ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2004
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория многомерных дифференциальных уравнений

О КЛАССИФИКАЦИИ НАКРЫВАЮЩИХ СЛОЕНИЙ

В.Н. Горбузов, В.Ю. Тыщенко

Гродненский государственный университет им. Я.Купалы
230023, Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: gorbuzov@grsu.unibel.by; vt@grsu.grodno.by

Одним из эффективных аппаратов качественного (топологического) исследования дифференциальных уравнений является теория слоений, родоначальником которой является Анри Пуанкаре [1]. На основании методов этой теории свойства дифференциальных уравнений изучались, например, И.Г. Петровским и Е.М. Ландисом [2], Ю.С. Ильяшенко [3], Н.Н. Ладисом [4], C. Camacho и P. Sad [5] и др. В данной работе будем рассматривать классификации одного вида слоений, а именно накрывающих слоений [6].

1. Накрывающие слоения. Пусть A и B линейно связные гладкие многообразия размерностей $\dim A = n$ и $\dim B = m$.

Гладкое слоение L размерности m на многообразии $A \times B$, трансверсальное к $A \times \{b\}$ для всех $b \in B$, назовем *накрывающим слоением*, если естественная проекция $\mathfrak{p} : A \times B \to B$ определяет для каждого слоя этого слоения накрытие многообразия B.

Например, построенное в [7] слоение (n, B) является накрывающим слоением при $A = \mathbb{C}^n$.

Заметим, что накрывающее слоение устанавливает связность в тривиальном расслоении.

В

дальнейшем будем рассматривать линейно связные гладкие многообразия A_1, A_2, B_1, B_2, считая, что многообразия A_1 и A_2 гомеоморфны друг другу и имеют одинаковую размерность $\dim A_1 = \dim A_2 = n$, а размерности $\dim B_1 = \dim B_2 = m$.

Через L^j обозначим накрывающее слоение на многообразии $A_j \times B_j$, а через $L^j_{c_j}$ — слой накрывающего слоения L^j, содержащий точку $c_j \in A_j \times B_j$. Естественные проекции на многообразия B_j и A_j соответсвенно обозначим

$$\mathfrak{p}_j : A_j \times B_j \to B_j \quad \text{и} \quad \mathfrak{q}_j : A_j \times B_j \to A_j,\ j = \overline{1,2}.$$

2. Вложимость накрывающих слоений [6]. Будем говорить, что накрывающее слоение L^1 *вложимо* в накрывающее слоение L^2, если существует такое вложение

$$h : A_1 \times B_1 \hookrightarrow A_2 \times B_2,$$

что

$$\mathfrak{q}_2 \circ h(A_1 \times B_1) = A_2 \quad \text{и} \quad h\big(L^1_{c_1}\big) \hookrightarrow L^2_{h(c_1)},\ \forall c_1 \in A_1 \times B_1.$$

Пусть ν — гомоморфизмы одномерной группы гомологий $H_1(B_1)$ в одномерную группу гомологий $H_1(B_2)$, индуцированные вложениями

$$g_\nu : B_1 \hookrightarrow B_2.$$

Группу гомоморфизмов ν обозначим $\mathrm{Hom}(H_1(B_1), H_1(B_2))$. Действия $\Phi_j : A_j \times H_1(B_j) \to A_j$ одномерных групп гомологий $H_1(B_j)$, порождённые накрывающими слоениями L^j, на многообразия A_j определим формулами

$$\Phi_j^{[\alpha_j]}(a_j) = \mathfrak{q}_j \circ r_j \circ s_j(1),\ a_j \in A_j,\ [\alpha_j] \in H_1(B_j),$$

где $r_j(\tau)$ есть поднятие одного из путей $s_j(\tau) \subset B_j$, $\forall \tau \in [0;1]$, которые соответствуют элементу $[\alpha_j]$ одномерной группы гомологий $H_1(B_j)$, на слой $L^j_{(a_j, s_j(0))}$ слоения L^j в точку $(a_j, s_j(0))$, $j = \overline{1,2}$.

Теорема 1. *Для вложимости накрывающего слоения L^1 в накрывающее слоение L^2 необходимо и достаточно существования таких гомоморфизма $\nu \in \mathrm{Hom}(H_1(B_1), H_1(B_2))$ и гомеоморфизма $f : A_1 \to A_2$, что*

$$f \circ \Phi_1^{[\alpha]} = \Phi_2^{\nu([\alpha])} \circ f,\ \forall [\alpha] \in H_1(B_1). \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $h : A_1 \times B_1 \hookrightarrow A_2 \times B_2$ задаёт вложимость слоения L^1 в слоение L^2. Возьмём фиксированную точку a_1^0 на многообразии A_1 и отмеченную точку b_1^0 на многообразии B_1. Для произвольной точки a_1 многообразия A_1 обозначим через $s(\tau)$, $\forall \tau \in [0;1]$, такой путь в $A_1 \times \{b_1^0\} \subset A_1 \times B_1$, который соединяет точки (a_1, b_1^0) и (a_1^0, b_1^0) и при этом $s(0) = (a_1, b_1^0)$, $s(1) = (a_1^0, b_1^0)$. Пусть

$$s_3(\tau) = \mathfrak{p}_2 \circ h \circ s(\tau), \ a_2 = \mathfrak{q}_2 \circ h(a_1, b_1^0), \ f(a_1) = \mathfrak{q}_2 \circ r_3(1),$$

где $r_3(\tau)$ — поднятие пути $s_3(\tau), \forall \tau \in [0;1]$, на слой слоения L^2 в точку $(a_2, s_3(0))$. Далее непосредственным образом проверяем выполнение соотношений (1).

Достаточность. Пусть для действий Φ_1 и Φ_2 имеет место соотношения (1). Для пути $s_4 : [0;1] \to B_1$ такого, что $s_4(0) = b_1, s_4(1) = b_1^0$, положим

$$G(a_1, b_1) = (g_\nu s_6^{-1} \circ f \circ s_5(a_1), g_\nu(b_1)), \tag{2}$$

где $s_5(a_1) = \mathfrak{q}_1 \circ r_4(1)$, $r_4(\tau)$ — поднятие пути s_4 на слой слоения L^1 в точку (a_1, b_1), $g_\nu s_6^{-1}(a_2) = \mathfrak{q}_2 \circ g_\nu r_5^{-1}(1)$, $g_\nu r_5^{-1}(\tau)$ есть результат поднятия пути $g_\nu \circ s_4^{-1}$ на слой слоения L^2 в соответствующую точку, s_4^{-1} — путь, обратный пути s_4. Теперь непосредственно убеждаемся, что отображение (2) определяет вложение $L^1 \hookrightarrow L^2$. Теорема 1 доказана.

Найдём условия вложимости накрывающих слоений. Для этого введём в рассмотрение действия $\Phi_{jk*} \colon \pi_k(A_j) \times H_1(B_j) \to \pi_k(A_j)$ одномерных групп гомологий $H_1(B_j)$, порождённые накрывающими слоениями L^j, на гомотопические группы $\pi_k(A_j)$ и действия $\Phi_{jk**} \colon H_k(A_j) \times H_1(B_j) \to H_k(A_j)$ одномерных групп гомологий $H_1(B_j)$, порождённые накрывающими слоениями L^j, на k-мерные группы гомологий $H_k(A_j)$, $k = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, 2}$. Эти действия определим в виде отображений:

$$\Phi_{jk*}^{[\alpha_j]} : \pi_k(A_j) \to \pi_k(A_j), \quad [\alpha_j] \in H_1(B_j), \tag{3}$$

и

$$\Phi_{jk**}^{[\alpha_j]} : H_k(A_j) \to H_k(A_j), \quad [\alpha_j] \in H_1(B_j), \tag{4}$$

где $\Phi_{jk*}^{[\alpha_j]}(\pi_k(A_j))$ и $\Phi_{jk**}^{[\alpha_j]}(H_k(A_j))$ есть автоморфизмы, индуцированные гомеоморфизмом $\Phi_j^{[\alpha_j]} \colon A_j \to A_j$, $k = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, 2}$.

Если каждое из многообразий A_1 и A_2 стягивается в точку (например, когда $A_1 = A_2 = \mathbb{C}^n$), то гомотопические группы $\pi_k(A_1)$ и $\pi_k(A_2)$, а также k-мерные группы гомологий $H_k(A_1)$ и $H_k(A_2)$, являются тривиальными. В случае же, когда многообразия A_1 и A_2 не стягиваются в точку, могут быть полезными следующие два утверждения, которые вытекают из теоремы 1 и указывают на возможные дополнительные топологические препятствия к вложимости накрывающих слоений.

Теорема 2. *Действия* (3) *необходимо сопряжены при вложимости* *накрывающего слоения* L^1 *в накрывающее слоение* L^2, *то есть,*

$$\lambda \circ \Phi_{1k*}^{[\alpha]} = \Phi_{2k*}^{\nu([\alpha])} \circ \lambda, \ \forall [\alpha] \in H_1(B_1), \ k = \overline{1, n-1},$$

где гомоморфизм ν *и изоморфизм* λ *такие, что*

$$\nu \in \mathrm{Hom}(H_1(B_1), H_1(B_2)) \quad \text{и} \quad \lambda\colon \pi_k(A_1) \to \pi_k(A_2), \ k = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 3. *Действия (4) необходимо сопряжены при вложимости накрывающего слоения* L^1 *в накрывающее слоение* L^2, *то есть,*

$$\sigma \circ \Phi_{1k**}^{[\alpha]} = \Phi_{2k**}^{\nu([\alpha])} \circ \sigma, \ \forall [\alpha] \in H_1(B_1), \ k = \overline{1, n-1},$$

где гомоморфизм ν *и изоморфизм* σ *такие, что*

$$\nu \in \mathrm{Hom}(H_1(B_1), H_1(B_2)) \quad \text{и} \quad \sigma\colon H_k(A_1) \to H_k(A_2), \ k = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим уравнения Риккати

$$\frac{dw}{dz} = a_2(z)w^2 + a_1(z)w + a_0(z) \tag{5}$$

и

$$\frac{dw}{dz} = b_2(z)w^2 + b_1(z)w + b_0(z), \tag{6}$$

где функции a_i голоморфны на комплексной плоскости $\Gamma_1^{m_1}$ — плоскости с m_1 удаленными точками $z_{11}, \dots z_{m_1 1}$, а функции b_i голоморфны на комплексной плоскости $\Gamma_2^{m_2}$ — плоскости с m_2 удаленными точками $z_{12}, \dots z_{m_2 2}$, $i = \overline{0, 2}$. Уравнение (5) определяет накрывающее слоение L^3 на многообразии $\overline{\mathbb{C}} \times \Gamma_1^{m_1}$, а уравнение (6) определяет накрывающее слоение L^4 на многообразии $\overline{\mathbb{C}} \times \Gamma_2^{m_2}$, где $\overline{\mathbb{C}}$ — сфера Римана. Будем говорить, что уравнение Риккати (5) *вложимо* в уравнение Риккати (6), если накрывающее слоение L^3 вложимо в накрывающее слоение L^4.

Для определения действий одномерных групп гомологий $H_1(\Gamma_1^{m_1})$ и $H_1(\Gamma_2^{m_2})$, порожденных накрывающими слоениями L^3 и L^4, на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ (т. е. преобразований голономии) рассмотрим вспомогательные линейные однородные системы

$$\frac{dv_1}{dz} = a_1(z)v_1 + a_0(z)v_2, \quad \frac{dv_2}{dz} = -a_2(z)v_1 \tag{7}$$

и

$$\frac{dv_1}{dz} = b_1(z)v_1 + b_0(z)v_2, \quad \frac{dv_2}{dz} = -b_2(z)v_1. \tag{8}$$

Из того, что заменой $w = v_1 v_2^{-1}$ систему (7) переводим в уравнение Риккати (5), а систему (8) — в уравнение Риккати (6), получаем:

преобразования голономии уравнения Риккати (5), соответствующие выколотым точкам $z_{11},\dots z_{m_1 1}$, имеют вид

$$P_k(w)=\frac{p_{11k}w+p_{12k}}{p_{21k}w+p_{22k}}\,,\quad k=\overline{1,m_1};$$

преобразования голономии уравнения Риккати (6), соответствующие выколотым точкам $z_{12},\dots z_{m_2 2}$, имеют вид

$$Q_k(w)=\frac{q_{11k}w+q_{12k}}{q_{21k}w+q_{22k}}\,,\quad k=\overline{1,m_2}.$$

Дробно-линейным отображениям $P_k(w)$ поставим в соответствие матрицы $P_k=||p_{ij}||\in GL(2,\mathbb{C})$, $k=\overline{1,m_1}$, а дробно-линейным отображениям $Q_k(w)$ — матрицы $Q_k=||q_{ij}||\in GL(2,\mathbb{C})$, $k=\overline{1,m_2}$. Матрицы P_k назовём *матрицами голономии* уравнения Риккати (5), а матрицы Q_k — *матрицами голономии* уравнения Риккати (6).

Пусть $[g_{kj}]$, $k=\overline{1,m_j}$, есть положительно ориентированные образующие группы $H_1\bigl(\Gamma_j^{m_j}\bigr)$, $j=\overline{1,2}$. Тогда группа $\operatorname{Hom}\bigl(H_1\bigl(\Gamma_1^{m_1}\bigr),H_1\bigl(\Gamma_2^{m_2}\bigr)\bigr)$ порождена отображениями

$$\bigl\{[g_{11}],\dots,[g_{m_1 1}]\bigr\}\to\Delta_1,$$

где набор Δ_1 состоит из m_1 элементов, каждый элемент этого набора принадлежит множеству $\bigl\{[g_{12}],\dots,[g_{m_2 2}],[e_2]\bigr\}$, где $[e_2]$ — единичный элемент группы $H_1\bigl(\Gamma_2^{m_2}\bigr)$, и каждая из образующих $[g_{12}],\cdots,[g_{m_2 2}]$, может входить не более одного раза; и автоморфизмом $\operatorname{Aut}H_1\bigl(\Gamma_2^{m_2}\bigr):$

$$[g_{k2}]\to[g_{k2}]^{-1},\ k=\overline{1,m_2}.$$

Обозначим через $\widehat{\Delta}_1$ набор натуральных чисел, образованный из набора Δ_1 по следующему правилу: на соответствующее место набора Δ_1 в случае элемента $[g_{k2}]$ ставится индекс k, а в случае элемента $[e_2]$ ставится индекс m_2+1. При этом будем полагать $Q_{m_2+1}=I$ — единичная матрица.

Теорема 4. *Для вложимости уравнения Риккати* (5) *в уравнение Риккати* (6) *необходимо, чтобы существовало такое отображение*

$$\chi\colon(1,\dots,m_1)\to\widehat{\Delta}_1,$$

что нормальные жордановы формы матриц P_k и $Q_{\chi(k)}$ имеют одинаковое число блоков Жордана, $k=\overline{1,m_1}$.

Доказательство. Пусть уравнение Риккати (5) вложимо в уравнение Риккати (6). Тогда на основании теоремы 1 получаем:

$$f\circ P_k(w)=Q_{\chi(k)}\circ f(w),\ \forall w\in\overline{\mathbb{C}}.\tag{9}$$

Матрицу P_k представим в виде $P_k = S_k J_k S_k^{-1}$, где J_k есть нормальная жорданова форма матрицы P_k. Непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$P_k(w) = S_k \circ J_k \circ S_k^{-1}(w),\ \forall w \in \overline{\mathbb{C}}, \tag{10}$$

где $S_k(w)$ есть дробно-линейное отображение, поставленное в соответствие по выше приведенному правилу матрице S_k, $J_k(w)$ — матрице J_k, $S_k^{-1}(w)$ есть отображение, обратное $S_k(w)$. С учётом (10) из (9) получаем:

$$h \circ J_k(w) = Q_{\chi(k)} \circ h(w),\ \forall w \in \overline{\mathbb{C}}, \tag{11}$$

где $h(w) = f \circ S_k(w)$. Гомеоморфизм $h\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ переводит точку 0 в точку $w_1 \in \overline{\mathbb{C}}$, точку ∞ — в точку $w_2 \in \overline{\mathbb{C}}$. Возьмём такое дробно-линейное отображение $u\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, что $u\colon w_1 \to 0$, $u\colon w_2 \to \infty$. Выполняя замену гомеоморфизмов $v = u \circ h$, из соотношения (11) получаем

$$v \circ J_k(w) = u \circ Q_{\chi(k)} \circ u^{-1} \circ v(w),\ \forall w \in \overline{\mathbb{C}}, \tag{12}$$

где

$$u \circ Q_{\chi(k)} \circ u^{-1}(w) = \frac{aw + b}{cw + d},\ ad - bc \neq 0,$$

а гомеоморфизм $v\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ такой, что

$$v(0) = 0, \quad v(\infty) = \infty. \tag{13}$$

Пусть нормальная жорданова форма J_k матрицы P_k состоит из двух блоков Жордана, т.е. $J_k = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}$. Тогда отображение $J_k(w) = \lambda_1 \lambda_2^{-1} w$ и на основании (12) и (13) получаем, что $b = c = 0$, то есть,

$$u \circ Q_{\chi(k)} \circ u^{-1}(w) = ad^{-1} w.$$

Очевидно, что дробно-линейному отображению $w \to ad^{-1}w$ соответствует нормальная жорданова форма матрицы $Q_{\chi(k)}$, состоящая из двух блоков. В силу произвольности выбора k приходим к утверждению теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть $\{p_{1k}, p_{2k}\}$ есть множество собственных значений матрицы голономии P_k простой структуры уравнения* (5), $k = \overline{1, m_1}$, *а $\{q_{1k}, q_{2k}\}$ есть множество собственных значений матрицы голономии Q_k простой структуры уравнения* (6), $k = \overline{1, m_2}$. *Матрицы P_k, $k = \overline{1, m_1}$, и Q_k, $k = \overline{1, m_2}$, соответственно, перестановочны. Тогда уравнение Риккати* (5) *вложимо в уравнение Риккати* (6), *если и только если существуют отображение $\chi\colon (1, \ldots, m_1) \to \widehat{\Delta}_1$ и число $\alpha \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \alpha \neq -1$, что*

$$q_{1\chi(k)}/q_{2\chi(k)} = \frac{p_{1k}}{p_{2k}}\left|\frac{p_{1k}}{p_{2k}}\right|^{\alpha},\ k=\overline{1,m_1},\ \text{ или }\ \overline{q_{1\chi(k)}/q_{2\chi(k)}} = \frac{p_{1k}}{p_{2k}}\left|\frac{p_{1k}}{p_{2k}}\right|^{\alpha},\ k=\overline{1,m_1}.$$

Доказательство теоремы 5 проводится аналогично доказательству теоремы 4 на основании леммы из [7] и того факта [8, с. 194], что перестановочные матрицы простой структуры приводятся к диагональному виду одним преобразованием подобия.

Аналогично теореме 5 доказывается

Теорема 6. *Пусть* $\{p_{1k}, p_{2k}\}$ *есть множество собственных значений матрицы голономии* P_k *простой структуры уравнения* (5), $k=\overline{1,m_1}$, *а* $\{q_{1k}, q_{2k}\}$ *есть множество собственных значений матрицы голономии* Q_k *простой структуры уравнения* (6), $k=\overline{1,m_2}$. *Тогда для вложимости уравнения* (5) *в уравнение* (6) *необходимо, чтобы существовали такие отображение* $\chi\colon (1,\ldots,m_1)\to\widehat{\Delta}_1$ *и числа* $\alpha_k\in\mathbb{C}$ *с* $\operatorname{Re}\alpha_k\neq -1$, *что*

$$q_{1\chi(k)}/q_{2\chi(k)} = \frac{p_{1k}}{p_{2k}}\left|\frac{p_{1k}}{p_{2k}}\right|^{\alpha_k} \text{ или } \overline{q_{1\chi(k)}/q_{2\chi(k)}} = \frac{p_{1k}}{p_{2k}}\left|\frac{p_{1k}}{p_{2k}}\right|^{\alpha_k}, k=\overline{1,m_1}.$$

3. Топологическая эквивалентность накрывающих слоений [9]. В этом пункте будем считать многообразия B_1 и B_2 гомеоморфными.

Два накрывающих слоения L^1 и L^2 назовём *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon A_1\times B_1\to A_2\times B_2$, такой, что

$$\mathfrak{q}_2\circ h(A_1\times B_1)=A_2,\ h(L^1_{c_1})=L^2_{h(c_1)},\ \forall c_1\in A_1\times B_1.$$

Будем рассматривать изоморфизмы ν одномерных групп гомологий $H_1(B_1)$ и $H_1(B_1)$, индуцированные гомеоморфизмами $g_\nu\colon B_1\to B_2$. Группу таких изоморфизмов обозначим $I(H_1(B_1),H_1(B_2))$. Из теоремы 1 следует

Теорема 7. *Для топологической эквивалентности накрывающих слоений* L^1 *и* L^2 *необходимо и достаточно существования изомоморфизма* $\nu\in I(H_1(B_1),H_1(B_2))$ *и гомеоморфизма* $f\colon A_1\to A_2$ *таких, что выполняются соотношения* (1).

Аналогично теоремам 2 и 3 доказываем

Теорема 8. *Действия* (3) *необходимо сопряжены при топологической эквивалентности накрывающих слоений* L^1 *и* L^2, *то есть,*

$$\lambda\circ\Phi_{1k*}^{[\alpha]}=\Phi_{2k*}^{\nu([\alpha])}\circ\lambda,\ \forall[\alpha]\in H_1(B_1),\ k=\overline{1,n-1},$$

где изомоморфизмы ν *и* λ *такие, что*

$$\nu \in I(H_1(B_1), H_1(B_2)) \quad и \quad \lambda\colon \pi_k(A_1) \to \pi_k(A_2),\ k = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 9. *Действия (4) необходимо сопряжены при топологической эквивалентности накрывающих слоений L^1 и L^2, то есть,*

$$\sigma \circ \Phi_{1k**}^{[\alpha]} = \Phi_{2k**}^{\nu([\alpha])} \circ \sigma,\ \forall [\alpha] \in H_1(B_1),\ k = \overline{1, n-1},$$

где изомоморфизмы ν и σ такие, что

$$\nu \in I(H_1(B_1), H_1(B_2)) \text{ и } \sigma\colon H_k(A_1) \to H_k(A_2),\ k = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим линейные дифференциальные системы:

$$\frac{dw}{dz} = A(z)w \tag{14}$$

и

$$\frac{dw}{dz} = B(z)w, \tag{15}$$

где $w = \operatorname{colon}(w_1, \ldots, w_n)$, матрицы $A(z) = \|a_{ik}(z)\|$ и $B(z) = \|b_{ik}(z)\|$ являются квадратными порядка $n \geqslant 2$ с элементами $a_{ik}\colon \Gamma_1^m \to \mathbb{C}$, голоморфными на комплексной прямой Γ_1^m (с m удалёнными точками $z_{11}, \ldots, z_{m1}$), и $b_{ik}\colon \Gamma_2^m \to \mathbb{C}$, голоморфными на комплексной прямой Γ_2^m (с m удалёнными точками $z_{12}, \ldots, z_{m2}$), $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$. Система (14) (система (15)) определяет накрывающее слоение L^5 (накрывающее слоение L^6) на многообразии $\mathbb{C}^n \times \Gamma_1^m$ (на многообразии $\mathbb{C}^n \times \Gamma_2^m$).

Будем говорить, что система (14) *топологически эквивалентна* системе (15), если накрывающее слоение L^5 топологически эквивалентно накрывающему слоению L^6.

Преобразования
голономии на пространстве $\mathbb{C}^n$ системы (14), соответствующие точкам z_{j1}, имеют вид

$$P_j w,\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ P_j \in GL(n, \mathbb{C}),\ j = \overline{1, m},$$

а системы (15), соответствующие точкам z_{j2}, имеют вид

$$Q_j w,\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ Q_j \in GL(n, \mathbb{C}),\ j = \overline{1, m}.$$

Эти матрицы будем называть *матрицами голономии* соответственно систем (14) и (15). При этом матрицы P_j и Q_j — простой структуры, а матрицы $\ln P_j$ и $\ln Q_j$ — гиперболичны [10, с. 84].

Теорема 10. *Пусть $\{p_{1j}, \ldots, p_{nj}\}$ есть множество собственных значений матрицы голономии P_j простой стуктуры линейной системы (14), а $\{q_{1j}, \ldots, q_{nj}\}$ есть множество собственных значений матрицы* *голономии* Q_j *простой стуктуры системы* (15), *матрицы* $\ln P_j$ *и* $\ln Q_j$ – *гиперболичны,* $j = \overline{1,m}$. *Тогда:*

1) *для топологической эквивалентности линейных систем* (14) *и* (15) *необходимо, чтобы существовали такие перестановки*

$$\chi\colon (1,\ldots,m) \to (1,\ldots,m),\ \rho_j\colon (1,\ldots,n) \to (1,\ldots,n),\ j = \overline{1,m},$$

и числа α_{ij} *с* $\operatorname{Re}\alpha_{ij} \neq -1$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, *что*

$$q_{\rho_j(i)\chi(j)} = p_{ij}\,|p_{ij}|^{\alpha_{ij}},\ j = \overline{1,m},\ \text{или}\ \overline{q}_{\rho_j(i)\chi(j)} = p_{ij}\,|p_{ij}|^{\alpha_{ij}},\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n}\,;$$

2) *для топологической эквивалентности линейных систем* (14) *и* (15) *в случае перестановочности матриц голономии каждой из систем необходимо и достаточно существования таких перестановок*

$$\chi\colon (1,\ldots,m) \to (1,\ldots,m),\ \rho\colon (1,\ldots,n) \to (1,\ldots,n),$$

и чисел α_i *с* $\operatorname{Re}\alpha_i \neq -1$, $i = \overline{1,n}$, *что*

$$q_{\rho(i)\chi(j)} = p_{ij}\,|p_{ij}|^{\alpha_i},\ j = \overline{1,m},\ \ \text{или}\ \ \overline{q}_{\rho(i)\chi(j)} = p_{ij}\,|p_{ij}|^{\alpha_i},\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n},$$

При доказательстве этой теоремы будет использована

Лемма. *Пусть* $\{p_1,\ldots,p_n\}$ – *множество собственных значений матрицы* $P \in GL(n,\mathbb{C})$, *а* $\{q_1,\ldots,q_n\}$ – *множество собственных значений матрицы* $Q \in GL(n,\mathbb{C})$, *матрицы* $\ln P$ *и* $\ln Q$ – *гиперболичны,* $n \geqslant 2$. *Тогда для существования гомеоморфизма* $\xi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *со свойством*

$$\xi(Pw) = Q\xi(w),\ \forall\, w \in \mathbb{C}^n,\ \xi(w) = \operatorname{colon}\left(\xi_1(w),\ldots,\xi_n(w)\right), \tag{16}$$

необходимо и достаточно наличия таких чисел α_τ *с* $\operatorname{Re}\alpha_\tau > -1$ *и перестановки* $\rho\colon (1,\ldots,n) \to (1,\ldots,n)$, *чтобы*

$$q_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau}\ \ \text{или}\ \ \overline{q}_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau},\ \tau = \overline{1,n}.$$

Доказательство. Матрицы P и Q представим в виде

$$P = R\operatorname{diag}(p_1,\ldots,p_n)R^{-1},\ Q = S\operatorname{diag}(q_1,\ldots,q_n)S^{-1},$$

где p_τ и q_τ, $\tau = \overline{1,n}$, есть собственные значения матриц P и Q соответственно. Тогда для гомеоморфизма

$$\varphi\colon w \to S^{-1}\xi(Rw),\ \forall w \in \mathbb{C}^n,$$

условием топологической сопряжённости (16) будет

$$\varphi(\operatorname{diag}(p_1,\ldots,p_n)w) = \operatorname{diag}(q_1,\ldots,q_n)\varphi(w),\ \forall w \in \mathbb{C}^n.$$

Каждая из матриц P и Q на пространстве $\mathbb{C}^n$ определяет отображение

$u\colon w \to Pw, \forall w \in \mathbb{C}^n$, и $v\colon w \to Qw, \forall w \in \mathbb{C}^n$, соответственно. Отображение u определяет на пространстве $\mathbb{C}^n$ инвариантное голоморфное слоение комплексной размерности один. Такой же вывод можно сделать и для отображения v. Одномерное голоморфное слоение $\mathfrak{U}$, инвариантное относительно отображения u, определяется универсальным инвариантом $w_\zeta^{-\lambda_n} w_n^{\lambda_\zeta}$, $\zeta = \overline{1, n-1}$, этого отображения, где λ_τ, $\tau = \overline{1,n}$, есть собственные значения матрицы $\ln P$. Аналогично, одномерное голоморфное слоение $\mathfrak{V}$, инвариантное относительно отображения v, определяется универсальным инвариантом $w_\zeta^{-\mu_n} w_n^{\mu_\zeta}$, $\zeta = \overline{1, n-1}$, этого отображения, где μ_τ, $\tau = \overline{1,n}$, есть собственные значения матрицы $\ln Q$. Через $\mathbb{C}_\tau$ обозначим комплексную координатную прямую $w_\zeta = 0$, $\zeta = \overline{1,n}$, $\zeta \neq \tau$, а через $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_\tau$ — комплексную координатную прямую $\mathbb{C}_\tau$ с выколотым началом координат, $\tau = \overline{1,n}$. Поскольку матрицы $\ln P$ и $\ln Q$ являются гиперболичными, то $\operatorname{Im}(\lambda_n \lambda_\zeta^{-1}) \neq 0$ и $\operatorname{Im}(\mu_n \mu_\zeta^{-1}) \neq 0$, $\zeta = \overline{1, n-1}$, а значит, замыкание каждой из гиперповерхностей $w_\zeta^{-\lambda_n} w_n^{\lambda_\zeta} = C_\zeta$ и $w_\zeta^{-\mu_n} w_n^{\mu_\zeta} = C_\zeta$ при $C_\zeta \neq 0$ содержит гиперплоскость $w_\zeta = 0$, $\zeta = \overline{1, n-1}$. Поэтому у слоения $\mathfrak{U}$ слои $u_\tau = \overset{\circ}{\mathbb{C}}_\tau$, $\tau = \overline{1,n}$, гомеоморфны между собой и негомеоморфны любым другим слоям этого слоения. Аналогично у слоения $\mathfrak{V}$ слои $v_\tau = \overset{\circ}{\mathbb{C}}_\tau$, $\tau = \overline{1,n}$, гомеоморфны между собой и негомеоморфны любым другим слоям этого слоения. А гомеоморфизм φ, удовлетворяющий условию топологической сопряжённости, переводит слой u_τ слоения $\mathfrak{U}$ в слой $v_{\rho(\tau)}$ слоения $\mathfrak{V}$, $\tau = \overline{1,n}$, при этом начало координат суть неподвижная точка этого гомеоморфизма. Тогда у гомеоморфизма φ проекции $\varphi_\tau\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ такие, что их сужения $\widetilde{\varphi}_\tau\colon \mathbb{C}_\tau \to \mathbb{C}_{\rho(\tau)}$ являются гомеоморфизмами и $\widetilde{\varphi}_\tau(p_\tau \widetilde{w}_\tau) = q_{\rho(\tau)} \widetilde{\varphi}_\tau(\widetilde{w}_\tau$, $\forall \widetilde{w}_\tau = (0,\ldots,0,w_\tau,0,\ldots,0) \in \mathbb{C}_\tau$, $\tau = \overline{1,n}$. Отсюда на основании леммы из [7] приходим к выводу, что существуют числа α_τ с $\operatorname{Re}\alpha_\tau > -1$ такие, что $q_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau}$ или $\overline{q}_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau}$, $\tau = \overline{1,n}$.

Для доказательства достаточности возьмём отображение $H\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $H(w) = \operatorname{colon}(H_1(w),\ldots,H_n(w))$, такое, что

$$H_{\rho(\tau)}(w) = w_\tau |w_\tau|^{\alpha_\tau}, \text{ если } q_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau}, \ \tau = \overline{1,n},$$

и

$$H_{\rho(\tau)}(w) = \overline{w}_\tau |w_\tau|^{\overline{\alpha}_\tau}, \text{ если } \ \overline{q}_{\rho(\tau)} = p_\tau |p_\tau|^{\alpha_\tau}, \ \tau = \overline{1,n}.$$

Непосредственно убеждаемся, что отображение H является сопрягающим гомеоморфизмом. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 10. Первое

утверждение теоремы непосредственно вытекает из леммы и теоремы 7. Для доказательство второго утверждения достаточно воспользоваться свойством приведения перестановочных матриц простой структуры к диагональному виду общим перобразованием подобия.

Рассмотрим теперь линейные дифференциальные системы (14) и (15) в случае, когда квадратные матрицы $A(z)$ и $B(z)$ порядка $n \geqslant 2$ имеют элементы $a_{ik}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $b_{ik}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$, голоморфные и 1-периодические на комплексной прямой $\mathbb{C}$. Здесь системы (14) и (15) определяют соответственно накрывающие слоения L^7 и L^8 на многообразии $\mathbb{C}^n \times Z$, где Z — цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$. Системы (14) и (15) с периодическими коэффициентами будем называть *топологически эквивалентными*, если топологически эквивалентны накрывающие слоения L^7 и L^8.

Нетрудно видеть, что преобразования голономии на пространстве $\mathbb{C}^n$ системы (14) и (15) с периодическими коэффициентами определяются, соответственно, формулами $Pw, \forall w \in \mathbb{C}^n$, и $Qw, \forall w \in \mathbb{C}^n$. Матрицы P и Q назовём *матрицами голономии* соответственно систем (14) и (15) с периодическими коэффициентами.

Теорема 11. *Пусть* $\{p_1, \ldots, p_n\}$ $(\{q_1, \ldots, q_n\})$ *— множество собственных значений матрицы голономии* P (*матрицы голономии* Q) *простой структуры системы* (14) (*системы* (15)) *с периодическими коэффициентами, матрица* $\ln P$ (*матрица* $\ln Q$) *гиперболична. Тогда системы* (14) *и* (15) *с периодическими коэффициентами топологически эквивалентны, если и только если существуют перестановка* $\rho\colon (1, \ldots, n) \to (1, \ldots, n)$ *и числа* α_k *с* $\operatorname{Re}\alpha_k \neq -1$, $k = \overline{1,n}$, *такие, что*

$$q_{\rho(k)} = p_k|p_k|^{\alpha_k} \quad \text{или} \quad \overline{q}_{\rho(k)} = p_k|p_k|^{\alpha_k},\ k = \overline{1,n}.$$

Доказательство данной теоремы проводится на основании леммы аналогично доказательству теоремы 10.

На основании теоремы 7 проведём топологическую классификацию слоений, определяемых линейной системой в полных дифференциалах

$$dw = \sum_{\zeta=1}^{m} A_\zeta w\, dz_\zeta \equiv A(w)\, dz,\ w \in \mathbb{C}^n,\ z \in \mathbb{C}^m,\ n \geqslant 3,\ 2 \leqslant m \leqslant n-1, \quad (17)$$

когда она является вполне разрешимой (матрицы $A_\zeta, \zeta = \overline{1,m}$, перестановочны) и у матрицы $A(w)$ ранг $\operatorname{rank} A(w) = m$ почти везде на $\mathbb{C}^n$. Тогда системой (17) устанавливается отображение W пространства $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$

в пространство $\mathbb{C}^n$ посредством линейного действия

$$W\colon (w,z)\to \exp\biggl(\sum_{\zeta=1}^{m} A_\zeta z_\zeta\biggr)w,\ \forall w\in\mathbb{C}^n,\ \forall\, z_\zeta\in\mathbb{C},\ \zeta=\overline{1,m},$$

которое построено на основании её фундаментальной системы решений $\exp\sum\limits_{\zeta=1}^{m} A_\zeta z_\zeta$. В соответствии с теоремой 2 из [11] это линейное действие определяет m-мерное слоение на множестве V регулярных точек системы (17) (т. е. тех точек w, в которых $\operatorname{rank} A(w)=m$).

Пусть $A_\zeta,\zeta = \overline{1,m}$, есть матрицы простой структуры с характеристическими корнями $\lambda_{i\zeta}$, $i=\overline{1,n}$, $\zeta=\overline{1,m}$. Тогда [8, с. 194] существует линейное невырожденное пребразование зависимых переменных, посредством которого систему (17) приводим к виду

$$dw_i=\sum_{\zeta=1}^{m}\lambda_{i\zeta}w_i\,dz_\zeta,\ i=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Относительно характеристической матрицы $\Lambda=\|\lambda_{i\zeta}\|_{n\times m}$ условимся, что определители её миноров m-го порядка отличны от нуля. При этом в соответствии с теоремой 1 из [12] система (18) имеет базис первых автономных интегралов

$$w_{m+k}\prod_{l=1}^{m} w_l^{\alpha_{lk}}=C_k,\ k=\overline{1,n-m},\ (\alpha_{lk}\in\mathbb{C},\ l=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n-m}\,). \tag{19}$$

Из всего множества систем (18) выделим те, у которых гиперболичны наборы $\alpha_k=(\alpha_{1k},\ldots,\alpha_{mk},1)$, $k=\overline{1,n-m}$, составленные из показателей степеней в (19). Множество таких систем отнесём к *классу* H. Заметим, что система (18) класса H является системой общего положения. Для системы (18) $(m-1)$-мерные комплексные плоскости $w_{i_1}=0,\ldots,w_{i_{n-m+1}}=0$, где $i_\tau\in\{1,\ldots,n\}$, $\tau=\overline{1,n-m+1}$, состоят из её сингулярных точек [13, с. 115]. Множество Π таких плоскостей исчерпывает множество сингулярных точек системы (18), а поэтому у этой системы множество регулярных точек $V=\mathbb{C}^n\backslash\Pi$.

Определяемые соотношениями (19) при $C_k\neq 0$, $k=\overline{1,n-m}$, слои системы (18) назовём *неособыми*, а остальные слои, определяемые этими соотношениями, — *особыми*. Принадлежность системы (18) классу H предполагает гиперболичность наборов α_k, $k=\overline{1,n-m}$. Поэтому неособые слои системы (18) класса H негомеорфны её особым слоям.

Поставим задачу топологической классификации слоений системы (18) класса H. Для этого наряду с системой (18) класса H рассмотрим систему

$$dw_i = \sum_{\zeta=1}^{m} \mu_{i\zeta} w_i \, dz_\zeta, \ i = \overline{1,n}, \tag{20}$$

того же класса с базисом первых автономных интегралов

$$w_{m+k} \prod_{l=1}^{m} w_l^{\beta_{lk}} = C_k, \ k = \overline{1, n-m}, \ (\beta_{lk} \in \mathbb{C}, \ l = \overline{1,m}, \ k = \overline{1, n-m}\,).$$

Множества регулярных точек систем (18) и (20) совпадают, а базисы первых автономных интегралов этих систем на их множестве V регулярных точек определяют слоения M^1 и M^2 соответственно. Построим гомеоморфизм $\mathfrak{h}\colon V \to V$, устанавливающий топологическую эквивалентность слоений M^1 и M^2, который ввиду принадлежности систем (18) и (20) классу H неособые слои слоения M^1 переводит в неособые слои слоения M^2, а особые — в особые. Будем без умаления общности считать, что при гомеоморфизме $\mathfrak{h}$ многообразия $\{w_{m+k} = 0\}\backslash\Pi$, $k = \overline{1, n-m}$, состоящие из особых слоёв, переходят сами в себя (этого всегда можно добиться перенумерованием зависимых переменных в системах (18) и (20)). Удалением из слоений M^1 и M^2 многообразий $\{w_\zeta = 0\}\backslash\Pi$, $\zeta = \overline{1,m}$, состоящих из особых слоёв, получим слоения-сужения L^9 и L^{10}, которые являются накрывающими на $\mathbb{C}^{n-m} \times \Big[\mathbb{C}^m \backslash \bigcup\limits_{\zeta=1}^{m} \{w_\zeta = 0\}\Big]$ (накрываемость вытекает из заданий первых интегралов систем (18) и (20), если их разрешить относительно w_{m+k}, $k = \overline{1, n-m}\,$).

На комплексном многообразии $B = \mathbb{C}^m \backslash \bigcup\limits_{\zeta=1}^{m} \{w_\zeta = 0\}$ группа изоморфизмов $I(H_1(B), H_1(B))$ порождена перестановками отрицательно ориентированных на комплексной прямой $w_i = 0, i = \overline{1,n}, i \neq \zeta$, пространства $\mathbb{C}^n$ образующих $[g_\zeta]$ одномерной группы гомологий $H_1(B)$ и автоморфизмом $\mathrm{Aut}_\zeta H_1(B)\colon [g_\zeta] \to [g_\zeta]^{-1}$, $\zeta = \overline{1,m}$. При этом на L^9 действия

$$[g_\zeta]\colon w_{m+k} \to w_{m+k} \exp(2\pi i \alpha_{\zeta, m+k}), \ k = \overline{1, n-m},$$

на L^{10} действия

$$[g_\zeta]\colon w_{m+k} \to w_{m+k} \exp(2\pi i \beta_{\zeta, m+k}), \ k = \overline{1, n-m},$$

а значит, действия

$$\mathrm{Aut}_\zeta H_1(B)\colon w_{m+k} \to w_{m+k} \exp(\,-2\pi i \beta_{\zeta, m+k}), \ k = \overline{1, n-m}, \ \zeta = \overline{1,m}.$$

Отсюда по лемме и теореме 7 получаем критерий топологической эквивалентности слоений, определяемых системами (18) и (20) класса H.

Теорема 12. *Для того чтобы системы* (18) *и* (20) *класса* H *были топологически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа* α_{m+k} *с* $\operatorname{Re}\alpha_{m+k} > -1,\ k = \overline{1, n-m}$, *и перестановка* $\chi\colon (1,\ldots,m) \to (1,\ldots,m)$, *что при* $k = \overline{1, n-m}$

$$\delta^{\varepsilon_{\chi(\zeta)}}_{\chi(\zeta),m+k} = \gamma_{\zeta,m+k}|\gamma_{\zeta,m+k}|^{\alpha_{m+k}} \ \ \text{и} \ \ \operatorname{Im}\alpha_{\zeta,m+k}\operatorname{Im}\beta_{\chi(\zeta),m+k}\varepsilon_{\chi(\zeta)} > 0,\ \zeta = \overline{1,m},$$

или

$$\overline{\delta}^{\varepsilon_{\chi(\zeta)}}_{\chi(\zeta),m+k} = \gamma_{\zeta,m+k}|\gamma_{\zeta,m+k}|^{\alpha_{m+k}} \ \ \text{и} \ \ \operatorname{Im}\alpha_{\zeta,m+k}\operatorname{Im}\beta_{\chi(\zeta),m+k}\varepsilon_{\chi(\zeta)} < 0,\ \zeta = \overline{1,m},$$

где $\varepsilon^2_{\chi(\zeta)} = 1$, $\gamma_{\zeta,m+k} = \exp(2\pi i\alpha_{\zeta,m+k})$, $\delta_{\zeta,m+k} = \exp(2\pi i\beta_{\zeta,m+k})$, $\zeta = \overline{1,m}$.

Отметим возможность приложения теоремы 12 в случае нелинейной вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах

$$dw = \sum_{\zeta=1}^{m}[A_\zeta w + f_\zeta(w)]dz_\zeta \equiv F(w)dz, \tag{21}$$

где $f_\zeta(w) = \operatorname{colon}(f_{1\zeta}(w),\ldots,f_{n\zeta}(w))$, $\zeta = \overline{1,m}$, $f_{i\zeta}$, $i = \overline{1,n}$, $\zeta = \overline{1,m}$, суть голоморфные в окрестности U_0 точки $O(0,\ldots,0)$ из $\mathbb{C}^n$ скалярные функции, представимые степенными рядами, у которых отсутствуют свободный и линейный члены, у матрицы $F(w)$ ранг $\operatorname{rank} F(w) = m$ почти везде в окрестности U_0, а матрицы A_ζ, $\zeta = \overline{1,m}$, таковы, что образованная на их основе система (18) принадлежит классу H. Действительно, система (21) в случае общего положения для матриц A_ζ, $\zeta = \overline{1,m}$, голоморфным невырожденным преобразованием зависимых переменных [14] приводится к линейной системе вида (18) класса H. А это ввиду инвариантности топологической эквивалентности при голоморфизме позволяет на основании теоремы 12 решить задачу топологической эквивалентности слоений, определяемых системой (21) в окрестности U_0.

4. Накрытие накрывающих слоений [15]. Будем говорить, что накрывающее слоение L^1 *накрывает* накрывающее слоение L^2, если существует такое накрытие $h\colon A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$, что

$$\mathfrak{q}_2 \circ h(A_1 \times B_1) = A_2 \quad \text{и} \quad h(L^1_{c_1}) = L^2_{h(c_1)},\ \forall c_1 \in A_1 \times B_1.$$

Пусть ν-мономорфизмы одномерных групп гомологий $H_1(B_1)$ и $H_1(B_1)$, индуцированные накрытиями $g_\nu\colon B_1 \to B_2$. Группу мономорфизмов ν обозначим $\operatorname{Mon}(H_1(B_1), H_1(B_2))$.

Теорема 13. *Для того чтобы накрывающее слоение L^1 накрывало накрывающее слоение L^2, необходимо и достаточно существования таких мономорфизма $\nu \in \mathrm{Mon}(H_1(B_1), H_1(B_2))$ и гомеоморфизма $f\colon A_1 \to A_2$, что выполняются соотношения* (1).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [15].

Следствие. *Если многообразие B_1 является односвязным, то накрывающее слоение L^1 накрывает накрывающее слоение L^2, тогда и только тогда, когда многообразие B_1 накрывает многообразие B_2.*

Например, накрывающее слоение на многообразии $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, определяемое линейной обыкновенной дифференциальной системой с постоянными коэффициентами, накрывает накрывающее слоение L^7.

Аналогично теоремам 2 и 3 доказываются

Теорема 14. *Действия* (3) *необходимо сопряжены при накрытии накрывающего слоения L^2 накрывающим слоением L^1, то есть,*

$$\lambda \circ \Phi_{1k*}^{[\alpha]} = \Phi_{2k*}^{\nu([\alpha])} \circ \lambda,\ \forall [\alpha] \in H_1(B_1),\ k = \overline{1, n-1},$$

где мономорфизм ν и изоморфизм λ такие, что

$$\nu \in \mathrm{Mon}(H_1(B_1), H_1(B_2)) \quad \textit{и} \quad \lambda\colon \pi_k(A_1) \to \pi_k(A_2),\ k = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 15. *Действия* (4) *необходимо сопряжены при накрытии накрывающего слоения L^2 накрывающим слоением L^1, то есть,*

$$\sigma \circ \Phi_{1k**}^{[\alpha]} = \Phi_{2k**}^{\nu([\alpha])} \circ \sigma,\ \forall [\alpha] \in H_1(B_1),\ k = \overline{1, n-1},$$

где мономорфизм ν и изоморфизм σ такие, что

$$\nu \in \mathrm{Mon}(H_1(B_1), H_1(B_2)) \quad \textit{и} \quad \sigma\colon H_k(A_1) \to H_k(A_2),\ k = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим уравнения Риккати (5) и (6), где функции a_k и b_k являются 1-периодическими и голоморфными на $\mathbb{C}$. Функции b_k таковы, что

$$b_k(t+i) = b_k(t),\ \forall t \in [0;1],\ i = \sqrt{-1},\ k = \overline{0,2}.$$

Уравнение Риккати (5) определяет накрывающее слоение L^{11} на многообразии $\overline{\mathbb{C}} \times Z$, а уравнение Риккати (6) — накрывающее слоение L^{12} на многообразии $\overline{\mathbb{C}} \times T^2$, где T^2 — тор, определяемый разверткой

$$K = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon x \in [0;1],\ y \in [0;1]\}.$$

Будем говорить, что уравнение (5) *накрывает* уравнение (6), если накрывающее слоение L^{11} накрывает накрывающее слоение L^{12}.

Группа $H_1(Z)$ изоморфна $\mathbb{Z}$, а группа $H_1(T^2)$ — $\mathbb{Z}^2$. Обозначим через

$[\alpha]$ образующую группы $H_1(Z)$, а через $[\beta_1]$ и $[\beta_2]$ — образующие группы $H_1(T^2)$. Пусть $P(w)$ есть преобразование голономии уравнения Риккати (5), соответствующее образующей $[\alpha]$, а $Q_j(w)$ — преобразование голономии уравнения Риккати (6), соответствующее образующей $[\beta_j]$, $j=\overline{1,2}$. Поставим в соответствие дробно-линейным преобразованиям $P(w)$, $Q_1(w)$ и $Q_2(w)$ квадратные матрицы P, Q_1 и Q_2 соответственно по закону из пункта 2. Эти матрицы будем называть *матрицами голономии.*

Пусть цилиндр Z накрывает тор T^2 так, что полоса $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$ накрывает квадрат K. Тогда на основании теоремы 13 аналогично теореме 5 доказывается

Теорема 16. *Пусть* $\{p_1,p_2\}$, $\{q_{11},q_{21}\}$, $\{q_{12},q_{22}\}$ *— соответственно собственные значения матриц голономии* P, Q_1, Q_2 *простой структуры. Тогда уравнение* (5) *накрывает уравнение* (6) *тогда и только тогда, когда при* $j=1$ *или* $j=2$ *выполняется хотя бы одно из условий:*

$$q_{1j}/q_{2j}=\frac{p_1}{p_2}\,\left|\frac{p_1}{p_2}\right|^{\alpha_j},\quad \overline{q_{1j}/q_{2j}}=\frac{p_1}{p_2}\,\left|\frac{p_1}{p_2}\right|^{\alpha_j},$$

где $\operatorname{Re}\alpha_j\neq -1$.

5. Слабо накрывающие слоения. Пусть C линейно связное гладкое многообразие размерности $\dim C=n+m$.

Гладкое слоение $\mathfrak{L}$ размерности $\dim\mathfrak{L}=m$ на многообразии C назовём *слабо накрывающим слоением*, если на многообразии $A\times B$ таком, что замыкание $\overline{A\times B}=C$, гладкое слоение L, полученное из слоения $\mathfrak{L}$ удалением разве лишь некоторого множества слоёв, является накрывающим слоением на $A\times B$.

Будем рассматривать линейно связные гладкие многообразия

$$C_j=\overline{A_j\times B_j},\ j=1,\ j=2,$$

где A_j и B_j — многообразия с ранее указанными свойствами. Через $\mathfrak{L}^j$ обозначим слабо накрывающее слоение на многообразии C_j, а через $\mathfrak{L}^j_{c_j}$ обозначим слой слоения $\mathfrak{L}^j$, содержащий точку c_j, $j=\overline{1,2}$.

Два слабо накрывающих слоения $\mathfrak{L}^1$ и $\mathfrak{L}^2$ назовём *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\mathfrak{h}\colon C_1\to C_2$ такой, что

$$\mathfrak{h}\big(\mathfrak{L}^1_{c_1}\big)=\mathfrak{L}^2_{\mathfrak{h}(c_1)},\ \forall c_1\in C_1.$$

Если сужением слабо накрывающего слоения $\mathfrak{L}^j$ на множество $A_j\times B_j$ является накрывающее слоение L^j, $j=1$, $j=2$, а слоения-сужения L^1 и L^2 топологически эквивалентны, то слабо накрывающие слоения $\mathfrak{L}^1$ и $\mathfrak{L}^2$ назовём *слабо топологически эквивалентными.*

Для гомеоморфизма $\mathfrak{h}\colon \overline{A_1 \times B_1} \to \overline{A_2 \times B_2}$, устанавливающего топологическую эквивалентность слабо накрывающих слоений $\mathfrak{L}^1$ и $\mathfrak{L}^2$, сужение $h\colon A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$ на многообразие $A_1 \times B_1$ является гомеоморфизмом, устанавливающим топологическую эквивалентность накрывающих слоений-сужений L^1 и L^2. Поэтому топологически эквивалентные слабо накрывающие слоения являются слабо топологически эквивалентными.

При этом теорему 7 можно рассматривать как критерий слабой топологической эквивалентности слабо накрывающих слоений. Это обосновано тем, что топологическая эквивалентность слоений-сужений L^1 и L^2 слабо накрывающих слоений $\mathfrak{L}^1$ и $\mathfrak{L}^2$ устанавливает слабую топологическую эквивалентность слоений $\mathfrak{L}^1$ и $\mathfrak{L}^2$.

Пусть гомеоморфизм $h\colon A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$ определяет слабую топологическую эквивалентность слабо накрывающих слоений $\mathfrak{L}^1$ и $\mathfrak{L}^2$. Построим продолжение $\overline{h}$ гомеоморфизма h на замыкание $\overline{A_1 \times B_1} = C_1$ в виде гомеоморфизма $\overline{h}\colon C_1 \to \overset{*}{C}_2$, где $\overset{*}{C}_2 \supset A_2 \times B_2$. Возможность всякий раз на основании гомеоморфизма h построить гомеоморфизм $\overline{h}$ позволяет установить следующий критерий топологической эквивалентности слабо накрывающих слоений.

Теорема 17. *Для того чтобы слабо накрывающие слоения* $\mathfrak{L}^1$ *и* $\mathfrak{L}^2$ *были топологически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы существовал гомеоморфизм* $h\colon A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$, *определяющий слабую топологическую эквивалентность слабо накрывающих слоений* $\mathfrak{L}^1$ *и* $\mathfrak{L}^2$, *такой, что его продолжение* $\overline{h}$ *на замыкание* $\overline{A_1 \times B_1} = C_1$ *было гомеоморфизмом* $\mathfrak{h}\colon C_1 \to C_2$, $C_2 = \overline{A_2 \times B_2}$, *то есть,* $\overline{h} = \mathfrak{h}$.

Слоения $\mathfrak{M}^1$ и $\mathfrak{M}^2$ из пункта 3 являются слабо накрывающими слоениями. Системы (18) и (20) класса H будем называть *слабо топологически эквивалентными*, если слабо топологически эквивалентны слоения $\mathfrak{M}^1$ и $\mathfrak{M}^2$. Аналогично доказательству теоремы 12 доказывается

Теорема 18. *Для того чтобы системы* (18) *и* (20) *класса* H *были слабо топологически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа* α_{m+k} *с* $\operatorname{Re}\alpha_{m+k} > -1$, $k = \overline{1, n-m}$, *и перестановка* $\chi\colon (1, \ldots, m) \to (1, \ldots, m)$, *что*

$$\delta^{\varepsilon_{\chi(\zeta)}}_{\chi(\zeta), m+k} = \gamma_{\zeta, m+k} \left|\gamma_{\zeta, m+k}\right|^{\alpha_{m+k}}, \ \zeta = \overline{1, m},$$

или

$$\overline{\delta}^{\varepsilon_{\chi(\zeta)}}_{\chi(\zeta),m+k} = \gamma_{\zeta,m+k}\left|\gamma_{\zeta,m+k}\right|^{\alpha_{m+k}},\ \zeta=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n-m}.$$

Список литературы

1. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.; Л.: ОГИЗ, 1947. – 392 с.

2. *Петровский И.Г., Ландис Е.М.* О числе предельных циклов уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и Q — многочлены второй степени // Матем. сб. – 1955. – Т. 37, вып. 2. – С. 209 – 250.

3. *Ильяшенко Ю.С.* Топология фазовых портретов аналитических дифференциальных уравнений на комплексной проективной плоскости // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. – 1978. – Вып. 4. – С. 83 – 136.

4. *Ладис Н.Н.* Об интегральных кривых комплексного однородного уравнения // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 2. – С. 246 – 251.

5. *Camacho C., Sad P.* Topological classification and bifurcations of holomorphic flows with resonances in $\mathbb{C}^2$ // Invent. math. – 1982. – Vol. 67. – P. 447 – 472.

6. *Gorbuzov V.N., Tyshchenko V.Yu.* On the embeddability of foliations of the Riccati equations // Buletinul AS Moldova. Matematica. – 1988. – No. 3(28). – P. 49 – 56.

7. *Ладис Н.Н.* Топологическая эквивалентность неавтономных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 951 – 953.

8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 592 с.

9. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Об эквивалентности слоений линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 1596 – 1599.

10. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1985. – Т. 1. – С. 7 – 149.

11. *Горбузов В.Н.* Автономность системы уравнений в полных

дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 39, № 12. – С. 149 – 156.

12. *Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю.* Частные интегралы систем в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1819 – 1822.

13. *Гайшун И. В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1983. – 271 с.

14. *Ладис Н. Н.* Нормальные формы вполне интегрируемых систем // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 1994 – 1999.

15. *Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю.* Накрытие слоений, определяемых дифференциальными уравнениями // Вестник Гроднен. ГУ. Сер. 2. – 2002. – № 1(9). – С. 14 – 19.