пфаффа* (11) *являются точными на области* G^r. *Тогда* $\mathbb{R}$*-дифференцируемые последние множители системы* (1)

$$\mu_\varepsilon\colon (z,w) \to \exp\biggl(\int {}^{s_1}\psi^{\varepsilon}({}^{s}z, {}^{k}w)\, d\,{}^{s_1}z \,+\, {}^{s_2}\psi^{\varepsilon}({}^{s}z, {}^{k}w)\, d\,\overline{{}^{s_2}z} \,+$$

$$+\, {}^{k_1}\varphi^{\varepsilon}({}^{s}z, {}^{k}w)\, d\,{}^{k_1}w \,+\, {}^{k_2}\varphi^{\varepsilon}({}^{s}z, {}^{k}w)\, d\,\overline{{}^{k_2}w} \biggr) \quad \forall (z,w) \in G', \quad \varepsilon = \overline{1,q},$$

являются функционально независимыми на области G'.

Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dw_1 &= w_1(1 + 2\,\overline{w}_2)\, dz + w_1(1 + 2w_2)\, d\,\overline{z}, \\ dw_2 &= w_2(w_1 - 1)\, dz - w_2(w_2 + \overline{w}_1)\, d\,\overline{z} \end{aligned} \tag{21}$$

такова, что у совокупностей $\bigl\{w_1(1 + 2\,\overline{w}_2), 1 + 2\,\overline{w}_2\bigr\}$ и $\bigl\{w_1(1 + 2w_2), 1 + 2w_2\bigr\}$ вронскианы по переменным $z,\ \overline{z},\ w_2,\ \overline{w}_1$ и $\overline{w}_2$ равны нулю на $\mathbb{C}^3$.

Значит, выполняются необходимые условия существования у системы (21) автономного (1,2)-цилиндричного последнего множителя (следствие 9).

Из функциональной системы ($\widehat{7}$) для системы (21)

$$w_1(1 + 2\,\overline{w}_2)\,\varphi = \,-\,(1 + 2\,\overline{w}_2), \quad 2w_1\,\varphi = \,-\,2, \quad w_1(1 + 2w_2)\,\varphi = \,-\,(1 + 2w_2)$$

находим решение $\varphi\colon (w_1, w_2) \to -\dfrac{1}{w_1}$ $\forall (w_1, w_2) \in \Omega,$ где Ω — любая область из множества $\{(w_1, w_2)\colon w_1 \neq 0\}$ пространства $\mathbb{C}^2$.

Тогда автономный голоморфный последний множитель (теорема 8) системы уравнений в полных дифференциалах (21) имеет вид

$$\mu\colon (w_1, w_2) \to \frac{1}{w_1} \quad \forall (w_1, w_2) \in \Omega.$$

Список литературы

1. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного. В 2-х ч. Ч. 1. М.: Наука, 1985. 336 с.

2. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных. В 2-х ч. Ч. 2. М.: Наука, 1985. 464 с.

3. *Положий Г.Н.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Из-во КГУ, 1965. 444 с.

4. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. М.: Наука,1988. 512с.

5. *Гайшун И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2004. 272 с.

6. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Об $\mathbb{R}$-голоморфных решениях системы уравнений в полных дифференциалах// Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 124–126.

7. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* $\mathbb{R}$-голоморфные решения уравнения в полных дифференциалах// Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 4. С. 447–452.

8. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Интегралы $\mathbb{R}$-линейных систем в полных дифференциалах//Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 1. С. 49–52.

9. *Проневич А.Ф.* Интегралы систем уравнений в частных производных с $\mathbb{R}$-линейными коэффициентами // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта. Сер. 2. 2005. № 1(31). С. 45–52.

10. *Горбузов В.Н.* Интегралы систем уравнений в полных дифференциалах: монография. Гродно: ГрГУ, 2005. 273 с.

11. *Гурса Э.* Курс математического анализа. В 2-х т. Т. 2. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 563 с.

12. *Горбузов В.Н.* Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах// Дифференциальные уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru/journal). 2000. № 2. С. 1–36.

13. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем: монография. Гродно: ГрГУ, 2006. 447 с.

14. *Мироненко В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Минск: Изд-во БГУ, 1981. 104 с.

15. *Горбузов В.Н.* Автономность системы уравнений в полных дифференциалах// Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 2. С. 149–156.

16. *Проневич А.Ф.* $\mathbb{R}$-дифференцируемые интегралы систем в полных дифференциалах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02/ А.Ф. Проневич. Гродно, 2005. 95 л.

17. *Горбузов В.Н.* Математический анализ: теория поля. Гродно: ГрГУ, 2000. 627 с.