ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2015
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.913+517.936

ИНТЕГРАЛЫ МНОГОМЕРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО

В.Н. Горбузов[1], А.Ф. Проневич[2]

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
230023, Республика Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко 22
E-mails: [1]gorbuzov@grsu.by, [2]pranevich@grsu.by

Аннотация

В работе рассмотрена вполне разрешимая вещественная нестационарная линейная система уравнений Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах. Для данной системы разработан спектральный метод построения интегрального базиса. Нахождение первых интегралов осуществляется по общим собственным и присоединенным векторам интегральных матриц вполне разрешимой системы Лаппо-Данилевского. В зависимости от кратности элементарных делителей интегральных матриц системы указаны явные виды первых интегралов и получены достаточные условия существования автономных первых интегралов. Приведены примеры, которые иллюстрируют полученные результаты.

Ключевые слова: система уравнений в полных дифференциалах, первый интеграл.

Abstract

In this article we consider a completely solvable real non-autonomous linear system of Lappo-Danilevsky exact differential equations. For this system the spectral method of the integral basis construction has been elaborated. Using common eigenvectors and generalized eigenvectors of the integral matrices of a completely solvable Lappo-Danilevsky system we get real first integrals of this system in explicit form. The explicit forms of first integral, which depend on the multiplicity of integral matrices primer divisors, are given, and the sufficient conditions of the existence of autonomous first integrals for this differential system has been obtained. In addition, some examples are given to illustrate the results.

Keywords: system of total differential equations, first integral.

Постановка задачи. Рассмотрим вещественную нестационарную линейную неоднородную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{j=1}^{m} \bigl(A_j(t)\,x + f_j(t)\bigr)\,dt_j, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

с матрицами коэффициентов

$$A_j \colon t \to \sum_{k=1}^{s_j} \alpha_{jk}(t)\,A_{jk} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad s_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где непрерывно дифференцируемые скалярные функции $\alpha_{jk} \colon \mathcal{T} \to \mathbb{R},\ k = 1, \ldots, s_j$, линейно независимы на области $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$ при каждом индексе $j = 1, \ldots, m$, постоянные вещественные матрицы n-го порядка $A_{jk},\ k = 1, \ldots, s_j,\ j = 1, \ldots, m$, являются попарно перестановочными, а векторные функции $f_j \colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}^n,\ j = 1, \ldots, m$, из класса $C^1(\mathcal{T})$.

Неоднородной системе (0.1) соответствуют линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{B}_j(t,x) = \partial_{t_j} + \bigl(A_j(t)\,x + f_j(t)\bigr)\,\partial_x \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

и линейная однородная система уравнений в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\,x\,dt_j \tag{0.2}$$

с дифференциальными операторами $\mathfrak{A}_j(t,x) = \partial_{t_j} + A_j(t)\,x\,\partial_x\ \ \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n,\ j = 1, \ldots, m.$

Французским математиком Г. Дарбу в конце XIX века был сформулирован подход о построении первого интеграла по известным частным интегралам [1], который в настоящее время называется задачей Дарбу. В дальнейшем нахождение интегралов типа Дарбу получило свое развитие, как в постановке задачи, так и в разнообразии методов ее решения. Подробный обзор литературы и современное состояние теории интегралов приведены в монографиях В.Н. Горбузова [2; 3], В.В. Козлова [4] и A. Goriely [5].

Для полиномиальных (обыкновенных и многомерных) дифференциальных систем в работах [6 – 8; 3, с. 161 – 238] с целью решения задачи Дарбу разработан метод частных интегралов построения первых интегралов и последних множителей. На его основании авторами данной статьи получены спектральные методы нахождения интегральных базисов для линейных стационарных обыкновенных дифференциальных систем [9; 10] и систем уравнений в полных дифференциалах [2, с. 164 – 194; 11 – 13], а также для линейных однородных систем уравнений в частных производных первого порядка [14; 15].

В настоящей работе дано решение задачи Дарбу для вещественной нестационарной линейной системы уравнений в полных дифференциалах (0.1). Задача решается при условии, что система (0.1) является вполне разрешимой [3, с. 17 – 25] на области $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$, т.е. для системы (0.1) выполняются условия Фробениуса [16, с. 43 – 44] :

$$\begin{gathered} A_{jk}\,A_{\xi\zeta} = A_{\xi\zeta}\,A_{jk}, \quad k = 1, \ldots, s_j, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \zeta = 1, \ldots, s_\xi, \quad \xi = 1, \ldots, m, \\ \partial_{t_j} A_\xi(t) = \partial_{t_\xi} A_j(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \xi = 1, \ldots, m, \end{gathered} \tag{0.3}$$

$$\partial_{t_j} f_\xi(t) + A_\xi(t) f_j(t) = \partial_{t_\xi} f_j(t) + A_j(t) f_\xi(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \xi = 1, \ldots, m. \tag{0.4}$$

Неоднородная дифференциальная система (0.1) при выполнении условий Фробениуса $(0.3) \cup (0.4)$ и однородная дифференциальная система (0.2) при выполнении условий Фробениуса (0.3) являются системами Лаппо-Данилевского [16, с. 63 – 64], т.е. удовлетворяет требованию перестановочности матрицы коэффициентов со своим интегралом [17].

1. ***Исходные положения.*** С целью однозначного толкования используемых в статье понятий, следуя в основном монографиям [2] и [3], сформулируем основные определения и положения теории интегралов многомерных дифференциальных систем, а также докажем леммы 1.1 – 1.4, лежащие в основе спектрального метода построения первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах (0.1).

Непрерывно дифференцируемую функцию $F\colon D \to \mathbb{R}$ назовем *первым интегралом* на области $D \subset \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ системы уравнений в полных дифференциалах (0.1), если

$$\mathfrak{B}_j F(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in D, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Совокупность функционально независимых на области $D \subset \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ первых интегралов $F_l\colon D \to \mathbb{R},\ l = 1, \ldots, k$, системы (0.1) назовем *базисом первых интегралов* (или *интегральным базисом*) на области D системы (0.1), если у этой системы любой первый интеграл $\Psi\colon D \to \mathbb{R}$ можно представить в виде $\Psi(t,x) = \Phi\big(F_1(t,x), \ldots, F_k(t,x)\big) \ \ \forall (t,x) \in D$, где Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция на множестве значений векторной функции $F\colon (t,x) \to \big(F_1(t,x), \ldots, F_k(t,x)\big) \ \ \forall (t,x) \in D$. Число k при этом назовем *размерностью* базиса первых интегралов на области D системы (0.1).

Интегральный базис вполне разрешимой на области $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ системы уравнений в полных дифференциалах (0.1) состоит из n функционально независимых первых интегралов [2, с. 32 – 36; 18, с. 523 – 525]. В случае неполной разрешимости системы (0.1) с дефектом $r,\ 0 < r \le n$, ее базис первых интегралов в окрестности любой точки из области разрешимости имеет размерность $n - r$ [2, с. 54 – 60; 19].

Частные интегралы. Линейная однородная функция

$$p\colon x \to \ \nu x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nu \in \mathbb{C}^n, \tag{1.1}$$

будет частным интегралом дифференциальной системы (0.2), если и только если

$$\mathfrak{A}_j\, p(x) = \lambda_j(t)\, p(x) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

где скалярные функции $\lambda_j\colon \mathcal{T} \to \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, m$.

Система тождеств (1.2) распадается на линейную однородную систему

$$\Big(\sum_{k=1}^{s_j} \alpha_{jk}(t)\, B_{jk} - \lambda_j(t) E\Big)\nu = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.3}$$

где E — единичная матрица n-го порядка, а постоянные матрицы B_{jk} являются транспонированными к матрицам $A_{jk},\ k = 1, \ldots, s_j,\ j = 1, \ldots, m$, соответственно.

Условием перестановочности матриц (0.3) устанавливаются связи [20, с. 203 – 207] между собственными числами и собственными векторами матриц $B_{jk},\ k = 1, \ldots, s_j$, $j = 1, \ldots, m$, на основе которых доказываем следующие закономерности (леммы 1.1 – 1.4).

Лемма 1.1. *Пусть ν — общий вещественный собственный вектор матриц B_{jk}, которому соответствуют собственные числа λ_{jk}, $k = 1, \ldots, s_j$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда функция* (1.1) *будет линейным частным интегралом однородной системы уравнений в полных дифференциалах* (0.2), *а скалярные функции*

$$\lambda_j \colon t \to \sum_{k=1}^{s_j} \lambda_{jk}\, \alpha_{jk}(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Если ν — общий собственный вектор матриц B_{jk}, которому соответствуют собственные числа λ_{jk}, $k = 1, \ldots, s_j$, $j = 1, \ldots, m$, то он является общим собственным вектором матриц $B_j \colon t \to \sum\limits_{k=1}^{s_j} \alpha_{jk}(t) B_{jk} \quad \forall t \in \mathcal{T}$, которому соответствуют собственные функции $\lambda_j \colon t \to \sum\limits_{k=1}^{s_j} \lambda_{jk} \alpha_{jk}(t) \ \ \forall t \in \mathcal{T}$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда вектор ν будет решением функциональной системы (1.3), а значит, выполняется система тождеств (1.2).

Следовательно, линейная функция (1.1) есть частный интеграл однородной системы уравнений в полных дифференциалах (0.2). Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть* $\nu = \overset{*}{\nu} + \widetilde{\nu}\, i \ \ (\overset{*}{\nu} = \operatorname{Re} \nu,\ \widetilde{\nu} = \operatorname{Im} \nu)$ *— общий существенно комплексный* $(\widetilde{\nu} \neq 0)$ *собственный вектор матриц* B_{jk}, *которому соответствуют собственные числа* $\lambda_{jk} = \overset{*}{\lambda}_{jk} + \widetilde{\lambda}_{jk}\, i \ \ (\overset{*}{\lambda}_{jk} = \operatorname{Re} \lambda_{jk},\ \widetilde{\lambda}_{jk} = \operatorname{Im} \lambda_{jk})$, $k = 1, \ldots, s_j$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда производные Ли в силу системы* (0.2) *скалярных функций*

$$P \colon x \to (\overset{*}{\nu} x)^2 + (\widetilde{\nu} x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \psi \colon x \to \operatorname{arctg} \frac{\widetilde{\nu} x}{\overset{*}{\nu} x} \quad \forall x \in X,$$

где X — область из множества $\{x \colon \overset{*}{\nu} x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n$, равны

$$\mathfrak{A}_j P(x) = 2 \sum_{k=1}^{s_j} \overset{*}{\lambda}_{jk}\, \alpha_{jk}(t) P(x) \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

и

$$\mathfrak{A}_j\, \psi(x) = \sum_{k=1}^{s_j} \widetilde{\lambda}_{jk}\, \alpha_{jk}(t) \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times X, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Формально применяя лемму 1.1 получаем, что комплекснозначная функция (1.1) будет частным интегралом системы (0.2) и выполняется система тождеств

$$\mathfrak{A}_j \big(\overset{*}{\nu} x + i\, \widetilde{\nu} x\big) = \big(\overset{*}{\lambda}_j(t) + i\, \widetilde{\lambda}_j(t)\big)\big(\overset{*}{\nu} x + i\, \widetilde{\nu} x\big) \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

которая равносильна на области $\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n$ вещественной системе тождеств

$$\mathfrak{A}_j\, \overset{*}{\nu} x = \overset{*}{\lambda}_j(t)\, \overset{*}{\nu} x - \widetilde{\lambda}_j(t)\, \widetilde{\nu} x, \quad \mathfrak{A}_j\, \widetilde{\nu} x = \overset{*}{\lambda}_j(t)\, \widetilde{\nu} x + \widetilde{\lambda}_j(t)\, \overset{*}{\nu} x, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где скалярные функции

$$\overset{*}{\lambda}_j \colon t \to \sum_{k=1}^{s_j} \overset{*}{\lambda}_{jk}\, \alpha_{jk}(t) \ \ \forall t \in \mathcal{T}, \qquad \widetilde{\lambda}_j \colon t \to \sum_{k=1}^{s_j} \widetilde{\lambda}_{jk}\, \alpha_{jk}(t) \ \ \forall t \in \mathcal{T}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Используя эту систему тождеств, имеем:

$$\mathfrak{A}_j\, P(x) = 2\overset{*}{\nu}x\,\big(\overset{*}{\lambda}_j(t)\,\overset{*}{\nu}x - \widetilde{\lambda}_j(t)\,\widetilde{\nu}x\big) + 2\widetilde{\nu}x\,\big(\overset{*}{\lambda}_j(t)\,\widetilde{\nu}x + \widetilde{\lambda}_j(t)\,\overset{*}{\nu}x\big) = 2\overset{*}{\lambda}_j(t)\,P(x), \quad j = 1,\ldots,m;$$

$$\mathfrak{A}_j\,\psi(x) \,=\, \frac{\overset{*}{\nu}x\,\big(\overset{*}{\lambda}_j(t)\,\widetilde{\nu}x + \widetilde{\lambda}_j(t)\,\overset{*}{\nu}x\big) -\, \widetilde{\nu}x\,\big(\overset{*}{\lambda}_j(t)\,\overset{*}{\nu}x - \widetilde{\lambda}_j(t)\,\widetilde{\nu}x\big)}{(\overset{*}{\nu}x)^2 + (\widetilde{\nu}x)^2} = \widetilde{\lambda}_j(t), \quad j = 1,\ldots,m.$$

Следовательно, утверждения леммы 1.2 верны.

В случае наличия кратных элементарных делителей у матриц B_{jk} будем использовать понятие присоединенного вектора [3, с. 252] и основываться на леммах 1.3 и 1.4.

Пусть $\lambda_{\xi\zeta}$ — собственное число матрицы $B_{\xi\zeta},\ \zeta \in \{1,\ldots,s_\xi\},\ \xi \in \{1,\ldots,m\}$, которому соответствуют элементарный делитель кратности $\varkappa \geq 2$ и собственный вектор ν^0. Тогда *l-ым присоединенным вектором* матрицы $B_{\xi\zeta}$, соответствующим собственному числу $\lambda_{\xi\zeta}$, назовем вектор $\nu^l,\ l = 1,\ldots,\varkappa-1$, являющийся решением линейной системы

$$\big(B_{\xi\zeta} - \lambda_{\xi\zeta}\,E\big)\,\nu^l = l\cdot\nu^{l-1}. \tag{1.4}$$

Лемма 1.3. *Пусть выполняются условия*:

1) ν^0 *— общий собственный вектор матриц* B_{jk}, *которому соответствуют собственные числа* $\lambda_{jk},\ k = 1,\ldots,s_j,\ j = 1,\ldots,m$;

2) $\nu^l,\ l = 1,\ldots,\varkappa-1,$ *— присоединенные векторы матрицы* $B_{\xi\zeta}$, *соответствующие собственному числу* $\lambda_{\xi\zeta}$ *с элементарным делителем кратности* $\varkappa \geq 2$;

3) *обыкновенная дифференциальная система* $\dfrac{dx}{dt_\xi} = A_{\xi\zeta}x$ *не имеет первых интегралов*

$$\begin{gathered} F_{jkl}\colon x \to\ \mathfrak{a}_{jk}\Psi_l(x) \quad \forall x \in X, \quad l = 1,\ldots,\varkappa-1, \\ k = 1,\ldots,s_j, \quad j = 1,\ldots,m \quad (k \neq \zeta \ \text{при}\ j = \xi). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Тогда имеют место тождества

$$\begin{gathered} \mathfrak{a}_{\xi\zeta}\Psi_1(x) = 1 \quad \forall x \in X, \qquad \mathfrak{a}_{\xi\zeta}\Psi_l(x) = 0 \quad \forall x \in X, \quad l = 2,\ldots,\varkappa-1, \\ \mathfrak{a}_{jk}\Psi_l(x) = \mu_{jkl} = \mathrm{const} \quad \forall x \in X, \quad l = 1,\ldots,\varkappa-1, \\ k = 1,\ldots,s_j, \quad j = 1,\ldots,m \quad (k \neq \zeta \ \text{при}\ j = \xi), \end{gathered} \tag{1.6}$$

где операторы $\mathfrak{a}_{jk}(x) = A_{jk}x\,\partial_x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, *а функции* $\Psi_l\colon X \to \mathbb{C}$ *находятся из системы*

$$\nu^l x = \sum_{\delta=1}^{l} \tbinom{l-1}{\delta-1}\Psi_\delta(x)\,\nu^{l-\delta}x \quad \forall x \in X, \quad l = 1,\ldots,\varkappa-1, \quad X \subset \{x\colon \nu^0 x \neq 0\}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Функциональную систему (1.7) всегда можно разрешить относительно Ψ_δ, так как ее определитель равен $(\nu^0 x)^{\varkappa-1}$ и отличен от тождественного нуля на любой области $X \subset \{x\colon \nu^0 x \neq 0\}$. Докажем, что для функций Ψ_δ справедливы тождества (1.6).

Пусть $j = \xi,\ k = \zeta$. Тогда верность тождеств (1.6) при $\varkappa = 2$ и $\varkappa = 3$ проверяется непосредственно на основании системы тождеств

$$\mathfrak{a}_{\xi\zeta}\,\nu^0 x=\lambda_{\xi\zeta}\,\nu^0 x \;\;\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad \mathfrak{a}_{\xi\zeta}\,\nu^l x=\lambda_{\xi\zeta}\,\nu^l x+l\,\nu^{l-1}x \;\;\forall x\in\mathbb{R}^n,\;\; l=1,\ldots,\varkappa-1, \qquad (1.8)$$

которые непосредственно следуют из леммы 1.1 и системы равенств (1.4). Доказательство тождеств (1.6) для случая $\varkappa>3$ проведем методом математической индукции.

Предположим, что система тождеств (1.6) имеет место при $\varkappa=\varepsilon$. Тогда, на основании тождества (1.7) при $\varkappa=\varepsilon+1,\; l=\varepsilon$, вычислим действие оператора $\mathfrak{a}_{\xi\zeta}$ на функцию $x\to\nu^\varepsilon x\;\;\forall x\in\mathbb{R}^n$, с учетом тождеств (1.6) при $\varkappa=\varepsilon$ и системы тождеств (1.8):

$$\mathfrak{a}_{\xi\zeta}\,\nu^\varepsilon x \;=\; \lambda_{\xi\zeta}\sum_{\delta=1}^{\varepsilon}\tbinom{\varepsilon-1}{\delta-1}\Psi_\delta(x)\,\nu^{\varepsilon-\delta}x\;+$$

$$+\;(\varepsilon-1)\sum_{\delta=1}^{\varepsilon-1}\tbinom{\varepsilon-2}{\delta-1}\Psi_\delta(x)\,\nu^{\varepsilon-\delta-1}x+\nu^{\varepsilon-1}x+\nu^0 x\,\mathfrak{a}_{\xi\zeta}\Psi_\varepsilon(x)\quad\forall x\in X.$$

Отсюда, в силу системы (1.7) при $l=\varepsilon-1$ и $l=\varepsilon$, тождеств (1.8) при $l=\varepsilon$ и того, что функция $\nu^0 x$ не обращается в нуль на области X, получаем: $\mathfrak{a}_{\xi\zeta}\,\Psi_\varepsilon(x)=0\;\;\forall x\in X$.

Следовательно, при $\varkappa=\varepsilon+1$ система тождеств (1.6) имеет место.

Учитывая, что у вполне разрешимой системы (0.2) линейные дифференциальные операторы $\mathfrak{a}_{jk},\; k=1,\ldots,s_j,\; j=1,\ldots,m$, перестановочны (условия (0.3)), а линейная обыкновенная дифференциальная система $\dfrac{dx}{dt_\xi}=A_{\xi\zeta}x$ не имеет первых интегралов вида (1.5), получаем, что тождества (1.6) имеют место и при $k\neq\zeta$. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть выполняются условия леммы* 1.3. *Тогда верны тождества*

$$\mathfrak{a}_{jk}\nu^l x=\sum_{\delta=0}^{l}\tbinom{l}{\delta}\,\mu_{jk\delta}\,\nu^{l-\delta}x\quad\forall x\in X,\quad k=1,\ldots,s_j,\quad j=1,\ldots,m,\quad l=1,\ldots,\varkappa-1, \qquad (1.9)$$

где числа $\mu_{jk0}=\lambda_{jk},\;\mu_{jkl}=\mathfrak{a}_{jk}\Psi_l$.

Доказательство. При $\varkappa=2$ из системы (1.7) получаем, что $\nu^1 x=\Psi_1(x)\,\nu^0 x\;\;\forall x\in X$. Отсюда, используя леммы 1.1 и 1.3, имеем

$$\mathfrak{a}_{jk}\,\nu^1 x=\mu_{jk0}\nu^1 x+\mu_{jk1}\nu^0 x\quad\forall x\in X,\quad k=1,\ldots,s_j,\quad j=1,\ldots,m.$$

Следовательно, тождества (1.9) при $\varkappa=2$ верны.

Пусть тождества (1.9) выполняются при $\varkappa=\varepsilon$. Тогда из (1.7) при $\varkappa=\varepsilon+1$ находим

$$\mathfrak{a}_{jk}\nu^\varepsilon x=\sum_{\delta=1}^{\varepsilon}\tbinom{\varepsilon-1}{\delta-1}\,\mu_{jk\delta}\,\nu^{\varepsilon-\delta}x+\sum_{\delta=1}^{\varepsilon}\tbinom{\varepsilon-1}{\delta-1}\,\Psi_\delta(x)\sum_{\gamma=0}^{\varepsilon-\delta}\tbinom{\varepsilon-\delta}{\gamma}\,\mu_{jk\gamma}\,\nu^{\varepsilon-\delta-\gamma}x,\;k=1,\ldots,s_j,\;j=1,\ldots,m.$$

Сгруппировав выражения при $\mu_{jk\delta}$ и учитывая (1.7) при $\varkappa=\varepsilon+1$, на X получаем

$$\mathfrak{a}_{jk}\nu^\varepsilon x=\sum_{\delta=1}^{\varepsilon}\tbinom{\varepsilon-1}{\delta-1}\,\mu_{jk\delta}\,\nu^{\varepsilon-\delta}x+\sum_{\tau=0}^{\varepsilon-1}\tbinom{\varepsilon-1}{\tau}\,\mu_{jk\tau}\sum_{\eta=1}^{\varepsilon-\tau}\tbinom{\varepsilon-\tau-1}{\eta-1}\,\Psi_\eta(x)\,\nu^{(\varepsilon-\tau)-\eta}x=$$

$$=\sum_{\delta=1}^{\varepsilon}\tbinom{\varepsilon-1}{\delta-1}\,\mu_{jk\delta}\,\nu^{\varepsilon-\delta}x+\sum_{\tau=0}^{\varepsilon-1}\tbinom{\varepsilon-1}{\tau}\,\mu_{jk\tau}\,\nu^{\varepsilon-\tau}x=\sum_{\delta=0}^{\varepsilon}\tbinom{\varepsilon}{\delta}\,\mu_{jk\delta}\,\nu^{\varepsilon-\delta}x,\quad k=1,\ldots,s_j,\;j=1,\ldots,m.$$

Таким образом, при $\varkappa = \varepsilon{+}1$ тождества (1.9) справедливы, а значит, система тождеств (1.9) имеет место при любом натуральном $\varkappa \geq 2$. Лемма доказана.

2. *Первые интегралы системы* (0.1). Построение первых интегралов линейной неоднородной системы уравнений Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах (0.1) осуществляется на основании теорем 2.1 – 2.3.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия леммы* 1.1. *Тогда первым интегралом вполне разрешимой дифференциальной системы* (0.1) *будет функция*

$$F\colon (t,x) \to \ \nu x\, \varphi(t) - \int \sum_{j=1}^{m} \nu f_j(t)\, \varphi(t)\, dt_j \qquad \forall (t,x) \in \widetilde{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}$ — *односвязная область из* $\mathcal{T}$, *экспоненциальная функция*

$$\varphi\colon t \to \ \exp\Bigl(-\int \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s_j} \lambda_{jk}\, \alpha_{jk}(t)\, dt_j \Bigr) \quad \forall t \in \widetilde{\mathcal{T}}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Из тождеств (0.3) следует, что дифференциальная 1-форма

$$\omega\colon t \to \ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s_j} \lambda_{jk}\, \alpha_{jk}(t)\, dt_j \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

является замкнутой на области $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$. С учетом этого, для гладкой 1-формы

$$\widetilde{\omega}\colon t \to \ \sum_{j=1}^{m} \nu f_j(t)\, \varphi(t)\, dt_j \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

внешний дифференциал

$$d\,\widetilde{\omega}(t) \ = \ \varphi(t) \sum_{j=1}^{m} \sum_{\xi=1}^{m} \Bigl(\partial_{t_\xi} \nu f_j(t) - \sum_{k=1}^{s_\xi} \lambda_{\xi k}\, \alpha_{\xi k}(t)\, \nu f_j(t) \Bigr)\, dt_\xi \wedge dt_j \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Отсюда с учетом тождеств (0.4) и того, что

$$dt_j \wedge dt_j = 0, \quad dt_\xi \wedge dt_j = \, - dt_j \wedge dt_\xi, \quad \xi = 1, \ldots, m, \ \ j = 1, \ldots, m,$$

получаем, что дифференциальная 1-форма $\widetilde{\omega}$ будет замкнутой на области $\mathcal{T}$. Тогда по теореме Пуанкаре [21, с. 222] дифференциальные 1-формы ω и $\widetilde{\omega}$ будут точными на любой односвязной области $\widetilde{\mathcal{T}}$ содержащейся в области $\mathcal{T}$, а значит, криволинейные интегралы $\int \omega$ и $\int \widetilde{\omega}$ в области $\widetilde{\mathcal{T}}$ не зависят от пути интегрирования.

Используя лемму 1.1 и то, что 1-формы ω и $\widetilde{\omega}$ являются точными на односвязной области $\widetilde{\mathcal{T}}$, вычислим действия линейных дифференциальных операторов $\mathfrak{B}_j, \ j = 1, \ldots, m$, индуцированных вполне разрешимой системой (0.1), на функцию (2.1):

$$\mathfrak{B}_j F(t,x) = \nu x\, \partial_{t_j} \varphi(t) - \partial_{t_j} \int \sum_{j=1}^{m} \nu f_j(t)\, \varphi(t)\, dt_j + \bigl(\mathfrak{A}_j\, \nu x + f_j(t)\, \partial_x \nu x \bigr) \varphi(t) = 0, \ j = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, функция (2.1) будет первым интегралом вполне разрешимой системы уравнений Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах (0.1). Теорема доказана.

Пример 2.1. Обыкновенная дифференциальная система Лаппо-Данилевского второго порядка (дифференциальная система вида (0.1) при $n=2,\ m=1$)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -3\Big(\frac{1}{t}+t^2\Big)\,x_1 - \frac{2}{t}\,x_2 + t\big(\sin t + 2t\,e^{t^2}\big)\,e^{-t^3},\\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{4}{t}\,x_1 + 3\Big(\frac{1}{t}-t^2\Big)\,x_2 + t\Big(\operatorname{ch} t + 6\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\Big)\,e^{-t^3} \end{aligned} \tag{2.3}$$

такова, что ее матрица коэффициентов $A_1(t) = 3t^2 A_{11} + \Big(\dfrac{1}{t}+6t^2\Big)A_{12}\ \ \forall t\in\mathcal{T}\subset\{t\colon t\neq 0\}$, где постоянные матрицы $A_{11} = \begin{Vmatrix} 5 & 4\\ -8 & -7\end{Vmatrix}$ и $A_{12} = \begin{Vmatrix} -3 & -2\\ 4 & 3\end{Vmatrix}$.

Матрицы B_{11} и B_{12}, транспонированные к матрицам A_{11} и A_{12}, имеют соответственно собственные числа $\lambda_{11,1}=1,\ \lambda_{11,2}=-3$ и $\lambda_{12,1}=-1,\ \lambda_{12,2}=1$, которым соответствуют линейно независимые общие вещественные собственные векторы $\nu^1=(2,1),\ \nu^2=(1,1)$.

С учетом того, что функции $\alpha_{11}\colon t\to 3t^2$ и $\alpha_{12}\colon t\to \dfrac{1}{t}+6t^2\ \ \forall t\in\mathcal{T}$, неоднородности $f_{11}\colon t\to t\big(\sin t+2t\,e^{t^2}\big)\,e^{-t^3}$, $f_{12}\colon t\to t\Big(\operatorname{ch}t+6\operatorname{arctg}\dfrac{t}{3}\Big)\,e^{-t^3}\ \ \forall t\in\mathcal{T}$, а скалярные функции

$$\varphi_1(t) = \exp\Big(-\int\big(\lambda_{11,1}\,\alpha_{11}(t)+\lambda_{12,1}\,\alpha_{12}(t)\big)\,dt\Big) = \exp\int\Big(\frac{1}{t}+3t^2\Big)\,dt = t\exp t^3 \quad \forall t\in\mathcal{T},$$

$$\varphi_2(t) = \exp\Big(-\int\big(\lambda_{11,2}\,\alpha_{11}(t)+\lambda_{12,2}\,\alpha_{12}(t)\big)\,dt\Big) = \exp\int\Big(3t^2-\frac{1}{t}\Big)\,dt = \frac{1}{t}\,\exp t^3 \quad \forall t\in\mathcal{T},$$

$$C_{0,1}(t) = \int\big(2f_{11}(t)+f_{12}(t)\big)\varphi_1(t)\,dt = \int\Big(2t^2\sin t+4t^3e^{t^2}+t^2\operatorname{ch}t+6t^2\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\Big)\,dt =$$

$$= -3t^2+4t\sin t-2(t^2-2)\cos t+2(t^2-1)e^{t^2}-2t\operatorname{ch}t+(t^2+2)\operatorname{sh}t+2t^3\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+27\ln(t^2+9),$$

$$C_{0,2}(t) = \int\big(f_{11}(t)+f_{12}(t)\big)\varphi_2(t)\,dt = \int\Big(\sin t+2te^{t^2}+\operatorname{ch}t+6\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\Big)\,dt =$$

$$= -\cos t+e^{t^2}+\operatorname{sh}t+6t\operatorname{arctg}\frac{t}{3}-9\ln(t^2+9) \quad \forall t\in\mathcal{T},$$

по теореме 2.1 строим первые интегралы системы Лаппо-Данилевского (2.3)

$$F_1\colon (t,x_1,x_2)\to\ t\,e^{t^3}(2x_1+x_2)+3t^2-4t\sin t+2(t^2-2)\cos t-2(t^2-1)e^{t^2}+$$

$$+\ 2t\operatorname{ch}t-(t^2+2)\operatorname{sh}t-2t^3\operatorname{arctg}\frac{t}{3}-27\ln(t^2+9) \quad \forall (t,x_1,x_2)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^2$$

и

$$F_2\colon (t,x_1,x_2)\to\frac{1}{t}\,e^{t^3}(x_1+x_2)+\cos t-e^{t^2}-\operatorname{sh}t-6t\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+9\ln(t^2+9) \quad \forall (t,x_1,x_2)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^2.$$

Первые интегралы F_1 и F_2, будучи функционально независимыми, образуют интегральный базис системы Лаппо-Данилевского (2.3) на любой области $\mathcal{T}\times\mathbb{R}^2$.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия леммы* 1.2. *Тогда первыми интегралами вполне разрешимой дифференциальной системы* (0.1) *будут функции*

$$F_\rho\colon (t,x)\to\ \beta_\rho(t,x)-\int\sum_{j=1}^{m}\beta_\rho(t,f_j(t))\,dt_j\quad \forall (t,x)\in\widetilde{\mathcal{T}}\times\mathbb{R}^n,\quad \rho=1,2, \tag{2.4}$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}$ *— односвязная область из* $\mathcal{T}$, *на области* $\widetilde{\mathcal{T}}\times\mathbb{R}^n$ *функции*

$$\beta_1\colon (t,x)\to\Bigl(\overset{*}{\nu}x\,\cos\int\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\lambda}_j(t)\,dt_j+\widetilde{\nu}x\,\sin\int\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\lambda}_j(t)\,dt_j\Bigr)\exp\Bigl(-\int\sum_{j=1}^{m}\overset{*}{\lambda}_j(t)\,dt_j\Bigr),$$

$$\beta_2\colon (t,x)\to\Bigl(\widetilde{\nu}x\,\cos\int\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\lambda}_j(t)\,dt_j-\overset{*}{\nu}x\,\sin\int\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\lambda}_j(t)\,dt_j\Bigr)\exp\Bigl(-\int\sum_{j=1}^{m}\overset{*}{\lambda}_j(t)\,dt_j\Bigr),$$

а скалярные функции $\overset{*}{\lambda}_j\colon t\to\sum\limits_{k=1}^{s_j}\overset{*}{\lambda}_{jk}\,\alpha_{jk}(t),\ \ \widetilde{\lambda}_j\colon t\to\sum\limits_{k=1}^{s_j}\widetilde{\lambda}_{jk}\,\alpha_{jk}(t)\ \ \forall t\in\mathcal{T},\ \ j=1,\ldots,m.$

В самом деле, формально применяя теорему 2.1, получим комплекснозначный первый интеграл вида (2.1). Выделяя у него действительную и мнимую части, находим вещественные первые интегралы (2.4) вполне разрешимой системы в полных дифференциалах (0.1).

Пример 2.2. Для линейных обыкновенных дифференциальных систем Еругина (правые части системы удовлетворяют условиям Коши — Римана) [22; 23, с. 152 – 153]

$$\frac{dx_1}{dt}=\alpha_{11}(t)\,x_1+\alpha_{12}(t)\,x_2+f_{11}(t),\qquad \frac{dx_2}{dt}=\,-\,\alpha_{12}(t)\,x_1+\alpha_{11}(t)\,x_2+f_{12}(t), \tag{2.5}$$

где функции $\alpha_{1k}\colon\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ и $f_{1k}\colon\mathcal{T}\to\mathbb{R},\ k=1,2$, непрерывны на открытом числовом промежутке $\mathcal{T}\subset\mathbb{R}$, на основании собственных чисел $\lambda_{11,1}=1$, $\lambda_{11,2}=1$, $\lambda_{12,1}=\,-\,i$, $\lambda_{12,2}=i$ и, соответствующих им, общих комплексных собственных векторов $\nu^1=(1,i),\ \nu^2=(1,-i)$ матриц $B_{11}=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\end{Vmatrix}$ и $B_{12}=\begin{Vmatrix}0&-1\\1&0\end{Vmatrix}$, строим интегральный базис (теорема 2.2)

$$F_\rho\colon (t,x_1,x_2)\to\ \beta_\rho(t,x_1,x_2)\,-\int\limits_{t_0}^{t}\beta_\rho(\tau,f_{11}(\tau),f_{12}(\tau))\,d\tau\quad \forall (t,x_1,x_2)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^2,\quad \rho=1,2,$$

где t_0 — произвольная фиксированная точка из $\mathcal{T}$, а скалярные функции

$$\beta_1\colon (t,x_1,x_2)\to\Bigl(x_1\cos\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{12}(t)\,dt\,-\,x_2\sin\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{12}(t)\,dt\Bigr)\exp\Bigl(-\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{11}(t)\,dt\Bigr)\ \ \forall (t,x_1,x_2)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^2,$$

$$\beta_2\colon (t,x_1,x_2)\to\Bigl(x_1\sin\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{12}(t)\,dt\,+\,x_2\cos\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{12}(t)\,dt\Bigr)\exp\Bigl(-\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{11}(t)\,dt\Bigr)\ \ \forall (t,x_1,x_2)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^2.$$

Так, например, при $\alpha_{11}\colon t\to\dfrac{1}{t}$, $\alpha_{12}\colon t\to 2t,\ f_{11}\colon t\to t,\ f_{12}\colon t\to 2t^2\ \ \forall t\in\mathcal{T}\subset\{t\colon t\neq 0\}$, система (2.5) имеет функционально независимые первые интегралы

$$F_1\colon (t,x_1,x_2)\to\ \frac{1}{t}\,(x_1\cos t^2-x_2\sin t^2)-\cos t^2-\int\limits_{t_0}^{t}\cos\tau^2\,d\tau\quad \forall (t,x_1,x_2)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^2$$

и

$$F_2\colon (t,x_1,x_2)\to\ \frac{1}{t}\,(x_1\sin t^2+x_2\cos t^2)-\sin t^2-\int\limits_{t_0}^{t}\sin\tau^2\,d\tau\quad \forall (t,x_1,x_2)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^2,$$

которые являются неэлементарными функциями.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия леммы* 1.3. *Тогда первыми интегралами вполне разрешимой дифференциальной системы* (0.1) *будут функции*

$$F_l\colon (t,x)\to \nu^l x\,\varphi(t)-\sum_{\tau=1}^{l}K^l_{\tau-1}(t)\,F_{\tau-1}(t,x)-C_l(t)\ \ \forall (t,x)\in\widetilde{\mathcal{T}}\times X,\quad l=0,\ldots,\varkappa-1,\ (2.6)$$

где односвязная область $\widetilde{\mathcal{T}}\subset\mathcal{T}$, *область* $X\subset\{x\colon \nu^0x\neq 0\}$, *экспоненциальная функция* $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{T}}\to\mathbb{R}$ *находится по формуле* (2.2), *а скалярные функции*

$$K^l_{\tau-1}\colon t\to\int\sum_{j=1}^{m}\biggl(\tbinom{l}{\tau-1}\mu_{j,l-\tau+1}(t)+\sum_{\delta=1}^{l-\tau}\tbinom{l}{\delta}\mu_{j\delta}(t)K^{l-\delta}_{\tau-1}(t)\biggr)dt_j\ \ \forall t\in\widetilde{\mathcal{T}},\ \tau=1,\ldots,l,\ l=1,\ldots,\varkappa-1,$$

$$C_l\colon t\to\int\sum_{j=1}^{m}\biggl(\nu^l f_j(t)\,\varphi(t)+\sum_{\tau=1}^{l}\tbinom{l}{\tau}\,\mu_{j\tau}(t)\,C_{l-\tau}(t)\biggr)dt_j\quad \forall t\in\widetilde{\mathcal{T}},\quad l=0,\ldots,\varkappa-1,$$

$$\mu_{jl}\colon t\to\sum_{k=1}^{s_j}\mu_{jkl}\,\alpha_{jk}(t)\ \ \forall t\in\mathcal{T}\ \ \bigl(\mu_{jkl}=\mathfrak{a}_{jk}\Psi_l(x),\ k=1,\ldots,s_j\bigr),\ j=1,\ldots,m,\ l=0,\ldots,\varkappa-1.$$

Доказательство. Методом, аналогичным использованному в теореме 2.1, устанавливается, что дифференциальные 1-формы стоящие под знаком криволинейного интеграла в функциях $K^l_{\tau-1}$ и C_l являются точными на односвязной области $\widetilde{\mathcal{T}}$.

При $\varkappa=1$ имеем утверждение теоремы 2.1.

Пусть $\varkappa=2$. Тогда в соответствии с теоремой 2.1 и леммой 1.4 получаем, что функция $F_1\colon \widetilde{\mathcal{T}}\times X\to\mathbb{R}$ будет первым интегралом системы Лаппо-Данилевского (0.1):

$$\mathfrak{B}_jF_1(t,x)=\mu_{j1}(t)\bigl(\nu^0x\,\varphi(t)-C_0(t)-F_0(t,x)\bigr)=0\quad \forall (t,x)\in\widetilde{\mathcal{T}}\times X,\quad j=1,\ldots,m.$$

Предположим, что функции (2.6) при $\varkappa=\varepsilon$ будут первыми интегралами системы (0.1). Тогда, используя лемму 1.4, на области $\widetilde{\mathcal{T}}\times X$ при $j=1,\ldots,m$ имеем

$$\mathfrak{B}_jF_\varepsilon(t,x)=\sum_{\tau=1}^{\varepsilon}\tbinom{\varepsilon}{\tau}\,\mu_{j\tau}(t)\biggl(\Bigl(\nu^{\varepsilon-\tau}x\,\varphi(t)-\sum_{\delta=1}^{\varepsilon-\tau}K^{\varepsilon-\tau}_{\delta-1}(t)\,F_{\delta-1}(t,x)-C_{\varepsilon-\tau}(t)\Bigr)-F_{\varepsilon-\tau}(t,x)\biggr)=0.$$

Следовательно, при $\varkappa=\varepsilon+1$ функция $F_\varepsilon\colon \widetilde{\mathcal{T}}\times X\to\mathbb{R}$ будет первым интегралом вполне разрешимой системы Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах (0.1).

Таким образом, учитывая способ построения функций (2.6), получаем, что они будут функционально независимыми первыми интегралами системы (0.1). Теорема доказана.

Пример 2.3. Обыкновенная дифференциальная система Лаппо-Данилевского

$$\frac{dx_1}{dt} = t\,x_1 - (2t+1)\,x_2 + (t+1)\,x_3 + \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{dx_2}{dt} = (2t+1)\,x_1 - x_2 + (2t+1)\,x_3 - 2t^2,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = -(t+1)\,x_1 + (2t+1)\,x_2 - (t+2)\,x_3 + t \tag{2.7}$$

такова, что ее матрица коэффициентов представима в виде $A_1(t) = A_{11} + t\,A_{12}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, где постоянные матрицы $A_{11} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$ и $A_{12} = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$.

Матрица B_{11}, транспонированная к матрице A_{11}, имеет трехкратное собственное число $\lambda_{11,1} = -1$. У матрицы $B_{11} - \lambda_{11,1} E$ ранг равен 2. Поэтому собственному числу $\lambda_{11,1} = -1$ соответствует $\theta_1 = 3 - 2 = 1$ элементарный делитель кратности три $(\lambda_{11} + 1)^3$.

Матрицы B_{11} и $B_{12} = A_{12}^T$, где T — знак транспонирования, имеют общий собственный вектор $\nu^0 = (1, 0, 1)$, которому соответствуют собственные числа $\lambda_{11,1} = -1$ и $\lambda_{12,1} = 0$. При этом матрица B_{11} имеет также первый $\nu^1 = (0, 1, 0)$ и второй $\nu^2 = (0, 2, 2)$ присоединенные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_{11,1} = -1$.

На основании собственного и присоединенных векторов строим функции

$$\nu^0 x\colon x \to x_1 + x_3 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \nu^1 x\colon x \to x_2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \nu^2 x\colon x \to 2(x_2 + x_3) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

$$\Psi_1\colon x \to \frac{x_2}{x_1 + x_3}\,, \quad \Psi_2\colon x \to \frac{2(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) - x_2^2}{(x_1 + x_3)^2} \quad \forall x \in X \subset \{x\colon x_1 + x_3 \neq 0\}.$$

Числа

$$\mu_{11,1} = \mathfrak{a}_{11}\Psi_1(x) = 1, \ \ \mu_{11,2} = \mathfrak{a}_{11}\Psi_2(x) = 0, \quad \mu_{12,1} = \mathfrak{a}_{12}\Psi_1(x) = 2, \ \ \mu_{12,2} = \mathfrak{a}_{12}\Psi_2(x) = 2,$$

где дифференциальные операторы, индуцированные системой Лаппо-Данилевского (2.7),

$$\mathfrak{a}_{11}(x) = (-x_2 + x_3)\,\partial_{x_1} + (x_1 - x_2 + x_3)\,\partial_{x_2} - (x_1 - x_2 + 2x_3)\,\partial_{x_3} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

$$\mathfrak{a}_{12}(x) = (x_1 - 2x_2 + x_3)\,\partial_{x_1} + 2(x_1 + x_3)\,\partial_{x_2} - (x_1 - 2x_2 + x_3)\,\partial_{x_3} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

С учетом того, что функции $\alpha_{11}: t \to 1$, $\alpha_{12}: t \to t$ $\forall t \in \mathbb{R}$, неоднородности $f_{11}: t \to \frac{1}{2}$, $f_{12}\colon t \to -2t^2$, $f_{13}\colon t \to t$ $\forall t \in \mathbb{R}$, а скалярные функции $\varphi\colon t \to e^t$, $C_0\colon t \to \Bigl(t - \frac{1}{2}\Bigr)e^t$, $\mu_{11}\colon t \to 2t + 1$, $K_0^1\colon t \to t(t+1)$, $C_1\colon t \to -\frac{1}{2}\,e^t$, $\mu_{12}\colon t \to 2t$, $K_0^2\colon t \to t^2(t^2 + 2t + 2)$, $K_1^2\colon t \to 2t(t+1)$, $C_2\colon t \to -(2t^2 - 3t + 4)\,e^t$ $\forall t \in \mathbb{R}$, по теореме 2.3, строим базис первых интегралов обыкновенной дифференциальной системы Лаппо-Данилевского (2.7)

$$F_0\colon (t,x) \to \Bigl(x_1 + x_3 - t + \frac{1}{2}\Bigr)e^t, \qquad F_1\colon (t,x) \to \Bigl(x_2 + \frac{1}{2}\Bigr)e^t - t(t+1)F_0(t,x),$$

$$F_2\colon (t,x) \to (2x_2 + 2x_3 + 2t^2 - 3t + 4)e^t - t^2(t^2 + 2t + 2)F_0(t,x) - 2t(t+1)F_1(t,x) \ \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4.$$

Доказательство теоремы 2.3 предусматривает как случай вещественных, так и комплексных векторов (общего собственного и присоединенных) матрицы $B_{\xi\zeta}$. В комплексном случае первые интегралы (2.6) системы (0.1) распадаются на вещественные интегралы

$$F_{1l}\colon (t,x)\to \operatorname{Re}F_l(t,x) \quad \text{и} \quad F_{2l}\colon (t,x)\to \operatorname{Im}F_l(t,x) \quad \forall (t,x)\in \widetilde{\mathcal{T}}\times X, \quad l=0,\ldots,\varkappa-1.$$

Пример 2.4. У системы Лаппо-Данилевского четвертого порядка

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{t}\,(x_1-x_2)-x_4+t\cos t, \qquad \frac{dx_2}{dt}=\,-\,x_1+\frac{1}{t}\,x_2-x_3-t\sin t,$$
$$\frac{dx_3}{dt}=\Bigl(1+\frac{1}{t}\Bigr)x_2+\frac{1}{t}\,x_3+x_4+t^2, \quad \frac{dx_4}{dt}=\Bigl(3-\frac{1}{t}\Bigr)x_1+\Bigl(2-\frac{1}{t}\Bigr)x_3+\frac{1}{4}\,x_4+2t \qquad (2.8)$$

матрица коэффициентов представима в виде

$$A_1(t)=A_{11}+\frac{1}{t}\,A_{12} \quad \forall t\in\mathcal{T}, \quad \mathcal{T}\subset\{t\colon t\neq 0\},$$

где постоянные матрицы $A_{11}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2 & 0\end{Vmatrix}$ и $A_{12}=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1\end{Vmatrix}$.

Матрица $B_{11}=A_{11}^T$ имеет двухкратные комплексные собственные числа $\lambda_{11,1}=i$ и $\lambda_{11,2}=\,-\,i$. У матрицы $B_{11}-\lambda_{11,1}E$ ранг равен 3. Поэтому собственному числу $\lambda_{11,1}=i$ соответствует $\theta_1=4-3=1$ элементарный делитель кратности два $(\lambda_{11}-i)^2$.

Следовательно, матрица B_{11} имеет два элементарных делителя $(\lambda_{11}-i)^2$ и $(\lambda_{11}+i)^2$.

Матрицы B_{11} и $B_{12}=A_{12}^T$ имеют общий собственный вектор $\nu^0=(1,-i,1,0)$, которому соответствуют собственные числа $\lambda_{11,1}=i$ и $\lambda_{12,1}=1$. При этом матрица B_{11} имеет также первый присоединенный вектор $\nu^1=(\,-\,i,1,0,1)$.

На основании собственного и присоединенного векторов строим функцию

$$\Psi_1\colon x\to \frac{-\,ix_1+x_2+x_4}{x_1-ix_2+x_3} \quad \forall x\in X\subset\{x\colon (x_1+x_3)^2+x_2^2\neq 0\}.$$

Числа $\mu_{11,0}=i,\ \mu_{12,0}=1,\ \mu_{11,1}=\mathfrak{a}_{11}\Psi_1(x)=1,\ \mu_{12,1}=\mathfrak{a}_{12}\Psi_1(x)=\,-\,1$, где операторы

$$\mathfrak{a}_{11}(x)=\,-\,x_4\,\partial_{x_1}-(x_1+x_3)\,\partial_{x_2}+(x_2+x_4)\,\partial_{x_3}+(3x_1+2x_3)\,\partial_{x_4} \quad \forall x\in\mathbb{R}^4,$$
$$\mathfrak{a}_{12}(x)=(x_1-x_2)\,\partial_{x_1}+x_2\,\partial_{x_2}+(x_2+x_3)\,\partial_{x_3}-(x_1+x_3-x_4)\,\partial_{x_4} \quad \forall x\in\mathbb{R}^4.$$

С учетом того, что скалярные функции $\alpha_{11}\colon t\to 1,\ \alpha_{12}\colon t\to \dfrac{1}{t}\ \ \forall t\in\mathcal{T}$, неоднородности $f_{11}\colon t\to t\cos t,\ f_{12}\colon t\to\,-\,t\sin t,\ f_{13}\colon t\to\,t^2,\ f_{14}\colon t\to\,2t\ \ \forall t\in\mathcal{T}$, а функции

$$\varphi\colon t\to\frac{1}{t}\,(\cos t-i\sin t), \quad C_0\colon t\to t+\cos t+t\sin t-i(\sin t-t\cos t), \quad \mu_{10}\colon t\to i+\frac{1}{t}\,,$$

$$\mu_{11}\colon t\to 1-\frac{1}{t}\,,\quad K_0^1\colon t\to t-\ln|t|,\quad C_1\colon t\to\, -t+\frac{t^2}{2}+\cos t+4\sin t+\frac{1}{2}\,\cos 2t-t\cos t-$$

$$-\int\frac{\cos t}{t}\,dt+i\Big(4\cos t-\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+t\sin t+\int\frac{\sin t}{t}\,dt\Big)\quad \forall t\in\mathcal{T},$$

строим интегральный базис обыкновенной системы Лаппо-Данилевского (2.8)

$$F_{10}\colon (t,x)\to\ \frac{1}{t}\,\big(\cos t\,(x_1+x_3)-\sin t\,x_2\big)-t-\cos t-t\sin t\quad \forall (t,x)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^4,$$

$$F_{20}\colon (t,x)\to\ -\frac{1}{t}\,\big(\cos t\,x_2+\sin t\,(x_1+x_3)\big)+\sin t-t\cos t\quad \forall (t,x)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^4,$$

$$F_{11}\colon (t,x)\to\ \frac{1}{t}\,\big(\cos t\,(x_2+x_4)-\sin t\,x_1\big)-(t-\ln|t|)F_{10}(t,x)+$$

$$+\,t-\frac{t^2}{2}-\cos t-4\sin t-\frac{1}{2}\,\cos 2t+t\cos t+\int\frac{\cos t}{t}\,dt\quad \forall (t,x)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^4,$$

$$F_{21}\colon (t,x)\to\ \frac{1}{t}\,\big(\cos t\,x_1+\sin t\,(x_2+x_4)\big)+(t-\ln|t|)F_{20}(t,x)+$$

$$+\,4\cos t-\sin t-\frac{1}{2}\,\sin 2t+t\sin t+\int\frac{\sin t}{t}\,dt\quad \forall (t,x)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^4.$$

3. *Первые интегралы системы* (0.2). Построение первых интегралов линейной однородной системы уравнений Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах (0.2) осуществляется на основании теорем 3.1 – 3.3.

На случай однородной системы Лаппо-Данилевского (0.2) из теоремы 2.1 получаем

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия леммы* 1.1. *Тогда первым интегралом вполне разрешимой дифференциальной системы* (0.2) *будет функция*

$$F\colon (t,x)\to\ \nu x\,\exp\bigg(-\int\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{s_j}\lambda_{jk}\,\alpha_{jk}(t)\,dt_j\bigg)\quad \forall (t,x)\in\widetilde{\mathcal{T}}\times\mathbb{R}^n.$$

Пример 3.1. Вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1&=3\,t_2^2\,(x_1+3x_2)\,dt_1+\big((6\,t_1t_2+1)\,x_1+18\,t_1t_2\,x_2\big)\,dt_2,\\ dx_2&=\,-\,6\,t_2^2\,(x_1+2x_2)\,dt_1-\big(12\,t_1t_2\,x_1+(24\,t_1t_2-1)\,x_2\big)\,dt_2\,, \end{aligned}\tag{3.1}$$

такова, что $A_1(t_1,t_2)=\,-\,3\,t_2^2\,A_{11},\ \ A_2(t_1,t_2)=\,-\,(10\,t_1t_2-1)\,A_{21}+2\,t_1t_2\,A_{22}\ \ \forall (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, где постоянные матрицы $A_{11}=\begin{Vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{Vmatrix},\ A_{21}=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$ и $A_{22}=\begin{Vmatrix}8 & 9\\ -6 & -7\end{Vmatrix}$.

По теореме 3.1, на основании скалярных функций

$$\alpha_{11}\colon (t_1,t_2)\to\,-\,3t_2^2,\quad \alpha_{21}\colon (t_1,t_2)\to\,-\,10\,t_1t_2+1,\quad \alpha_{22}\colon (t_1,t_2)\to 2\,t_1t_2\quad \forall (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2,$$

линейно независимых общих вещественных векторов $\nu^1=(1,1)$ и $\nu^2=(2,3)$ матриц B_{11}, $B_{21},\ B_{22}$, транспонированных к матрицам $A_{11},\ A_{21},\ A_{22}$, и соответствующих им собственных чисел $\lambda_{11,1}=\lambda_{21,1}=1,\ \lambda_{22,1}=2$ и $\lambda_{11,2}=2,\ \lambda_{21,2}=1,\ \lambda_{22,2}=-1$ строим интегральный базис системы уравнений Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах (3.1)

$$F_1\colon (t,x)\to\ (x_1+x_2)\exp\bigl(t_2(3t_1t_2-1)\bigr)\quad \forall (t,x)\in\mathbb{R}^4$$

и

$$F_2\colon (t,x)\to\ (2x_1+3x_2)\exp\bigl(t_2(6t_1t_2-1)\bigr)\quad \forall (t,x)\in\mathbb{R}^4.$$

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия леммы* 1.2. *Тогда первыми интегралами вполне разрешимой дифференциальной системы* (0.2) *будут функции*

$$F_1\colon (t,x)\to\ \Bigl(\bigl(\overset{*}{\nu}x\bigr)^2+\bigl(\widetilde{\nu}x\bigr)^2\Bigr)\exp\biggl(-2\int\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{s_j}\overset{*}{\lambda}_{jk}\,\alpha_{jk}(t)\,dt_j\biggr)$$

и

$$F_2\colon (t,x)\to\ \operatorname{arctg}\frac{\widetilde{\nu}x}{\overset{*}{\nu}x}-\int\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{s_j}\widetilde{\lambda}_{jk}\,\alpha_{jk}(t)\,dt_j\quad \forall (t,x)\in\widetilde{\mathcal{T}}\times X.$$

Доказательство основано на вычислении производных Ли в силу вполне разрешимой дифференциальной системы (0.2) функций F_1 и F_2 с учетом леммы 1.2.

Пример 3.2. Вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1&=\bigl(a\sin(\omega t_2)\,x_1+b\operatorname{sh}t_1\,x_2\bigr)\,dt_1+a\omega t_1\cos(\omega t_2)\,x_1\,dt_2,\\ dx_2&=\bigl(-c\operatorname{sh}t_1\,x_1+a\sin(\omega t_2)\,x_2\bigr)\,dt_1+a\omega t_1\cos(\omega t_2)\,x_2\,dt_2,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где числа $a\in\mathbb{R},\ b,c\in(0;+\infty),\ \omega\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, такова, что матрицы коэффициентов

$$A_1(t_1,t_2)=\sin(\omega t_2)\,A_{11}+\operatorname{sh}t_1\,A_{12}\ \ \forall (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2,\quad A_2(t_1,t_2)=t_1\cos(\omega t_2)\,A_{21}\ \ \forall (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2,$$

а перестановочные матрицы $A_{11}=\begin{Vmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{Vmatrix},\ A_{12}=\begin{Vmatrix} 0 & b\\ -c & 0\end{Vmatrix}$ и $A_{21}=\begin{Vmatrix} a\omega & 0\\ 0 & a\omega\end{Vmatrix}$.

Матрицы $B_{11},\ B_{12},\ B_{21}$, транспонированные к матрицам $A_{11},\ A_{12},\ A_{21}$, имеют линейно независимые общие комплексные собственные векторы $\nu^1=\bigl(\sqrt{c},\sqrt{b}\,i\bigr)$ и $\nu^2=\bigl(\sqrt{c},-\sqrt{b}\,i\bigr)$, которым соответствуют собственные числа

$$\lambda_{11,1}=a,\quad \lambda_{12,1}=-\sqrt{bc}\,i,\quad \lambda_{21,1}=a\omega\quad \text{и}\quad \lambda_{11,2}=a,\quad \lambda_{12,2}=\sqrt{bc}\,i,\quad \lambda_{21,2}=a\omega.$$

Учитывая, что числа $\overset{*}{\lambda}_{11,1}=a,\ \overset{*}{\lambda}_{12,1}=0,\ \overset{*}{\lambda}_{21,1}=a\omega,\ \widetilde{\lambda}_{11,1}=0,\ \widetilde{\lambda}_{12,1}=-\sqrt{bc},\ \widetilde{\lambda}_{21,1}=0$, функции $\alpha_{11}\colon (t_1,t_2)\to\sin(\omega t_2),\ \alpha_{12}\colon (t_1,t_2)\to\operatorname{sh}t_1,\ \alpha_{21}\colon (t_1,t_2)\to t_1\cos(\omega t_2)\ \ \forall (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, по теореме 3.2, строим базис первых интегралов системы Лаппо-Данилевского (3.2)

$$F_1\colon (t,x)\to\ (cx_1^2+bx_2^2)\exp\bigl(-2at_1\sin(\omega t_2)\bigr)\quad \forall (t,x)\in\mathbb{R}^4$$

и

$$F_2\colon (t,x)\to\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b}\,x_2}{\sqrt{c}\,x_1}+\sqrt{bc}\,\operatorname{ch}t_1\quad \forall (t,x)\in\mathbb{R}^2\times X,\quad X\subset\{(x_1,x_2)\colon x_1\neq 0\}.$$

С учетом тождеств (1.6), подобно теореме 2.1, доказывается

Теорема 3.3. *Пусть выполняются условия леммы* 1.3. *Тогда первыми интегралами вполне разрешимой дифференциальной системы* (0.2) *будут функции*

$$F_l\colon (t,x) \to \ \Psi_l(x) - \int \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s_j} \mu_{jkl}\, \alpha_{jk}(t)\, dt_j \quad \forall (t,x) \in \widetilde{\mathcal{T}} \times X, \quad l = 1, \ldots, \varkappa - 1. \qquad (3.3)$$

Пример 3.3. Обыкновенные линейные однородные дифференциальные системы с недиагональными матрицами второго порядка, обладающие свойством Лаппо-Данилевского, имеют вид [24]

$$\frac{dx_1}{dt} = \big(\alpha_{11}(t) + b_1\, \alpha_{12}(t)\big)\, x_1 + \alpha_{12}(t)\, x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = b_2\, \alpha_{12}(t)\, x_1 + \alpha_{11}(t)\, x_2, \qquad (3.4)$$

где скалярные функции $\alpha_{11}\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ и $\alpha_{12}\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ непрерывны, а b_1 и b_2 — вещественные числа. Первые интегралы обыкновенной дифференциальной системы Лаппо-Данилевского (3.4) определяются в зависимости от знака числа $D = b_1^2 + 4b_2$.

Если $D > 0$, то по общим собственным векторам $\nu^1 = (1, \, -\lambda_{12,2})$ и $\nu^2 = (1, \, -\lambda_{12,1})$, которым соответствуют собственные числа $\lambda_{11,1} = 1$, $\lambda_{12,1} = \big(b_1 - \sqrt{D}\,\big)/2$ и $\lambda_{11,2} = 1$, $\lambda_{12,2} = \big(b_1 + \sqrt{D}\,\big)/2$, строим интегральный базис (теорема 3.1) системы (3.4)

$$F_k\colon (t, x_1, x_2) \to \ \big(x_1 - \lambda_{12,3-k}\, x_2\big) \exp\bigg(- \int\limits_{t_0}^{t} \big(\alpha_{11}(\tau) + \lambda_{12,k}\, \alpha_{12}(\tau)\big)\, d\tau \bigg)$$

$$\forall (t, x_1, x_2) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^2, \quad t_0 \in \mathcal{T}, \quad k = 1, 2.$$

Если $D < 0$, то используя общий собственный вектор $\nu^1 = (\lambda_{12,1}, 1)$, которому соответствуют собственные числа $\lambda_{11,1} = 1$, $\lambda_{12,1} = \overset{*}{\lambda} - \widetilde{\lambda}\, i$, где $\overset{*}{\lambda} = b_1/2$, $\widetilde{\lambda} = \sqrt{-D}/2$, строим, по теореме 3.2, функционально независимые первые интегралы системы (3.4)

$$F_1\colon (t, x_1, x_2) \to \big((\overset{*}{\lambda} x_1 + x_2)^2 + (\widetilde{\lambda} x_1)^2\big) \exp\bigg(-2 \int\limits_{t_0}^{t} \big(\alpha_{11}(\tau) + \overset{*}{\lambda}\, \alpha_{12}(\tau)\big)\, d\tau \bigg) \ \ \forall (t, x_1, x_2) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^2,$$

$$F_2\colon (t, x_1, x_2) \to \ \operatorname{arctg} \frac{\widetilde{\lambda}\, x_1}{\overset{*}{\lambda}\, x_1 + x_2} \ + \int\limits_{t_0}^{t} \widetilde{\lambda}\, \alpha_{12}(\tau)\, d\tau \quad \forall (t, x_1, x_2) \in \mathcal{T} \times X, \quad t_0 \in \mathcal{T},$$

где X — любая область из множества $\{(x_1, x_2)\colon \overset{*}{\lambda}\, x_1 + x_2 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Если $D = 0$, то используя общий собственный вектор $\nu^0 = (\lambda_{12,1}, 1)$ и присоединенный вектор $\nu^1 = (1, 0)$, которые соответствуют двукратному собственному числу $\lambda_{12,1} = b_1/2$, по теоремам 3.1 и 3.3, строим базис первых интегралов дифференциальной системы (3.4)

$$F_1\colon (t, x_1, x_2) \to \ \big(\lambda_{12,1}\, x_1 + x_2\big) \exp\bigg(- \int\limits_{t_0}^{t} \big(\alpha_{11}(\tau) + \lambda_{12,1}\, \alpha_{12}(\tau)\big)\, d\tau \bigg) \quad \forall (t, x_1, x_2) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^2,$$

$$F_2\colon (t,x_1,x_2) \to \ \frac{x_1}{\lambda_{12,1}\, x_1 + x_2} - \int\limits_{t_0}^{t} \alpha_{12}(\tau)\, d\tau \quad \forall (t,x_1,x_2) \in \mathcal{T} \times X, \quad t_0 \in \mathcal{T},$$

где X — любая область из множества $\{(x_1,x_2)\colon \lambda_{12,1}\, x_1 + x_2 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Пример 3.4. Вполне разрешимая система в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dx_1 &= \big((t_2 \operatorname{sh} t_1 - \ln t_1)\, x_1 - 2\ln t_1\, x_2\big)\, dt_1 - \big((6\,t_2^2 - \operatorname{ch} t_1)\, x_1 + t_2 \sin t_2\, x_3\big)\, dt_2, \\ dx_2 &= \big(\ln t_1 (x_1 + x_3) + (t_2 \operatorname{sh} t_1 - \ln t_1)\, x_2\big)\, dt_1 + (\operatorname{ch} t_1 + t_2 \sin t_2 - 6\,t_2^2)\, x_2\, dt_2, \\ dx_3 &= \big(2\ln t_1\, x_2 + (t_2 \operatorname{sh} t_1 - \ln t_1)\, x_3\big)\, dt_1 + \big(t_2 \sin t_2\, x_1 + (\operatorname{ch} t_1 + 2t_2 \sin t_2 - 6\,t_2^2)\, x_3\big) dt_2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

такова, что матрицы коэффициентов на области $\mathcal{T} \subset (0;\, +\infty) \times \mathbb{R}$ представимы в виде

$$A_1(t_1,t_2) = \ln t_1\, A_{11} + t_2 \operatorname{sh} t_1\, A_{12}, \quad A_2(t_1,t_2) = (6\,t_2^2 - \operatorname{ch} t_1)\, A_{21} + t_2 \sin t_2\, A_{22} \quad \forall (t_1,t_2) \in \mathcal{T},$$

где постоянные перестановочные матрицы

$$A_{11} = \begin{Vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{Vmatrix}, \ \ A_{12} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ \ A_{21} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \ \ A_{22} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Матрица B_{11}, транспонированная к матрице A_{11}, имеет собственное число $\lambda_{11,1} = -1$, которому соответствуют элементарный делитель $(\lambda_{11} + 1)^3$ кратности три, собственный вектор $\nu^0 = (1,0,1)$, первый $\nu^1 = (0,1,0)$ и второй $\nu^2 = (0,0,1)$ присоединенные векторы. При этом вещественный вектор ν^0 является общим собственным вектором матриц $B_{11},\ B_{12}$, $B_{21},\ B_{22}$, транспонированных к матрицам $A_{11},\ A_{12},\ A_{21},\ A_{22}$, которому соответствуют собственные числа $\lambda_{11,1} = -1,\ \lambda_{12,1} = 1,\ \lambda_{21,1} = -1,\ \lambda_{22,1} = 1$.

По теореме 3.1, с учетом того, что на области $\mathcal{T}$ скалярные функции

$$\alpha_{11}\colon (t_1,t_2) \to \ln t_1,\ \ \alpha_{12}\colon (t_1,t_2) \to t_2 \operatorname{sh} t_1,\ \ \alpha_{21}\colon (t_1,t_2) \to 6\,t_2^2 - \operatorname{ch} t_1,\ \ \alpha_{22}\colon (t_1,t_2) \to t_2 \sin t_2,$$

строим первый интеграл системы уравнений Лаппо-Данилевского (3.5)

$$F_0\colon (t,x) \to \ (x_1 + x_3) \exp\big(t_1(\ln t_1 - 1) - \sin t_2 + (\cos t_2 - \operatorname{ch} t_1)\, t_2 + 2\,t_2^3\big) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^3.$$

Используя функциональную систему (1.7), по собственному и присоединенным векторам матрицы B_{11}, строим скалярные функции

$$\Psi_1\colon x \to \frac{x_2}{x_1 + x_3} \quad \forall x \in X, \quad \Psi_2\colon x \to \frac{(x_1 + x_3)x_3 - x_2^2}{(x_1 + x_3)^2} \quad \forall x \in X, \quad X \subset \{x\colon x_1 + x_3 \neq 0\}.$$

Вычисляя действия линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathfrak{a}_{11}(x) = -(x_1 + 2x_2)\, \partial_{x_1} + (x_1 - x_2 + x_3)\, \partial_{x_2} + (2x_2 - x_3)\, \partial_{x_3}, \ \ \mathfrak{a}_{12}(x) = x_1\, \partial_{x_1} + x_2\, \partial_{x_2} + x_3\, \partial_{x_3},$$

$$\mathfrak{a}_{21}(x) = -x_1\, \partial_{x_1} - x_2\, \partial_{x_2} - x_3\, \partial_{x_3}, \quad \mathfrak{a}_{22}(x) = -x_3\, \partial_{x_1} + x_2\, \partial_{x_2} + (x_1 + 2x_3)\, \partial_{x_3} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

на функции $\Psi_1\colon X \to \mathbb{R}$ и $\Psi_2\colon X \to \mathbb{R}$, получаем числа

$$\mu_{111} = 1,\ \mu_{121} = 0,\ \mu_{211} = 0,\ \mu_{221} = 0 \quad \text{и} \quad \mu_{112} = 0,\ \mu_{122} = 0,\ \mu_{212} = 0,\ \mu_{222} = 1.$$

По теореме 3.3, строим первые интегралы вполне разрешимой системы (3.5)

$$F_1\colon (t,x) \to \frac{x_2}{x_1+x_3} - t_1(\ln t_1 - 1) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times X$$

и

$$F_2\colon (t,x) \to \frac{(x_1+x_3)x_3 - x_2^2}{(x_1+x_3)^2} + t_2 \cos t_2 - \sin t_2 \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times X.$$

Первые интегралы $F_0,\ F_1$ и F_2, будучи функционально независимыми, образует интегральный базис на области $\mathcal{T} \times X$ вполне разрешимой системы уравнений Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах (3.5).

В комплексном случае первые интегралы (3.3) вполне разрешимой дифференциальной системы Лаппо-Данилевского (0.2) распадаются на вещественные первые интегралы

$$F_{1l}\colon (t,x) \to \operatorname{Re} F_l(t,x) \quad \text{и} \quad F_{2l}\colon (t,x) \to \operatorname{Im} F_l(t,x) \quad \forall (t,x) \in \widetilde{\mathcal{T}} \times X, \quad l = 1,\ldots,\varkappa - 1.$$

Автономные первые интегралы. Для нестационарной дифференциальной системы Лаппо-Данилевского (0.2) рассмотрим задачу Н.П. Еругина о существовании автономных первых интегралов [25, с. 469]. В основании построения автономных первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах (0.2) лежит следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Функция $F\colon X \to \mathbb{R}$ является автономным первым интегралом системы Лаппо-Данилевского* (0.2) *тогда и только тогда, когда она является первым интегралом линейной однородной системы уравнений в частных производных*

$$\mathfrak{a}_{jk}(x)\, y = 0, \quad k = 1,\ldots,s_j, \quad j = 1,\ldots,m. \tag{3.6}$$

Доказательство [25, с. 470]. Функция $F\colon X \to \mathbb{R}$ будет автономным первым интегралом системы Лаппо-Данилевского (0.2), если и только если выполняются тождества

$$\sum_{k=1}^{s_j} \alpha_{jk}(t)\, A_{jk}\, x\, \partial_x F(x) = 0 \quad \forall (t,x) \in J \times X, \quad j = 1,\ldots,m, \quad X \subset \mathbb{R}^n.$$

Так как функции $\alpha_{jk}\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R},\ k = 1,\ldots,s_j$, при каждом индексе $j = 1,\ldots,m$, являются линейно независимыми на области $\mathcal{T}$, то эти тождества равносильны системе тождеств

$$A_{jk}\, x\, \partial_x F(x) = 0 \quad \forall x \in X, \quad k = 1,\ldots,s_j, \quad j = 1,\ldots,m,$$

а значит, функция $F\colon X \to \mathbb{R}$ есть первый интеграл системы (3.6). Лемма доказана.

Пусть число $s = \sum\limits_{j=1}^{m} s_j$. Тогда, если матрицы $B_{jk},\ k = 1,\ldots,s_j,\ j = 1,\ldots,m$, имеют $s+1$ общих линейно независимых собственных векторов $\nu^\theta,\ \theta = 1,\ldots,s+1$, то, основываясь на лемме 3.1 и используя результаты работы [14] по нахождению первых интегралов линейной однородной системы уравнений в частных производных первого порядка, получаем утверждения (теоремы 3.4 – 3.7) относительно построения автономных первых интегралов для системы Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах (0.2).

Теорема 3.4. *Пусть ν^θ — общие линейно независимые вещественные собственные векторы матриц B_{jk}, которым соответствуют собственные числа $\lambda_{jk,\theta},\ k = 1,\ldots,s_j,$ $j = 1,\ldots,m,\ \theta = 1,\ldots,s+1$. Тогда автономным первым интегралом системы уравнений*

Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах (0.2) *будет функция*

$$F\colon x \to \prod_{\theta=1}^{s+1} \left|\nu^\theta x\right|^{h_\theta} \quad \forall x \in X, \quad X \subset \mathrm{D}F,$$

где вещественные числа $h_\theta,\ \theta = 1, \ldots, s+1,$ *являются нетривиальным решением линейной однородной системы* $\sum\limits_{\theta=1}^{s+1} \lambda_{jk,\theta} h_\theta = 0,\ k = 1, \ldots, s_j,\ j = 1, \ldots, m.$

Пример 3.5. Обыкновенная линейная однородная дифференциальная система уравнений Лаппо-Данилевского третьего порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = e^t \cos e^t\, x_1 + 2 \operatorname{sh} t\,(x_2 + x_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = \operatorname{sh} t\, x_1 + e^t \cos e^t\, x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = \operatorname{sh} t\, x_1 + e^t \cos e^t\, x_2 \tag{3.7}$$

такова, что матрицы $B_{11} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ и $B_{12} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ имеют общие вещественные собственные векторы $\nu^1 = (1, -1, -1),\ \nu^2 = (0, 1, -1),\ \nu^3 = (1, 1, 1)$, которым соответствуют собственные числа $\lambda_{11,1} = -2,\ \lambda_{11,2} = 0,\ \lambda_{11,3} = 2$ и $\lambda_{12,1} = 1,\ \lambda_{12,2} = -1,\ \lambda_{12,3} = 1.$

Из линейной однородной системы уравнений $-2h_1 + 2h_3 = 0,\ h_1 - h_2 + h_3 = 0$ находим, например, что $h_1 = 1,\ h_2 = 2,\ h_3 = 1$. Тогда, по теореме 3.4, скалярная функция

$$F\colon (x_1, x_2, x_3) \to \ (x_1^2 - (x_2 - x_3)^2)(x_2 - x_3)^2 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

будет автономным первым интегралом на фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ системы (3.7).

По теореме 3.1, с учетом того, что функции $\alpha_{11}\colon t \to \operatorname{sh} t,\ \ \alpha_{12}\colon t \to e^t \cos e^t \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, строим неавтономные первые интегралы системы Лаппо-Данилевского (3.7)

$$F_1\colon (t, x_1, x_2, x_3) \to \ e^{2\operatorname{ch} t - \sin e^t}(x_1 - x_2 - x_3), \quad F_2\colon (t, x_1, x_2, x_3) \to \ e^{\sin e^t}(x_2 - x_3)$$

и

$$F_3\colon (t, x_1, x_2, x_3) \to \ e^{-2\operatorname{ch} t - \sin e^t}(x_1 + x_2 + x_3) \quad \forall (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4.$$

Таким образом, каждая из совокупностей функционально независимых первых интегралов $\{F, F_1, F_2\}$, $\{F, F_1, F_3\}$, $\{F, F_2, F_3\}$ и $\{F_1, F_2, F_3\}$ является интегральным базисом на пространстве $\mathbb{R}^4$ обыкновенной дифференциальной системы Лаппо-Данилевского (3.7).

Теорема 3.5. *Пусть* $\nu^\rho = \overset{*}{\nu}{}^\rho + \widetilde{\nu}^\rho i$ $(\overset{*}{\nu}{}^\rho = \operatorname{Re} \nu^\rho,\ \widetilde{\nu}^\rho = \operatorname{Im} \nu^\rho),\ \rho = 1, \ldots, r,\ r \le (s+1)/2,$ *и* $\nu^\theta,\ \theta = r+1, \ldots, s+1-r,$ *— соответственно общие линейно независимые комплексные (среди которых нет комплексно сопряженных) и вещественные собственные векторы матриц* $B_{jk},\ k = 1, \ldots, s_j,\ j = 1, \ldots, m.$ *Тогда автономным первым интегралом системы уравнений Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах* (0.2) *будет функция*

$$F\colon x \to \prod_{\rho=1}^{r} \big(P_\rho(x)\big)^{\overset{*}{h}_\rho} \exp\big(-2\, \widetilde{h}_\rho \varphi_\rho(x)\big) \prod_{\theta=r+1}^{s+1-r} \left|\nu^\theta x\right|^{h_\theta} \quad \forall x \in X, \quad X \subset \mathrm{D}F,$$

где скалярные функции

$$P_\rho\colon x \to \ \big(\overset{*}{\nu}{}^\rho x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}{}^\rho x\big)^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_\rho\colon x \to \ \operatorname{arctg} \frac{\widetilde{\nu}{}^\rho x}{\overset{*}{\nu}{}^\rho x} \quad \forall x \in X, \quad \rho = 1, \ldots, r,$$

вещественные числа $\overset{*}{h}_\rho,\ \widetilde{h}_\rho,\ \rho = 1, \ldots, r,$ *и* $h_\theta,\ \theta = r+1, \ldots, s+1-r,$ *составляют нетривиальное решение линейной однородной системы*

$$2\sum_{\rho=1}^{r} \big(\overset{*}{\lambda}_{jk,\rho}\, \overset{*}{h}_\rho - \widetilde{\lambda}_{jk,\rho}\, \widetilde{h}_\rho\big) \ + \sum_{\theta=r+1}^{s+1-r} \lambda_{jk,\theta}\, h_\theta = 0, \quad k = 1, \ldots, s_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

а $\lambda_{jk,\rho} = \overset{*}{\lambda}_{jk,\rho} + \widetilde{\lambda}_{jk,\rho}\, i\ (\overset{*}{\lambda}_{jk,\rho} = \operatorname{Re} \lambda_{jk,\rho},\ \widetilde{\lambda}_{jk,\rho} = \operatorname{Im} \lambda_{jk,\rho})$ *и* $\lambda_{jk,\theta}$ *есть соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц* B_{jk}, *которым соответствуют общие собственные векторы* ν^ρ *и* ν^θ.

Пример 3.6. Рассмотрим обыкновенную линейную однородную дифференциальную систему уравнений Лаппо-Данилевского четвертого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_{11}(t) A_{11}\, x + \alpha_{12}(t) A_{12}\, x, \quad x \in \mathbb{R}^4, \tag{3.8}$$

где линейно независимые скалярные функции $\alpha_{11}\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ и $\alpha_{12}\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ непрерывны, а матрицы $A_{11} = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ -6 & 5 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$ и $A_{12} = \begin{Vmatrix} -4 & 2 & 2 & 4 \\ -5 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$ перестановочны.

Матрицы B_{11} и B_{12}, транспонированные к матрицам A_{11} и A_{12} соответственно, имеют общие собственные векторы $\nu^1 = (1+i,\ -i,\ -1+i,\ -1)$, $\nu^2 = (1-i, i,\ -1-i,\ -1)$, $\nu^3 = (1,\ -1, 2, 0)$, $\nu^4 = (-1, 0, 2, 2)$, которым соответствуют собственные числа

$\lambda_{11,1} = 1+i,\ \lambda_{11,2} = 1-i,\ \lambda_{11,3} = -1,\ \lambda_{11,4} = 1$ и $\lambda_{12,1} = i,\ \lambda_{12,2} = -i,\ \lambda_{12,3} = 1,\ \lambda_{12,4} = 2.$

Вещественные числа $\overset{*}{h}_{11},\ \widetilde{h}_{11},\ h_{31}$ и $\overset{*}{h}_{12},\ \widetilde{h}_{12},\ h_{42}$ найдем соответственно из систем

$$2\overset{*}{h}_{11} - 2\widetilde{h}_{11} - h_{31} = 0, \quad -2\widetilde{h}_{11} + h_{31} = 0 \quad \text{и} \quad 2\overset{*}{h}_{12} - 2\widetilde{h}_{12} + h_{42} = 0, \quad -2\widetilde{h}_{12} + 2h_{42} = 0.$$

Например, $\overset{*}{h}_{11} = 2,\ \widetilde{h}_{11} = 1,\ h_{31} = 2$ и $\overset{*}{h}_{12} = 1,\ \widetilde{h}_{12} = 2,\ h_{42} = 2.$

По теореме 3.5, скалярные функции

$$F_1\colon x \to \ (x_1 - x_2 + 2x_3)\big((x_1 - x_3 - x_4)^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2\big) \exp\!\left(-\operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_2 + x_3}{x_1 - x_3 - x_4}\right)$$

и

$$F_2\colon x \to \ (-x_1 + 2x_3 + 2x_4)^2\big((x_1 - x_3 - x_4)^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2\big) \exp\!\left(-4 \operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_2 + x_3}{x_1 - x_3 - x_4}\right)$$

на любой области X из множества $\{x\colon x_1 - x_3 - x_4 \neq 0\}$ пространства $\mathbb{R}^4$, будут автономными первыми интегралами системы Лаппо-Данилевского (3.8).

Теорема 3.6. *Пусть векторы* $\nu^\rho = \overset{*}{\nu}{}^{\rho} + \widetilde{\nu}{}^{\rho} i,\ \nu^{r+\rho} = \overset{*}{\nu}{}^{\rho} - \widetilde{\nu}{}^{\rho} i,\ \rho = 1,\ldots,r,\ r \le s/2,$ $\nu^{2r+1} = \overset{*}{\nu}{}^{2r+1} + \widetilde{\nu}{}^{2r+1} i$ *и* $\nu^\theta,\ \theta = 2r+2,\ldots,s+1,$ *— соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц* $B_{jk},\ k = 1,\ldots,s_j,\ j = 1,\ldots,m.$ *Тогда автономными первыми интегралами системы Лаппо-Данилевского* (0.2) *будут функции*

$$F_1\colon x \to \prod_{\rho=1}^{r}\bigl(P_\rho(x)\bigr)^{\overset{*}{h}_\rho + \overset{*}{h}_{r+\rho}} \exp\Bigl(-2\,\bigl(\widetilde{h}_\rho - \widetilde{h}_{r+\rho}\bigr)\,\varphi_\rho(x)\Bigr)\cdot$$

$$\cdot\,\bigl(P_{2r+1}(x)\bigr)^{\overset{*}{h}_{2r+1}} \exp\Bigl(-2\widetilde{h}_{2r+1}\,\varphi_{2r+1}(x)\Bigr) \prod_{\theta=2r+2}^{s+1}\bigl(\nu^\theta x\bigr)^{2\overset{*}{h}_\theta} \quad \forall x \in X$$

и

$$F_2\colon x \to \prod_{\rho=1}^{r}\bigl(P_\rho(x)\bigr)^{\widetilde{h}_\rho + \widetilde{h}_{r+\rho}} \exp\Bigl(2\,\bigl(\overset{*}{h}_\rho - \overset{*}{h}_{r+\rho}\bigr)\,\varphi_\rho(x)\Bigr)\cdot$$

$$\cdot\,\bigl(P_{2r+1}(x)\bigr)^{\widetilde{h}_{2r+1}} \exp\Bigl(2\overset{*}{h}_{2r+1}\,\varphi_{2r+1}(x)\Bigr) \prod_{\theta=2r+2}^{s+1}\bigl(\nu^\theta x\bigr)^{2\widetilde{h}_\theta} \quad \forall x \in X, \quad X \subset \mathrm{D}F_1 \cap \mathrm{D}F_2\,,$$

где функции $P_\rho\colon x \to \bigl(\overset{*}{\nu}{}^{\rho} x\bigr)^2 + \bigl(\widetilde{\nu}{}^{\rho} x\bigr)^2\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi_\rho\colon x \to \operatorname{arctg}\dfrac{\widetilde{\nu}{}^{\rho} x}{\overset{*}{\nu}{}^{\rho} x}\ \ \forall x \in X,$ *комплексные числа* $h_\tau = \overset{*}{h}_\tau + \widetilde{h}_\tau\, i,\ \tau = 1,\ldots,s+1,$ *составляют нетривиальное решение линейной системы* $\sum\limits_{\tau=1}^{s+1}\lambda_{jk,\tau}\,h_\tau = 0,\ k = 1,\ldots,s_j,\ j = 1,\ldots,m,$ *а* $\lambda_{jk,\tau}$ *— собственные числа матриц* B_{jk}, *соответствующие общим собственным векторам* $\nu^\tau,\ \tau = 1,\ldots,s+1.$

Пример 3.7. Дифференциальная система четвертого порядка [26], описывающая малые колебания гирогоризонткомпаса в рамках прецессионной теории гироскопов,

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega_0\,x_2 + \Omega(t)\,x_4, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\,\omega_0\,x_1 + \Omega(t)\,x_3,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = -\,\Omega(t)\,x_2 - \omega_0\,x_4, \qquad \frac{dx_4}{dt} = -\,\Omega(t)\,x_1 + \omega_0\,x_3, \tag{3.9}$$

где непрерывная на открытом числовом промежутке $\mathcal{T}$ функция $\Omega\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ есть проекция абсолютной угловой скорости чувствительного элемента гирокомпаса на направление геоцентрической вертикали места, а постоянная $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ (g — ускорение силы тяжести, R — радиус Земли), является системой Лаппо-Данилевского [27, с. 37 – 38].

По теореме 3.6, на основании линейно независимых общих собственных векторов

$$\nu^1 = (1, i, -1, i),\ \ \nu^2 = (i, -1, i, 1),\ \ \nu^3 = (1, -i, -1, -i),\ \ \nu^4 = (-i, -1, -i, 1)$$

и соответствующих им собственных чисел

$$\lambda_{11,1} = \lambda_{11,2} = -\,\omega_0\, i, \quad \lambda_{11,3} = \lambda_{11,4} = \omega_0\, i \quad \text{и} \quad \lambda_{12,1} = -\,i, \ \ \lambda_{12,2} = \lambda_{12,3} = i, \ \ \lambda_{12,4} = -\,i,$$

перестановочных матриц

$$B_{11} = \left\| \begin{matrix} 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & 0 & -\omega_0 & 0 \end{matrix} \right\| \qquad \text{и} \qquad B_{12} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

строим автономные первые интегралы системы Лаппо-Данилевского (3.9)

$$F_1\colon x \to (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^4, \quad F_2\colon x \to (-x_2 + x_4)^2 + (x_1 + x_3)^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

По теореме 3.2, с учетом того, что функции $\alpha_{11}\colon t \to 1 \ \ \forall t \in \mathcal{T},\ \alpha_{12}\colon t \to \Omega(t) \ \ \forall t \in \mathcal{T}$, а числа $\overset{*}{\lambda}_{11,1} = \overset{*}{\lambda}_{12,1} = 0,\ \widetilde{\lambda}_{11,1} = -\omega_0,\ \widetilde{\lambda}_{12,1} = -1,\ \overset{*}{\lambda}_{11,2} = \overset{*}{\lambda}_{12,2} = 0,\ \widetilde{\lambda}_{11,2} = -\omega_0,\ \widetilde{\lambda}_{12,2} = 1$, на основании собственных векторов ν^1 и ν^2 строим первые интегралы системы (3.9)

$$F_3\colon (t,x) \to \ \operatorname{arctg} \frac{x_2 + x_4}{x_1 - x_3} + \int\limits_{t_0}^{t} \bigl(\omega_0 + \Omega(\tau)\bigr)\, d\tau \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times X_1, \quad X_1 \subset \{x\colon x_1 - x_3 \neq 0\},$$

и

$$F_4\colon (t,x) \to \ \operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_3}{-x_2 + x_4} + \int\limits_{t_0}^{t} \bigl(\omega_0 - \Omega(\tau)\bigr)\, d\tau \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times X_2, \quad X_2 \subset \{x\colon x_2 - x_4 \neq 0\}.$$

Первые интегралы $F_1, \ldots, F_4$, будучи функционально независимыми, образуют интегральный базис обыкновенной линейной однородной дифференциальной системы Лаппо-Данилевского (3.9) на любой области $\mathcal{T} \times X$, где $X \subset \{x\colon x_1 - x_3 \neq 0,\ x_2 - x_4 \neq 0\}$.

Теорема 3.7. *Пусть выполняются условия*:

1) $\nu^{0\rho},\ \rho = 1, \ldots, r,$ — *общие линейно независимые собственные векторы матриц* B_{jk}, *соответствующие собственным числам* $\lambda_{jk,\rho},\ k = 1, \ldots, s_j,\ j = 1, \ldots, m$;

2) $\nu^{l\rho},\ l = 1, \ldots, \varkappa_\rho - 1,$ — *присоединенные векторы матрицы* $B_{\xi\zeta},\ \xi \in \{1, \ldots, m\}$, $\zeta \in \{1, \ldots, s_\xi\}$, *соответствующие собственным числам* $\lambda_{\xi\zeta,\rho}$ *с элементарными делителями кратности* $\varkappa_\rho,\ \rho = 1, \ldots, r$, *при условии* $\sum\limits_{\rho=1}^{r} \varkappa_\rho \geq s + 1$;

3) *дифференциальная система* $\dfrac{dx}{dt_\xi} = A_{\xi\zeta}\, x$ *не имеет первых интегралов вида*

$$F_{jk,l\rho}\colon x \to \ \mathfrak{a}_{jk}\, \Psi_{l\rho}(x) \ \ \forall x \in X, \quad l = 1, \ldots, \varkappa_\rho - 1, \quad \rho = 1, \ldots, r,$$

$$k = 1, \ldots, s_j, \quad j = 1, \ldots, m \ \ (k \neq \zeta \ \ \textit{при} \ \ j = \xi).$$

Тогда автономным первым интегралом системы (0.2) *будет функция*

$$F\colon x \to \ \prod_{\tau=1}^{\delta} \bigl(\nu^{0\tau} x\bigr)^{h_{0\tau}} \exp \sum_{q=1}^{\varepsilon_\tau} h_{q\tau}\, \Psi_{q\tau}(x) \quad \forall x \in X, \quad X \subset \mathrm{D}F,$$

где скалярные функции $\Psi_{q\tau}\colon X \to \mathbb{C}$ *находятся из функциональной системы*

$$\nu^{q\tau}x = \sum_{\theta=1}^{q} \binom{q-1}{\theta-1} \Psi_{\theta\tau}(x)\, \nu^{q-\theta,\tau}x \quad \forall x \in X, \quad q = 1,\ldots,\varepsilon_\tau, \quad \tau = 1,\ldots,\delta, \tag{3.10}$$

и выполняются условия $\sum\limits_{\tau=1}^{\delta} \varepsilon_\tau = s - \delta + 1,\ \varepsilon_\tau \le \varkappa_\tau - 1,\ \tau = 1,\ldots,\delta,\ \delta \le r.$ *При этом*

$$\mathfrak{a}_{jk}\,\Psi_{q\tau}(x) = \mu_{jk,q\tau} = \mathrm{const}, \quad k = 1,\ldots,s_j,\ j = 1,\ldots,m, \quad q = 1,\ldots,\varepsilon_\tau, \quad \tau = 1,\ldots,\delta,$$

а числа $h_{q\tau},\ q = 0,\ldots,\varepsilon_\tau,\ \tau = 1,\ldots,\delta,$ *составляют нетривиальное решение системы*

$$\sum_{\tau=1}^{\delta}\Bigl(\lambda_{jk,\tau}\, h_{0\tau} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\tau} \mu_{jk,q\tau}\, h_{q\tau}\Bigr) = 0, \quad k = 1,\ldots,s_j, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Пример 3.8. Рассмотрим систему Лаппо-Данилевского четвертого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_{11}(t)A_{11}\,x + \alpha_{12}(t)A_{12}\,x, \quad x \in \mathbb{R}^4, \tag{3.11}$$

где линейно независимые скалярные функции $\alpha_{11}\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ и $\alpha_{12}\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ непрерывны на открытом числовом промежутке $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, а перестановочные матрицы

$$A_{11} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad A_{12} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица B_{11}, транспонированная к матрице A_{11}, имеет собственное число $\lambda_{11,1} = 1$, которому соответствует элементарный делитель кратности четыре $(\lambda_{11}-1)^4$, вещественный собственный вектор $\nu^{01} = (-1,1,-1,0)$ и три вещественных присоединенных вектора $\nu^{11} = (1,0,-1,-1),\ \nu^{21} = (1,-1,3,0),\ \nu^{31} = (-3,0,9,9)$. При этом собственный вектор ν^{01} матрицы B_{11} выбран таким образом, что он также является и собственным вектором для матрицы B_{12}, транспонированной к матрице A_{12}.

Из функциональной системы (3.10) находим скалярные функции

$$\Psi_{11}\colon x \to \frac{x_1 - x_3 - x_4}{-x_1 + x_2 - x_3} \quad \forall x \in X,$$

$$\Psi_{21}\colon x \to \frac{(-x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_2 + 3x_3) - (x_1 - x_3 - x_4)^2}{(-x_1 + x_2 - x_3)^2} \quad \forall x \in X,$$

$$\Psi_{31}\colon x \to \frac{1}{(-x_1 + x_2 - x_3)^3}\bigl((-3x_1 + 9x_3 + 9x_4)(-x_1 + x_2 - x_3)^2 -$$

$$- 3(-x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + 3x_3) + 2(x_1 - x_3 - x_4)^3\bigr) \quad \forall x \in X,$$

где X — любая область из множества $\{x\colon x_1 - x_2 + x_3 \ne 0\}$ пространства $\mathbb{R}^4$.

Обыкновенная дифференциальная система Лаппо-Данилевского (3.11) индуцирует автономные линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{a}_{11}(x) = x_2\,\partial_{x_1} + (2x_2 - x_3 - x_4)\,\partial_{x_2} + (x_1 - x_4)\,\partial_{x_3} + (-x_1 + 2x_3 + 2x_4)\,\partial_{x_4} \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^4$$

и

$$\mathfrak{a}_{12}(x) = (2x_1 - x_3)\,\partial_{x_1} + (-x_1 + 2x_2 + x_4)\,\partial_{x_2} + (-x_1 + 3x_3 + x_4)\,\partial_{x_3} + (x_2 - 3x_3 + x_4)\,\partial_{x_4} \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^4.$$

С учетом того, что действия дифференциальных операторов

$$\mathfrak{a}_{11}\nu^{01}x = \nu^{01}x \ \ \forall x \in \mathbb{R}^4, \quad \mathfrak{a}_{12}\nu^{01}x = 2\,\nu^{01}x \ \ \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

$$\mathfrak{a}_{11}\Psi_{11}(x) = 1 \ \ \forall x \in X, \quad \mathfrak{a}_{11}\Psi_{21}(x) = 0 \ \ \forall x \in X, \quad \mathfrak{a}_{11}\Psi_{31}(x) = 0 \ \ \forall x \in X,$$

$$\mathfrak{a}_{12}\Psi_{11}(x) = -1 \ \ \forall x \in X, \quad \mathfrak{a}_{12}\Psi_{21}(x) = 0 \ \ \forall x \in X, \quad \mathfrak{a}_{12}\Psi_{31}(x) = 6 \ \ \forall x \in X,$$

для определения чисел $h_{11},\ h_{21},\ h_{31}$ и $h_{12},\ h_{22},\ h_{32}$ составляем системы

$$h_{11} + h_{21} = 0, \ \ 2h_{11} - h_{21} = 0 \quad \text{и} \quad h_{12} + h_{22} = 0, \ \ 2h_{12} - h_{22} + 6h_{32} = 0.$$

Отсюда получаем, например, $h_{11} = h_{21} = 0,\ h_{31} = 1$, а $h_{12} = 2,\ h_{22} = -2,\ h_{32} = -1.$

Тогда, по теореме 3.7, скалярные функции

$$F_1 \colon x \to \Psi_{21}(x) \ \ \forall x \in X \ \ \text{и} \ \ F_2 \colon x \to (-x_1 + x_2 - x_3)^2 \exp\bigl(-2\,\Psi_{11}(x) - \Psi_{31}(x)\bigr) \ \ \forall x \in X$$

будут автономными первыми интегралами системы Лаппо-Данилевского (3.11).

Список литературы

1. *Darboux G.* Mémoire sur les équations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degré // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 1878. – Vol. 2. – P. 60 – 96, 123 – 144, 151 – 200.

2. *Горбузов В.Н.* Интегралы систем уравнений в полных дифференциалах. – Гродно: ГрГУ, 2005. – 273 с.

3. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 447 с.

4. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. – Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1995. – 432 с.

5. *Goriely A.* Integrability and nonintegrability of dynamical systems. – World Scientific: Advanced series on nonlinear dynamics, 2001. – Vol. 19. – 436 p.

6. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник. – 1992. – Т. 183, № 3. – С. 76 – 94.

7. *Горбузов В.Н.* Построение первых интегралов и последних множителей полиномиальных автономных многомерных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 562 – 564.

8. *Горбузов В.Н.* Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2000. – № 2. – С. 1 – 36.

9. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Построение интегралов линейной дифференциальной системы // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ун-та. Сер. 2. – 2003. – № 2(22). – С. 50 – 60.

10. *Gorbuzov V.N., Pranevich A.F.* First integrals of ordinary linear differential systems // Mathematics.Dynamical Systems (1201.4141v1 [math.DS], Cornell Univ., Ithaca, New York). – 2012. – P. 1 – 75.

11. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Интегралы R-линейных систем в полных дифференциалах // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 49 – 52.

12. *Gorbuzov V.N., Pranevich A.F.* First integrals of linear differential systems // Mathematics.Dynamical Systems (0806.4155v1[math.CA], Cornell Univ., Ithaca, New York). – 2008. – P. 1 – 37.

13. *Проневич А.Ф.* R-дифференцируемые интегралы систем в полных дифференциалах. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 104 с.

14. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2001. – № 3. – С. 17 – 45.

15. *Проневич А.Ф.* Интегралы якобиевых систем уравнений в частных производных. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 97 с.

16. *Гайшун И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.

17. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1957. – 456 с.

18. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – Т. II. – 564 с.

19. *Gorbuzov V.N.* Integral equivalence of multidimensional differential systems // Mathematics.Dynamical Systems (0909.3220v1 [math.DS]. Cornell Univ., Ithaca, New York). – 2009. – P. 1 – 45.

20. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

21. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 392 с.

22. *Еругин Н.П.* Замечание об интегрировании системы двух уравнений в конечном виде // Прикладная математика и механика. – 1950. – Т. 3. – С. 315.

23. *Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б.* Курс дифференциальных уравнений. – Мiнск: Унiверсiтэцкае, 1996. – 287 с.

24. *Еругин Н.П.* Приводимые системы // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1946. – Т. 13. – 96 с.

25. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.

26. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 672 с.

27. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 408 с.